Effetto di Marea su un Sistema a Due Corpi*

Ing. Guido Antonelli

19 aprile 2012

1 Introduzione

1.1 Obiettivi dello Studio

Questo studio si propone di analizzare il comportamento di un sistema di due corpi celesti, ruotanti l'uno intorno all'altro e ciascuno intorno al proprio asse, che evolve dinamicamente a causa dei reciproci effetti di marea. Se le rotazioni hanno tutte la stessa direzione e le azioni di marea tendono a sincronizzare il sistema, allora la configurazione finale a cui si perviene dovrebbe essere quella in cui le tre velocità di rotazione coincidono in valore, direzione e verso, ed i due corpi si muovono rispetto ad un sistema di assi inerziali come se costituissero un unico sistema rigido.
Il problema viene inizialmente trattato in termini generali indicando con Terra e Luna due corpi celesti qualsiasi supposti ruotanti l'uno intorno all'altro, successivamente si analizza e si risolve in dettaglio il caso specifico dell'interazione gravitazionale tra la Terra ed il nostro satellite, tenendo conto degli effettivi dati fisici e geometrici di tale sistema.

1.2 Ipotesi semplificative

1. I due corpi sono perfettamente sferici ed omogenei e le orbite da loro descritte sono circonferenze il cui centro geometrico coincide con il centro di massa[1] del sistema.
2. Le velocità angolari di rotazione sono rappresentate da vettori tra loro paralleli perpendicolari al piano sul quale avviene il moto di rivoluzione dei corpi.
3. Il sistema non risente dell'azione di altri corpi celesti e quindi si conserva la quantità di moto ed il momento della quantità di moto del sistema. Assumendo come origine del sistema di riferimento il centro di massa O dei due corpi, la quantità di moto totale risulterà implicitamente sempre nulla.
4. Pur non potendosi considerare il sistema isolato dal punto di vista del bilancio di energia in quanto l'effetto di marea riscalda i corpi e questi irradiano energia nello spazio, si suppone che la radiazione venga emessa da ciascun corpo in modo sfericamente simmetrico, e quindi tale da non modificare la quantità di moto ed il momento della quantità di moto del sistema.
5. Vengono trascurate le forze di inerzia che si generano nel corso dell'evoluzione del sistema. In altre parole il sistema evolve nel tempo attraverso una sequenza di stati stazionari di equilibrio tra forze gravitazionali e reazioni centrifughe, mantenendo istante per istante la forma circolare per entrambe le orbite.

*Questo articolo è stato scritto con LaTeX [1].
[1] Molto spesso nei libri di fisica baricentro e centro di massa sono sinonimi. Preferisco utilizzare quest'ultimo termine perché il termine baricentro contiene implicitamente il riferimento ad un campo gravitazionale uniforme dove le masse hanno peso ($\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ = pesante) proporzionale alle masse stesse.

2 Simbologia

I simboli adottati nella successiva trattazione sono così definiti:

Terra:

T = centro di massa della Terra
m_t = massa della Terra (kg)
I_t = momento di inerzia della Terra intorno ad un asse diametrale ($kg \cdot m^2$)
ω_t = velocità angolare della Terra intorno al proprio asse (rad/s)
r_t = raggio dell'orbita della Terra intorno a O, cioè distanza OT (m)

Luna:

L = centro di massa della Luna
m_l = massa della Luna (kg)
I_l = momento di inerzia della Luna intorno ad un asse diametrale ($kg \cdot m^2$)
ω_l = velocità angolare della Luna intorno al proprio asse (rad/s)
r_l = raggio dell'orbita della Luna intorno a O, cioè distanza OL (m)

Sistema Terra-Luna:

O = centro di massa del sistema Terra-Luna
ω_r = velocità angolare orbitale della Terra e della Luna intorno a O (rad/s)
ω = velocità angolare di perfetto sincronismo (rad/s)

Universo:

G = costante di gravitazione universale pari a $6.6726 \cdot 10^{-11}\, m^3/(kg \cdot s^2)$

Tutte le rotazioni sono assunte positive se appaiono antiorarie per un osservatore posto al di sopra del piano su cui avviene il moto, negative in caso opposto.
Nel calcolo si utilizzano i seguenti parametri:

M = massa totale del sistema (kg):

$$M = m_t + m_l \tag{1}$$

m_r = massa ridotta del sistema (kg):

$$m_r = \frac{m_t\, m_l}{m_t + m_l} \tag{2}$$

r = distanza dei due corpi (m):

$$r = r_t + r_l \tag{3}$$

I = momento d'inerzia totale dei due corpi ($kg \cdot m^2$):

$$I = I_t + I_l \tag{4}$$

Si pone inoltre per comodità :

$$\Sigma = G\,M \tag{5}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni, che seguono dalla definizione del centro di massa dei due corpi e dal principio di conservazione della quantità di moto:

$$r_t = \frac{m_l}{M}\,r \qquad\qquad r_l = \frac{m_t}{M}\,r \tag{6}$$

3 Equazioni dell'equilibrio gravitazionale

Nell'ipotesi che le orbite siano circolari, per ciascuno dei due corpi possiamo scrivere la relazione di equilibrio tra forza gravitazionale e corrispondente reazione centrifuga dovuta al moto di rotazione intorno a O:

$$G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} = m_t\,\omega_r^2\,r_t$$

$$G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} = m_l\,\omega_r^2\,r_l$$

Dividendo la prima equazione per m_t e la seconda per m_l e sommando membro a membro e tenendo presente la (1), la (3) e la (5) si ottiene:

$$\frac{\Sigma}{r^2} = \omega_r^2\,r$$

La relazione che lega la distanza Terra-Luna alla velocità di rotazione del sistema intorno a O è quindi:

$$r = \left(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

Come già detto in precedenza, poiché l'evoluzione del sistema è estremamente lenta, risulta lecito trascurare le relative forze di inerzia. Pertanto nel tempo r ed ω_r varieranno, ma la (7) dovrà essere sempre verificata istante per istante.

4 Momento della quantità di moto

Il momento totale della quantità di moto del sistema è la somma scalare di due diversi contributi[2], il primo corrispondente al moto orbitale dei due corpi ed il secondo alla rotazione di ciascun corpo intorno al proprio asse.

4.1 Momento della quantità di moto dovuto al moto orbitale

Per il momento della quantità di moto, rispetto al punto O, dovuto al moto orbitale si ha:

$$Q' = m_t \, \omega_r \, r_t^2 + m_l \, \omega_r \, r_l^2 \tag{8}$$

Sostituendo le (6) e la (1) nella (8) si ha:

$$Q' = \omega_r \left(m_t \frac{m_l^2}{M^2} r^2 + m_l \frac{m_t^2}{M^2} r^2 \right) = \omega_r \, r^2 \, \frac{m_t \, m_l \, (m_l + m_t)}{M^2} = \omega_r \, r^2 \, \frac{m_t \, m_l}{M}$$

Utilizzando la (2) che definisce la massa ridotta m_r, si ottiene:

$$Q' = m_r \, \omega_r \, r^2 \tag{9}$$

ed infine eliminando r mediante la (7):

$$Q' = m_r \, \omega_r \left(\frac{\Sigma}{\omega_r^2} \right)^{\frac{2}{3}} = m_r \left(\frac{\Sigma^2}{\omega_r} \right)^{\frac{1}{3}}$$

4.2 Momento della quantità di moto dovuto alla rotazione propria

Il momento della quantità di moto dovuto alla rotazione di ciascuno dei due corpi intorno al proprio asse vale:

$$Q'' = I_t \, \omega_t + I_l \, \omega_l \tag{10}$$

4.3 Momento totale della quantità di moto del sistema

Il momento totale della quantità di moto del sistema si ottiene sommando tra loro i contributi precedentemente calcolati:

$$Q = Q' + Q'' = m_r \left(\frac{\Sigma^2}{\omega_r} \right)^{\frac{1}{3}} + I_t \, \omega_t + I_l \, \omega_l \tag{11}$$

Nel caso che le rotazioni non siano tutte tra loro concordi, il momento totale della quantità di moto del sistema potrebbe risultare relativamente molto piccolo e al limite nullo, qualora vi siano eventuali termini di segno contrario che si compensano tra loro.

[2] Benché le rotazioni siano grandezze vettoriali, esse saranno trattate sempre come grandezze scalari con segno, poiché si è fatta l'ipotesi semplificativa che abbiano e mantengano tutte la stessa direzione perpendicolare al piano orbitale.

5 Energia del sistema

L'energia totale del sistema è la somma di tre diversi contributi: il primo è costituito dall'energia cinetica associata al moto orbitale dei due corpi, il secondo dall'energia cinetica dovuta alle rotazioni proprie ed il terzo infine dall'energia potenziale del campo gravitazionale.

5.1 Energia del sistema dovuta al moto orbitale

Per l'energia cinetica dovuta al moto orbitale calcolata rispetto ad assi inerziali con origine nel punto O, si ha:

$$E' = \frac{1}{2}\, m_t\, \omega_r^2 r_t^2 + \frac{1}{2}\, m_l\, \omega_r^2 r_l^2 \tag{12}$$

Ricordando la (8) e la (9) si può scrivere:

$$E' = \frac{1}{2}\, \omega_r Q' = \frac{1}{2}\, m_r \omega_r^2 r^2 \tag{13}$$

E infine eliminando r^2 mediante la (7) si ottiene:

$$E' = \frac{1}{2}\, m_r (\Sigma\, \omega_r)^{\frac{2}{3}} \tag{14}$$

5.2 Energia del sistema dovuta alla rotazione propria

L'energia cinetica dovuta alla rotazione dei due corpi intorno al proprio asse di rotazione è data da:

$$E'' = \frac{1}{2}\, I_t\, \omega_t^2 + \frac{1}{2}\, I_l\, \omega_l^2 \tag{15}$$

5.3 Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale, supposta nulla quando i due corpi sono posti a distanza infinita, è data da:

$$E_p = -G\, \frac{m_t\, m_l}{r} = -G\, \frac{m_r M}{r} = -\frac{m_r \Sigma}{r} \tag{16}$$

Eliminando r mediante la (7) si ottiene:

$$E_p = -m_r (\Sigma\, \omega_r)^{\frac{2}{3}} = -2E' \tag{17}$$

5.4 Energia totale del sistema

L'energia totale del sistema si ottiene sommando i contributi precedentemente calcolati:

$$E \;=\; E' + E'' + E_p \;=\; -\frac{1}{2}\, m_r (\Sigma\, \omega_r)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\, I_t\, \omega_t^2 + \frac{1}{2}\, I_l\, \omega_l^2 \tag{18}$$

Questa energia, che ha il valore E_0 noto all'istante iniziale, va decrescendo nel tempo in quanto l'effetto di marea scalda i corpi e questi perdono energia per irradiamento verso lo spazio esterno.

6 Modello fisico-matematico

Sulla base di quanto detto nei paragrafi precedenti è possibile ricondurre il problema in istudio alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali in tre funzioni incognite, rappresentate dalle tre velocità angolari $\omega_r(t)$, $\omega_t(t)$ e $\omega_l(t)$, assumendo noti tutti i dati fisici dei due corpi, nonché i valori di tali funzioni all'istante iniziale. Una volta calcolate queste tre funzioni, le relazioni scritte in precedenza permettono di calcolare tutte le altre grandezze ad esse correlate.
Una prima equazione del sistema è data semplicemente da:

$$Q \;=\; Q_0 \;=\; \text{costante}$$

dove Q_0 è il valore iniziale del momento della quantità di moto totale, momento che rimarrà costante in base a quanto detto ai punti 3. e 4. del paragrafo 1.2.
Sostituendo l'espressione di Q si ottiene:

$$Q_0 \;=\; m_r \Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r}\Big)^{\frac{1}{3}} + I_t\,\omega_t + I_l\,\omega_l \tag{19}$$

Le altre due equazioni mancanti dovranno esprimere la perdita di energia del sistema per effetto mareale. Indicando genericamente con $E_t(t)$ e con $E_l(t)$ le energie attribuibili separatamente ad ognuno dei due corpi la cui variazione è causata dall'effetto di marea, possiamo scrivere le seguenti equazioni[3]:

$$\dot{E}_t \;=\; -\frac{m_l}{r^n}\,K_t\,\cdot|\,\omega_t-\omega_r\,| \;=\; -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma}\Big)^{\frac{n}{3}}\,m_l\,K_t\,\cdot|\,\omega_t-\omega_r\,| \tag{20}$$

$$\dot{E}_l \;=\; -\frac{m_t}{r^n}\,K_l\,\cdot|\,\omega_l-\omega_r\,| \;=\; -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma}\Big)^{\frac{n}{3}}\,m_t\,K_l\,\cdot|\,\omega_l-\omega_r\,| \tag{21}$$

La proporzionalità diretta alla massa dell'altro corpo ed inversa ad una generica potenza n-esima della distanza ($n > 0$), è giustificata dal fatto che l'effetto di marea su ciascun corpo è conseguenza del campo gravitazionale generato dall'altro e certamente diminuisce al crescere della distanza.
Nell'ipotesi più comunemente adottata che sia $n = 3$, i termini $-m_l/r^3$ e $-m_t/r^3$ risulterebbero proporzionali alla derivata del campo gravitazionale rispetto alla distanza r.
I fattori positivi K_t e K_l tengono conto del raggio del corpo che subisce l'effetto di marea e delle caratteristiche meccaniche del materiale di cui è costituito (roccia, acqua, nucleo metallico solido o fuso).
Infine le differenze in valore assoluto tra le velocità angolari tengono conto del volume di materia che subisce nell'unità di tempo l'azione di deformazione ciclica dovuta alla marea.
Poiché il materiale che costituisce i due corpi non è perfettamente elastico, tale azione determina una trasformazione in calore per attrito interno dell'energia cinetico-potenziale, che ha come conseguenza la presenza del segno negativo nell'espressione a secondo membro.
A questo punto si possono prospettare due ipotesi:

1. Le energie E_t ed E_l sono esattamente le energie totali di ciascun corpo, somma delle loro energie corrispondenti al moto di rotazione propria e a quello di rivoluzione intorno a O, a cui si aggiunge il contributo di ciascun corpo secondo la propria massa al termine che esprime l'energia potenziale gravitazionale del sistema.

2. Le energie E_t ed E_l sono energie che combinano con opportuni pesi le varie componenti dell'energia totale di entrambi i corpi. In altre parole l'azione di marea che un corpo esercita sull'altro agisce sia pure in forma minore anche sul corpo stesso che ne è la causa.

[3]Per le derivate rispetto al tempo si adotta la simbologia di Newton: $\frac{d\,y}{d\,t} = \dot{y}$, $\frac{d^2\,y}{d\,t^2} = \ddot{y}$.

In base a questa scelta il termine a primo membro dovrà essere sostituito dalle appropriate espressioni delle derivate rispetto al tempo di E_t ed E_l.
Si osserva infine che in ogni caso il vincolo che dovrà essere sempre e in ogni caso verificato riguarda la somma membro a membro delle due equazioni, dove a primo termine vi sarà in ogni caso la variazione dell'energia totale dell'intero sistema:

$$\dot{E} \,=\, -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma}\Big)^{\frac{n}{3}} \Big(m_l\, K_t \,\cdot |\, \omega_t - \omega_r \,| \,+\, m_t\, K_l \,\cdot |\, \omega_l - \omega_r \,|\Big) \tag{22}$$

In quest'ultimo caso non sussistono dubbi riguardo all'espressione, ricavabile dalla (18), con cui sostituire la derivata a primo membro, ma risulta necessario disporre di una terza equazione, che specifichi in che modo la perdita di energia si ripartisca tra i due corpi, o, in alternativa, che introduca un ulteriore vincolo a cui devono soddisfare le tre velocità angolari.

6.1 Stati finali del sistema

Benché il sistema delle equazioni viste nei paragrafi precedenti, una volta chiariti i punti lasciati in sospeso, possa essere risolto solo in forma numerica, è tuttavia interessante ed utile esaminare, mediante gli strumenti dell'analisi matematica, le situazioni finali verso le quali il sistema fisico andrà evolvendosi e le condizioni che le rendono possibili, senza affrontare direttamente il problema della risoluzione delle equazioni.
Infatti, tenuto conto che in base all'equazione (19) il momento totale della quantità di moto si conserverà invariato nel tempo, mentre l'energia totale del sistema continuerà a diminuire in base all'equazione (22) (o alle analoghe (20) e (21)), fino a quando le tre velocità angolari non coincidano tra loro, si può facilmente comprendere che l'evoluzione del sistema e le configurazioni finali possibili sono solamente le tre seguenti:

1. I due corpi si avvicinano tra loro fino ad urtarsi e a distruggere il sistema originario dando luogo ad un unico corpo celeste.

2. I due corpi raggiungono la condizione di perfetto sincronismo in cui le tre velocità di rotazione risultano perfettamente uguali tra loro. Tale situazione una volta raggiunta verrà mantenuta indefinitamente, in quanto l'effetto dissipativo della marea è nullo in tale configurazione ed il sistema ruoterà come un corpo rigido mantenendo invariata nel tempo la propria energia,.

3. I due corpi, pur perdendo complessivamente energia, si allontanano tra loro indefinitamente. L'aumento di energia potenziale viene compensato dalla perdita di energia cinetica e dell'energia associata alla rotazione propria, mentre l'effetto dissipativo della marea tende ad annullarsi al crescere della distanza r. Tuttavia, come si vedrà più avanti, questa evoluzione del sistema è incompatibile con il modello in oggetto ed in particolare con l'ipotesi semplificativa riportata al punto 5. del paragrafo 1.2.

Esaminiamo ora le condizioni fisico-matematiche che determinano l'evoluzione del sistema verso l'una o l'altra delle configurazioni finali sulla base dei valori delle quantità fisiche Q_0 ed E_0 supposte note all'istante iniziale.

6.1.1 Momento totale della quantità di moto Q_0 del sistema

Supponiamo che il sistema evolva raggiungendo la situazione di perfetto sincronismo (caso 2 del paragrafo precedente). Possiamo in questo caso riscrivere la (19) ponendo $\omega_r \,=\, \omega_t \,=\, \omega_l \,=\, \omega$:

$$Q_0 \,=\, m_r \Big(\frac{\Sigma^2}{\omega}\Big)^{\frac{1}{3}} + I\,\omega \tag{23}$$

L'esistenza di zeri reali di ω nell'equazione scritta è condizione necessaria, ma non sufficiente, perché il sistema possa evolvere verso il perfetto sincronismo, mentre se l'equazione possedesse solamente radici complesse l'evoluzione porterebbe necessariamente all'urto tra i due corpi, avendo escluso la terza possibilità di un loro indefinito allontanamento.
Non sarebbe difficile determinare analiticamente tutte le radici della (23) in quanto essa è facilmente riducibile ad un'equazione di quarto grado, tuttavia si possono fare considerazioni più semplici per verificare l'esistenza di radici reali. In altre parole si tratta di determinare la condizione a cui deve soddisfare Q_0 perché la (23) possegga o meno soluzioni in campo reale.
Riscriviamo a tale scopo la (23) sostituendo a Q_0 il generico simbolo di funzione:

$$Q(\omega) \;=\; m_r \Big(\frac{\Sigma^2}{\omega}\Big)^{\frac{1}{3}} + I\,\omega \tag{24}$$

La funzione algebrica $Q(\omega)$, somma di un termine di esponente $-1/3$ e di un termine lineare, è dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine, occupa solo i quadranti 1 e 3 e possiede due asintoti, rappresentati dall'asse delle ordinate e dalla retta $y = I\,\omega$. La sua forma è simile ad una U diritta nel primo quadrante e capovolta nel terzo quadrante.
L'esistenza di zeri reali nella (23) corrisponde quindi a verificare che la retta $y = Q_0$ intersechi almeno in un punto il diagramma della (24). Senza perdere di generalità supponiamo che Q_0 sia positivo e di conseguenza consideriamo solo valori positivi di ω, ai quali corrisponderanno valori ugualmente positivi della funzione.
Considerazioni elementari di analisi indicano la presenza di un minimo relativo della funzione in corrispondenza al seguente valore $\bar{\omega}_Q$:

$$\bar{\omega}_Q \;=\; \Big(\frac{m_r}{3\,I}\Big)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\Sigma} \tag{25}$$

A questo valore della velocità angolare corrisponde in base alla (7) la distanza $\bar{r}_Q$ tra i baricentri dei due corpi, mentre dalla (24) si ricava il corrispondente valore Q_{min}:

$$\bar{r}_Q \;=\; \sqrt{3\,\frac{I}{m_r}} \tag{26}$$

$$Q_{min} \;=\; 4\,I\,\bar{\omega}_Q \;=\; 4\,\Big(\frac{m_r}{3}\Big)^{\frac{3}{4}} I^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Sigma} \tag{27}$$

Si osservi che Q_{min} dipende unicamente dalle caratteristiche fisico-geometriche globali dei due corpi, cioè dalla massa ridotta, dal momento totale di inerzia e, tramite Σ, dalla massa totale e dalla costante di gravitazione universale. Inoltre in tale particolare situazione il momento della quantità di moto compete per 3/4 al moto orbitale dei corpi e per 1/4 alla loro rotazione propria.
Poiché il minimo trovato è unico nel campo dei valori positivi di ω, la condizione di perfetto sincronismo sarà possibile solo se $Q_0 \;\geq\; Q_{min}$.
Di conseguenza per $Q_0 = Q_{min}$ si avrà un'unica radice doppia reale, mentre per valori di Q_0 maggiori di Q_{min} si hanno sempre due radici reali distinte, situate una a sinistra ed una a destra di $\bar{\omega}_Q$, cioè:

$$\omega_1 \;<\; \bar{\omega}_Q \;<\; \omega_2$$

Per quanto riguarda la distanza r tra i baricentri dei due corpi, essa può essere facilmente calcolata per ciascun valore di ω mediante la (7).
In base al solo valore di Q_0 si possono quindi trarre le seguenti conclusioni:

1. $Q_0 \;>\; Q_{min}$: esistono due possibili configurazioni di perfetto sincronismo, una delle quali, come si vedrà in seguito, è stabile in quanto corrisponde ad un minimo dell'energia totale, mentre l'altra è instabile perché tale condizione non è verificata.

2. $Q_0 = Q_{min}$: esiste una sola configurazione possibile di perfetto sincronismo la cui stabilità od instabilità non è immediatamente determinabile.

3. $Q_0 < Q_{min}$: nessuna configurazione di perfetto sincronismo risulta possibile ed il sistema evolverà verso un urto tra i due corpi.

6.1.2 Energia totale iniziale E_0 del sistema

L'energia totale iniziale E_0 del sistema ci permette di introdurre ulteriori limitazioni alle condizioni $Q_0 = Q_{min}$ o $Q_0 > Q_{min}$ che garantivano l'esistenza di una o due configurazioni di perfetto sincronismo.
Consideriamo anche in questo caso l'espressione assunta dall'energia totale in tali particolari situazioni, riscrivendo la (18) dopo aver posto $\omega_r = \omega_t = \omega_l = \omega$:

$$E(\omega) \; = \; -\frac{1}{2}\, m_r\, (\Sigma\, \omega)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 \tag{28}$$

Questa funzione è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, e possiede un punto angoloso nell'origine dove esistono due derivate (derivata sinistra = $+\infty$, derivata destra = $-\infty$). Anche in questo caso, senza perdere di generalità possiamo limitarci a considerare per ω solo valori positivi.
Considerazioni elementari di analisi indicano la presenza di un minimo relativo della funzione in corrispondenza al seguente valore $\bar{\omega}_E$:

$$\bar{\omega}_E \; = \; \left(\frac{m_r}{3\, I}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\Sigma} \tag{29}$$

Si osservi il fatto alquanto singolare che questo valore di ω è esattamente lo stesso trovato in corrispondenza al minimo del momento della quantità di moto.
Il valore di E_{min} è dato dalla relazione:

$$E_{min} \; = \; -\frac{3}{2}\, I\, \bar{\omega}_E^2 \; + \; \frac{1}{2}\, I\, \bar{\omega}_E^2 \; = \; -I\, \bar{\omega}_E^2 \; = \; -\left(\frac{m_r}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Sigma}{\sqrt{I}} \tag{30}$$

Analogamente a quanto visto per il momento della quantità di moto si può notare che l'energia associata al potenziale gravitazionale sommata a quella cinetica traslazionale è in modulo pari a 3 volte l'energia cinetica dovuta alla rotazione propria dei due corpi. Questa osservazione è tuttavia meno significativa di quella analoga riguardante il momento della quantità di moto, dato che l'energia potenziale è definita sempre a meno di una costante arbitraria.
Infine è interessante osservare che, analogamente a quanto detto per Q_{min}, anche E_{min} dipende unicamente dalle caratteristiche fisico-geometriche globali dei due corpi.
In base a quanto detto al paragrafo precedente e supposto che sia $Q_0 > Q_{min}$, le soluzioni reali dell'equazione algebrica (23) rappresentano i due valori ω_1 ed ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$), in corrispondenza ai quali si avrebbe perfetta risonanza.
A tali valori corrispondono in base alla (28) le energie E_1 ed E_2 per le quali si suppone per semplicità che sia $E_2 > E_1$ [4].
In base al valore di E_0 si può concludere che:

1. $E_0 \geq E_2$: sono possibili entrambe le configurazioni di perfetto sincronismo.

2. $E_2 > E_0 \geq E_1$: solo una configurazione di perfetto sincronismo è possibile e corrisponde alla velocità di rotazione ω_1.

[4]Questa disuglianza è certamente vera per valori di Q_0 maggiori di un determinato valore, mentre resta incerta per valori inferiori a tale limite.

3. $E_0 < E_1$: nessuna configurazione di perfetto sincronismo risulta possibile: il sistema evolverà verso l'urto tra i due corpi.

Nel caso particolare che fosse $Q_0 = Q_{min}$ l'equazione (23) fornirebbe la radice doppia $\omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega}_Q$ e di conseguenza $E_1 = E_2 = E_{min}$, per cui l'esistenza di una configurazione di perfetto sincronismo sarebbe vincolata alla condizione $E_0 \geq E_{min}$.
Come nota finale a questo paragrafo si deve comunque osservare che, a differenza della quantità di moto che si mantiene costante, l'energia totale nel caso generale va necessariamente diminuendo, e quindi le conclusioni sopra riportate che fanno riferimento all'energia iniziale E_0 rappresentano condizioni necessarie, ma non sufficienti, per garantire il raggiungimento della condizione di perfetto sincronismo. Nel paragrafo successivo il problema verrà affrontato in termini più generali.

6.2 Energia totale del sistema: studio della funzione

L'energia totale del sistema definita dalla (18) sembrerebbe dipendere dalle tre velocità angolari che ivi compaiono. In realtà le variabili indipendenti sono solamente due in quanto possiamo utilizzare l'equazione (19) per esplicitare la variabile ω_t :

$$\omega_t \;=\; \frac{1}{I_t}\Big(Q_0 - m_r\Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r}\Big)^{\frac{1}{3}} - I_l\,\omega_l\Big) \tag{31}$$

Possiamo quindi riscrivere l'espressione (18) considerandola funzione delle sole variabili ω_r e ω_l , in quanto abbiamo idealmente effettuato la sostituzione di ω_t mediante la (31):

$$E(\omega_r, \omega_l) \;=\; -\frac{1}{2}\,m_r(\Sigma\,\omega_r)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\,I_t\,\omega_t^2(\omega_r, \omega_l) + \frac{1}{2}\,I_l\,\omega_l^2 \tag{32}$$

Vogliamo ora analizzare questa funzione ricercando il punto o i punti caratteristici della superficie da essa rappresentata. A questo scopo deriviamo parzialmente la (32) rispetto ad ω_r e ω_l , imponendo l'annullamento di entrambe le espressioni trovate:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_r} \;=\; -\frac{1}{3}\,m_r\Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r}\Big)^{\frac{1}{3}} + I_t\,\omega_t\,\frac{\partial \omega_t}{\partial \omega_r} \;=\; 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_l} \;=\; I_t\,\omega_t\,\frac{\partial \omega_t}{\partial \omega_l} + I_l\,\omega_l \;=\; 0 \tag{34}$$

Sostituendo quindi la variabile ω_t e le sue derivate parziali calcolate utilizzando la (31), con semplici passaggi algebrici le precedenti condizioni diventano:

$$\frac{1}{3}\,m_r\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\,(\omega_t \,-\, \omega_r) \;=\; 0 \tag{35}$$

$$I_l\,(\omega_l \,-\, \omega_t) \;=\; 0 \tag{36}$$

Si vede immediatamente che la prima equazione è soddisfatta se $\omega_t = \omega_r$ e la seconda se $\omega_l = \omega_t$, cioè se le tre velocità angolari sono tutte uguali tra loro e questo vincolo, associato alla (31), determina le uniche soluzioni ammissibili[5]. Tali soluzioni coincidono con le radici reali dell'equazione (23) e sono quindi in numero di 0, 1 o 2 a seconda del valore di Q_0.
Calcolando ora le derivate parziali successive ed eseguendo le opportune semplificazioni si ha:

[5]Si trascura per ovvi motivi la soluzione banale $\omega_r = \infty$ e $\omega_l = \omega_t = Q_0/I$ che corrisponderebbe ad una distanza nulla tra i due corpi.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\,\omega_r^2} = \frac{1}{9}\,m_r\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\left[1 - 4\,\frac{\omega_t}{\omega_r} + \frac{m_r}{I_t}\,\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\right] \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\,\omega_l^2} = \frac{I_l^2}{I_t} + I_l \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\omega_r\,\partial\omega_l^2} = -\frac{1}{3}\,m_r\,\frac{I_l}{I_t}\,\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}} \tag{39}$$

Per vedere se il punto di annullamento delle derivate corrisponde effettivamente ad un minimo relativo devono essere soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\,\omega_r^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial\,\omega_l^2} - \Big(\frac{\partial^2 E}{\partial\omega_r\,\partial\omega_l}\Big)^2 \;>\; 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\,\omega_l^2} \;>\; 0 \tag{41}$$

La prima disequazione[6], se soddisfatta, garantisce l'esistenza di un minimo o di un massimo relativo, mentre la seconda specifica che l'eventuale punto è un minimo.
Poiché quest'ultima diseguaglianza, in base alla (38), risulterà sempre e comunque verificata, si può escludere la presenza di un massimo relativo nel punto trovato; per la condizione di esistenza del minimo si dovranno quindi eseguire le sostituzioni nella (40) e verificare che sia:

$$\frac{1}{9}\,m_r\,\frac{I_l}{I_t}\,\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\left[I\,\Big(1 - 4\,\frac{\omega_t}{\omega_r}\Big) + m_r\,\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\right] \;>\; 0 \tag{42}$$

Avendo escluso il caso $\omega_r = \infty$, dividendo per il fattore comune certamente positivo e ponendo $\omega_r = \omega_t = \omega$, si trova:

$$-3\,I + m_r\Big(\frac{\Sigma}{\omega^2}\Big)^{\frac{2}{3}} \;>\; 0 \tag{43}$$

Dal confronto di questa relazione con la (25) si ottiene immediatamente:

$$\omega \;<\; \Big(\frac{m_r}{3\,I}\Big)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\Sigma} \;=\; \bar{\omega}_Q \tag{44}$$

Resta così giustificata l'affermazione che se $Q_0 > Q_{min}$ tra le due possibili configurazioni di perfetto sincronismo, una sola è stabile in quanto corrisponde ad un punto di minimo dell'energia totale, mentre l'altra è instabile perché è associata ad un punto di sella di tale funzione.
La soluzione stabile corrisponde ad una velocità di rotazione minore di $\bar{\omega}_Q$ e quindi ad un raggio maggiore di $\bar{r}_Q$. Infatti in base alla (7) ed alla (26) possiamo scrivere:

$$r \;>\; \sqrt{3\,\frac{I}{m_r}} \;=\; \bar{r}_Q \tag{45}$$

Si può quindi dire che se la condizione di perfetto sincronismo corrisponde ad una distanza tra i baricentri che soddisfa alla (45), allora in tale punto l'energia ha un minimo e quindi tale situazione rappresenta uno stato di equilibrio stabile.

[6] Il termine a primo membro si indica nei testi matematici con il termine di Hessiano della funzione: se nei punti in cui si annullano le derivate prime, l'Hessiano è positivo la funzione possiede certamente un minimo od un massimo relativo, non lo possiede se invece esso è negativo. Se infine l'Hessiano è nullo ogni conclusione è rimandata all'analisi delle derivate successive.

Se invece $r < \sqrt{3\,I/m_r}$ si ha un punto di sella e di conseguenza uno stato di equilibrio instabile, mentre nulla si può dire nel caso che valga il segno di uguaglianza.
Vogliamo qui riassumere sinteticamente le considerazioni precedenti evidenziando le condizioni che stabiliscono se un sistema di due corpi inizialmente non sincrono possa evolvere nel tempo verso una condizione di perfetto sincronismo:

- Il momento totale della quantità di moto del sistema Q_0, noto inizialmente e supposto invariato nel tempo nell'approssimazione di questo modello, deve essere maggiore di un valore minimo, cioè rispettare la seguente condizione:

  $$Q_0 > 4\left(\frac{m_r}{3}\right)^{\frac{3}{4}} I^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Sigma}$$

  Si trascura in questo caso la possibilità di uguaglianza dei due membri che non garantirebbe la stabilità della condizione di equilibrio.

- In corrispondenza al valore Q_0 l'equazione (23) presenterà due radici reali distinte ω_1 e ω_2 con $\omega_1 < \omega_2$, delle quali solo la minore ω_1 corrisponde ad un minimo dell'energia totale e quindi ad uno stato stabile di perfetto sincronismo.

- L'energia totale iniziale E_0 deve essere necessariamente maggiore dell'energia corrispondente alla velocità di rotazione ω_1 nello stato di perfetto sincronismo, cioè deve essere:

  $$E_0 > -\frac{1}{2}\,m_r\,(\Sigma\,\omega_1)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\,I\,\omega_1^2$$

  Quest'ultima relazione è condizione necessaria ma non sufficiente perché il sistema evolva verso il perfetto sincronismo in quanto l'energia diminuisce nel tempo a causa dell'effetto mareale e potrebbe quindi scendere al di sotto del valore limite espresso dal secondo membro prima di aver raggiunto tale condizione.

  Di conseguenza la situazione finale dipenderà anche dalla forma particolare delle equazioni (20) e (21), riportate all'inizio del capitolo 6, ma non analizzate e discusse in dettaglio.

7 Il sistema Terra-Luna

Nel caso specifico del sistema Terra-Luna le equazioni precedentemente riportate si semplificano notevolmente in quanto, come è noto, la rotazione della Luna su sé stessa avviene in modo sincrono con la rotazione dei due corpi intorno al centro di massa O del sistema (sincronismo spin-orbita), con la conseguenza che la Luna mostra praticamente alla Terra sempre la stessa faccia[7].
Supponendo quindi che verosimilmente tale sincronismo si mantenga nel tempo, possiamo riscrivere le equazioni viste in precedenza assumendo $\omega_l = \omega_r$:

1. Conservazione del momento della quantità di moto ($kg \cdot m^2 \cdot s$):

$$Q_0 = m_r \Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r} \Big)^{\frac{1}{3}} + I_t\, \omega_t + I_l\, \omega_r \tag{46}$$

2. Energia totale del sistema (J):

$$E = -\frac{1}{2}\, m_r (\Sigma\, \omega_r)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\, I_t\, \omega_t^2 + \frac{1}{2}\, I_l\, \omega_r^2 \tag{47}$$

3. Perdita di energia per effetto mareale (W):

$$\dot{E} = -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma} \Big)^{\frac{n}{3}} m_l\, K_t \cdot |\, \omega_t - \omega_r \,| \tag{48}$$

La (48) deriva direttamente dalla (22) dove il termine dissipativo dovuto all'azione mareale della Terra sulla Luna scompare a causa del sincronismo spin-orbita della Luna. Infatti in questa situazione l'azione gravitazionale della Terra determina un'ovalizzazione permanente della Luna con l'asse maggiore in direzione della congiungente dei centri dei due corpi, ma senza che questo comporti la spesa di alcun lavoro, a parte quello speso inizialmente per tale deformazione.
Sostituendo nella (48) l'espressione che si ottiene derivando rispetto al tempo la (47), si ottiene:

$$\Big(-\frac{1}{3}\, m_r \Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r} \Big)^{\frac{1}{3}} + I_l\, \omega_r \Big)\, \dot{\omega}_r + I_t\, \omega_t\, \dot{\omega}_t = -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma} \Big)^{\frac{n}{3}} m_l\, K_t \cdot |\, \omega_t - \omega_r \,| \tag{49}$$

7.1 Risoluzione analitica delle equazioni del sistema Terra-Luna

Il sistema di equazioni nelle due incognite ω_r ed ω_t costituito dalla (46) e la (49) è perfettamente definito una volta note le condizioni iniziali e tutti i parametri fisici e cinematici che compaiono nelle equazioni, e risulta facilmente risolubile con metodi analitici.
A questo scopo si deve per prima cosa osservare che il segno di modulo, presente nella (49), può essere semplicemente eliminato sostituendo $|\, \omega_t - \omega_r \,|$ con $(\omega_t - \omega_r)$.
Infatti tale differenza è attualmente positiva perché la Terra ruota su sé stessa più velocemente di quanto il sistema dei due corpi ruoti intorno al centro di massa O (ovvero di quanto ruoti la Luna intorno al proprio asse), e le due velocità angolari hanno entrambe segno positivo nel sistema di riferimento scelto.
Inoltre non è fisicamente possibile che tale espressione possa cambiare di segno in maniera discontinua, perché le forze in gioco sono finite e agiscono su masse che presentano una forte inerzia nel modificare il proprio stato di moto rotatorio o traslatorio.
Nel caso poi che tale differenza tendesse ad annullarsi nel tempo si annullerebbe contemporaneamente anche la perdita di energia per effetto mareale e quindi il sistema tenderebbe ad uno stato

[7] Nella realtà , a causa dell'eccentricità della sua orbita e di altri effetti minori, la Luna mostra alla Terra all'incirca il 59% della sua superficie.

di equilibrio, in questo caso stabile, rimanendo a questo punto soggetto anche alla legge di conservazione dell'energia.
Derivando la (46) con semplici passaggi si ottiene:

$$I_t\,\dot\omega_t \;=\; \Big(\frac{1}{3}\,m_r\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}} - I_l\Big)\,\dot\omega_r \tag{50}$$

Sostituendo questa espressione nella (49), ed eliminando per quanto detto sopra il segno di modulo, si ha:

$$\Big(-\frac{1}{3}\,m_r\Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r}\Big)^{\frac{1}{3}} + I_l\,\omega_r\Big)\,\dot\omega_r + \omega_t\,\Big(\frac{1}{3}\,m_r\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}} - I_l\Big)\,\dot\omega_r \;=\; -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma}\Big)^{\frac{n}{3}}\,m_l\,K_t\,(\,\omega_t-\omega_r\,) \tag{51}$$

Infine rielaborando in modo elementare il primo membro è facile mettere in evidenza il fattore $(\omega_t - \omega_r)$ che può venire semplificato con lo stesso fattore presente nel secondo membro, ottenendosi così una equazione nella sola incognita ω_r :

$$\dot\omega_r\,\Big(\frac{1}{3}\,m_r\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}} - I_l\Big) \;=\; -\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma}\Big)^{\frac{n}{3}}\,m_l\,K_t \tag{52}$$

La divisione per $(\omega_t - \omega_r)$ è ovviamente possibile fino a quando tale differenza non si annulli, e questo potrebbe succedere proprio e solo nell'istante a cui si vuole far terminare il calcolo, nell'ipotesi, che si rivelerà corretta, che si raggiunga il perfetto sincronismo.
L'equazione (52) è un'equazione differenziale in una sola incognita a cui dovrà essere associata l'equazione ordinaria (46) che fornisce l'espressione di ω_t:

$$\omega_t \;=\; \frac{1}{I_t}\,\Big(Q_0 - m_r\,\Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_r}\Big)^{\frac{1}{3}} - I_l\,\omega_r\Big)$$

Esprimendo la derivata $\dot\omega_r$ come rapporto tra differenziali si vede immediatamente che l'equazione (52) è del tipo a variabili separabili e può quindi riscriversi nel modo seguente:

$$\Big(I_l - \frac{1}{3}\,m_r\,\Big(\frac{\Sigma}{\omega_r^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\Big)\Big/\Big(\Big(\frac{\omega_r^2}{\Sigma}\Big)^{\frac{n}{3}}\,m_l\,K_t\Big)\,d\omega_r \;=\; dt$$

Evidenziando ora le potenze di ω_r l'equazione da integrare appare estremamente semplice:

$$\frac{I_l\,\Sigma^{\frac{n}{3}}}{m_l\,K_t}\,\omega_r^{-\frac{2n}{3}}\,d\omega_r - \frac{m_r\,\Sigma^{\frac{2+n}{3}}}{3\,m_l\,K_t}\,\omega_r^{-\frac{2n+4}{3}}\,d\omega_r \;=\; dt$$

Infine eseguendo il calcolo ed introducendo la costante A di integrazione si ottiene:

$$-\frac{3}{2\,n-3}\,\frac{I_l\,\Sigma^{\frac{n}{3}}}{m_l\,K_t}\,\omega_r^{-\frac{2n-3}{3}} + \frac{1}{2\,n+1}\,\frac{m_r\,\Sigma^{\frac{2+n}{3}}}{m_l\,K_t}\,\omega_r^{-\frac{2n+1}{3}} + A \;=\; t \tag{53}$$

Questa espressione sarà d'ora innanzi utilizzata assumendo $n = 3$, che è il valore più comunemente adottato, in quanto corrisponde all'ipotesi che la perdita di energia di un corpo per effetto mareale sia proporzionale al gradiente del campo gravitazionale causato dall'altro corpo.
In questo caso la (53) può essere così riscritta:

$$t \;=\; A - \frac{I_l\,\Sigma}{m_l\,K_t}\,\omega_r^{-1} + \frac{1}{7}\,\frac{m_r\,\Sigma^{\frac{5}{3}}}{m_l\,K_t}\,\omega_r^{-\frac{7}{3}} \tag{54}$$

La (54) rappresenta in forma esplicita la funzione $t = t(\omega_r)$ che lega il tempo (variabile dipendente), alla velocità angolare orbitale (variabile indipendente). Dal punto di vista fisico sarebbe preferibile disporre della funzione inversa $\omega_r = \omega_r(t)$, ma purtroppo quest'ultima funzione non è rappresentabile analiticamente in quanto richiederebbe la risoluzione per radicali di un'equazione algebrica di settimo grado.
Il valore della costante A si calcola in base alla condizione iniziale, per cui assumendo $t = 0$ per il tempo presente, si avrà $\omega_r(0) = \omega_{r,o} = 2.6617 \cdot 10^{-6}$ rad/s, che è l'attuale velocità di rotazione e rivoluzione della Luna. Si ha quindi per A la seguente espressione:

$$A = \frac{\Sigma}{m_l\, K_t\, \omega_{r,o}} \left(I_l - \frac{1}{7}\, m_r \left(\frac{\Sigma}{\omega_{r,o}^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \tag{55}$$

Su quanto riportato è possibile fare a questo punto alcune osservazioni:

- Come si è detto l'equazione (52) è stata ottenuta dividendo ambo i membri per $(\omega_t - \omega_r)$ nell'ipotesi che questa espressione si conservi sempre positiva e quindi possa legittimamente sostuire $|\,\omega_t - \omega_r\,|$. Se si fosse voluto tener conto di un eventuale cambiamento di segno della differenza delle velocità angolari, si sarebbe dovuto usare il termine $\sqrt{(\omega_t - \omega_r)^2}$ che avrebbe però reso il sistema praticamente insolubile per via analitica. Tuttavia questo non sarebbe stato necessario perché in ogni caso si sarebbe potuto spezzare l'intervallo di integrazione dell'equazione differenziale in due o più parti a seconda del segno di tale differenza.

  Per il caso in cui si avesse $|\,\omega_t - \omega_r\,| = -(\,\omega_t - \omega_r\,)$ la soluzione (54) sarebbe rimasta ugualmente valida cambiando semplicemente il segno di uno dei due membri.

- La soluzione trovata è applicabile anche per valori di ω_r maggiori del valore attuale, cioè per valori negativi del tempo t purché si supponga che la Luna in passato si trovasse già nella situazione di sincronismo spin-orbita.

- Dalle (54) e (55) si vede che il tempo t è inversamente proporzionale a K_t, che è stato supposto costante; quest'ultimo parametro, la cui determinazione potrebbe apparire a prima vista estremamente ardua, è in realtà facilmente valutabile se si conosce la potenza totale dissipata attualmente dal sistema, in pratica dalla sola Terra, per effetto mareale. Sebbene non misurabile direttamente, quest'ultima grandezza, in base al modello matematico precedentemente visto, risulta strettamente correlata con la variazione della durata del giorno siderale (terrestre) la cui misura sperimentale è facilmente reperibile in letteratura anche se con un non trascurabile margine di incertezza.

- La formula (22) usata per valutare la perdita di energia, potrebbe essere sostituita da una somma di termini simili, ciascuno con un differente valore di n come accade normalmente in uno sviluppo in serie di potenze. Anche in questo caso sarebbe possibile ottenere una soluzione analitica del modello in quanto la risoluzione dell'equazione differenziale si ridurrebbe all'integrazione di una funzione razionale.

7.2 Stato finale del sistema Terra-Luna

In quanto segue abbiamo riportato i risultati di calcoli ottenuti applicando la teoria e le formule precedentemente esposte.
E' importante chiarire che i risultati rimangono *sempre e comunque puramente indicativi*, anche se utilizzano dati astronomici e scientifici molto precisi, a causa delle ipotesi semplificative che sono alla base del modello, tra le quali, a mio avviso, è particolarmente condizionante la presenza di un terzo corpo celeste, cioè del Sole, causa di effetti mareali già attualmente tutt'altro che trascurabili, ma che diventerebbero addirittura preponderanti con il procedere dell'evoluzione del sistema Terra-Luna.
E' comunque interessante osservare che le conclusioni a cui perviene questo modello estremamente semplice non si distaccano molto da quelle riportate in letteratura, ottenute certamente con modelli e calcoli molto più raffinati.

I dati fisici e orbitali attuali del sistema Terra-Luna sono i seguenti:

Terra:

m_t = massa: $5.9742 \cdot 10^{24}\ kg$
I_t = momento di inerzia[8]: $8.0285 \cdot 10^{37}\ kg \cdot m^2$
$\omega_{t,o}$ = velocità angolare intorno al proprio asse: $+7.29212 \cdot 10^{-5}\ rad/s$
$T_{t,o}$ = periodo di rotazione intorno al proprio asse: $8.6164 \cdot 10^4 s$
$r_{t,o}$ = raggio dell'orbita intorno a O: $4.675053 \cdot 10^6\ m$

Luna:

m_l = massa: $7.3483 \cdot 10^{22}\ kg$
I_l = momento di inerzia: $8.6821 \cdot 10^{34}\ kg \cdot m^2)$
$\omega_{l,o}$ = velocità angolare intorno al proprio asse: $+2.6617 \cdot 10^{-6}\ rad/s$
$T_{l,o}$ = periodo di rotazione intorno al proprio asse: $2.360592 \cdot 10^6 s$
$r_{l,o}$ = raggio dell'orbita intorno a O: $3.800839 \cdot 10^8\ m$

Sistema Terra-Luna:

M = massa totale: $6.04768 \cdot 10^{24}\ kg$
m_r = massa ridotta: $7.25901 \cdot 10^{22}\ kg$
I = momento di inerzia totale: $8.03719 \cdot 10^{37}\ kg \cdot m^2$
$\omega_{r,o}$ = velocità angolare orbitale della Terra e della Luna intorno a $O = +2.6617 \cdot 10^{-6}\ rad/s$
$T_{r,o}$ = periodo di rivoluzione di Luna e Terra intorno a O: $2.360592 \cdot 10^6 s$
r_o = distanza tra i centri della Terra e della Luna: $3.847590 \cdot 10^8\ m$
$\Sigma\ =\ kM\ =\ 4.03538 \cdot 10^{14}\ m^3/s^2$

Universo:

G = costante di gravitazione universale pari a $6.6726 \cdot 10^{-11}\, m^3/(kg \cdot s^2)$

Utilizzando questi dati nelle formule (46) e (47) dei paragrafi precedenti, otteniamo gli attuali valori del momento totale della quantità di moto e dell'energia totale:

$$Q_0\ =\ m_r\Big(\frac{\Sigma^2}{\omega_{r,o}}\Big)^{\frac{1}{3}} + I_t\,\omega_{t,o} + I_l\,\omega_{r,o}\ =\ 3.4458 \cdot 10^{34}\ kg \cdot m^2/s$$

[8] Questo valore e l'analogo attribuito poco più avanti alla Luna, sono stati ripresi dalla letteratura e tengono conto della distribuzione non omogenea della densità dei due corpi.

$$E_0 \;=\; -\frac{1}{2}\, m_r (\Sigma\, \omega_{r,o})^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\, I_t\, \omega_{t,o}^2 + \frac{1}{2}\, I_l\, \omega_{r,o}^2 \;=\; 1.7539 \cdot 10^{29}\ J$$

Sulla base dei soli parametri fisici del sistema Terra-Luna, si possono determinare i valori caratteristici corrispondenti al punto di minimo del momento totale della quantità di moto e dell'energia totale del sistema:

$$\bar{r}_Q \;=\; \sqrt{3\,\frac{I}{m_r}} \;=\; 5.7633 \cdot 10^7\ m \;=\; 57\,633\ km$$

$$\bar{\omega}_Q \;\equiv\; \bar{\omega}_E \;=\; \left(\frac{m_r}{3\,I}\right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\Sigma} \;=\; 4,5913 \cdot 10^{-5}\ rad/s$$

$$\bar{T}_Q \;=\; \frac{2\,\pi}{\bar{\omega}_Q} \;=\; 1.3685 \cdot 10^5\ s \;=\; 1.58\ giorni$$

$$Q_{min} \;=\; 4\, I\, \bar{\omega}_Q \;=\; 1.4760 \cdot 10^{34}\ kg \cdot m^2/s$$

$$E_{min} \;=\; -I\, \bar{\omega}_E^2 \;=\; -1.6942 \cdot 10^{29}\ J$$

Allo scopo di stabilire verso quale situazione evolverà il sistema Terra-Luna bisogna risolvere l'equazione (23) sostituendo le grandezze note con i loro valori numerici del caso in oggetto, ottenendo così la seguente equazione:

$$3.44579 \cdot 10^{34} \;=\; 3.9640 \cdot 10^{32} \cdot \omega^{-1/3} + 8.03719 \cdot 10^{37} \cdot \omega$$

Questa equazione algebrica di quarto grado potrebbe essere risolta analiticamente; tuttavia risulta più semplice e conveniente trovarne le soluzioni mediante un qualsiasi metodo numerico.
Poiché $Q_0 > Q_{min}$ l'equazione avrà le due seguenti soluzioni reali:

$$\omega_1 \;=\; 1.5389 \cdot 10^{-6}\ rad/s \qquad\qquad \omega_2 \;=\; 3.5936 \cdot 10^{-4}\ rad/s$$

alle quali corrispondono rispettivamente i seguenti periodi, distanze Terra-Luna ed energie totali:

$$T_1 \;=\; 47.25\ giorni \qquad r_1 \;=\; 554\,388\ km \qquad E_1 \;=\; -\,2.6324 \cdot 10^{28}\ J$$

$$T_2 \;=\; 0.20\ giorni \qquad r_2 \;=\; 16\,620\ km \qquad E_2 \;=\; +\,4.1877 \cdot 10^{30}\ J$$

Poiché E_2 è maggiore di E_0, la seconda soluzione risulta fisicamente impossibile; solamente la prima, per la quale l'energia E_0 è maggiore di E_1 rappresenta una situazione finale ammissibile, che può quindi essere di fatto raggiunta dal sistema.
Dalla conoscenza sperimentale che il giorno siderale si allunga di $14.6 \cdot 10^{-4}\ s$ per secolo, è possibile calibrare il valore del parametro K_t, e calcolare di conseguenza la potenza P dissipata attualmente dal sistema, nel nostro caso dalla sola Terra, per effetto di marea.

Utilizzando una tabella elettronica si sono ottenuti per tentativi i seguenti valori:

$$P \;=\; 2.2086 \cdot 10^{12}\ W \;=\; 2.2086\ TW$$

$$K_t \;=\; 2.4367 \cdot 10^{19}\ m^5/s^2$$

$$A \;=\; -1.2998 \cdot 10^{17}\ s$$

In base a tutte le ipotesi fatte, la potenza dissipata equivarrebbe quindi a quella di 2209 centrali da 1000 MW (termici), risultato che appare peraltro non del tutto inverosimile.

7.2.1 Evoluzione futura del sistema Terra-Luna

Utilizzando le formule riportate in precedenza possiamo costruire la seguente tabella:

Table 1: Evoluzione futura del sistema Terra-Luna

Velocità angolare orbitale ω_r (rad/s)	Velocità rotazione Terra ω_t (rad/s)	Tempo trascorso t $(anni)$	Distanza Terra-Luna r (km)	Energia totale E (J)	Differenza energia $E - E_{min}$ (J)
$2.6617 \cdot 10^{-6}$	$7.2921 \cdot 10^{-5}$	0	384 759	$+1.7539 \cdot 10^{29}$	$2.0172 \cdot 10^{29}$
$2.6000 \cdot 10^{-6}$	$7.0125 \cdot 10^{-5}$	$2.3169 \cdot 10^{8}$	390 822	$+1.5993 \cdot 10^{29}$	$1.8625 \cdot 10^{29}$
$2.4000 \cdot 10^{-6}$	$6.0416 \cdot 10^{-5}$	$1.1251 \cdot 10^{9}$	412 244	$+1.1100 \cdot 10^{29}$	$1.3732 \cdot 10^{29}$
$2.2000 \cdot 10^{-6}$	$4.9564 \cdot 10^{-5}$	$2.3055 \cdot 10^{9}$	436 864	$+6.5087 \cdot 10^{28}$	$9.1411 \cdot 10^{28}$
$2.0000 \cdot 10^{-6}$	$3.7310 \cdot 10^{-5}$	$3.9056 \cdot 10^{9}$	465 523	$+2.4417 \cdot 10^{28}$	$5.0741 \cdot 10^{28}$
$1.8000 \cdot 10^{-6}$	$2.3302 \cdot 10^{-5}$	$6.1420 \cdot 10^{9}$	499 398	$-7.5307 \cdot 10^{27}$	$1.8793 \cdot 10^{28}$
$1.6000 \cdot 10^{-6}$	$7.0500 \cdot 10^{-6}$	$9.3875 \cdot 10^{9}$	540 192	$-2.5118 \cdot 10^{28}$	$1.2058 \cdot 10^{27}$
$1.5389 \cdot 10^{-6}$	$1.5389 \cdot 10^{-6}$	$1.0671 \cdot 10^{10}$	554 388	$-2.6324 \cdot 10^{28}$	0
$1.5000 \cdot 10^{-6}$	$-2.1298 \cdot 10^{-6}$	$1.1583 \cdot 10^{10}$	563 941	$-2.5789 \cdot 10^{28}$	$5.3453 \cdot 10^{26}$

L'ultima riga della tabella, che corrisponde ad una configurazione che si trova al di là del punto di perfetto sincronismo, non è fisicamente e matematicamente corretta in quanto alla riga precedente dove si raggiunge tale sincronismo la differenza $\omega_t - \omega_r$ si annulla e questo determina la fine di ogni effetto mareale sul sistema dei due corpi; inoltre in tale punto la (52) perderebbe validità a causa della divisione per zero.
La riga è stata ugualmente lasciata solo per evidenziare il fatto che in corrispondenza alla velocità angolare ω_1 si ha effettivamente un minimo per l'energia del sistema e di conseguenza una condizione di equilibrio stabile.
La situazione di perfetto sincronismo con velocità angolare ω_1 rappresenterebbe quindi, nelle ipotesi semplificative di questo modello, una condizione di equilibrio stabile che verrebbe raggiunta tra circa dieci miliardi e mezzo di anni.

7.2.2 Evoluzione passata del sistema Terra-Luna

Solo nell'ipotesi che il sincronismo spin-orbita della Luna fosse già stato raggiunto si potrà utilizzare la stessa funzione per ricostruire l'evoluzione passata del sistema Terra-Luna, fermo restando il fatto che l'ipotesi deve considerarsi con tutta probabilità errata, in quanto il sistema Terra-Luna difficilmente avrebbe potuto formarsi con tale sincronismo già in atto. Si può tuttavia ipotizzare che il processo di sincronizzazione spin-orbita della Luna si sia realizzato fin dall'inizio in un intervallo di tempo astronomicamente assai breve dato il forte effetto mareale della Terra sulla sue rocce e che quindi la tabella che segue sia valida almeno in un passato non troppo lontano.

Table 2: Evoluzione passata del sistema Terra-Luna

Velocità angolare orbitale ω_r (rad/s)	Velocità rotazione Terra ω_t (rad/s)	Tempo trascorso t $(anni)$	Distanza Terra-Luna r (km)	Energia totale E (J)	Differenza energia $E_{max} - E$ (J)
$2.6617 \cdot 10^{-6}$	$7.2921 \cdot 10^{-5}$	0	384 759	$+1.7539 \cdot 10^{29}$	$4.0123 \cdot 10^{30}$
$2.7000 \cdot 10^{-6}$	$7.4614 \cdot 10^{-5}$	$-1.3504 \cdot 10^{08}$	381 112	$+1.8505 \cdot 10^{29}$	$4.0027 \cdot 10^{30}$
$1.0000 \cdot 10^{-5}$	$2.0001 \cdot 10^{-4}$	$-3.9311 \cdot 10^{09}$	159 207	$+1.5139 \cdot 10^{30}$	$2.6739 \cdot 10^{30}$
$1.0000 \cdot 10^{-4}$	$3.2271 \cdot 10^{-4}$	$-4.1179 \cdot 10^{09}$	34 300	$+3.7540 \cdot 10^{30}$	$4.3371 \cdot 10^{29}$
$2.0000 \cdot 10^{-4}$	$3.4455 \cdot 10^{-4}$	$-4.1186 \cdot 10^{09}$	21 608	$+4.0894 \cdot 10^{30}$	$9.8329 \cdot 10^{28}$
$3.0000 \cdot 10^{-4}$	$3.5511 \cdot 10^{-4}$	$-4.1187 \cdot 10^{09}$	16 490	$+4.1779 \cdot 10^{30}$	$9.7997 \cdot 10^{27}$
$3.5000 \cdot 10^{-4}$	$3.5875 \cdot 10^{-4}$	$-4.1187 \cdot 10^{09}$	14 879	$+4.1875 \cdot 10^{30}$	$2.1339 \cdot 10^{26}$
$3.5936 \cdot 10^{-4}$	$3.5936 \cdot 10^{-4}$	$-4.1187 \cdot 10^{09}$	14 620	$+4.1877 \cdot 10^{30}$	0
$3.6500 \cdot 10^{-4}$	$3.5971 \cdot 10^{-4}$	$-4.1187 \cdot 10^{09}$	14 469	$+4.1875 \cdot 10^{30}$	$7.4788 \cdot 10^{25}$

Questa Tabella, pur con le riserve sopra esposte, mostra come la condizione di perfetto sincronismo, con velocità angolare ω_2, rappresenti invece una situazione che avrebbe potuto verificarsi solo in passato, e contemporaneamente evidenzi il fatto che a tale velocità corrisponde un massimo per l'energia del sistema e di conseguenza una condizione di equilibrio instabile.
Anche in questo caso abbiamo aggiunto una riga in più, non corretta dal punto di vista fisico e matematico, allo scopo di mostrare come l'energia totale sia inferiore al massimo raggiunto per $\omega_r = \omega_2$.
Se l'evoluzione del sistema Terra-Luna fosse partita da tale condizione di equilibrio instabile, allora l'azione mareale, in alternativa alla tendenza attuale al sincronismo vista in precedenza, avrebbe potuto determinare l'avvicinamento progressivo dei due corpi facendoli precipitare l'uno sull'altro, allo stesso modo che una bicicletta ferma dalla posizione verticale può cadere indifferentemente a destra od a sinistra.
Si osserva inoltre come l'evoluzione a ritroso verso il punto di massimo risulti particolarmente rapida a partire da circa 4 miliardi di anni fa.

8 Limiti del modello

Fin dall'inizio è stato sottolineato il fatto che il modello descritto in questo articolo è necessariamente approssimato e di conseguenza le conclusioni a cui esso perviene potrebbero essere facilmente messe in discussione.
Mi è tuttavia di conforto il fatto che anche nella letteratura sull'argomento si ritrovano conclusioni molto simili sia da un punto di vista qualitativo che quantitativo, conclusioni ottenute peraltro con modelli matematici e calcoli certamente assai più complessi e raffinati di quelli riportati.
D'altra parte il pregio principale di questo modello, oltre al fatto di fondarsi su leggi di conservazione che hanno sempre rappresentato i principi più solidi e meno opinabili della fisica[9], è l'estrema semplicità delle equazioni a cui si perviene dopo opportuni passaggi matematici che ne permettono una facile ed immediata risoluzione in forma analitica.
A differenza delle soluzioni numeriche, le soluzioni analitiche forniscono una migliore comprensione dei fenomeni nonché una diretta conoscenza della relazioni matematiche che legano la soluzione stessa ai parametri ed alle grandezze fisiche da cui il fenomeno si suppone dipendere.
Tuttavia una limitazione particolarmente critica di questo modello è rappresentata dall'ipotesi semplificativa riportata al punto 5 del paragrafo 1.2, con la quale si specificava di non tener conto nel modo usuale delle forze d'inerzia presenti durante lo svolgersi del fenomeno, ipotizzando invece che l'evoluzione del sistema avvenisse attraverso una sequenza di stati stazionari di equilibrio tra le forze gravitazionali e le sole reazioni centrifughe. Questi stati erano altresì caratterizzati dal fatto che le orbite di entrambi i corpi mantenevano sempre una forma rigorosamente circolare.
Questa semplificazione non avrebbe a mio avviso gravi conseguenze sullo studio dell'evoluzione di un sistema del tipo Terra-Luna, che pare destinato a sincronizzarsi perfettamente con orbite una volta e mezzo all'incirca maggiori di quelle attuali, ma potrebbe invece avere conseguenze inaccettabili in situazioni nelle quali le condizioni iniziali di energia e momento totale della quantità di moto e le masse ed i momenti d'inerzia dei due corpi avessero valori molto diversi dal caso in questione.
In altre parole l'ipotesi di orbite sempre circolari rende matematicamente impossibile l'eventualità di un allontanamento indefinito dei due corpi tra loro perché in tal caso il contributo al momento della quantità di moto del sistema fornito dal moto di rivoluzione diventerebbe infinito, mentre al contrario esso deve rimanere costante essendosi supposto il sistema isolato.
Infatti sebbene con l'aumentare della distanza tra i due corpi la velocità angolare orbitale diminuisca in corformità a quanto espresso dalla relazione (7), tuttavia dalla (9) è facile dedurre che il momento della quantità di moto associato al moto orbitale risulta complessivamente crescente con r ed in particolare direttamente proporzionale a $\sqrt{r}$, essendo tale momento dato dalla seguente espressione:

$$Q' = m_r \sqrt{\Sigma\, r}$$

Ora questo momento non potrebbe mai venire compensato, cioè reso finito, dai momenti dovuti ai moti di rotazione propria dei due corpi, perché in questo caso l'energia totale crescerebbe indefinitamente a causa dei contributi dovuti a tali moti, mentre si era visto che l'energia totale non può che ridursi a causa dell'attrito mareale.
Pertanto il modello porta a concludere che il sistema, in tutti quei casi nei quali esso non termina con la propria autodistruzione a causa del progressivo avvicinamento ed urto tra i due corpi, dovrà comunque pervenire ad una situazione di perfetto sincronismo nella quale i due corpi ruoteranno intorno al centro di massa come un unico corpo rigido, restando esclusa la possibilità che si abbia una terza alternativa consistente in un allontanamento sempre crescente tra i due corpi.
Questa conclusione è peraltro immediatamente evidente se si considera il diagramma della funzione $Q(\omega)$ nella situazione di perfetto sincronismo rappresentata dalla (24): se $Q_0 > Q_{min}$ esisteranno sempre due intersezioni reali di tale diagramma con la retta $Q = Q_0$ e quindi due velocità angolari per le quali tale condizione si realizza.

[9]Qualche dubbio relativamente alla validità delle leggi di conservazione sorse in effetti negli anni '30 quando sembrò che il decadimento β non rispettase tali leggi: la questione fu risolta con l'ipotesi dell'esistenza del neutrino, confermata sperimentalmente solo 20 anni dopo!

Nella realtà fisica del fenomeno questo allontanamento indefinito non potrebbe essere escluso a priori, qualora si potesse supporre che i corpi si allontanino descrivendo traiettorie di tipo spiraliforme; infatti in questo caso il momento della quantità di moto dovuto al moto orbitale potrebbe mantenersi finito in quanto a fronte della diminuzione della velocità angolare orbitale il braccio del momento rispetto all'origine O, crescerebbe meno che nel caso ipotizzato di orbita circolare.
Per una verifica di questa possibilità sarebbe però necessario rendere più complesso il modello fisico-matematico del fenomeno con l'introduzione delle forze di inerzia e l'eliminazione del vincolo di orbite circolari.
Si può tuttavia ragionevolmente prevedere che le equazioni così ottenute non sarebbero più risolubili in forma analitica, ma unicamente in forma numerica.

9 Conclusioni

Il modello esposto in questo articolo rende conto della tendenza del sistema Terra-Luna a stabilizzarsi completamente portandosi verso una condizione di perfetto sincronismo in seguito all'azione delle forze mareali.
Tale azione potrebbe ugualmente essere utilizzata per spiegare la formazione di un sistema di pianeti ruotanti intorno ad una stella a partire dalla condensazione di una nube di gas stellare dotato di moto rotatorio. Sotto l'azione delle forze gravitazioni il gas della nube tenderebbe a concentrarsi in più ammassamenti, dotati ciascuno di una determinata massa e velocità di rotazione intorno al proprio asse, il principale e più massiccio dei quali, situato tanto più vicino al centro di massa dell'intera nebulosa quanto più percentualmente grande è la sua massa rispetto al totale, darà origine alla stella mentre quelli di massa minore daranno origine ai pianeti. L'assestamento di questi ultimi a distanze diverse sulle rispettive orbite dipenderebbe quindi, oltre che dalla posizioni originarie in cui si formano gli addensamenti di materia, anche dalle reciproche forze mareali che a loro volta sono funzione dalle masse e dai momenti di inerzia in gioco nonché dalle velocità di rotazione intorno al proprio asse di ciascun ammassamento e dalla sua composizione e forma fisica.
In base a questo modello una parte di questi ammassamenti potrebbe anche non dare origine a pianeti, ma venir riassorbita dall'ammassamento centrale stellare sempre a causa delle reciproche azioni mareali.
Ancor più interessante sarebbe esaminare se queste forze mareali possano aver avuto un'influenza non trascurabile nella formazione delle galassie e dei loro ammassi e possano quindi fornire un contributo per una migliore comprensione della dinamica di tale fenomeno.

Contents

List of Tables

References

[1] Claudio Beccari, LaTeX, *Guida ad un sistema di editoria elettronica*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1991