

Appunti di "Controlli Automatici 1"

Sistemi dinamici lineari del 2° ordine

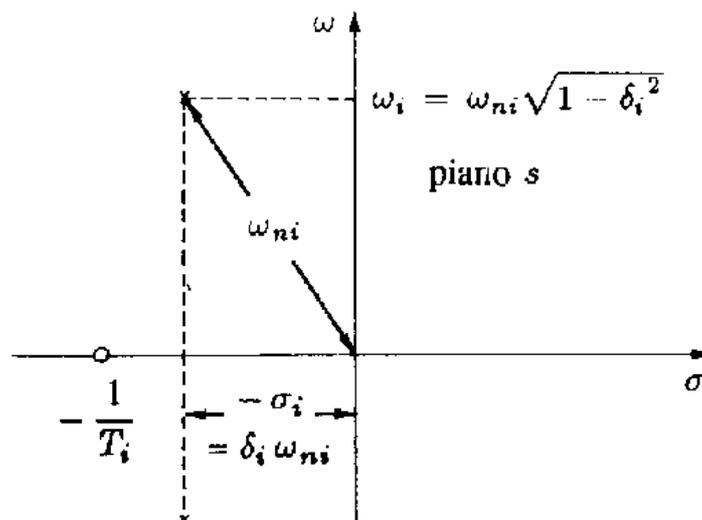
Funzione di trasferimento	1
<i>Esempio</i>	2
<i>Esempio</i>	3
Posizione dei poli della funzione di trasferimento	4
Risposta al gradino unitario	4
<i>Massima sovraelongazione</i>	6
Specifiche di progetto sui sistemi del secondo ordine	9
Specifiche nel dominio del tempo	10
Diagramma di Bode dei moduli	11
Picco di risonanza e pulsazione di risonanza	12
Banda passante	13
Legame tra specifiche nel tempo e specifiche in frequenza	14

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Si definisce **sistema (elementare) del secondo ordine** un sistema che sia caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma seguente:

$$H(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Si tratta cioè di una funzione razionale avente denominatore di 2° grado e numeratore di grado 0. Compaiono in questa frazione 2 importanti parametri: il **coefficiente di smorzamento** δ e la **pulsazione naturale** ω_m . Il valore di questi parametri influenza la posizione dei due poli della funzione di trasferimento, in accordo a quanto illustrato nella figura seguente:



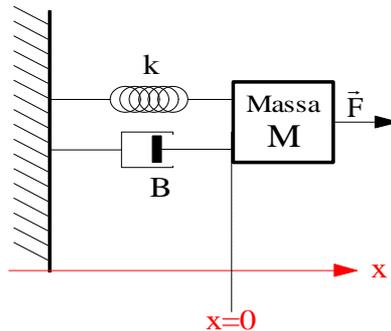
Le espressioni analitiche dei due poli si ottengono evidentemente ponendo $=0$ il denominatore di $H(s)$ e trovando le due soluzioni della corrispondente equazione:

$$p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm j\omega_m \sqrt{1 - \delta^2}$$

Abbiamo cioè, in generale due poli complessi e coniugati.

Esempio

Consideriamo un sistema meccanico costituito da una massa M collegata ad una parete verticale attraverso una molla di costante k ed uno smorzatore con attrito viscoso di costante B :



Alla massa M è applicata una forza \vec{F} che tende ad allontanarla dalla parete.

Vogliamo descrivere la **dinamica** del sistema, ossia vogliamo descrivere la posizione della massa rispetto ad un riferimento arbitrariamente fissato: dobbiamo dunque legare l'uscita (cioè appunto la posizione) all'ingresso (rappresentato dalla forza \vec{F}).

Usando l'equazione di Newton $F=ma$ e applicando semplicemente un bilancio di forze, otteniamo l'equazione differenziale

$$F(t) - kx - B \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

dove, per comodità, abbiamo preso l'origine $x=0$ del riferimento per la posizione in corrispondenza della massa. Riscrivendo allora l'equazione in forma più opportuna, abbiamo che

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Facciamo la solita ipotesi di condizioni iniziali nulle: in questo modo, applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri, otteniamo

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s)$$

da cui ricaviamo che la trasformata dell'uscita forzata del sistema è

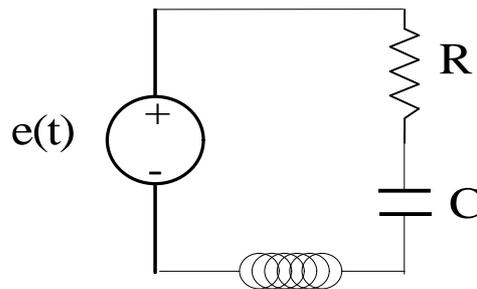
$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + Bs + k} = \frac{\frac{1}{M}F(s)}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{k}{M}}$$

e quindi che la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{k}{M}}$$

Esempio

Consideriamo adesso un semplice circuito RLC serie:



Applicando la LKC e la LKT al circuito, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, otteniamo l'equazione integro-differenziale

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(T) dT$$

Applicando l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo dunque

$$E(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) \longrightarrow I(s) = \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} E(s)$$

Considerando $E(s)$ come ingresso e la tensione $V(s)$ sul condensatore come uscita, otteniamo

$$V(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s} \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} E(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} E(s)$$

dal che deduciamo che la funzione di trasferimento del sistema è

$$H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

POSIZIONE DEI POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Abbiamo visto poco fa che le espressioni analitiche dei due poli della funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine sono

$$p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\delta^2}$$

Da questa relazione si intuisce che la posizione dei due poli è strettamente legata al valore del coefficiente di smorzamento δ . I casi possibili sono i seguenti:

- il primo caso è quello in cui $\delta=0$: si ha in questo caso che $p_{1/2} = \pm j\omega_m$, ossia che i due poli sono puramente complessi ed hanno modulo pari alla pulsazione naturale;
- il secondo caso è quello in cui $0 < \delta < 1$: si ha che genericamente che $p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\delta^2}$, dal che si deduce che i poli sono complessi (coniugati) e che il loro modulo è ω_m , ossia una quantità costante pari al quadrato della pulsazione naturale;
- il terzo caso è quello in cui $\delta=1$: si ha questa volta che $p_{1/2} = -\omega_m$, ossia due poli reali coincidenti negativi di valore assoluto pari alla pulsazione naturale;
- il quarto ed ultimo caso è quello in cui $\delta > 1$: in questo caso, la quantità $1-\delta^2$ è negativa, per cui i due poli possono essere espressi nella forma $p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm \omega_m\sqrt{\delta^2-1}$; si tratta dunque di due poli reali situati simmetricamente rispetto all'origine.

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Cominciamo adesso ad esaminare il comportamento di un sistema del secondo ordine. Supponiamo, in particolare, di porre in ingresso al sistema il gradino unitario $x(t)=H(t)$: la trasformata della risposta (forzata) del sistema a quella sollecitazione assume l'espressione

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \frac{1}{s}$$

Espandendo in fratti semplici questa funzione otteniamo

$$Y(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Possiamo subito calcolare il residuo A:

$$A = [Y(s)]_{s=0} = \left[\frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \right]_{s=0} = 1 \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Per il calcolo dei coefficienti B e C possiamo invece utilizzare il metodo del riporto a primo membro: sostituendo l'espressione di Y(s) al primo membro e portando anche il termine 1/s a primo membro, otteniamo

$$\frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \longrightarrow \frac{-s-2\delta\omega_m}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} = \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \longrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ C = -2\delta\omega_m \end{cases}$$

Possiamo dunque concludere che l'espansione in fratti semplici dell'uscita (forzata) del sistema ha l'espressione

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2\delta\omega_m}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Dobbiamo adesso antitrasformare questa funzione ed i maggiori problemi vengono chiaramente dal secondo termine a secondo membro. Possiamo allora porre $\omega_d = \omega_m \sqrt{1-\delta^2}$, in modo da poter scrivere il denominatore di quella frazione nella forma

$$s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2 = (s + \delta\omega_m)^2 + \omega_d^2$$

Con questa posizione, possiamo effettuare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+2\delta\omega_m}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+\delta\omega_m}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} - \frac{\delta\omega_m}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+\delta\omega_m}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} - \frac{\delta\omega_m}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2\delta\omega_m}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} - \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{\omega_d}{(s+\delta\omega_m)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

Possiamo adesso antitrasformare:

$$y(t) = H(t) - e^{-\delta\omega_m t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega_d t) \right]$$

Possiamo anche fare qualche manipolazione algebrica su questa funzione:

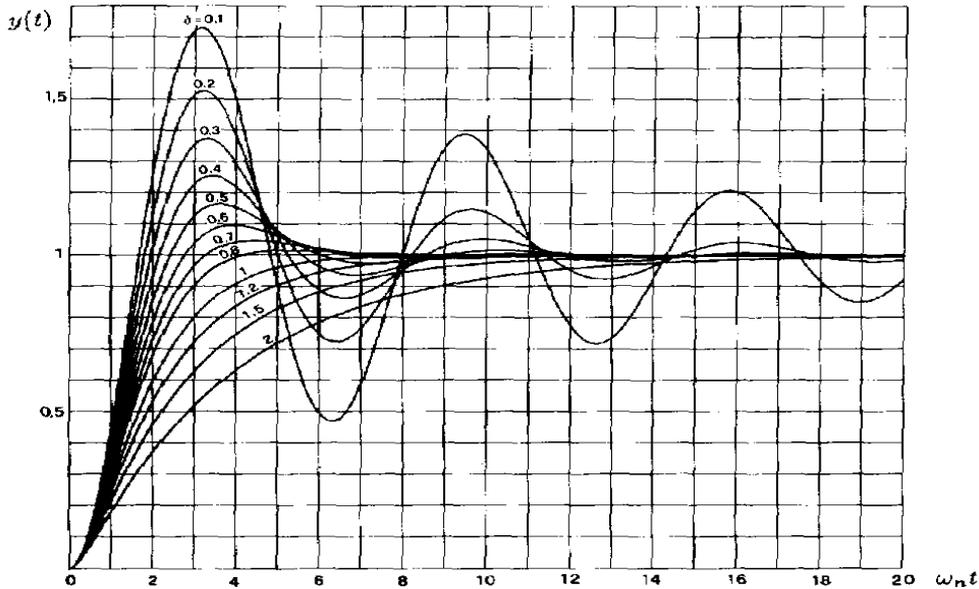
$$\begin{aligned} y(t) &= H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \left[\sqrt{1-\delta^2} \cos(\omega_d t) + \delta \sin(\omega_d t) \right] = H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \left[\sin\varphi \cos(\omega_d t) + \cos\varphi \sin(\omega_d t) \right] = \\ &= H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \sin(\omega_d t + \varphi) \end{aligned}$$

Considerando dunque un angolo φ tale che $\begin{cases} \sqrt{1-\delta^2} = \sin\varphi \\ \delta = \cos\varphi \end{cases}$, abbiamo concluso che l'andamento nel tempo dell'uscita forzata del sistema ha la seguente espressione:

$$y(t) = H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

Si individua anche questa volta una **costante di tempo**, che è chiaramente $\tau = 1/\delta\omega_m$. Questa costante di tempo caratterizza il termine esponenziale $e^{-\delta\omega_m t}$, il quale smorza o amplifica il termine sinusoidale $\sin(\omega_d t + \varphi)$ a seconda che il segno del coefficiente di smorzamento δ sia >0 o <0 : quando $\delta > 0$, il termine sinusoidale si smorza e $y(t)$ tende asintoticamente ad $H(t)$, mentre, quando $H(t) < 0$, l'oscillazione sinusoidale assume ampiezza sempre crescente e quindi $y(t)$ diverge da $H(t)$.

La figura seguente mostra l'andamento di $y(t)$ per vari valori del coefficiente di smorzamento δ e con scala dei tempi normalizzata in rapporto all'inverso della pulsazione naturale ω_m :



Un caso assolutamente particolare è quello in cui $\delta=1$: in questo caso, infatti, risulta

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\omega_m}{(s + \omega_m)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_m} - \frac{\omega_m}{(s + \omega_m)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_m} - \omega_m \frac{1}{(s - (-\omega_m))^2}$$

e quindi, antitrasformando, si ottiene

$$y(t) = H(t) - H(t)e^{-\omega_m t} - \omega_m H(t)te^{-\omega_m t} = H(t) - H(t)(1 - \omega_m t)e^{-\omega_m t}$$

Non si ha dunque alcuna **sovraelongazione** (intesa come differenza positiva tra il valore raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime), visto che non c'è più il termine sinusoidale: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale $H(t)$ senza mai superarlo.

Massima sovraelongazione

Può adesso interessare la relazione esatta tra il coefficiente di smorzamento δ ed il valore della **massima sovraelongazione**, ossia la differenza tra il massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale. Per ricavare questa relazione, troviamo i punti in cui $y(t)$ raggiunge i suoi valori massimi e minimi:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = 0 &\longrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = 0 - \left[-\delta\omega_m \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \sin(\omega_d t + \varphi) + \omega_d \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \cos(\omega_d t + \varphi) \right] = \\ &= \delta\omega_m \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \sin(\omega_d t + \varphi) - \omega_d \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \cos(\omega_d t + \varphi) = 0 \longrightarrow \operatorname{tg}(\omega_d t + \varphi) = \frac{\omega_d}{\delta\omega_m} = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato che i punti di massimo e di minimo sono quelli che soddisfano l'equazione

$$\operatorname{tg}(\omega_d t + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Ricordando adesso che $\begin{cases} \sqrt{1-\delta^2} = \sin\varphi \\ \delta = \cos\varphi \end{cases}$, deduciamo che $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$ e quindi anche che

l'equazione dei punti di massimo è soddisfatta dai valori $t_k = \frac{k\pi}{\omega_d}$, con $k=1,2,\dots$

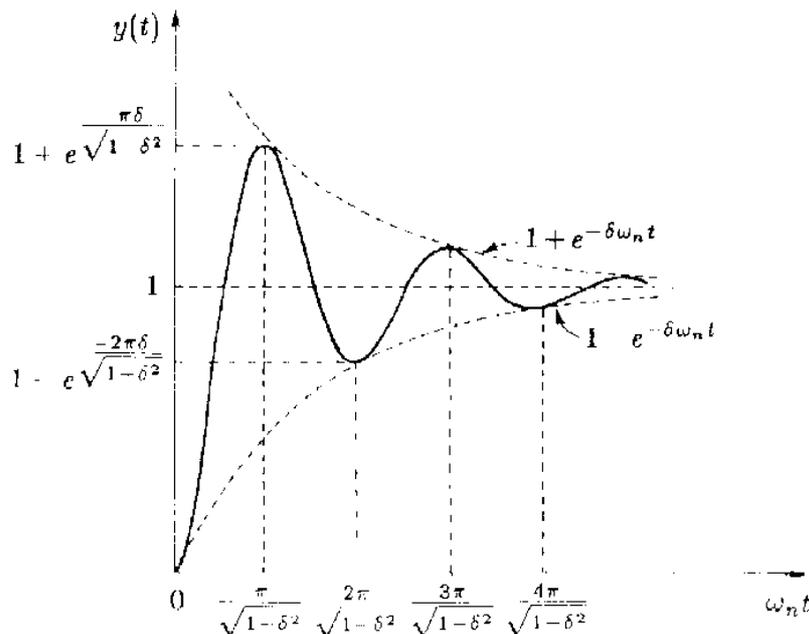
L'istante in cui si ha il 1° punto di massimo prende il nome di **tempo di picco**:

$$k = 1 \longrightarrow t_{\text{MAX},1} = t_P = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Andando adesso a sostituire il generico t_k nell'espressione di $y(t)$, otteniamo i valori massimi e minimi di $y(t)$ stessa al variare di k :

$$y_{\text{MAX},\text{MIN}} = y(t_k) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_m \frac{k\pi}{\omega_d}}}{\sin\varphi} \sin\left(\omega_d \frac{k\pi}{\omega_d} + \varphi\right) = 1 - \frac{e^{-\delta \frac{k\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sin\varphi} \sin(k\pi + \varphi) = 1 \pm e^{-\delta \frac{k\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

La figura seguente mostra graficamente i risultati ottenuti in questi ultimi passaggi:



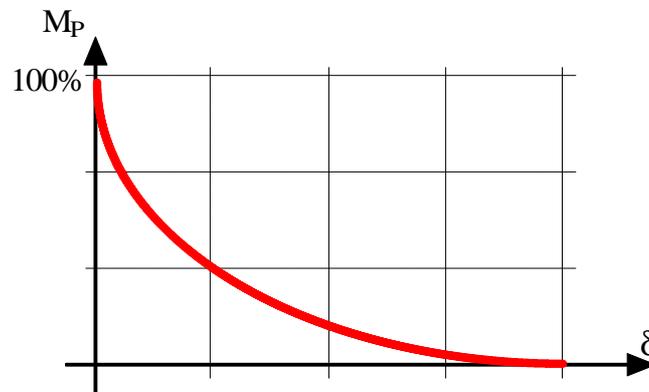
Si definisce, a questo punto, **massima sovralongazione percentuale** la seguente quantità:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100$$

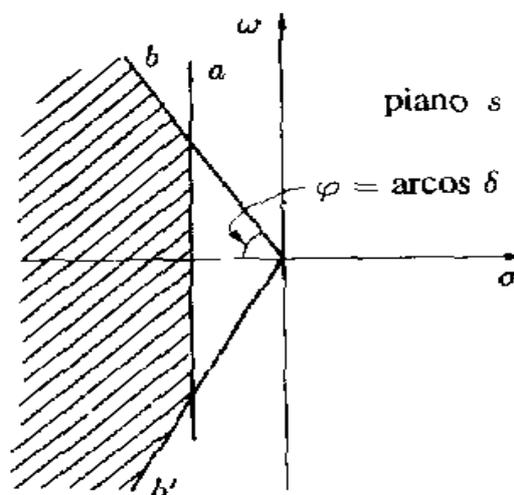
Sostituendo le rispettive espressioni, abbiamo che

$$\begin{cases} y(t_p) = 1 + e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \\ y(\infty) = 1 \end{cases} \longrightarrow M_p = e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100$$

il che significa che *la massima sovralongazione percentuale è funzione univocamente del valore del coefficiente di smorzamento (mentre non dipende da ω_m) ed è uguale al 100% quando $d=0$:*



Talvolta, viene imposta una specifica sul valore della massima sovralongazione, nel senso che, ad esempio, si chiede che M_p non superi un certo massimo assegnato. In questo caso, è necessario che i 2 poli del sistema (cioè della funzione di trasferimento del sistema) si trovino nel settore delimitato dalle rette b e b' della figura seguente:



Le suddette rette b e b' rappresentano luoghi di poli corrispondenti ad un dato valore del coefficiente di smorzamento.

SPECIFICHE DI PROGETTO SUI SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

Uno degli scopi principali da porsi, nel progetto di un sistema controllato in retroazione, è quello di *scegliere una funzione di trasferimento ad anello chiuso che soddisfi le specifiche imposte e di ricavare poi la conseguente funzione di trasferimento del regolatore, nota che sia quella del sistema da controllare*. Allora, nei casi di sistemi controllati di tipo 0 (nessun polo nell'origine) o di tipo 1 (un solo polo dell'origine), come funzione di trasferimento ad anello chiuso si impiega, se possibile, quella del **sistema elementare del secondo ordine**:

$$G_0(s) = \frac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

I sistemi del secondo ordine sono di importanza fondamentale in quanto *molto spesso i sistemi di ordine elevato possono essere comunque modellati, con buona approssimazione, come sistemi del secondo ordine*: questo accade, principalmente, quando il sistema in esame presenta due poli vicini all'asse immaginario e altri poli, in numero qualsiasi, sufficientemente lontani dall'asse immaginario, in quanto è ovvio che i poli più vicini (cioè di modulo minore o, ciò che è lo stesso, situati a frequenze minori) risultano dominanti sugli altri (si suppongono, ovviamente, solo poli stabili)

Premesso questo, vogliamo adesso passare in rassegna le principali specifiche su sistemi del secondo ordine. A tal fine, ricordiamo subito che la quantità K_0 nell'espressione di $G_0(s)$ rappresenta il **guadagno statico del sistema ad anello chiuso**; avendo scelto una retroazione unitaria, è facile verificare che questo guadagno sia minore o uguale ad 1:

- nel caso in cui si voglia ottenere un regolatore di tipo 0 con guadagno statico k , si trova che $K_0 = \frac{k}{1+k}$, per cui K_0 risulta minore di 1;
- se, invece, si voglia ottenere un regolatore di tipo 1 oppure se il sistema controllato presenta un polo semplice nell'origine, allora si ottiene $K_0=1$.

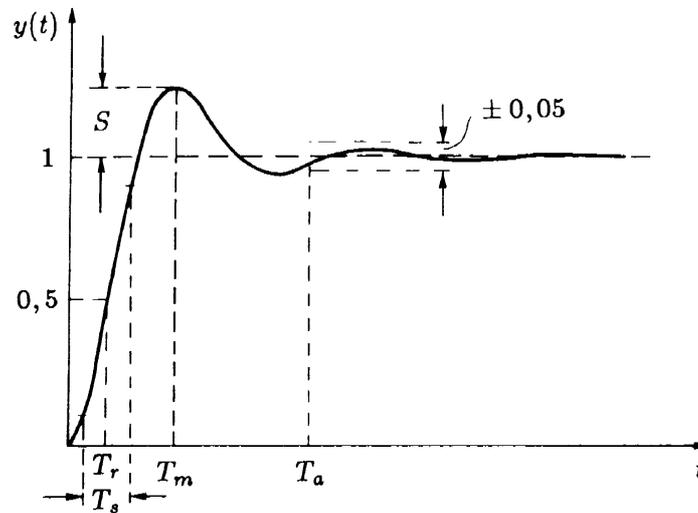
I parametri K_0 , δ e ω_n che compaiono nell'espressione di $G_0(s)$ devono essere determinati in base ai dati di specifica:

- il guadagno statico K_0 dipende dai dati riguardanti gli *errori statici*;
- il coefficiente di smorzamento δ è legato essenzialmente alla *massima sovraelongazione* nella risposta al gradino (specifica nel dominio del tempo) oppure al *picco di risonanza* (specifica nel dominio della frequenza);
- la pulsazione naturale ω_n (ed eventualmente la costante di tempo τ se il sistema è del terzo ordine) è legato alle specifiche sul comportamento dinamico a regime, come l'*errore di velocità* oppure la *banda passante*.

Nei precedenti paragrafi abbiamo già introdotto alcuni parametri caratteristici, come la massima sovraelongazione oppure il tempo di picco. Questi parametri rientrano nella categoria delle **specifiche nel dominio del tempo**, in quanto fanno riferimento all'andamento temporale dell'uscita del sistema. Ad essi si aggiungono poi le **specifiche nel dominio della frequenza**. Il nostro scopo è allora quello di descrivere questi parametri (con particolare attenzione a quelli nel dominio della frequenza) e di verificare se e come sono correlati tra di loro.

SPECIFICHE NEL DOMINIO DEL TEMPO

Concentriamoci, in questo paragrafo, sulle principali specifiche nel dominio del tempo per un sistema del 2° ordine, avente due poli complessi coniugati, riferite alla risposta del sistema ad un gradino unitario in ingresso. Tali specifiche sono riassunte nella figura seguente:



- **massima sovravelongazione S** (o anche *massimo sorpasso*): differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime: normalmente si dà in percentuale del valore finale, per cui si parla di massima sovravelongazione percentuale;
- **tempo di ritardo T_r** : tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale;
- **tempo di salita T_s** (in inglese *t-rise*): tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale;
- **tempo di assestamento T_a** : tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale;
- **istante di massima sovravelongazione T_m** : istante al quale si presenta la massima sovravelongazione.

Tutti questi parametri dipendono dalla posizione dei poli del sistema nel piano complesso, ossia quindi dai valori del coefficiente di smorzamento δ e della pulsazione di risonanza ω_n , il cui significato geometrico è illustrato nella figura seguente:

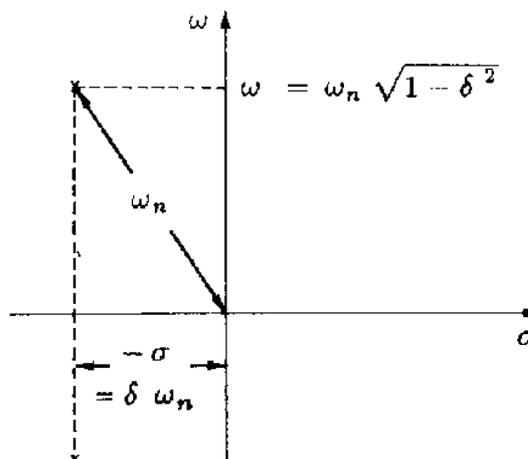
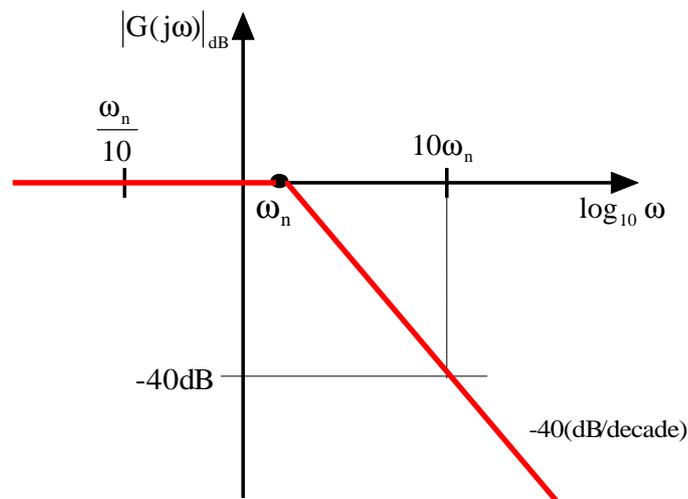


DIAGRAMMA DI BODE DEI MODULI

Per esporre le principali specifiche nel dominio della frequenza, dobbiamo evidentemente far riferimento alla funzione di risposta armonica di tale sistema, ottenuta dalla funzione di trasferimento $G(s)$ ponendo $s=j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega} = - \frac{\omega_n^2}{\omega^2 - j2\delta\omega_n\omega - \omega_n^2}$$

Ci interessa considerare il diagramma di Bode del modulo di $G(j\omega)$ e, in particolare, ci interessa l'**andamento asintotico** di $|G(j\omega)|_{dB}$, che è fatto nel modo seguente:



Sappiamo che questo *diagramma asintotico* approssima più o meno bene quello reale a seconda del valore del coefficiente di smorzamento δ : per esempio, mentre nel diagramma asintotico appena tracciato si è supposto $|G(j\omega_n)|_{dB} = 0$, in realtà risulta

$$|G(j\omega_n)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{2\delta}$$

Abbiamo cioè che, in $\omega=\omega_n$, la quantità $|G(j\omega)|_{dB}$ non è nulla, ma assume un valore tanto maggiore quanto più piccolo è il coefficiente di smorzamento δ . Questo è già un primo risultato indicativo del fatto che il diagramma reale può discostarsi anche apprezzabilmente dal diagramma asintotico.

Si trova inoltre che la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ presenta un massimo nel punto

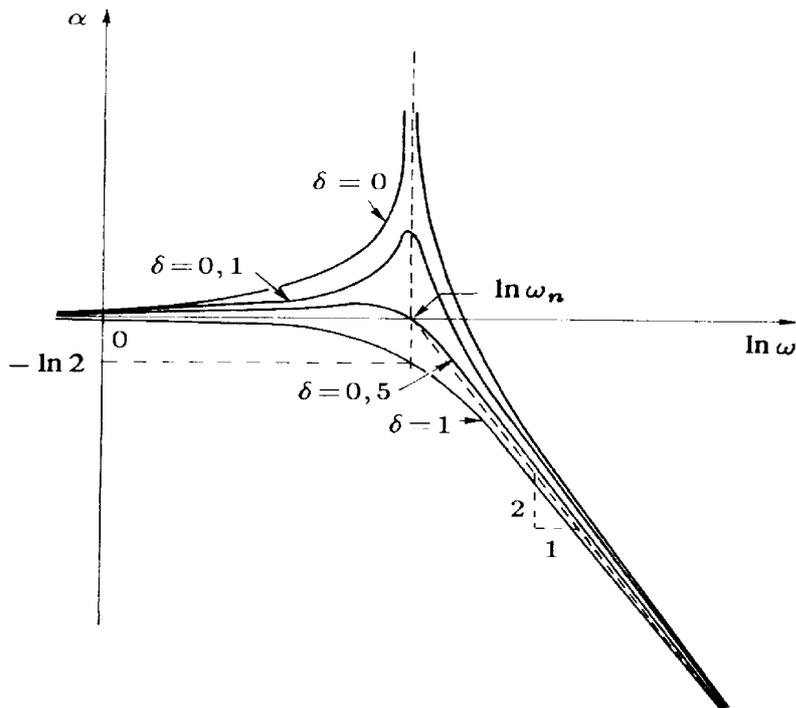
$$\omega_{max} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

Evidentemente, al diminuire di δ , tale punto di massimo si approssima al valore ω_n , confermando una volta di più la differenza tra il diagramma reale e quello asintotico. Naturalmente, perché il valore ω_{max} abbia un senso, l'argomento della radice a denominatore deve essere positivo, dal che si deduce che questo massimo esiste solo se $\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Possiamo allora affermare quanto segue: se

$\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ presenta un andamento reale diverso (anche

notevolmente) da quello asintotico, per cui il diagramma asintotico va necessariamente corretto, usando i valori indicati in apposite tabelle; se, invece, risulta $\delta > \frac{\sqrt{2}}{2}$, allora la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ non presenta un massimo e il diagramma asintotico diventa accettabile (in quanto $|G(j\omega)|_{dB}$ risulta comunque avere un andamento monotonicamente decrescente).

Fatte queste considerazioni, riportiamo nella figura seguente l'andamento reale di $|G(j\omega)|_{dB}$ per diversi valori del coefficiente di smorzamento δ :



PICCO DI RISONANZA E PULSAZIONE DI RISONANZA

Sulla base del diagramma appena tracciato, vogliamo calcolare due parametri importanti: il **picco di risonanza**, ossia il massimo valore assunto dalla funzione $|G(j\omega)|_{dB}$, e la **pulsazione di risonanza**, ossia la pulsazione in cui tale valore massimo viene assunto.

Considerando la funzione di risposta armonica nella forma

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega}$$

calcoliamo l'espressione del suo modulo:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}} \xrightarrow{\text{sul diagramma}} |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

E' chiaro che il massimo della funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ si ottiene in corrispondenza del massimo della funzione $|G(j\omega)|$ e quindi anche in corrispondenza del minimo della funzione a denominatore, ossia della funzione

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

Per comodità, poniamo $u = \frac{\omega}{\omega_n}$, per cui la funzione (che indichiamo ad esempio con g) di cui calcolare il minimo ha la seguente espressione:

$$g(u) = \sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}$$

Calcoliamo la derivata prima di questa funzione e imponiamo che si annulli:

$$\frac{dg(u)}{du} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}} [-2(1-u^2)u + 8\delta^2 u] \xrightarrow{\frac{dg(u)}{du}=0} -2(1-u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

Risolvendo dunque l'equazione $-2(1-u^2)u + 8\delta^2 u = 0$ e scartando la soluzione nulla (che indica un comportamento stazionario del diagramma logaritmico all'infinito), si ottiene $u_R = \sqrt{1-2\delta^2}$, da cui quindi ricaviamo che la **pulsazione di risonanza** vale

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2}$$

Andando a sostituire questo valore di ω nell'espressione di $|G(j\omega)|$ si ottiene il valore dell'ampiezza alla risonanza, ossia appunto il **picco di risonanza**:

$$M_R = |G(j\omega_R)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$$

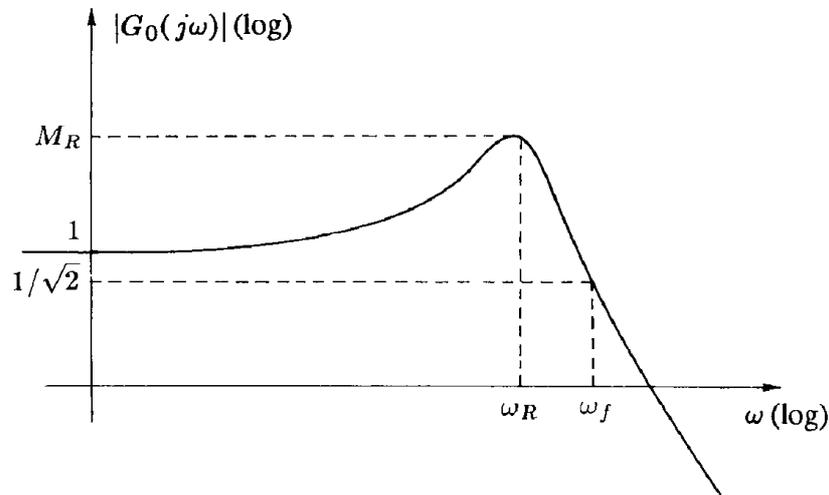
Come evidenziato dal diagramma prima riportato, *il picco di risonanza aumenta al diminuire di d , fino al valore infinito in corrispondenza di $d=0$. Esso, inoltre, non esiste per $\delta > \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$, in quanto, per valori di d maggiori di 0.707, l'argomento di quella radice sarebbe negativo.*

BANDA PASSANTE

Il picco di risonanza e la pulsazione di risonanza sono i primi due esempi di specifiche nel dominio della frequenza. La terza ed ultima specifica che ci interessa è la cosiddetta **banda passante** (detta anche *larghezza di banda*), definita come la **pulsazione ω_f** alla quale

il modulo della risposta armonica è inferiore di 3dB (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $1/\sqrt{2}$) rispetto al valore statico.

Per comprendere bene il significato di questa definizione, è sufficiente far riferimento alla figura seguente:



Viene qui riportata l'andamento di $|G(j\omega)|_{dB}$ in corrispondenza di un generico valore del coefficiente di smorzamento (si tratta, ovviamente, di un valore di δ minore di 0.707 visto che c'è un picco di risonanza, ma la definizione di ω_f vale in generale per qualsiasi valore di δ): in corrispondenza di $\omega=0$, $|G(j\omega)|_{dB}$ assume un certo valore $|G_0|_{dB}$ (detto **statico** perché si riferisce evidentemente ad un segnale di ingresso continuo), per cui la banda passante è quella frequenza in cui il valore di $|G(j\omega)|_{dB}$ risulta ridotto di 3dB rispetto a $|G_0|_{dB}$. Se ci riferiamo direttamente a $|G(j\omega)|$, la banda passante è quella frequenza in cui il valore di $|G(j\omega)|$ risulta ridotto di $\sqrt{2}$ rispetto a $|G_0|$.

In generale, la banda passante di un sistema a più poli può essere stimata, con buona approssimazione, come la frequenza del primo polo (cioè del polo a frequenza più bassa).

LEGAME TRA SPECIFICHE NEL TEMPO E SPECIFICHE IN FREQUENZA

Le specifiche nel dominio della frequenza sono ovviamente correlate con quelle nel dominio del tempo, dato che la risposta armonica si può dedurre dalla risposta all'impulso e viceversa. Tuttavia, nel caso di un sistema algebrico di ordine qualsiasi, questa correlazione non è esprimibile analiticamente, dato che in genere il valore di un parametro relativo a una delle due risposte dipende dall'andamento dell'altra nel suo complesso.

Peraltro, nell'ipotesi, spesso accettabile per i sistemi in retroazione, che il comportamento del sistema sia simile a quello di un sistema del secondo ordine, non è difficile stabilire alcune corrispondenze. Per esempio, sappiamo che la massima sovralongazione ed il picco di risonanza sono entrambi legati al valore del coefficiente δ : le rispettive relazioni sono

$$M_R = |G(j\omega_R)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$$

$$S(\%) = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100$$

Entrambe queste relazioni hanno una comoda rappresentazione grafica, per cui è immediato effettuare le corrispondenze: per esempio, fissato un determinato valore del picco di risonanza M_R , si determina graficamente il corrispondente valore di δ e quindi, sempre graficamente, il corrispondente valore della massima sovraelongazione percentuale $S(\%)$.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>