

Appunti di "Elettrotecnica"

Dispositivi biporta

Introduzione ai dispositivi a più terminali.....	2
Modelli dei dispositivi a più terminali: i "multipoli"	2
Caratteristica di un elemento biporta	4
<i>Classificazione degli elementi biporta</i>	5
I resistori biporta	6
Esempio di resistore biporta	6
Rappresentazioni possibili per un resistore biporta.....	8
Interpretazione fisica dei coefficienti.....	9
<i>Rappresentazione controllata in corrente</i>	10
<i>Rappresentazione controllata in tensione</i>	12
<i>Rappresentazione ibrida 1</i>	13
<i>Caso particolare nella rappresentazione "trasmissione 1"</i>	14
I generatori pilotati	14
Introduzione	14
1° caso: Generatore di tensione pilotato in corrente (GTPC)	15
2° caso: Generatore di corrente pilotato in tensione (GCPT)	15
3° caso: Generatore di corrente pilotato in corrente (GCPC)	16
4° caso: Generatore di tensione pilotato in tensione (GTPT)	17
Interpretazione della rappresentazione controllata in corrente	17
Interpretazione della rappresentazione controllata in tensione	18
Interpretazione della rappresentazione ibrida 1.....	19
Esempio.....	19
Esempio.....	20
Esercizio.....	21
Il giratore.....	23
Introduzione	23
1° proprietà: tripolo non energetico.....	23
2° proprietà: resistore lineare alla porta 2.....	23
3° proprietà: condensatore lineare alla porta 2	24
4° proprietà: induttore lineare alla porta 2.....	25
5° proprietà: resistore non lineare controllato in corrente alla porta 2	25
6° proprietà: resistore non lineare controllato in tensione alla porta 2.....	26
Induttori biporta.....	26
Introduzione: induttori biporta e variabili di porta	26
Esempio: toroide con doppio avvolgimento di spire.....	27
Induttori accoppiati.....	30
Legame tensione-corrente: controllo in corrente	30
Legame tensione-corrente: controllo in tensione.....	31
Energia immagazzinata	33
Il coefficiente di accoppiamento	35
Segno del coefficiente M (mutua induttanza).....	35
Il trasformatore ideale.....	37
Introduzione	37
Caratteristica del trasformatore ideale	39
Proprietà del trasformatore ideale	40
<i>Osservazione</i>	41

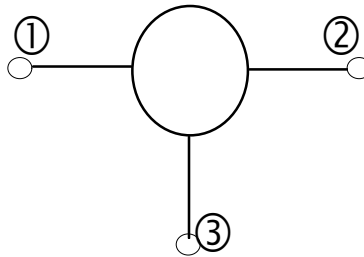
INTRODUZIONE AI DISPOSITIVI A PIÙ TERMINALI

Nella realtà, esistono sia dispositivi fisici a 2 soli terminali, che sono i più comuni e semplici, sia anche dispositivi fisici a più terminali (tre, quattro e più); anche questi dispositivi fisici hanno dei corrispondenti elementi circuitali (cioè elementi ideali, astratti) che li rappresentano: mentre gli elementi circuitali che rappresentano i dispositivi a due terminali sono stati chiamati "bipoli", gli elementi circuitali che rappresentano modelli astratti di dispositivi fisici a più terminali sono chiamati in generale "multipoli" o "N-poli".

Tra i multipoli, rivestono particolare importanza i "tripoli", ossia gli elementi circuitali con i quali rappresentiamo i dispositivi fisici a 3 terminali (per esempio, la maggior parte dei transistori); questo capitolo è dedicato allo studio di questi elementi circuitali: così come abbiamo fatto per i dispositivi a due terminali, non ci interessa studiarli da un punto di vista fisico o costruttivo, ma ci interessa invece conoscere il loro comportamento elettrico con l'esterno, ossia il loro "comportamento ai morsetti".

MODELLI DEI DISPOSITIVI A PIÙ TERMINALI: I "MULTIPOLI"

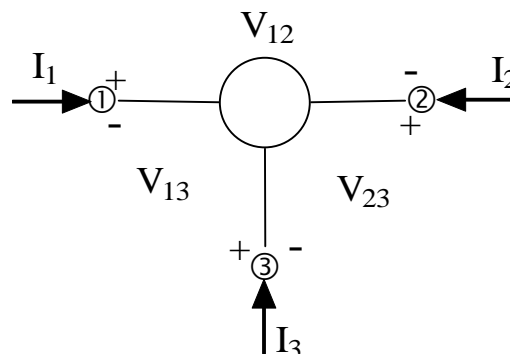
Supponiamo dunque di avere generico dispositivo a 3 terminali del quale, per il momento, non conosciamo la natura; come suo modello astratto prendiamo perciò un **tripolo** avente ai morsetti lo stesso comportamento elettrico del dispositivo in esame:



Così come nel caso dei bipoli, è necessario definire le **variabili terminali** mediante le quali è possibile descrivere il comportamento ai morsetti di questo tripolo: una volta individuate queste variabili, è opportuno determinare la cosiddetta **caratteristica** del tripolo, ossia una relazione funzionale che le leghi tra loro e che, se raffigurata nello spazio individuato da queste variabili, determini il luogo geometrico contenente tutti i punti di funzionamento del multipolo.

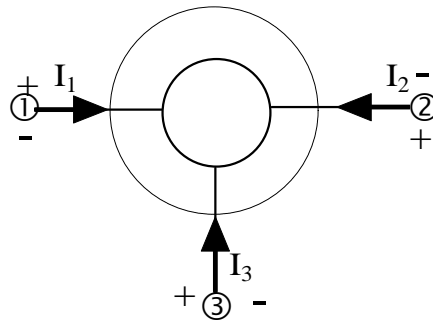
Per quanto riguarda, dunque, la scelta delle variabili terminali, così come per i bipoli esse devono godere di due proprietà: devono infatti essere *misurabili* e *indipendenti* tra loro. La prima proprietà è senz'altro soddisfatta dalla tensione e dalla corrente. Vediamo allora se esse soddisfano anche la seconda.

Con riferimento al generico tripolo raffigurato prima, possiamo definire tre tensioni e tre correnti come mostrato nella figura seguente:



Prendendo una curva chiusa che racchiuda il tripolo, possiamo applicare la LKC per ottenere evidentemente che

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$



Se poi consideriamo la sequenza chiusa di nodi 1-2-3-1 e applichiamo la LKT, otteniamo

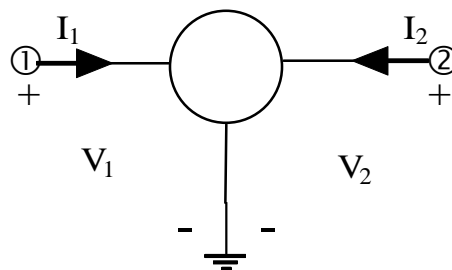
$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0$$

Queste 2 relazioni mettono in evidenza due cose:

- la LKC dice che solo due correnti sono indipendenti, mentre l'altra è ricavabile a partire dalle altre due;
- la LKT, in modo analogo, dice che solo due tensioni sono indipendenti, mentre la terza può essere ricavata a partire dalle altre due.

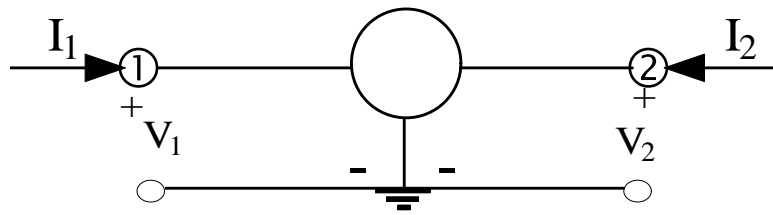
Di conseguenza, possiamo affermare che *un generico tripolo può essere caratterizzato, in modo completo, da 2 sole coppie di variabili terminali*. La terza coppia di variabili si potrà ricavare dalle altre due mediante le due relazioni trovate prima. Vedremo come tali variabili terminali non debbano essere necessariamente tensione e corrente: vanno bene anche la coppia tensione-carica e la coppia corrente-flusso, così come per i bipoli.

Una volta individuate le 2 coppie di variabili terminali da utilizzare per caratterizzare il bipolo, il passo successivo, come detto, è quello di individuare la “caratteristica” del bipolo, ossia la relazione funzionale tra tali variabili. Prima ancora di fare questo, è opportuna la seguente premessa: se, tra le 3 coppie di variabili terminali, ne sono sufficienti solo 2 per definire il comportamento ai morsetti del bipolo, noi possiamo considerare uno dei tre nodi del tripolo come riferimento per gli altri due. Ad esempio, possiamo considerare il nodo 3, per cui il tripolo può essere disegnato come segue:

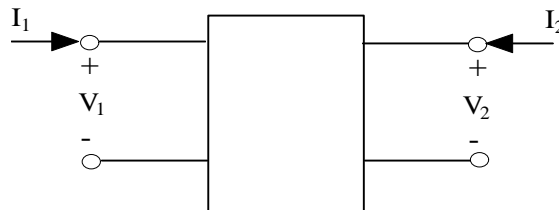


In base a questa rappresentazione, la descrizione completa del tripolo avviene mediante le variabili i_1 , i_2 , v_1 e v_2 definite rispetto al nodo preso come riferimento.

Inoltre, possiamo pensare di sostituire il nodo di riferimento con un "collegamento non resistivo" (che prende il nome di **reoforo**), in modo da ottenere il seguente nuovo schema:



Visto in questo modo, il tripolo può essere schematizzato anche nel modo seguente:



Questa rappresentazione mette bene in mostra per quale motivo un tripolo possa anche essere definito come **elemento biporta** o anche come **doppio bipolo**: esso presenta due distinte coppie di terminali, che prendono il nome di **porte** dell'elemento, in contrasto con i "bipoli", o "elementi monoporta", che invece ne presentano una sola.

In generale, diciamo che, *se un dispositivo fisico ha N terminali, esso può essere rappresentato con un elemento a N-1 porte, scegliendo uno degli N terminali come riferimento per le grandezze relative gli altri terminali.*

Con particolare riferimento ai tripoli, si usa dire che la porta di sinistra è la cosiddetta "porta 1" o **porta di ingresso**, mentre quella destra è la "porta 2" o **porta di uscita**.

CARATTERISTICA DI UN ELEMENTO BIPORTA

Supponiamo di avere un generico dispositivo fisico a N terminali; supponiamo di rappresentarlo mediante un elemento circuitale a N-1 porte e supponiamo di individuare le N-1 coppie di variabili terminali che intendiamo usare per caratterizzare il suo comportamento elettrico ai morsetti; si dimostra quanto segue:

Teorema: *Per definire completamente il comportamento elettrico di un multipolo ai suoi morsetti sono necessarie e sufficienti N-1 relazioni funzionali tra le N-1 coppie di variabili terminali scelte*

L'insieme di queste N-1 relazioni prende il nome di **caratteristica** del bipolo: indicate dunque con $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{N-1}, y_{N-1})$ le N-1 coppie di variabili terminali, la caratteristica del multipolo sarà un sistema del tipo

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) = 0 \\ \dots \\ f_{N-1}(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) = 0 \end{cases}$$

dove, ovviamente, le funzioni f_1, f_2, \dots, f_N sono tutte diverse tra di loro (affinché ci sia l'indipendenza).

Se il dispositivo in esame è a tre terminali, per cui lo rappresentiamo con un tripolo, la caratteristica di quest'ultimo sarà del tipo

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

La caratteristica di un tripolo descrive una superficie bidimensionale, nello spazio a 4 dimensioni individuato dalle 4 variabili terminali scelte, che costituisce il luogo geometrico di tutti i punti di funzionamento del tripolo.

Classificazione degli elementi biporta

Come già accennato in precedenza, le coppie (x, y) di variabili terminali possono essere scelte tra le seguenti:

- tensione-corrente
- tensione-carica
- corrente-flusso.

Evidentemente, si tratta delle stesse coppie valide per i bipoli e questo comporta che, anche per i multipoli, si possa effettuare la stessa classificazione fatta per i bipoli:

- quando la caratteristica di un tripolo è espressa da due relazioni funzionali tra tensione e corrente del tipo

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

si parla di **resistore biporta** o anche di **doppio bipolo resistivo**;

- quando la caratteristica di un tripolo è espressa da due relazioni funzionali tra tensione e carica del tipo

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, q_1, q_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, q_1, q_2) = 0 \end{cases}$$

si parla di **condensatore biporta**;

- quando la caratteristica di un tripolo è espressa da due relazioni funzionali tra corrente e flusso del tipo

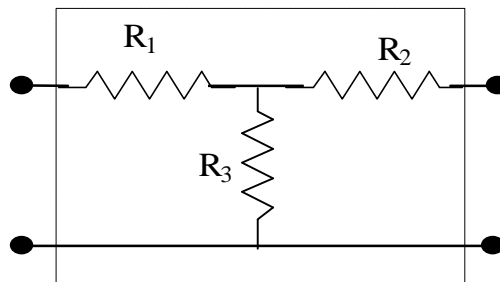
$$\begin{cases} f_1(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

si parla di **induttore biporta**.

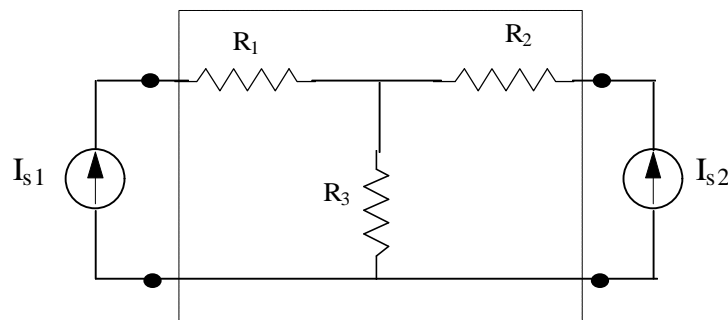
I resistori biporta

ESEMPIO DI RESISTORE BIPORTA

Consideriamo il circuito rappresentato in figura:

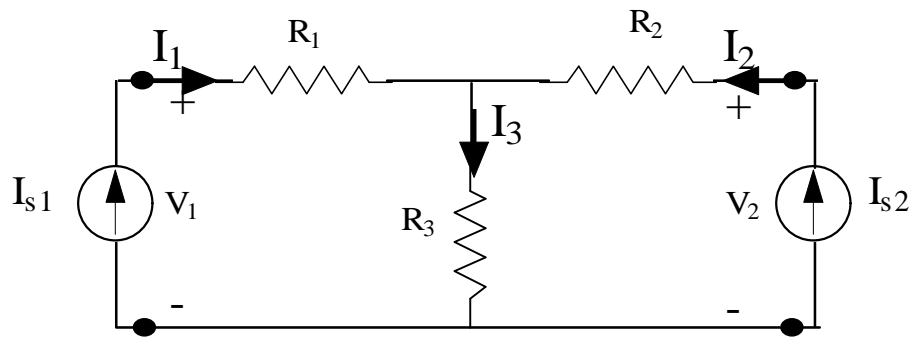


Possiamo visualizzare questo circuito come un “resistore biporta” (o “doppio bipolo resistivo” o “tripolo resistivo” che dir si voglia) costituito da 3 resistori lineari. Supponiamo inoltre di collegare alle due porte del circuito altrettanti generatori indipendenti di corrente:



Vogliamo trovare quali legami esistono tra le correnti in ingresso alle due porte e le rispettive tensioni: questi legami, come ampiamente detto in precedenza, costituiscono la “caratteristica” del tripolo.

Cominciamo allora ad indicare con V_1 e V_2 le tensioni alle due porte del tripolo e con I_1 , I_2 e I_3 le correnti che scorrono nei lati dove si trovano rispettivamente R_1 , R_2 ed R_3 :



Le relazioni di lato sono le seguenti:

$$\begin{aligned}V_{R1} &= R_1 I_1 \\V_{R2} &= R_2 I_2 \\V_{R3} &= R_3 I_3\end{aligned}$$

Applicando adesso la LKC otteniamo che

$$\begin{aligned}I_1 &= I_{S1} \\I_2 &= I_{S2} \\I_3 &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Applicando infine la LKT otteniamo che

$$\begin{aligned}V_1 &= V_{R1} + V_{R3} \\V_2 &= V_{R2} + V_{R3}\end{aligned}$$

Sostituendo le rispettive espressioni otteniamo il sistema

$$\begin{cases}V_1 = (R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_2 \\V_2 = R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2\end{cases}$$

Queste sono le due relazioni funzionali tra le 4 variabili circuitali che usiamo per caratterizzare il nostro biporta: esse costituiscono la “caratteristica” del resistore biporta in esame.

Osserviamo subito che questo sistema di 2 equazioni può essere convenientemente rappresentato in “*forma matriciale*”: infatti, se noi poniamo

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}] &= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\[\mathbf{R}] &= \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \\[\mathbf{I}] &= \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

il nostro sistema può essere rappresentato nella forma

$$\boxed{[\mathbf{V}] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}]}$$

Il vettore $[V]$ prende il nome di **vettore delle tensioni di porta** in quanto le sue componenti sono evidentemente le tensioni alle due porte; in modo analogo, il vettore $[I]$ prende il nome di **vettore delle correnti di porta**; la matrice $[R]$ prende invece il nome di **matrice di resistenza** del resistore biporta lineare.

Una osservazione importante è la seguente: l'equazione matriciale appena individuata costituisce una **rappresentazione controllata in corrente** del biporta, in quanto le tensioni di porta sono espresse come funzioni delle correnti di porta. E' possibile ricavare anche una **rappresentazione controllata in tensione** dello stesso biporta: basta infatti porre

$$[G] = [R]^{-1} = \frac{1}{\det[R]} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_1 + R_3 \end{bmatrix}$$

per ottenere la relazione

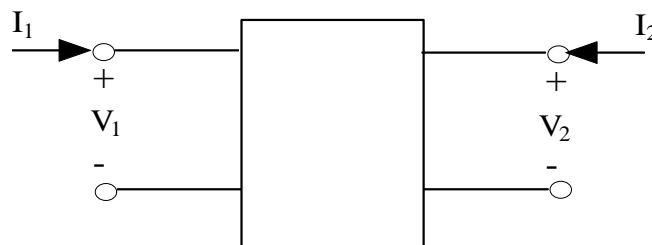
$$\boxed{[I] = [G][V]}$$

La matrice $[G]$ prende in questo caso il nome di **matrice di conduttanza**.

RAPPRESENTAZIONI POSSIBILI PER UN RESISTORE BIPORTA

Quanto appena detto circa le rappresentazioni controllate in corrente e/o in tensione di un resistore biporta serve da premessa al discorso seguente.

Consideriamo un generico resistore biporta:



Il fatto che si tratti di un "resistore" biporta ci viene dal fatto di supporre che la caratteristica di questo tripolo sia del tipo

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

cioè sia costituita da due relazioni funzionali tra tensioni e correnti di porta.

Queste due "relazioni funzionali" tra tensioni e correnti di porta possono essere di natura diversa; per esempio, abbiamo prima visto due casi possibili, ossia due possibili rappresentazioni della caratteristica del tripolo: la "rappresentazione controllata in corrente", in cui le due tensioni di porta sono espresse in funzione delle due correnti di porta, e la "rappresentazione controllata in tensione", dove invece sono le correnti ad essere espresse in funzione delle tensioni. In entrambi i casi, quindi, abbiamo due variabili terminali, che definiamo "dipendenti", espresse in funzioni delle altre due, che sono invece "indipendenti".

In effetti, le possibili rappresentazioni sono ben 6 a seconda di quali siano le variabili indipendenti:

Variabili indipendenti	Variabili dipendenti	Nome	Rappresentazione analitica
I_1, I_2	V_1, V_2	Controllo in corrente $[V]=[R][I]$	$\begin{cases} V_1 = r_{11} I_1 + r_{12} I_2 \\ V_2 = r_{21} I_1 + r_{22} I_2 \end{cases}$
V_1, V_2	I_1, I_2	Controllo in tensione $[I]=[G][V]$	$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} V_2 \\ I_2 = g_{21} V_1 + g_{22} V_2 \end{cases}$
I_1, V_2	V_1, I_2	Ibrida 1 $[v,i]=[H][i,v]$	$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$
V_1, I_2	I_1, V_2	Ibrida 2 $[i,v]=[H'][v,i]$	$\begin{cases} I_1 = h'_{11} V_1 + h'_{12} I_2 \\ V_2 = h'_{21} V_1 + h'_{22} I_2 \end{cases}$
V_2, I_2	V_1, I_1	Trasmissione 1 $[v,i]=[T][i,v]$	$\begin{cases} V_1 = t_{11} V_2 - t_{12} I_2 \\ I_1 = t_{21} V_2 - t_{22} I_2 \end{cases}$
V_1, I_1	V_2, I_2	Trasmissione 2 $[i,v]=[T'][v,i]$	$\begin{cases} V_2 = t'_{11} V_1 + t'_{12} I_1 \\ -I_2 = t'_{21} V_1 + t'_{22} I_1 \end{cases}$

Facciamo qualche osservazione sulla tabella appena riportata:

- la prima cosa (peraltro già detta prima) è che la matrice G è l'inversa della matrice R;
- in modo analogo, la matrice H' della rappresentazione IBRIDA 2 è l'inversa della matrice H della rappresentazione IBRIDA 1, nel caso, ovviamente, che H sia invertibile;
- ancora, la matrice T' della rappresentazione TRASMISSIONE 2 è l'inversa della matrice T della rappresentazione TRASMISSIONE 1, sempre nel caso in cui T sia invertibile;
- l'aggettivo "IBRIDA" per la terza e quarta rappresentazione deriva dal fatto per cui le variabili dipendenti e indipendenti sono un misto di tensione e corrente; questo comporta che i parametri che compaiono in tali matrici siano dimensionalmente diversi: h_{11} è dimensionalmente una resistenza; h_{21} è una conduttanza; h_{12} e h_{22} sono entrambi adimensionali;
- l'aggettivo "TRASMISSIONE" per le ultime due rappresentazioni deriva invece dal fatto per cui le variabili di una porta vengono messe in relazione a quelle dell'altra porta ed il dispositivo si comporta perciò come un mezzo di trasmissione.

E' possibile passare da una rappresentazione all'altra con semplici passaggi matematici: basta esplicitare, nelle due relazioni di partenza, le variabili dipendenti che si vogliono ottenere in modo da arrivare alla rappresentazione desiderata.

INTERPRETAZIONE FISICA DEI COEFFICIENTI

Vediamo adesso quale interpretazione geometrica possiamo dare delle 6 rappresentazioni appena elencate e, inoltre, vediamo a che cosa corrispondono, da un punto di vista fisico, i coefficienti che in tali rappresentazioni compaiono.

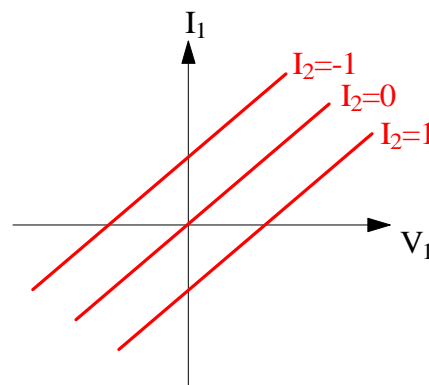
Rappresentazione controllata in corrente

Consideriamo la rappresentazione controllata in corrente di un resistore biporta:

$$\begin{cases} V_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 \\ V_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2 \end{cases}$$

Così come, per un resistore lineare a due terminali, la caratteristica $v=Ri$ descrive una linea retta passante per l'origine nel piano I-V, per i doppi bipoli resistivi quelle due relazioni individuano una superficie bidimensionale nello spazio a 4 dimensioni individuato dalle 4 variabili i_1, i_2, v_1, v_2 . Una superficie siffatta è difficile da visualizzare, per cui è preferibile considerare una equazione per volta, in modo da vederla come una famiglia di rette nell'appropriato piano v-i.

Per esempio, la relazione $V_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2$, se riportata nel piano (V_1, I_1) , rappresenta una famiglia di rette parallele (di pendenza pari ad r_{11}), ciascuna relativa ad un determinato valore di I_2 :



Stesso discorso, ovviamente, per l'altra relazione, $V_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2$, che rappresenta, se riportata nel piano (V_2, I_2) , una famiglia di rette parallele (di pendenza pari ad r_{22}), ciascuna relativa ad un determinato valore di I_1 .

Detto questo, vogliamo ora vedere a che cosa corrispondono, fisicamente, i coefficienti di queste due equazioni: quando diciamo "fisicamente" intendiamo sostanzialmente riferirci alla possibilità di misurare sperimentalmente tali coefficienti.

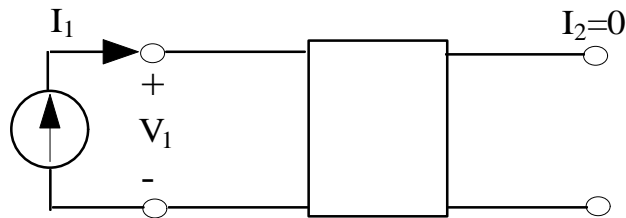
Cominciamo da r_{11} : esplicitandolo dalla prima relazione, abbiamo che

$$r_{11} = \frac{V_1}{I_1} - \frac{I_2}{I_1} r_{12}$$

e quindi deduciamo che

$$r_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Questa relazione dice che r_{11} è il rapporto tra la tensione e la corrente alla porta 1 quando la porta 2 è in condizione di corrente nulla: per questo motivo, si dice che r_{11} è la **resistenza di ingresso alla porta 1** quando la porta 2 è in condizione di circuito aperto. Circuitualmente, la situazione è dunque la seguente:

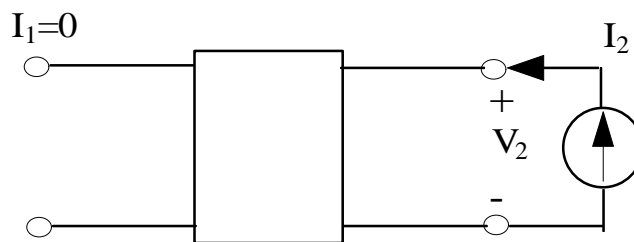


Alimentando la porta di ingresso con una corrente I_1 e facendo in modo che la corrente alla porta di uscita sia nulla, possiamo determinare r_{11} come resistenza alla porta di ingresso, ossia come rapporto tra la tensione che misuriamo e la corrente che abbiamo applicato.

In modo analogo, si trova che

$$r_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

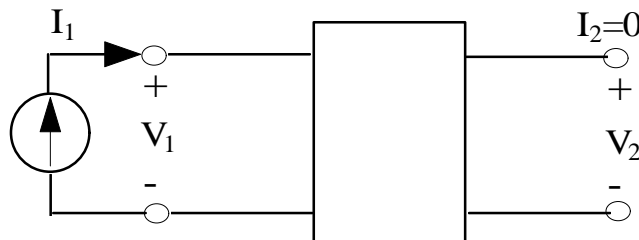
ossia che r_{12} è il rapporto V_1 / I_2 quando la porta numero 1 è in condizione di circuito aperto: dato che la tensione e la corrente sono in questo caso relative a due porte diverse, si parla di **resistenza di trasferimento inversa** quando la porta 1 è in condizioni di circuito aperto. La situazione da realizzare è dunque la seguente:



L'aggettivo "inversa" deriva dal fatto che la porta alimentata è quella di uscita, per distinguere da

$$r_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

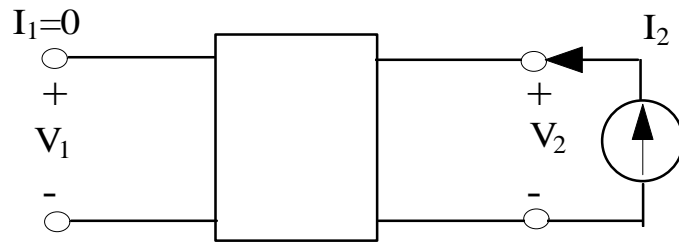
che è invece la **resistenza di trasferimento diretto** quando la porta 2 è in condizione di circuito aperto:



Infine, si ha che

$$r_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

ed a r_{22} si dà il nome di **resistenza di ingresso alla porta 2** quando la porta 1 è in condizione di circuito aperto:



Rappresentazione controllata in tensione

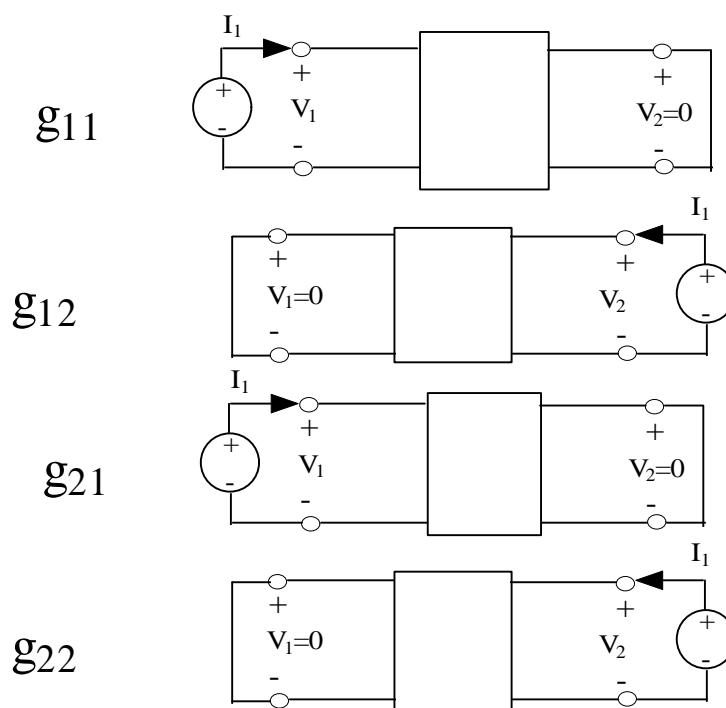
Questa volta dobbiamo dare un significato ai coefficienti del sistema

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} V_2 \\ I_2 = g_{21} V_1 + g_{22} V_2 \end{cases}$$

Con metodo identico a quello del paragrafo precedente abbiamo quanto segue:

$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right _{V_2=0}$	g_{11} è il rapporto tra la corrente e la tensione alla porta 1 quando la porta 2 è in condizione di corto circuito; questo coefficiente prende il nome di “conduttanza in ingresso alla porta 1” .
$g_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right _{V_1=0}$	g_{12} è il rapporto tra la corrente alla porta 1 e la tensione alla porta 2 quando la porta 1 è in condizione di corto circuito; questo coefficiente prende il nome di “conduttanza di trasferimento inversa” .
$g_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right _{V_2=0}$	g_{21} è il rapporto tra la corrente alla porta 2 e la tensione alla porta 1 quando la porta 2 è in condizione di corto circuito; questo coefficiente prende il nome di “conduttanza di trasferimento diretta” .
$g_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right _{V_1=0}$	g_{22} è il rapporto tra la corrente e la tensione alla porta 2 quando la porta 1 è in condizione di corto circuito; questo coefficiente prende il nome di “conduttanza in ingresso alla porta 2” .

Da un punto di vista circuitale, i 4 coefficienti appena descritti possono essere ricondotti alle seguenti quattro situazioni:



Rappresentazione ibrida 1

Questa volta i coefficienti sono quelli del sistema

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

Abbiamo quanto segue:

$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right _{V_2=0}$	h_{11} è il rapporto tra la tensione e la corrente alla porta 1 quando la porta 2 è in condizione di corto circuito; questo coefficiente prende il nome di “ conduttanza in ingresso alla porta 1 ” quando la porta 2 è in corto.
$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right _{I_1=0}$	h_{12} è il rapporto tra le tensioni alle porte 1 e 2 quando la porta 1 è in condizione di circuito aperto; questo coefficiente prende il nome di “ rapporto di trasferimento di tensione inverso ” quando la porta 1 è in condizione di circuito aperto.
$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right _{V_2=0}$	h_{21} è il rapporto tra le correnti alle porte 2 e 1 quando la porta 2 è in condizione di corto circuito; questo coefficiente prende il nome di “ rapporto di trasferimento di corrente diretto ” quando la porta 2 è in corto.
$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right _{I_1=0}$	h_{22} è il rapporto tra la corrente e la tensione alla porta 2 quando la porta 1 è in condizione di circuito aperto; questo coefficiente prende il nome di “ conduttanza in ingresso alla porta 2 ” quando la porta 1 è in condizione di circuito aperto.

Facciamo notare che i coefficienti h_{11} e h_{22} prendono lo stesso nome dei coefficienti r_{11} e r_{22} della rappresentazione controllata in corrente, con la differenza che lì l'altra porta era in corto, mentre qui è in corto circuito.

Caso particolare nella rappresentazione "trasmissione 1"

La rappresentazione denominata **trasmissione 1** consiste nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} V_1 = t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \\ I_1 = t_{21}V_2 - t_{22}I_2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che

$$t_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

ossia che il coefficiente t_{11} corrisponde al rapporto tra le tensioni quando la porta 2 è in condizioni di circuito aperto. E' evidente che questa espressione non ha alcun significato fisico, in quanto non è possibile che alla porta 2 ci sia un corrente nulla ed un valore non nullo di tensione. Questo ci obbliga a determinare il valore numerico di t_{11} a partire da una qualsiasi delle altre 5 rappresentazioni.

I generatori pilotati

INTRODUZIONE

In precedenza, abbiamo considerato generatori di tensione e di corrente indipendenti, ossia degli elementi circuitali (ideali), a due terminali, che si usano prevalentemente come ingressi di un circuito. Qui introduciamo invece i cosiddetti "generatori pilotati" (o "dipendenti" o anche "controllati").

Cominciamo col dire che un "**generatore pilotato**" è un particolare doppio bipolo resistivo. Si tratta, in particolare, di un doppio bipolo la cui caratteristica è del tipo seguente:

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

Questo doppio bipolo resistivo è costituito da due lati:

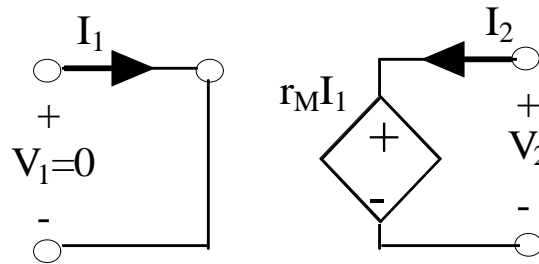
- c'è un **lato primario** che può essere o un circuito aperto oppure un corto circuito;
- poi c'è un **lato secondario** che può essere un generatore indipendente di tensione oppure uno, sempre indipendente, di corrente.

Il termine "pilotato" deriva dal fatto che la forma d'onda della tensione o della corrente nel lato secondario dipende dalla corrente o dalla tensione che c'è nel lato primario.

Naturalmente, questo comporta che ci siano 4 possibili casi di generatori pilotati, a seconda che il lato primario sia un circuito aperto o un cortocircuito e a seconda che il lato secondario contenga un generatore di tensione o di corrente. Vediamo allora nel dettaglio le varie possibilità.

1° CASO: GENERATORE DI TENSIONE PILOTATO IN CORRENTE (GTPC)

Lo schema circuitale di questo biporta è il seguente:



Le “equazioni di funzionamento” (cioè la “caratteristica”) di questo biporta sono le seguenti:

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = r_M I_1 \end{cases}$$

In forma matriciale, esse possono essere rappresentate come

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Quindi, un **generatore di tensione pilotato in corrente** (che possiamo indicare più velocemente con l’acronimo **GTPC**) è caratterizzato dal fatto per cui nel primo ramo c’è un corto circuito, mentre nel secondo c’è una tensione proporzionale, secondo la costante r_M , alla corrente che scorre nel primo ramo (corrente che ovviamente dipende dal collegamento di tale ramo con un qualche circuito esterno). La rappresentazione di questo elemento è evidentemente controllata in corrente.

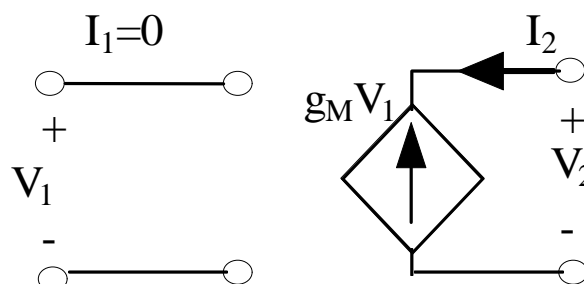
Alla costante r_M si dà il nome di **trans-resistenza**: il nome deriva dal fatto che corrisponde ad un rapporto tensione-corrente e quindi si misura in ohm.

Essendo questo parametro costante, possiamo affermare che *il GTPC è un doppio bipolo resistivo lineare tempo-invariante*.

Vedremo che anche gli altri tre generatori pilotati rientrano in questa classe di doppi bipoli resistivi.

2° CASO: GENERATORE DI CORRENTE PILOTATO IN TENSIONE (GCPT)

Lo schema circuitale di questo biporta è il seguente:



Le equazioni di funzionamento sono le seguenti:

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = g_M V_1 \end{cases}$$

Rappresentandole in forma matriciale, abbiamo

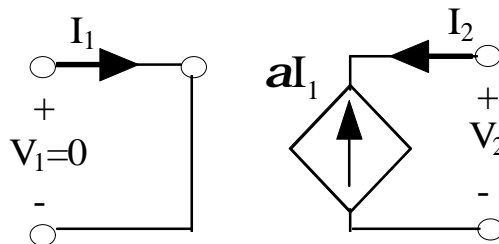
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Quindi, un generatore di corrente pilotato in tensione (che possiamo indicare con **GCPT**) è caratterizzato dal fatto per cui nel primo ramo c'è un circuito aperto (cioè corrente nulla), mentre nel secondo c'è una corrente proporzionale, secondo la costante g_M , alla tensione applicata ai morsetti del primo ramo (tensione anch'essa ovviamente legata al collegamento di tale ramo con un qualche circuito esterno).

Alla costante g_M si dà il nome di **trans-conduttanza** ed ovviamente si misura in ohm^{-1} .

3° CASO: GENERATORE DI CORRENTE PILOTATO IN CORRENTE (GCPC)

Lo schema circuitale di questo biporta è il seguente:



Le equazioni di funzionamento sono

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ I_2 = a I_1 \end{cases}$$

e le possiamo rappresentare in forma matriciale come

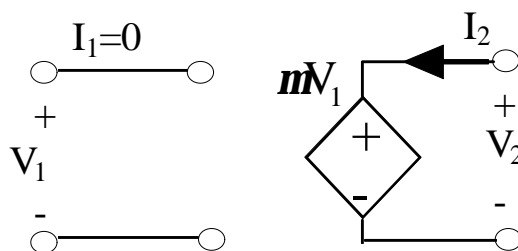
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Quindi, un generatore di corrente pilotato in corrente (in breve **GCPC**) è caratterizzato dal fatto per cui nel primo ramo c'è un cortocircuito (cioè tensione nulla), mentre nel secondo c'è una corrente proporzionale, secondo la costante a , alla corrente che scorre nel primo ramo.

Alla costante a si dà il nome di **rapporto di trasferimento di corrente** ed è una costante adimensionale visto che corrisponde al rapporto tra due correnti.

4° CASO: GENERATORE DI TENSIONE PILOTATO IN TENSIONE (GTPT)

Lo schema circuitale di questo biporta è il seguente:



Le equazioni di funzionamento sono

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ V_2 = mV_1 \end{cases}$$

e le possiamo rappresentare in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

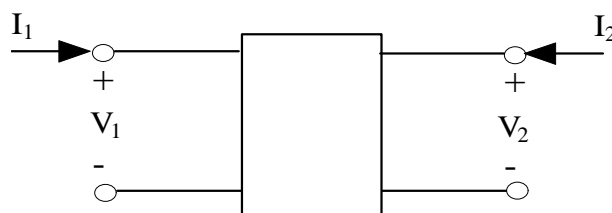
Quindi, un generatore di tensione pilotato in tensione (in breve **GTPT**) è caratterizzato dal fatto per cui nel primo ramo c'è un circuito aperto (cioè corrente nulla), mentre nel secondo c'è una tensione proporzionale, secondo la costante μ , alla tensione applicata ai morsetti del primo ramo.

Alla costante μ si dà il nome di **rapporto di trasferimento di tensione** ed è anch'essa adimensionale.

INTERPRETAZIONE DELLA RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN CORRENTE

I generatori pilotati vengono impiegati per costruire i modelli dei doppi bipoli resistivi. Vediamo come.

Consideriamo un generico biporta resistivo:

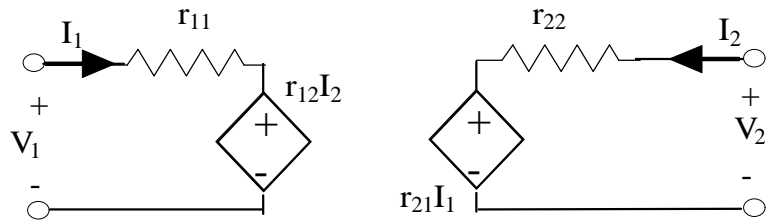


Supponiamo che di questo doppio bipolo sia nota solo la seguente rappresentazione controllata in corrente:

$$\begin{cases} V_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 \\ V_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2 \end{cases}$$

Osserviamo queste due equazioni: esse esprimono evidentemente un equilibrio (cioè una somma) di tensioni, per cui le possiamo pensare come il risultato della applicazione della LKT a due elementi

monoporta opportuni. La prima equazione può essere pensata come il collegamento tra un resistore lineare di resistenza r_{11} e un GTPC la cui tensione dipende da I_2 secondo il coefficiente r_{12} . In modo analogo, la seconda può essere pensata come il collegamento, sempre in serie, di un GTPC la cui tensione dipende da I_1 secondo il coefficiente r_{21} con un resistore lineare di resistenza r_{22} . In tal modo, possiamo affermare che quelle due equazioni di funzionamento hanno la seguente rappresentazione circuitale:



Questo non è altro che un biporta equivalente a quello che avevamo all'inizio, con il vantaggio che questa volta conosciamo la natura dell'elemento in questione, ossia il tipo di elementi da cui è costituito e come essi sono collegati tra loro. Quindi, *quando abbiamo, in un circuito, un biporta del quale viene fornita la rappresentazione controllata in corrente, lo possiamo sostituire mediante lo schema appena disegnato.*

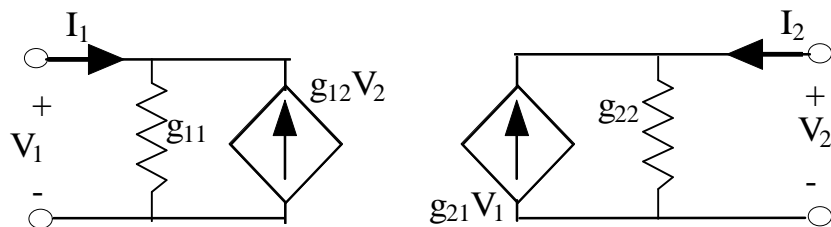
Per esempio, questa possibilità viene sovente sfruttata nell'analisi dei circuiti mediante il cosiddetto "metodo delle maglie".

INTERPRETAZIONE DELLA RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN TENSIONE

Discorso perfettamente analogo possiamo fare nel caso sia nota, del nostro biporta resistivo, una rappresentazione controllata in tensione del tipo

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} V_2 \\ I_2 = g_{21} V_1 + g_{22} V_2 \end{cases}$$

Queste due equazioni rappresentano un equilibrio di correnti, per cui possiamo pensarle come il risultato della applicazione della LKC a due opportuni collegamenti in parallelo. E' facile allora verificare che le possiamo rappresentare, a livello circuitale, come segue:



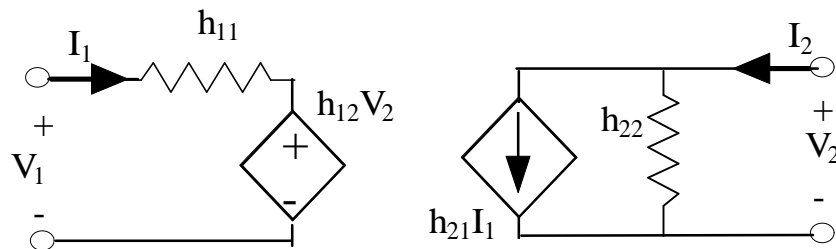
Questa rappresentazione viene spesso utilizzata per l'analisi dei circuiti mediante il cosiddetto "metodo nodale".

INTERPRETAZIONE DELLA RAPPRESENTAZIONE IBRIDA 1

Supponiamo adesso che sia nota la rappresentazione ibrida 1, ossia

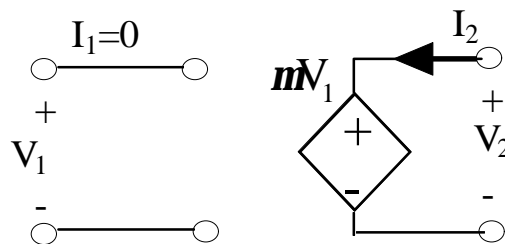
$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

La prima equazione dà un equilibrio di tensioni, per cui il circuito corrispondente sarà una serie; la seconda dà invece un equilibrio di correnti, per cui il corrispondente circuito sarà un parallelo. La rappresentazione circuitale è la seguente:

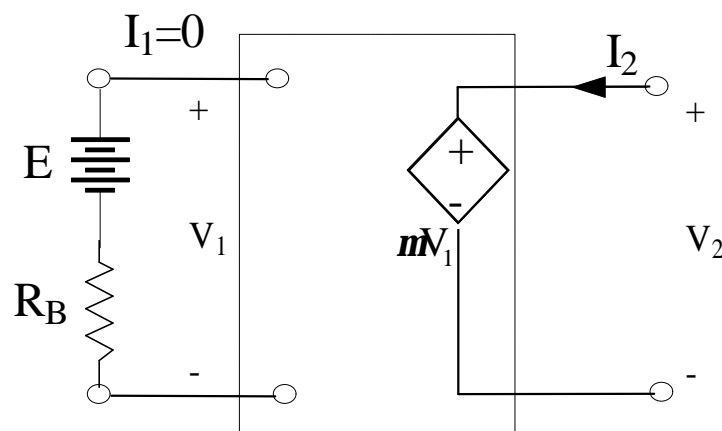


ESEMPIO

Consideriamo un **GTPT** (generatore di tensione pilotato in tensione), che sappiamo di poter schematizzare nel modo seguente:



Supponiamo adesso di collegare la porta di ingresso ad una **batteria reale**, che genera una tensione (continua) pari ad E e presenta una resistenza interna pari a R_B :



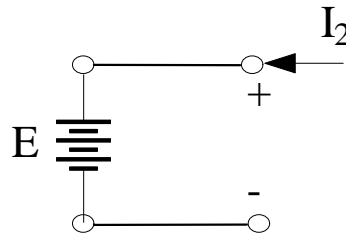
In questo modo, siamo passati da un elemento biporta ad un elemento monoporta: ci chiediamo allora quale sia il comportamento alla porta di questo elemento, ossia ci chiediamo quale legame intercorra tra le variabili di porta, che sono in questo caso I_2 e V_2 .

Il punto di partenza sono ovviamente le equazioni di funzionamento del GTPT:

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ V_2 = mV_1 \end{cases}$$

Dato che $V_1 = E + R_B I_1$, è chiaro che $V_1 = E$, per cui $V_2 = \mu E$.

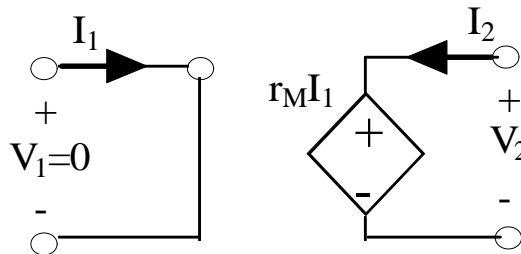
Abbiamo dunque trovato che la porta di uscita si comporta come un generatore indipendente di tensione μE . Di conseguenza, l'elemento monoporta equivalente a quello disegnato prima è il seguente:



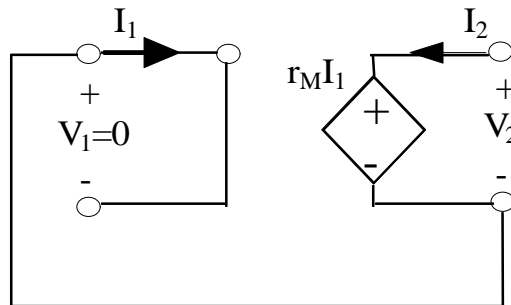
La cosa più interessante che si nota è che questo generatore indipendente di tensione è identico a quello collegato alla porta di ingresso del GTPT, ma presenta una resistenza interna nulla e non è in alcun modo influenzato da R_B . In definitiva, quindi, *siamo passati, mediante il GTPT, da un generatore indipendente di tensione con resistenza interna non nulla ad un generatore indipendente di tensione con resistenza interna nulla.*

ESEMPIO

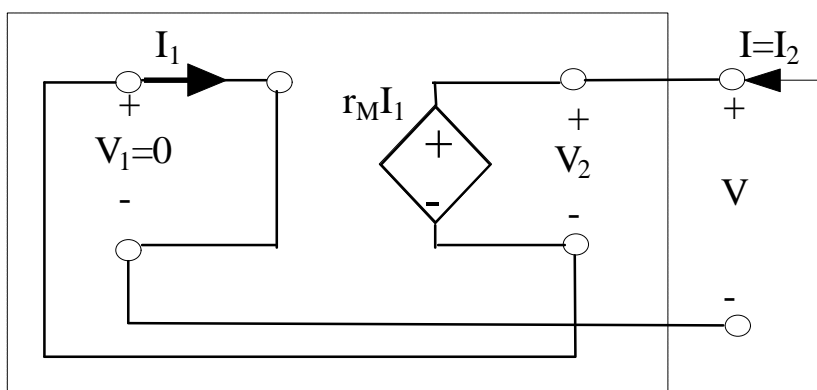
Consideriamo adesso un **GTPC**:



Collegiamo il morsetto positivo della porta di ingresso in corto al morsetto negativo della porta di uscita:



In tal modo, abbiamo nuovamente ottenuto, a partire da un elemento biporta come il GTPC, un elemento monoporta la cui unica porta è costituita dal morsetto positivo della porta di ingresso del GTPC e dal morsetto negativo della porta di uscita:



Così come nel caso precedente, ci interessa sapere come si comporta questo elemento monoporta: vogliamo dunque il legame tra la corrente e la tensione alla porta dell'elemento, che sono I_2 e $V=V_2+V_1$.

Il punto di partenza sono sempre le equazioni di funzionamento del GTPC:

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = r_M I_1 \end{cases}$$

Applicando la LKC, deduciamo evidentemente che $I_1=I_2$, da cui $V_2=r_M I_2$. E' anche chiaro, essendo $V_1=0$, che la tensione alla porta è $V=V_2$.

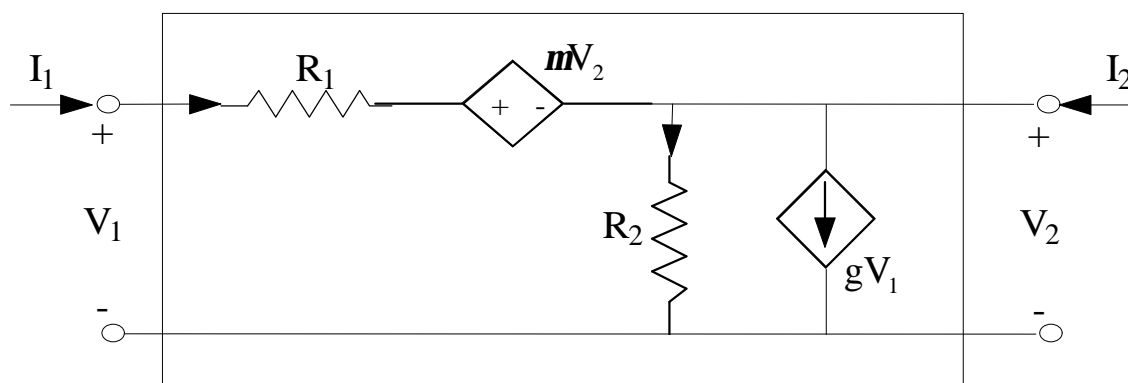
Quindi, il legame tra la tensione e la corrente alla porta è

$$V_2 = r_M I_2$$

il che ci dice che il monoporta si comporta come un **resistore lineare tempo-invariante** di resistenza r_M .

ESERCIZIO

Sia dato il doppio bipolo lineare illustrato in figura:



Determinarne la matrice di conduttanza.

Risoluzione

Per rispondere alla prima domanda, non dobbiamo far altro che trovare le 2 equazioni che definiscono il doppio bipolo e porle nella rappresentazione controllata in corrente, la quale è del tipo seguente:

$$\begin{cases} V_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 \\ V_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2 \end{cases}$$

Per arrivare alle 2 equazioni che definiscono il doppio bipolo, ci possiamo servire solo delle leggi di Kirchoff e delle relazioni di lato degli elementi che costituiscono il bipolo stesso:

$$\begin{array}{l} \text{LKT} \begin{cases} V_1 - V_{R2} - \mu V_2 - V_{R1} = 0 \\ V_2 = V_{gt} = V_{R2} \end{cases} \\ \text{LKC} \longrightarrow I_1 - I_{R2} - I_{gc} + I_2 = 0 \end{array} \quad \text{relazioni di lato} \begin{cases} V_{R1} = R_1 I_{R1} \\ V_{R2} = R_2 I_{R2} \\ I_{gc} = gV_1 \\ V_{gt} = \mu V_2 \end{cases}$$

Partendo dalla relazione che viene fuori dalla LKC è facile ricavare che

$$I_1 + I_2 = G_2 V_2 + gV_1$$

e questa è già una relazione che ci va bene per definire il comportamento ai morsetti del doppio bipolo.

Partendo poi dalla prima relazione fornita dalla LKT, si ricava che

$$I_1 = G_1 V_1 - (1 + m)G_1 V_2$$

Possiamo dunque concludere che le equazioni che definiscono il doppio bipolo in esame sono le seguenti:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = G_2 V_2 + gV_1 \\ I_1 = G_1 V_1 - (1 + m)G_1 V_2 \end{cases}$$

Per trovare la matrice di conduttanza [G], dobbiamo porre queste equazioni nella forma controllata in tensione: la seconda equazione è già in tale forma, per cui la lasciamo così com'è; per quanto riguarda la prima, se sottraiamo membro a membro con la seconda, otteniamo

$$I_2 = (g - G_1)V_1 + [G_2 + (1 + m)G_1]V_2$$

e questa equazione è anche nella forma controllata in tensione.

In conclusione, quindi, la rappresentazione controllata in tensione del doppio bipolo in esame è la seguente:

$$\begin{cases} I_1 = G_1 V_1 - (1 + m)G_1 V_2 \\ I_2 = (g - G_1)V_1 + [G_2 + (1 + m)G_1]V_2 \end{cases}$$

La matrice di conduttanza [G] è dunque la seguente:

$$\begin{bmatrix} G_1 & (1 + m)G_1 \\ g - G_1 & G_2 + (1 + m)G_1 \end{bmatrix}$$

Il giratore

INTRODUZIONE

Prende il nome di **giratore** un doppio bipolo resistivo, lineare tempo-invariante, la cui caratteristica è rappresentata dal seguente sistema:

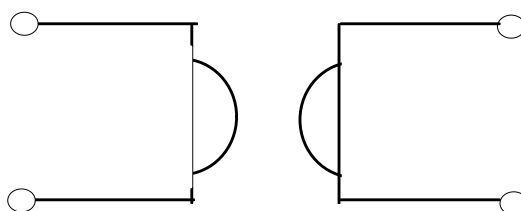
$$\begin{cases} I_1 = GV_2 \\ I_2 = -GV_1 \end{cases}$$

Scritta in forma matriciale, questa caratteristica è

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Questa caratteristica indica evidentemente che la corrente a ciascuna porta è direttamente proporzionale, secondo il coefficiente G (con o senza segno) alla tensione che risulta applicata all'altra porta.

Dal punto di vista circuitale, un giratore si rappresenta così:



La costante di proporzionalità G e si chiama **conduttanza di girazione**.

Vediamo adesso un paio di importanti proprietà di questo bipolo.

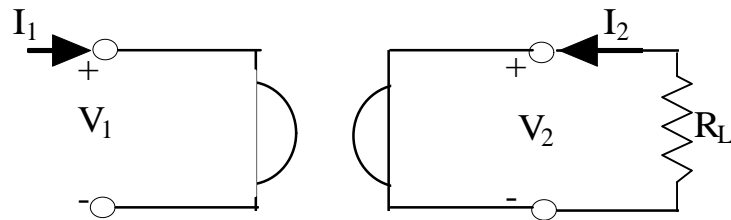
1° proprietà: tripolo non energetico

La prima proprietà è quella per cui *il giratore risulta essere elemento biporta "non energetico"*. Con questo si intende dire che la potenza fornita al doppio bipolo è identicamente nulla in ogni istante. Questo accade per il semplice motivo che la potenza entrante è pari a quella uscente istante per istante. Infatti, si ha quanto segue:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) = V_1(t)I_1(t) + V_2(t)I_2(t) = V_1(t)I_1(t) + \left(\frac{I_1(t)}{G}\right)(-GV_1(t)) = 0$$

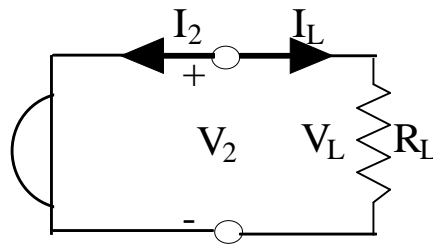
2° proprietà: resistore lineare alla porta 2

Supponiamo adesso che i morsetti della porta 2 del giratore siano chiusi su un resistore lineare tempo-invariante di resistenza R_L :



La proprietà è la seguente: collegando un resistore lineare di resistenza R_L alla porta di uscita, alla porta di ingresso si misura una resistenza di ingresso (rapporto tra la tensione e la corrente) pari a $1/R_L G^2$.

Cominciamo a ragionare sul circuito a destra:



Applicando le leggi di Kirchoff noi abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{LKC} &\rightarrow I_2 = - I_L \\ \text{LKT} &\rightarrow V_L = V_2 \end{aligned}$$

La relazione di lato per il resistore è $V_L = R_L I_L$, per cui $V_2 = - R_L I_2$.

Dato che $I_1 = G V_2 \rightarrow I_1 = - G R_L I_2 = - G R_L (- G V_1) = G^2 R_L V_1$

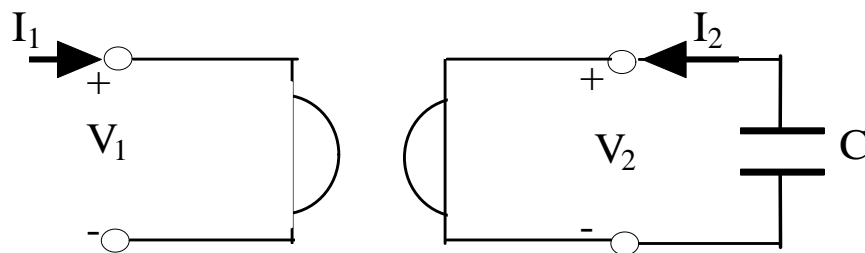
Calcolando allora il rapporto V_1/I_1 , ossia la resistenza in ingresso alla porta numero 1, otteniamo

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{G^2 R_L}$$

come si voleva dimostrare.

3• proprietà: condensatore lineare alla porta 2

Adesso colleghiamo, sempre la porta 2, ad un condensatore lineare di capacità C:



Facciamo vedere questa volta che collegando un condensatore lineare di capacità C alla porta di uscita, la porta di ingresso si comporta

come un induttore di induttanza pari a C/G^2 , dove ovviamente G è la **conduttanza di girazione**.

Il discorso è formalmente identico al precedente: dobbiamo far vedere che I_1 e V_1 sono legate dalla relazione di lato tipica dell'induttore.

Intanto, la relazione di lato per il condensatore sappiamo bene che è

$$I_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

Inoltre, applicando Kirchoff abbiamo che

$$\begin{aligned} \text{LKC} &\rightarrow I_2 = -I_C \\ \text{LKT} &\rightarrow V_2 = V_C \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo che

$$I_2 = -I_C = -C \frac{dV_C}{dt} = -C \frac{dV_2}{dt}$$

Dato che $I_2 = GV_1$, abbiamo che

$$GV_1 = -C \frac{dV_2}{dt}$$

Dato anche che $V_2 = -I_1/G$, concludiamo

$$GV_1 = -C \frac{d}{dt} \left(-\frac{I_1}{G} \right) \longrightarrow \boxed{V_1 = \frac{C}{G^2} \frac{dI_1}{dt}}$$

4• proprietà: induttore lineare alla porta 2

Adesso colleghiamo la porta 2 ad un induttore lineare di induttanza L : si può facilmente dimostrare che *collegando un induttore lineare di induttanza L alla porta di uscita, la porta di ingresso si comporta come un condensatore lineare di capacità G^2L* .

In termini analitici, risulta cioè che

$$\boxed{I_1 = (G^2L) \frac{dV_1}{dt}}$$

5• proprietà: resistore non lineare controllato in corrente alla porta 2

Proviamo ora a collegare la porta 2 ad un resistore non lineare controllato in corrente, per il quale perciò vale una legge funzionale del tipo $\mathbf{V}_R = \mathbf{f}(\mathbf{l}_R)$. Facciamo allora vedere che *collegando un resistore non lineare controllato in corrente alla porta di uscita, la porta di ingresso si comporta come un resistore lineare controllato in tensione*.

Il procedimento è sempre dello stesso tipo:

relazione di lato per il resistore $\rightarrow V_R = f(I_R)$

LKC $\rightarrow I_2 = -I_R$

LKT $\rightarrow V_2 = V_R$

Dalla LKT abbiamo che

$$V_2 = V_R = f(I_R) = f(-I_2)$$

Poiché $V_2 = GI_1$, se noi poniamo $G=1$ abbiamo che

$$I_1 = f(-I_2)$$

In modo analogo, poiché $I_2 = -GV_1$ e se $G=1$, concludiamo che

$$\boxed{I_1 = f(V_1)}$$

6° proprietà: resistore non lineare controllato in tensione alla porta 2

Questo è il caso "duale" rispetto al precedente: collegando alla porta di uscita un resistore non lineare controllato in tensione, la porta di ingresso si comporta come un resistore non lineare controllato in corrente.

In termini analitici, si verifica dunque che

$$\boxed{V_1 = f(I_1)}$$

Induttori biporta

INTRODUZIONE: INDUTTORI BIORTA E VARIABILI DI PORTA

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto i cosiddetti "doppi bipoli" o "elementi biporta" e ci siamo in particolare soffermati sui "doppi bipoli resistivi" (o "resistori biporta"): abbiamo detto che un elemento biporta si definisce "resistivo" quando la sua caratteristica è del tipo

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

ossia è costituita da due relazioni funzionali tra le tensioni e le correnti alle due porte dell'elemento.

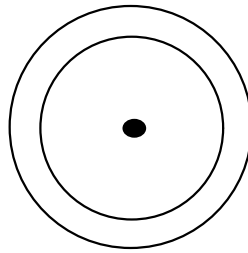
Viceversa, noi diremo che elemento biporta è un **induttore** se la sua caratteristica è del tipo

$$\begin{cases} f_1(\varphi_1, \varphi_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

ossia è una relazione funzionale tra i flussi magnetici e le correnti alle due porte del dispositivo.

ESEMPIO: TOROIDE CON DOPPIO AVVOLGIMENTO DI SPIRE

Vogliamo adesso ricavare i legami funzionali tra le due coppie corrente/flusso partendo da un particolare caso fisico. Consideriamo perciò un toroide del tipo rappresentato in figura:



Siano d_1 il diametro interno e d_2 quello esterno del toroide.

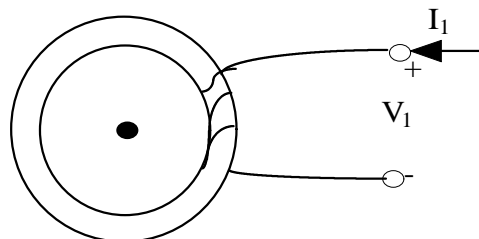
Supponiamo che questo toroide sia lineare dal punto di vista magnetico: questo significa che la cosiddetta “permeabilità magnetica” (simbolo: μ), ossia il coefficiente di proporzionalità tra il campo magnetico H e l’induzione magnetica B , è costante.

Supponiamo inoltre che il toroide sia filiforme, ossia che la differenza tra i due diametri d_1 e d_2 sia approssimativamente nulla: questa ipotesi semplificativa ci consente di approssimare i due diametri con lo stesso valore medio

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Supponiamo infine che la sezione retta del toroide sia circolare e abbia diametro quasi nullo.

Adesso disponiamo attorno al toroide un avvolgimento di spire con simmetria radiale (ossia tale che ogni piano diametrale contenga solo 2 spire):



Alimentiamo questo avvolgimento mediante un generatore di corrente: il passaggio della corrente I_1 nelle spire genera un campo magnetico; questo campo, in base alle ipotesi fatte, gode di due importanti proprietà:

- in primo luogo, esso rimane confinato all’interno del toroide, ossia non ha linee di campo esterne al toroide;
- in secondo luogo, esso risulta costante in ogni punto di una qualsiasi sezione del toroide.

Indichiamo adesso con \vec{H} il campo magnetico e con \vec{B} l’induzione magnetica: aggiungiamo anche un pedice “1” a questi simboli per distinguere i campi creati dal primo avvolgimento di spire da quelli creati dal secondo avvolgimento di spire che sarà introdotto tra poco. Siamo interessati a calcolare il flusso di campo magnetico generato dalla corrente I_1 .

Per arrivare alla espressione del flusso, consideriamo intanto una circonferenza C di diametro d e applichiamo la nota “legge di Ampere” in forma integrale:

$$\oint_C \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = N_1 I_1$$

dove N è il numero di spire facenti parte del 1° avvolgimento.

Dato che il campo magnetico \vec{H}_1 è un vettore parallelo al vettore $d\vec{l}$, il prodotto scalare all'interno dell'integrale è pari al prodotto dei moduli: si ha dunque che

$$\oint_C H_1 dl = N_1 I_1$$

Ancora, il campo magnetico è costante sezione per sezione, per cui può essere portato fuori dall'integrale:

$$H_1 \oint_C dl = N_1 I_1$$

L'integrale rimanente è chiaramente pari alla lunghezza della circonferenza, per cui si ha

$$H_1 (\pi d) = N_1 I_1$$

Il valore del campo è allora

$$H_1 = \frac{N_1}{\pi d} I_1$$

L'induzione B_1 è legata al campo H_1 dalla nota relazione $B_1 = \mu H_1$, per cui

$$B_1 = \frac{\mu N_1}{\pi d} I_1$$

Possiamo adesso ricavarci il flusso del campo magnetico, che è

$$\phi_1 = B_1 S = \frac{\mu N_1 S}{\pi d} I_1$$

Se poniamo allora

$$\Lambda = \frac{S\mu}{\pi d} = \text{"permeanza"}$$

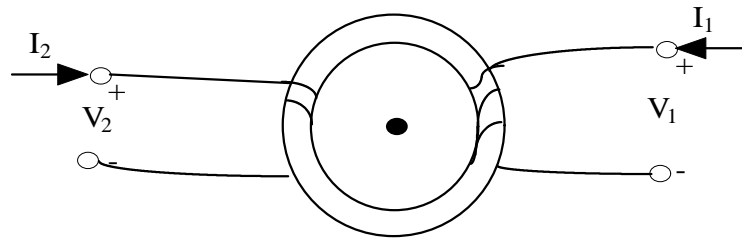
possiamo concludere che il flusso attraverso una generica sezione del toroide vale

$$\boxed{\phi_1 = \Lambda N_1 I_1}$$

Questa relazione dice dunque che *il flusso ϕ_1 generato dalla corrente I_1 è direttamente proporzionale, secondo la costante Λ definita "permeanza", al numero di spire avvolte ed alla corrente che scorre al loro interno.*

Segnaliamo che l'inverso della permeanza prende invece il nome di **riluttanza**.

Adesso, considerato lo stesso toroide, immaginiamo di avvolgere attorno ad esso un nuovo avvolgimento, di N_2 spire, che va ad aggiungersi a quello già utilizzato:



Vogliamo allora determinare il flusso generato da questo nuovo avvolgimento: se supponiamo, inizialmente, che l'avvolgimento 1 non sia percorso da corrente, è evidente che il discorso è identico a quello appena fatto, per cui risulta che il flusso del campo magnetico generato dalla corrente I_2 attraverso una generica sezione del toroide è pari a

$$\mathbf{j}_2 = \Lambda N_2 I_2$$

Supponiamo adesso che l'avvolgimento 1 sia attraversato da una corrente non nulla I_1 mentre l'avvolgimento 2 sia percorso da una corrente nulla I_2 . Possiamo così ricavare il flusso del campo magnetico generato dalla corrente I_1 e concatenato, rispettivamente, al primo ed al secondo avvolgimento: otteniamo che

$$\Phi_{11} = N_1 \phi_1 = \Lambda N_1^2 I_1$$

$$\Phi_{21} = N_2 \phi_1 = \Lambda N_1 N_2 I_1$$

Se, a questo punto, cessiamo l'alimentazione alla porta 1 ed alimentiamo invece la porta 2 con una corrente I_2 , il flusso del campo magnetico generato dalla corrente I_2 e concatenato, rispettivamente, al primo ed al secondo avvolgimento, vale

$$\Phi_{22} = N_2 \phi_2 = \Lambda N_2^2 I_2$$

$$\Phi_{12} = N_1 \phi_2 = \Lambda N_1 N_2 I_2$$

Dato che il dispositivo è lineare, possiamo adesso alimentare entrambe le porte e sovrapporre i singoli flussi concatenati per ottenere il flusso concatenato totale con ciascuno dei due avvolgimenti:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \Lambda N_1^2 I_1 + \Lambda N_1 N_2 I_2 = L_{11} I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = \Lambda N_1 N_2 I_1 + \Lambda N_2^2 I_2 = M I_1 + L_{22} I_2 \end{cases}$$

In queste due equazioni abbiamo posto

$$\begin{cases} M = \Lambda N_1 N_2 = \text{"induttanza mutua"} \\ L_{11} = \Lambda N_1^2 = \text{"auto-induttanza"} \text{ dell'avvolgimento 1} \\ L_{22} = \Lambda N_2^2 = \text{"auto-induttanza"} \text{ dell'avvolgimento 2} \end{cases}$$

Le relazioni funzionali per il nostro induttore biporta sono dunque

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}I_1 + MI_2 \\ \Phi_2 = MI_1 + L_{22}I_2 \end{cases}$$

Esse definiscono la caratteristica di un induttore biporta. Scritte in forma matriciale, abbiamo

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

La matrice a secondo membro prende il nome di **matrice induttanza** e si indica generalmente con [L].

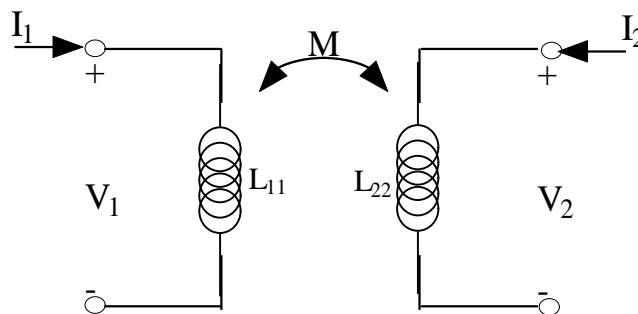
INDUTTORI ACCOPPIATI

La determinazione dei coefficiente M, L₁₁ e L₂₂ è stata in questo esempio semplice per via del fatto che era molto semplice il sistema considerato. Al contrario, la determinazione di tali coefficienti è in generale piuttosto complessa ed è questo il motivo per cui i rispettivi valori vengono di norma forniti a priori.

Ad ogni modo, la caratteristica di un induttore biporta è sempre nella forma

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}I_1 + MI_2 \\ \Phi_2 = MI_1 + L_{22}I_2 \end{cases}$$

La rappresentazione circuitale del generico induttore biporta è la seguente:



Legame tensione-corrente: controllo in corrente

A partire dalle equazioni

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}I_1 + MI_2 \\ \Phi_2 = MI_1 + L_{22}I_2 \end{cases}$$

è possibile ricavare il legame tra corrente e tensione alle due porte di un induttore biporta.

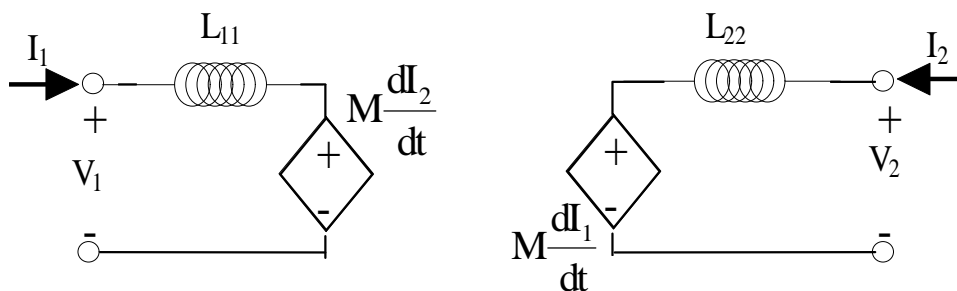
Sappiamo intanto che tensione e flusso sono legati dalla relazione $V = \frac{d\Phi}{dt}$. Allora, se deriviamo rispetto al tempo ambo i membri di quelle due equazioni, otteniamo

$$\begin{cases} V_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L_{11} \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

Questo sistema, scritto in forma matriciale, è

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Vediamo allora quale interpretazione circuitale possiamo dare di queste due relazioni. Intanto, si tratta di due equilibri di tensioni, per cui ciascuna corrisponderà ad un collegamento in serie. Tenendo conto che in ognuna compaiono entrambi le correnti, possiamo pensare subito all'uso di generatori di tensione pilotati in corrente. La rappresentazione è dunque la seguente:



Si nota subito come la grandezza pilotante per i generatori dipendenti sia la derivata prima di una corrente.

Legame tensione-corrente: controllo in tensione

Mentre prima abbiamo trovato l'espressione delle tensioni di porta in funzione delle correnti di porta, possiamo provare adesso ad esprimere le correnti in funzione delle tensioni: infatti, a partire dalla relazione matriciale

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere che

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Integrando allora entrambi i membri, abbiamo che

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^t V_1(T) dT \\ \int_{-\infty}^t V_2(T) dT \end{bmatrix}$$

Se supponiamo anche che i due induttori accoppiati siano inizialmente scarichi, ossia che

$$\int_{-\infty}^0 V_1(T) dT = 0 \qquad \int_{-\infty}^0 V_2(T) dT = 0$$

quella relazione diventa

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^t V_1(T) dT \\ \int_0^t V_2(T) dT \end{bmatrix}$$

Resta da determinare quella matrice inversa: possiamo allora porre

$$[\Gamma] = [L]^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det[L]} \begin{bmatrix} L_{22} & -M \\ -M & L_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

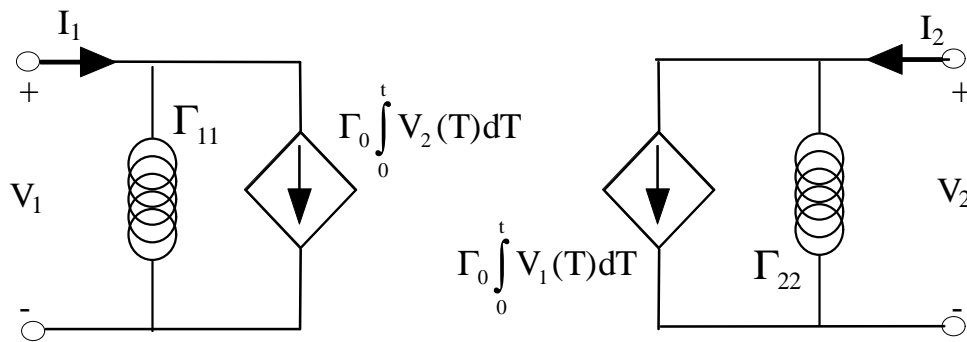
Possiamo così concludere che

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{22}}{\det[L]} & \frac{-M}{\det[L]} \\ \frac{-M}{\det[L]} & \frac{L_{11}}{\det[L]} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^t V_1(T) dT \\ \int_0^t V_2(T) dT \end{bmatrix}$$

Scritta questa relazione matriciale in forma scalare, abbiamo

$$\begin{cases} I_1 = \Gamma_{11} \int_0^t V_1(T) dT + \Gamma_{12} \int_0^t V_2(T) dT \\ I_2 = \Gamma_{21} \int_0^t V_1(T) dT + \Gamma_{22} \int_0^t V_2(T) dT \end{cases}$$

In questo caso, le due relazioni esprimono un equilibrio di corrente, per cui pensiamo subito a 2 collegamenti in parallelo: la loro rappresentazione è dunque la seguente:



In questo caso, la grandezza pilotante dei due generatori di corrente è l'integrale di una tensione.

ENERGIA IMMAGAZZINATA

Vogliamo adesso condurre uno studio energetico di un generico induttore biporta.

Per prima cosa, vogliamo valutare l'energia immagazzinata nella coppia di induttori accoppiati descritta dalla relazione matriciale

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dt} \\ \frac{dI_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Facciamo intanto l'ipotesi semplificativa che i due induttori accoppiati siano inizialmente scarichi: quindi, ancora una volta supponiamo che

$$\int_{-\infty}^0 V_1(T) dT = 0 \quad \int_{-\infty}^0 V_2(T) dT = 0$$

Negli induttori, quindi, all'istante $t=0$, non fluisce alcuna corrente e quindi nel materiale magnetico non esiste alcun campo magnetico (non c'è il fenomeno della isteresi in quanto abbiamo supposto che il modello sia lineare). Si ha dunque che

$$\varphi_1(t=0) = 0 = \varphi_2(t=0)$$

per cui è nulla anche l'energia complessiva immagazzinata all'istante $t=0$.

Valutiamo invece adesso l'energia $W(0,t)$ fornita nell'intervallo di tempo $[0,t]$ alla coppia di induttori: in termini infinitesimi abbiamo che

$$\begin{aligned} dW &= p(t)dt = (p_1(t) + p_2(t))V_1(t)I_1(t)dt + V_2(t)I_2(t)dt = \\ &= I_1(t)d\Phi_1 + I_2(t)d\Phi_2 = I_1(t)d(L_{11}I_1(t) + MI_2(t)) + I_2(t)d(MI_1(t) + L_{22}I_2(t)) = \\ &= d\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2(t) + MI_1(t)I_2(t) + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2(t)\right) \end{aligned}$$

Integrando questa quantità nell'intervallo $[0,t]$ abbiamo quanto segue:

$$W(0,t) = \int_0^t dW = \int_0^t d\left(\frac{1}{2}L_{11}I_1^2(t) + MI_1(t)I_2(t) + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2(t)\right) = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2(t) + MI_1(t)I_2(t) + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2(t)$$

Possiamo scrivere quest'ultima relazione in forma matriciale:

$$W(0,t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{I}]^T [\mathbf{L}] [\mathbf{I}]$$

dove ricordiamo che

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque valutato l'energia fornita dall'esterno ai due induttori accoppiati nell'ipotesi di energia iniziale nulla: possiamo dimostrare che l'energia $W(0,t)$ fornita dall'esterno ai due induttori accoppiati coincide (nell'ipotesi di induttori inizialmente scarichi) con l'energia immagazzinata nell'elemento all'istante t .

Infatti, all'istante $t=0$ abbiamo detto che le correnti sono nulle e quindi è nulla anche l'energia fornita, ossia $W(0,0)=0$; in un certo istante t_1 successivo, le due correnti avranno valori non nulli $I_1(t_1)$ e $I_2(t_1)$ e l'energia fornita agli induttori nell'intervallo $[0,t_1]$ sarà

$$W(0,t_1) = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2(t_1) + MI_1(t_1)I_2(t_1) + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2(t_1)$$

Adesso supponiamo che le correnti vengano nuovamente ridotte fino ad assumere il valore 0 nell'istante t_2 successivo a t_1 : risulta allora che

$$W(0,t_2) = 0$$

Questo può significare solo che tutta l'energia fornita agli induttori durante l'intervallo $[0,t_1]$ è stata restituita nel successivo intervallo $[t_1,t_2]$. Ciò dimostra che l'energia data dalla espressione

$$W(0,t) = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2(t) + MI_1(t)I_2(t) + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2(t)$$

rappresenta l'energia immagazzinata (immagazzinata, come sappiamo dalla fisica, nel campo magnetico).

IL COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO

Possiamo dunque scrivere, per ovvie ragioni fisiche, che

$$W(0, t) = \frac{1}{2} [I]^T [L] [I] \geq 0$$

e questa proprietà ci consente di affermare che la matrice $[L]$ è “semidefinita positiva”, ossia i suoi elementi presentano le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} L_{11} \geq 0 \\ L_{22} \geq 0 \\ L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0 \end{cases}$$

A questo punto si introduce il cosiddetto **coefficiente di accoppiamento**, definito come

$$K = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

Sulla base della 3° relazione tra quelle scritte poco fa, si deduce subito che

$$0 \leq K \leq 1$$

In base al valore del coefficiente K si fa allora il seguente discorso: dato che

$$|M| = K\sqrt{L_{11}L_{22}}$$

- se $K=0 \rightarrow$ è escluso l'accoppiamento magnetico per via della distanza $\rightarrow M=0$
- se $K=1 \rightarrow$ l'accoppiamento risulta perfetto $\rightarrow |M| = \sqrt{L_{11}L_{22}}$
- se $0 < K < 1 \rightarrow$ l'accoppiamento è fattibile ed è tanto più forte quanto più il valore di K si avvicina ad 1.

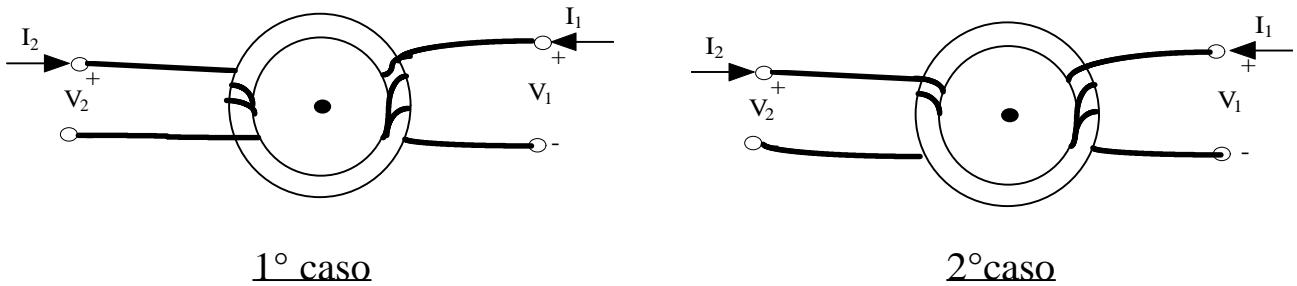
SEGNO DEL COEFFICIENTE M (MUTUA INDUTTANZA)

Il motivo per cui si introduce il coefficiente di accoppiamento K è che *il coefficiente di mutua induttanza M risulta essere affetto da segno*. Lo si osserva immediatamente dalla relazione $L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0$, che infatti corrisponde a

$$M \in \left[-\sqrt{L_{11}L_{22}}, +\sqrt{L_{11}L_{22}} \right]$$

Si dimostra in particolare che *il segno del coefficiente di mutua induttanza dipende dal senso di avvolgimento delle spire sul toroide*. Vediamo perciò quali sono i casi possibili.

Supponiamo in particolare che l'avvolgimento 1 sia fisso, mentre l'avvolgimento 2 possa essere di due tipi:



Supponiamo che le tensioni e le correnti alle due porte siano tutte costanti. Cominciamo dal secondo caso. Se I_1 e I_2 sono entrambe correnti entranti, basta usare la regola della mano destra per accorgersi che i rispettivi campi magnetici si rafforzano, per cui l'energia totale sarà

$$W(I_1, I_2) = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$$

Viceversa, se, ad esempio, I_1 è entrante mentre I_2 è uscente, allora i due campi sono diretti in direzione opposta l'uno rispetto all'altro, per cui l'energia è

$$W(I_1, -I_2) = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 - M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$$

Questa energia sarà necessariamente minore dell'energia $W(I_1, I_2)$ che si ha quando i due campi di rafforzano vicendevolmente:

$$W(I_1, -I_2) < W(I_1, I_2)$$

Sostituendo le espressioni di queste energie, si ottiene la relazione

$$\underbrace{\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2}_{W(I_1, I_2)} > \underbrace{\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 - M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2}_{W(I_1, -I_2)}$$

da cui, eliminando i termini simili, si conclude evidentemente che $M > 0$.

Adesso consideriamo il caso numero 1: anche qui, per correnti entrambe entranti l'energia è $W(I_1, I_2)$; viceversa, se I_1 è entrante e I_2 è uscente, l'energia $W(I_1, -I_2)$. Ora, applicando ancora una volta la regola della mano destra (o, ciò che è lo stesso, la regola del cavatappi) per l'orientazione dei campi, è facile trovare come il campo sia maggiore nella seconda situazione, il che significa che

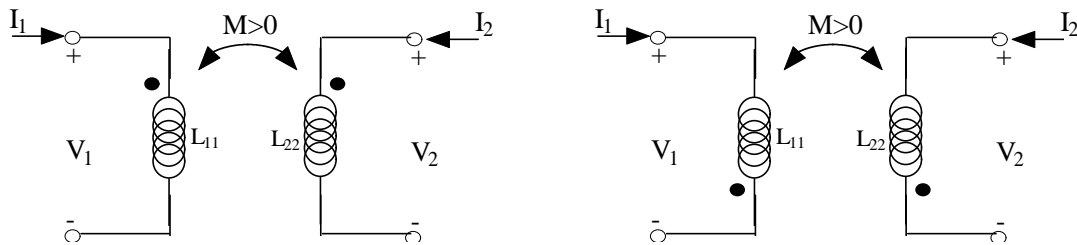
$$W(I_1, -I_2) > W(I_1, I_2)$$

da cui si ricava, in modo identico a prima, che $M < 0$.

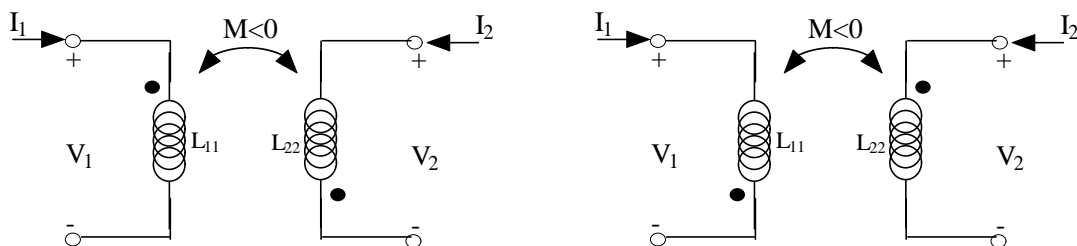
Quindi, abbiamo dimostrato che il segno del coefficiente M dipende effettivamente da come avvolgiamo le spire. Il significato fisico di tale coefficiente è il seguente: *se le correnti entrano o escono entrambe contemporaneamente, allora $M > 0$; viceversa, se una esce e l'altra entra, allora $M < 0$.*

Nella pratica, per tenere conto del senso di avvolgimento delle spire si contrassegna una delle estremità di ciascun avvolgimento. Fatto questo, il segno di M si ricava adottando la seguente convenzione:

- quando le correnti nei due induttori accoppiati entrano o escono contemporaneamente dai due contrassegni, allora si avrà $M > 0$:



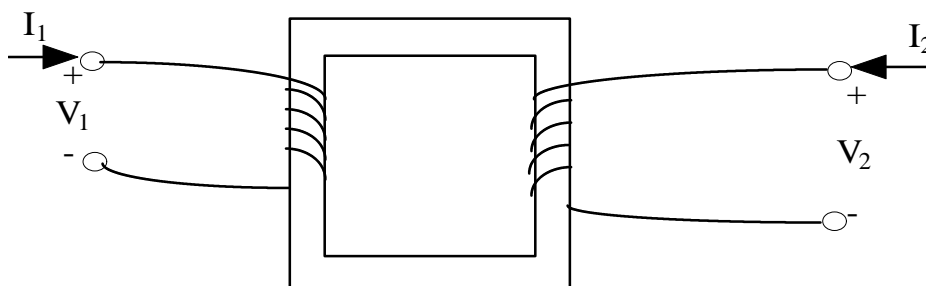
- viceversa, quando le correnti nei due induttori accoppiati entrano o escono contemporaneamente da due contrassegni diversi, allora si avrà $M < 0$:



Il trasformatore ideale

INTRODUZIONE

Un dispositivo fisico molto importante è il **trasformatore reale**, generalmente utilizzato per variare opportunamente la tensione in uscita rispetto alla tensione in ingresso o anche per altri scopi. Per studiare il trasformatore reale si fa riferimento ancora una volta ad un suo modello astratto, che prende il nome di **trasformatore ideale**:



L'idealità di questo modello deriva dall'adozione delle seguenti 3 ipotesi fondamentali:

- non ci sono flussi dispersi;
- non ci sono perdite (in particolare, non ci sono correnti parassite né perdite dovute ad isteresi e inoltre i due avvolgimenti avranno resistenza nulla);
- il materiale magnetico è costituito da una permeabilità μ infinita.

Sulla base di queste ipotesi di fondo, è possibile ritenere quanto segue:

- in primo luogo, le linee di flusso del campo magnetico generato dalle correnti nei due avvolgimenti sono tutte contenute all'interno della struttura;
- in secondo luogo, il campo magnetico è costante lungo ogni cammino chiuso scelto all'interno della struttura;
- infine, non essendoci flussi diversi, il flusso ϕ del campo magnetico risultante, attraverso una generica sezione S del trasformatore ideale, è ideale sezione per sezione.

Queste tre approssimazioni consentono di scrivere che i flussi concatenati rispettivamente al primo ed al secondo avvolgimento sono

$$\begin{cases} \Phi_1 = N_1 \phi \\ \Phi_2 = N_2 \phi \end{cases}$$

Tenendo inoltre presente che i due avvolgimenti presentano resistenza nulla (il che comporta che non ci siano cadute di tensione su di essi), possiamo anche scrivere che

$$\begin{cases} V_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ V_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

Facendo adesso il rapporto membro a membro tra queste due equazioni si ricava evidentemente che

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Ponendo allora

$$n = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{rapporto di trasformazione}$$

possiamo concludere che sussiste la relazione

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = n}$$

Questa relazione dice dunque che *il valore della tensione in ingresso è legata al valore della tensione in uscita mediante il rapporto di trasformazione*. Questo rapporto di trasformazione dipende dal numero di spire che costituiscono i due avvolgimenti: è chiaro che n può essere >1 o <1 a seconda di quale avvolgimento conti più spire.

CARATTERISTICA DEL TRASFORMATORE IDEALE

La relazione $\frac{V_1}{V_2} = n$ costituisce una delle due equazioni che costituiscono la caratteristica del trasformatore. E' possibile trovare anche una seconda equazione che lega le due correnti di porta. Infatti, applicando il teorema di Ampere ad un cammino medio C di lunghezza L , otteniamo

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

dove N_1 è il numero di spire facenti parte del 1° avvolgimento e N_2 quello del secondo avvolgimento e I_1 e I_2 le rispettive correnti.

Dato che il campo magnetico \vec{H} è un vettore parallelo al vettore $d\vec{l}$, il prodotto scalare all'interno dell'integrale è pari al prodotto dei moduli: si ha dunque che

$$\oint_C H dl = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Ancora, il campo magnetico è costante sezione per sezione, per cui può essere portato fuori dall'integrale:

$$H \oint_C dl = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

L'integrale rimanente è chiaramente pari alla lunghezza della circonferenza, per cui si ha

$$HL = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Adesso, moltiplicando e dividendo il primo membro per la quantità μS , dove μ è la permeabilità magnetica mentre S è la sezione trasversale dell'elemento, otteniamo

$$\frac{L}{\mu S} H \mu S = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Ponendo adesso

$$\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S} = \text{"riluttanza magnetica"}$$

possiamo scrivere che

$$\mathfrak{R} H \mu S = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Ma, avendo detto che $\mu=\infty$ per il trasformatore ideale, la riluttanza magnetica risulta nulla, per cui

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$$

Da questa relazione si ricava che

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n}$$

Questa è l'altra equazione che cercavamo, per cui possiamo concludere che la caratteristica del trasformatore ideale è la seguente:

$$\begin{cases} V_1 = n V_2 \\ I_2 = -n I_1 \end{cases}$$

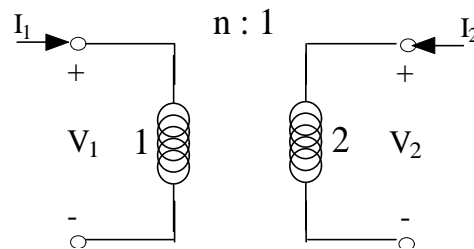
In forma matriciale, queste due equazioni diventano

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

E' evidente che questa relazione matriciale costituisce la rappresentazione ibrida 1 di un resistore biporta: ciò significa che *il trasformatore ideale può essere considerato come un particolare resistore biporta.*

Facciamo inoltre osservare che è possibile trovare, del trasformatore ideale, sia la rappresentazione ibrida 2 sia le due rappresentazioni trasmissione 1 e trasmissione 2, mentre non esistono la rappresentazione controllata in corrente né quella controllata in tensione.

Il simbolo circuitale con cui si indica il trasformatore ideale è il seguente:



La simbologia "n : 1" sta a rappresentare la proporzione

$$n : 1 = V_1 : V_2$$

che rappresenta evidentemente la relazione $V_1 = nV_2$.

PROPRIETÀ DEL TRASFORMATORE IDEALE

Il trasformatore ideale gode di una serie di importanti proprietà.

In primo luogo, è facile verificare che *il trasformatore ideale è un elemento non energetico (ossia trasparente alla potenza).*

Infatti, si ha che

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = v_1(t)i_1(t) + \left(\frac{v_1(t)}{n}\right)(-ni_1(t)) = 0$$

Ricordiamo che di questa stessa proprietà gode anche il giratore.

La seconda proprietà è la seguente: *collegando alla porta di uscita un resistore di resistenza R , la porta di ingresso si comporta come un resistore di resistenza n^2R , dove ovviamente n è il rapporto di trasformazione.*

Infatti, si ha che

$$v_1(t) = nv_2(t) = nv_R(t) = nRi_R(t) = nR(-i_2(t)) = nR(ni_1(t)) = n^2Ri_1(t)$$

da cui $\frac{v_1(t)}{i_1(t)} = n^2R$.

L'ultima proprietà è infine la seguente: *collegando alla porta di ingresso un resistore di resistenza R , la porta di uscita si comporta come un resistore di resistenza R/n^2 .*

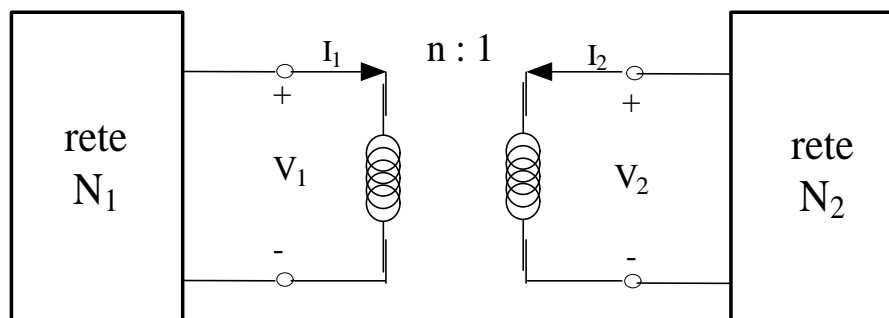
Infatti, si ha che

$$v_2(t) = \frac{v_2(t)}{n} = \frac{v_R(t)}{n} = \frac{Ri_R(t)}{n} = \frac{R(-i_1(t))}{n} = \frac{R}{n} \frac{i_2(t)}{n} = \frac{R}{n^2} i_2(t)$$

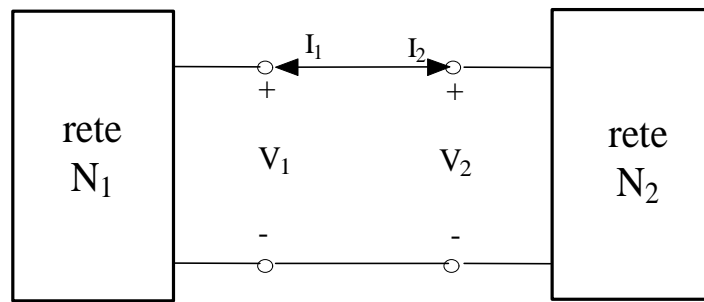
da cui $\frac{v_2(t)}{i_2(t)} = \frac{R}{n^2}$.

Osservazione

Supponiamo di avere un generico circuito e di poterlo schematizzare come nella figura seguente:



Si osserva, cioè, la presenza di due distinte **reti monoporta**, indicate genericamente con N_1 ed N_2 e contenenti elementi qualsiasi, collegate tra di loro mediante un *trasformatore ideale*. In una situazione di questo tipo, se il rapporto di trasformazione è $n = 1$, il trasformatore può evidentemente essere eliminato, in quanto il circuito è del tutto equivalente al seguente:



L'equivalenza si capisce immediatamente se si considera cosa diventa la caratteristica di funzionamento del trasformatore quando $n=1$: si ha infatti che tale caratteristica è

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ I_2 = -I_1 \end{cases}$$

ed essa appunto equivale all'assenza del trasformatore.

Fisicamente, i trasformatori aventi rapporto di trasformazione pari ad 1 vengono impiegati al fine di separare, appunto fisicamente, parti di circuiti che si vuole tenere fisicamente staccate.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>