Appunti di Campi Elettromagnetici
Capitolo 1
Richiami di calcolo vettoriale e tensoriale

I tensori ed il calcolo tensoriale

Un **tensore** è una matrice rettangolare: nella maggior parte dei casi, questa matrice presenta tre colonne ed m righe. Essendo generalmente fisso il numero di colonne, il **rango** della matrice (ossia il numero massimo di righe e/o di colonne *linearmente indipendenti*) è determinato dal numero di righe. Se n è il rango di questa matrice, la matrice possiede 3^n elementi e quindi il numero delle righe è $m=3^{n-1}$.

Due casi particolari di tensori sono lo "scalare" ed il "vettore":

- lo “**scalare**” è un tensore di rango 0, il che significa che è una matrice di $3^0=1$ componenti, il che significa che si tratta di un numero;
- il “**vettore**” è invece un tensore di rango 1, il che significa che è una matrice con 3 sole componenti.

Quando si vuol legare tra loro due vettori, per esempio il vettore campo elettrico $\vec{E}$ ed il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$, si usano le cosiddette **relazioni costitutive** o anche *relazioni di causa-effetto*: in questo caso, si tratta della relazione

$$\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E}$$

Nel caso più generale possibile, il **tensore di legame**, che in questo caso è $[\varepsilon]$ e prende il nome di *tensore della permettività dielettrica* o semplicemente **costante dielettrica** del mezzo considerato, ha rango 2, il che significa che si tratta di una matrice che comprende $3^2=9$ componenti, ossia una matrice di ordine 3*3. In questo caso, quindi, quella matrice $[\varepsilon]$ va interpretata nello spirito del calcolo matriciale:

$$\begin{bmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & \varepsilon_{XY} & \varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX} & \varepsilon_{YY} & \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX} & \varepsilon_{ZY} & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix}$$

Ogni componente del vettore $\vec{D}$ si ottiene moltiplicando la corrispondente riga di $[\varepsilon]$ per il vettore $\vec{E}$. In forma estesa, quella relazione matriciale equivale alle seguenti relazioni scalari:

$$D_X = \varepsilon_{XX}E_X + \varepsilon_{XY}E_Y + \varepsilon_{XZ}E_Z$$
$$D_Y = \varepsilon_{YX}E_X + \varepsilon_{YY}E_Y + \varepsilon_{YZ}E_Z$$
$$D_Z = \varepsilon_{ZX}E_X + \varepsilon_{ZY}E_Y + \varepsilon_{ZZ}E_Z$$

Da queste relazioni consegue che il vettore spostamento elettrico sia dato, in forma estesa, da

$$\begin{aligned} \vec{D} &= D_X\vec{a}_X + D_Y\vec{a}_Y + D_Z\vec{a}_Z = \\ &= (\varepsilon_{XX}E_X + \varepsilon_{XY}E_Y + \varepsilon_{XZ}E_Z)\vec{a}_X + (\varepsilon_{YX}E_X + \varepsilon_{YY}E_Y + \varepsilon_{YZ}E_Z)\vec{a}_Y + (\varepsilon_{ZX}E_X + \varepsilon_{ZY}E_Y + \varepsilon_{ZZ}E_Z)\vec{a}_Z \end{aligned}$$

dove, evidentemente, abbiamo indicato con $\vec{a}_X,\vec{a}_Y,\vec{a}_Z$ i **versori** degli assi x,y,z di uno spazio cartesiano a 3 dimensioni.

Quindi, *quando si vogliono legare tra loro due vettori, è necessario usare un tensore di rango 2* come la matrice $[\varepsilon]$ appena descritta. Quando si intende legare, anziché due vettori, un vettore (cioè un tensore di rango 1) ed un tensore di rango 2, si usa un tensore di rango 3, che cioè ha $3^3=27$ elementi: tanto per fare un esempio pratico, alcuni cosiddetti *effetti elettro-ottici non lineari* vengono definiti dalla variazione $\Delta[b]$ che subisce il tensore [b], detto *impermeabilità dielettrica* del materiale e pari all'inverso del tensore della permettività dielettrica $[\varepsilon]$, quando viene applicato un campo elettrico $\vec{E}$: la relazione è

$$\Delta[b] = [r] \bullet \vec{E}$$

Il tensore [r] lega dunque i due termini ed il simbolo "•", in questo caso, indica la cosiddetta **operazione di contrazione tra tensori** (si ricordi che il vettore è un tensore di rango 1), la quale dà per risultato appunto un tensore: se m ed n sono i ranghi dei due tensori da "*contrarre*", il rango del tensore che si ottiene dall'operazione è (m+n-2): nel nostro caso, se m=3 è il rango del tensore [r] e n=1 quello del tensore (vettore) campo elettrico, il rango del tensore Δ[b] è 2, come avevamo detto.

Un'altra possibile operazione tra tensori è la cosiddetta **doppia contrazione**: essa si indica con il simbolo ":"e produce un tensore di rango (m+n-4) dove m ed n sono sempre i ranghi dei due tensori di partenza.

Il calcolo vettoriale

Introduzione

Per i vettori è possibile definire alcune delle operazioni valide anche per gli scalari: in particolare, si definiscono l'operazione di **somma tra vettori** e quella di **differenza tra vettori**, effettuabili entrambe sia mediante la cosiddetta "*regola del parallelogramma*" sia sommando o sottraendo le componenti omologhe.

Si definisce inoltre l'operazione di **prodotto di uno scalare per un vettore**.

Due vettori possono essere moltiplicati tra loro in due modi diversi:

- la moltiplicazione di tipo scalare, detta appunto **prodotto scalare**, dà come risultato uno scalare;
- la moltiplicazione vettoriale, detta appunto **prodotto vettoriale**, dà come risultato un vettore.

In coordinate cartesiane, presi i vettori $\vec{A}(A_X, A_Y, A_Z)$ e $\vec{B}(B_X, B_Y, B_Z)$, che formano tra loro un certo angolo θ, abbiamo quanto segue:

$$\underbrace{\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta = A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z}_{\text{prodotto scalare}}$$

$$\underbrace{\vec{A} \times \vec{B} = \left(AB\sin\theta\right)\vec{a}_{AB} = \begin{bmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{bmatrix}}_{\text{prodotto vettoriale}}$$

Per quanto riguarda, in particolare, il prodotto vettoriale, abbiamo indicato con $\vec{a}_{AB}$ il versore avente come direzione quella della normale al piano individuato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e come verso quello ottenuto con la **regola del cavatappi** o con la **regola della mano destra** (ossia il verso tale che il vettore $\vec{A}$ si sovrapponga al vettore $\vec{B}$ descrivendo l'angolo minore).

Si definisce inoltre **prodotto misto** tra 3 vettori ciò che si indica con la seguente scrittura:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} \times \vec{C}$$

E' evidente che, in questa operazione, il primo a dover essere calcolato è il prodotto vettoriale, seguito poi da quello scalare: da ciò si deduce che il risultato di un prodotto misto è uno scalare. Proprio il fatto per cui le due operazioni debbano succedersi in quest'ordine consente di non indicare alcuna parentesi in quella relazione.

Una importante proprietà dell'operazione di prodotto misto è quella secondo cui *"ciclando" i tre vettori, il risultato non cambia:* in formule ciò significa che

$$\vec{A} \bullet \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \bullet \vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{C} \times \vec{A}$$

Si definisce, infine, **doppio prodotto vettoriale** ciò che si indica con la scrittura

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$

La prima cosa che si osserva, rispetto al prodotto misto, è che, in questo caso, è necessario specificare le parentesi: è infatti facile verificare che, in generale, risulta

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \neq \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \vec{C}$$

Per concludere, a proposito del doppio prodotto vettoriale è possibile dimostrare che sussiste la seguente relazione:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \bullet \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right)\vec{C}$$

Operatore immaginario j

Un "operatore" è semplicemente una "entità" che viene applicata (ossia "opera") alla funzione che immediatamente lo segue. Un esempio estremamente semplice di operatore è l' **operatore immaginario j**: esso, applicato alla quantità **fasore** che lo segue, la fa semplicemente ruotare di 90° in anticipo, lasciando il suo modulo invariato.

Ricordiamo, a questo proposito, che un vettore può essere anche un **fasore**, nel senso che può anche avere una fase diversa da 0 rispetto ad un altro vettore preso come riferimento (cioè con fase zero): questa situazione si presenta quando si ha a che fare con grandezze che variano nel tempo con **andamento sinusoidale**, ossia con un fattore del tipo $e^{j\omega t}$, dove ricordiamo che $\omega=2\pi f$ è la cosiddetta **pulsazione angolare**, mentre f è la **frequenza**.

Operatore differenziale "nabla"

L'operatore **nabla**, che si indica con ∇ ed è perciò detto anche **delta rovesciato**, è un **operatore differenziale.** Esso gode anche della proprietà di essere un "*operatore invariante*", nel senso che si tratta di una quantità che, in un punto assegnato dello spazio, ha un unico valore che NON dipende dal sistema di coordinate a cui si fa riferimento.

Ad ogni modo, per nostra comodità, è *opportuno definire questo operatore in coordinate rettangolari cartesiane*:

$$\boxed{\nabla[\ ] = \frac{\partial[\ ]}{\partial x}\vec{a}_X + \frac{\partial[\ ]}{\partial y}\vec{a}_Y + \frac{\partial[\ ]}{\partial z}\vec{a}_Z}$$

In base a questa definizione, *applicando l'operatore ∇ ad una certa funzione V, si ottiene come risultato un vettore le cui 3 componenti sono pari alle rispettive derivate parziali di V rispetto alle 3 componenti del riferimento considerato.*

Una cosa importante è che questo operatore non è "commutativo", il che significa che <u>va applicato solo alla quantità che lo segue</u>. Se, qualche volta, l'operatore ∇ dovesse trovarsi in coda ad una espressione, tale espressione va opportunamente interpretata e/o modificata se è necessario.

Gradiente

Con riferimento sempre alle coordinate cartesiane, data una generica funzione scalare φ(x,y,z) (quale può essere, ad esempio, la funzione potenziale elettrico, la temperatura e così via), *si definisce **gradiente** di tale funzione la somma vettoriale delle sue derivate parziali rispetto alle coordinate x,y e z:* quindi

$$\boxed{\mathrm{grad}\varphi(x,y,z) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{a}_X + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{a}_Y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{a}_Z}$$

Dal punto di vista algebrico, il calcolo del gradiente di una funzione scalare è una operazione del tipo *moltiplicazione di uno scalare per un vettore*. Facciamo osservare che, mentre la scrittura ∇φ è generica, ossia non specifica per un particolare sistema di riferimento, il secondo membro di quella relazione rappresenta invece specificamente il gradiente della funzione φ in coordinate cartesiane.

Derivata direzionale

Ci mettiamo sempre in un sistema di coordinate cartesiane Oxyz. Consideriamo una funzione scalare φ(x,y,z), la quale sarà rappresentata, nel suddetto sistema di riferimento, mediante una curva φ. Fissiamo inoltre una direzione ℓ nello spazio cartesiano considerato: in queste ipotesi, si definisce **derivata di φ nella direzione** ℓ l'espressione

$$\boxed{\frac{d\varphi(x,y,z)}{d\ell} = \frac{1}{d\ell}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)}$$

Flusso di un vettore

Supponiamo di avere una funzione vettoriale qualsiasi $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z)$ e supponiamo di avere un elemento di superficie dS avente come normale positiva la semiretta $\vec{n}$. Si chiama allora **flusso elementare** (si indica con **dφ**) della funzione considerata attraverso la superficie dS la quantità

$$d\varphi = \vec{E} \bullet \vec{n}dS = \vec{E} \bullet d\vec{S}$$

dove $d\vec{S}$ è il vettore $\vec{n}dS$ avente per modulo l'area dS dell'elemento di superficie e per direzione e verso quelli della normale orientata $\vec{n}$ a dS e dove $\vec{E}$ è il valore che la funzione vettoriale assume nel punto in cui si trova dS.

Per avere una idea chiara di cosa sia il flusso di un campo vettoriale pensiamo ai fluidi: il campo vettoriale $\vec{E}$ rappresenterebbe la distribuzione di velocità in un fluido incomprimibile, e quindi il flusso definisce il volume di fluido che passa attraverso la superficie dS nell'unità di tempo. Infatti il fattore (scalare) $\vec{E} \bullet \vec{n}dS$ rappresenta il volume del prisma avente per base dS e per altezza la componente della velocità nella direzione ortogonale a dS.

Se la superficie attraverso la quale vogliamo calcolare il flusso è finita, è possibile sfruttare il **principio di sovrapposizione** sommando tutti i contributi infinitesimi attraverso gli elementi dS di tale superficie: in tal modo il flusso totale del campo $\vec{E}$ attraverso la superficie S sarà dato da

$$\varphi = \int_S \vec{E} \bullet \vec{n}dS = \int_S EdS\cos\theta$$

dove θ è l'angolo che il campo $\vec{E}$ forma con la normale positiva all'elemento generico dS considerato.

Divergenza di un vettore

Supponiamo di avere una funzione vettoriale qualsiasi $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z)$: consideriamo una superficie chiusa S che racchiude un volume infinitesimo $\Delta\tau$; indicata con $\vec{n}$ la "normale uscente" dal volume, il flusso del vettore $\vec{E}$ uscente da S vale

$$\varphi = \int_S \vec{E} \bullet \vec{n}dS$$

Si definisce allora **divergenza** (o anche **convergenza**, dato il significato fisico di questa quantità) di $\vec{E}$ il limite, per $\Delta\tau \to 0$, del rapporto tra questo flusso ed il valore di $\Delta\tau$, ossia la quantità

$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla \bullet \vec{E} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\int_{SUP} \vec{E} \bullet \vec{n}dS}{\Delta\tau}$$

Dal punto di vista fisico, *la divergenza di un vettore rappresenta il flusso del vettore stesso, attraverso una superficie chiusa, per unità di volume.*

In coordinate cartesiane si ha in particolare che

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_X}{\partial x} + \frac{\partial E_Y}{\partial x} + \frac{\partial E_Z}{\partial x}$$

dal che si capisce meglio che la divergenza di un vettore è una quantità scalare.

La divergenza del vettore $\vec{E}$ si indica anche con il simbolo $\nabla \bullet \vec{E}$ che indica il prodotto scalare tra l'operatore ∇ ed il vettore stesso $\vec{E}$: si ha infatti che

$$\nabla \bullet \vec{E} = \left[\frac{\partial[\ ]}{\partial x}\vec{a}_X + \frac{\partial[\ ]}{\partial y}\vec{a}_Y + \frac{\partial[\ ]}{\partial z}\vec{a}_Z\right] \bullet [E_X\vec{a}_X + E_Y\vec{a}_Y + E_Z\vec{a}_Z] =$$

$$= \frac{\partial E_X}{\partial x}(\vec{a}_X \bullet \vec{a}_X) + \frac{\partial E_Y}{\partial y}(\vec{a}_Y \bullet \vec{a}_Y) + \frac{\partial E_Z}{\partial z}(\vec{a}_Z \bullet \vec{a}_Z) = \frac{\partial E_X}{\partial x} + \frac{\partial E_Y}{\partial y} + \frac{\partial E_Z}{\partial x} = \mathrm{div}\vec{E}$$

Circuitazione di un vettore

Data la generica funzione vettoriale $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ e data una curva chiusa C, si definisce **circuitazione di** $\vec{E}$ **lungo C** la quantità

$$\oint_C \vec{E} \bullet \tau d\ell$$

dove abbiamo indicato con τ il versore in ogni punto tangente alla curva e con $d\ell$ il generico elementino di curva C.

Rotore

Consideriamo sempre la generica funzione vettoriale $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$: calcolare il **rotore** o il **rotazionale** di $\vec{E}$ significa misurarne la circolazione netta intorno al contorno di un elemento infinitesimo di superficie ΔS. In altre parole, *il rotore rappresenta la rapidità della rotazione angolare in presenza di vortici.*

In termini analitici, indicato con τ il versore tangente e con $d\ell$ l'elemento di curva chiusa C (perimetro), si definisce **rotore di** $\vec{E}$ **in un punto P** il vettore la cui componente secondo la normale $\vec{n}$ alla superficie S che si appoggia alla curva C è data da

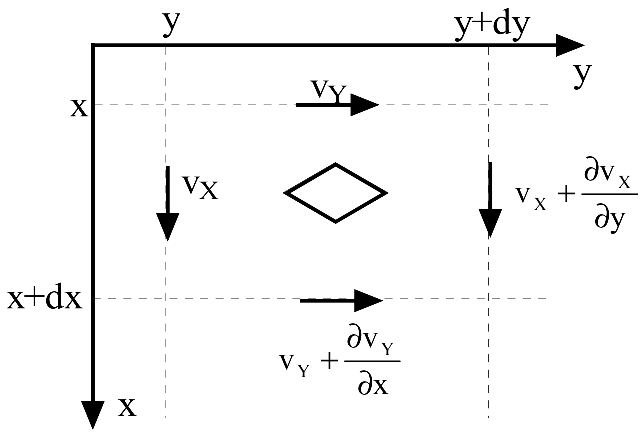
$$\mathrm{rot}\vec{E} \bullet \vec{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{E} \bullet \tau d\ell}{\Delta S}$$

In coordinate cartesiane, è possibile calcolare rapidamente il rotore mediante la seguente relazione:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix}$$

Spesso, così come la divergenza di un vettore $\vec{E}$ si indica col simbolo $\nabla \bullet \vec{E}$ per indicare che si tratta di uno scalare, il rotore di $\vec{E}$ si indica col simbolo $\nabla \times \vec{E}$ in quanto <u>si tratta di un vettore</u>: d'altra parte, la scrittura $\nabla \times \vec{E}$ indica il prodotto vettoriale tra l'operatore ∇ ed il vettore stesso $\vec{E}$ e abbiamo visto che tale prodotto vettoriale si può effettivamente calcolare come determinante della matrice indicata poco fa.

Per intuire il significato fisico del rotore, consideriamo una foglia trascinata da una corrente di acqua: se la velocità di trascinamento ha solo la componente lungo la direzione y, la foglia segue il corso del flusso senza alcuna rotazione; tuttavia, se ci sono dei vortici, la foglia, oltre a traslare, ruota. Il senso di rotazione o la velocità angolare in ogni punto è una misura del rotore della velocità della foglia in quel punto.



Nella figura, la rotazione della foglia avviene intorno all'asse z perpendicolare al disegno. Si nota, inoltre che, se $\frac{\partial v_X}{\partial y} > 0$, la foglia è spinta a ruotare in senso orario, mentre se $\frac{\partial v_Y}{\partial x} > 0$, la rotazione è indotta in senso antiorario. Quindi, il tasso di rotazione intorno all'asse z è

$$\frac{\partial v_Y}{\partial x} - \frac{\partial v_X}{\partial y}$$

e questa è, per definizione, la componente del rotore di $\vec{v}$ nella direzione z.

Laplaciano

Data una quantità scalare φ, si definisce **laplaciano di φ** la quantità

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \bullet \nabla \varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)$$

E' evidente che si tratta di una quantità scalare, dato che gradφ è un vettore del quale bisogna poi calcolare la divergenza (cioè la somma delle derivate parziali).

E' possibile anche calcolare il laplaciano di un vettore: indicato con $\vec{A}$ un generico vettore, il suo laplaciano sarà evidentemente $\nabla^2 \vec{A}$. Per calcolare $\nabla^2 \vec{A}$, possiamo fare il discorso seguente: consideriamo la quantità vettoriale $\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$; calcoliamo il rotore di questa quantità:

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \mathrm{rot}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)$$

Adesso, sappiamo che, dati tre vettori generici, sussiste l'uguaglianza $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \bullet \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right)\vec{C}$: applicandola nel nostro caso, abbiamo che

Autore: Sandro Petrizzelli

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \left(\nabla \bullet \vec{A}\right)\nabla - \left(\nabla \bullet \nabla\right)\vec{A} = \nabla\nabla \bullet \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

e da qui ricaviamo quindi che

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = \nabla\nabla \bullet \vec{A} - \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)}$$

Alcune identità di calcolo vettoriale

Vogliamo qui mostrare alcune relazioni vettoriali di notevole utilità pratica.

Supponiamo di avere un generico vettore $\vec{A}$ e di calcolarne il rotore $\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$; questo rotore è a sua volta un vettore e possiamo calcolarci la sua divergenza: abbiamo che

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \mathrm{div}\left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \bullet \left(\nabla \times \vec{A}\right)$$

Il vettore $\left(\nabla \times \vec{A}\right)$ è, per definizione di prodotto vettoriale, ortogonale sia a ∇ sia ad $\vec{A}$; di conseguenza, il prodotto scalare di tale vettore con ∇ non può che dare 0, visto che il prodotto scalare di due vettori ortogonali è sempre nullo.

In definitiva, la prima relazione che abbiamo trovato è che

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = 0 \qquad \forall \vec{A}}$$

Adesso consideriamo una generica quantità scalare φ: di questa quantità possiamo calcolare il gradiente gradφ: in coordinata cartesiane, sappiamo che

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{a}_X + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{a}_Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{a}_Z$$

Questo gradiente è un vettore, del quale possiamo calcolare il rotazionale:

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \nabla \times \left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \nabla \times \nabla\varphi = \begin{bmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = 0$$

La seconda relazione cui siamo pervenuti è dunque

$$\boxed{\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\varphi\right) = 0 \qquad \forall \varphi}$$

Adesso consideriamo un generico vettore $\vec{A}$ e un generico scalare φ; la quantità $\varphi\vec{A}$ è a sua volta un vettore, del quale possiamo perciò calcolare sia la divergenza sia il rotore: abbiamo che

$$\mathrm{div}\left(\varphi\vec{A}\right)=\nabla\bullet\varphi\vec{A}=\nabla\varphi\bullet\vec{A}+\varphi\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)$$
$$\mathrm{rot}\left(\varphi\vec{A}\right)=\nabla\times\varphi\vec{A}=\nabla\varphi\times\vec{A}+\varphi\left(\nabla\times\vec{A}\right)$$

dove, chiaramente, abbiamo applicato la proprietà distributiva del prodotto scalare e quella distributiva del prodotto vettoriale.

Ora consideriamo due distinti vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e consideriamo successivamente il loro prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$; questo prodotto vettoriale è ancora un vettore, del quale possiamo calcolare ancora una volta divergenza e rotore: applicando sempre le proprietà, rispettivamente, del prodotto scalare e di quello vettoriale, abbiamo che

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\bullet\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\times\vec{A}\bullet\vec{B}-\nabla\times\vec{B}\bullet\vec{A}$$
$$\mathrm{rot}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\bullet\nabla\right)\vec{A}-\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\bullet\nabla\right)\vec{B}+\left(\nabla\bullet\vec{B}\right)\vec{A}$$

Queste formule si ottengono *pensando* al risultato finale ed alla proprietà di derivazione (solita) del prodotto di due quantità. Facciamo osservare che <u>tutte le relazioni appena dimostrate non dipendono dal sistema di riferimento considerato</u>.

Esercizio

Proviamo a verificare la relazione $\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\times\vec{A}\bullet\vec{B}-\nabla\times\vec{B}\bullet\vec{A}$ con riferimento alle coordinate cartesiane.

In primo luogo, il prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$, in coordinate cartesiane, è dato da

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{bmatrix}\vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z\\ A_X & A_Y & A_Z\\ B_X & B_Y & B_Z\end{bmatrix}=A_YB_Z\vec{a}_X+A_ZB_X\vec{a}_Y+A_XB_Y\vec{a}_Z-A_YB_X\vec{a}_Z-A_ZB_Y\vec{a}_X-A_XB_Z\vec{a}_Y=$$
$$=\left(A_YB_Z-A_ZB_Y\right)\vec{a}_X+\left(A_ZB_X-A_XB_Z\right)\vec{a}_Y+\left(A_XB_Y-A_YB_X\right)\vec{a}_Z$$

Del vettore che è venuto fuori dobbiamo calcolare la divergenza:

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{\partial\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_X}{\partial x}+\frac{\partial\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_Y}{\partial x}+\frac{\partial\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_Z}{\partial x}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(A_YB_Z-A_ZB_Y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_ZB_X-A_XB_Z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_XB_Y-A_YB_X\right)$$

Possiamo anche calcolare quelle derivate parziali:

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A_Y B_Z\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(A_Z B_Y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_Z B_X\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(A_X B_Z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_X B_Y\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(A_Y B_X\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial A_Y}{\partial x}B_Z+\frac{\partial B_Z}{\partial y}A_Y\right)+\left(-\frac{\partial A_Z}{\partial x}B_Y-\frac{\partial B_Y}{\partial x}A_Z\right)+\left(\frac{\partial A_Z}{\partial y}B_X+\frac{\partial B_X}{\partial y}A_Z\right)+\left(-\frac{\partial A_X}{\partial y}B_Z-\frac{\partial B_Z}{\partial x}A_X\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial A_X}{\partial z}B_Y+\frac{\partial B_Y}{\partial y}A_X\right)+\left(-\frac{\partial A_Y}{\partial z}B_X-\frac{\partial B_X}{\partial x}A_Y\right)$$

A questo punto, possiamo disporre in modo più opportuno i 12 termini che abbiamo trovato: in particolare, possiamo scrivere che

$$\mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial A_Z}{\partial y}B_X+\frac{\partial A_X}{\partial z}B_Y+\frac{\partial A_Y}{\partial x}B_Z-\frac{\partial A_X}{\partial y}B_Z-\frac{\partial A_Z}{\partial x}B_Y-\frac{\partial A_Y}{\partial z}B_X\right)+$$

$$+\left(-\frac{\partial B_Z}{\partial x}A_X-\frac{\partial B_X}{\partial z}A_Y-\frac{\partial B_Y}{\partial x}A_Z+\frac{\partial B_X}{\partial y}A_Z+\frac{\partial B_Z}{\partial x}A_Y+\frac{\partial B_Y}{\partial x}A_X\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_X & A_Y & A_Z\end{vmatrix}\bullet\vec{B}-\begin{vmatrix}\vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}\bullet\vec{A}=\nabla\times\vec{A}\bullet\vec{B}-\nabla\times\vec{B}\bullet\vec{A}$$

Teoremi degli integrali

Questi teoremi permettono di passare da relazioni in forma differenziale a relazioni equivalenti in forma integrale e viceversa.

Sia data la generica funzione vettoriale $\vec{E}$; siano inoltre S una superficie chiusa, che racchiude un volume τ, e $\vec{n}$ la normale uscente dal volume. Il flusso di $\vec{E}$ attraverso S è dato, come sappiamo, da

$$\varphi=\int_S \vec{E}\bullet\vec{n}dS$$

Il **teorema di Gauss** o **teorema della divergenza** afferma che quell'integrale di superficie può essere trasformato in un integrale di volume e precisamente

$$\int_S \vec{E}\bullet\vec{n}dS=\int_\tau \mathrm{div}\vec{E}d\tau$$

Data adesso una curva chiusa C e considerato un suo elemento infinitesimo $d\ell$, sappiamo che si definisce circuitazione di $\vec{E}$ lungo C la quantità

$$\oint_C \vec{E}\bullet\tau d\ell$$

Allora, il **teorema di Stokes** o **teorema della circolazione** afferma che quell'integrale di linea può essere trasformato in un integrale di superficie e precisamente

$$\oint_C \vec{E} \bullet \tau d\ell = \int_S \text{rot}\vec{E} \bullet \vec{n} dS$$

dove S è una qualsiasi superficie che si appoggia sulla linea chiusa C.

Teoremi di Green

Consideriamo due generiche quantità scalari Ψ e φ: di una qualsiasi di esse, ad esempio Ψ, possiamo calcolare il gradiente $\nabla\Psi$; questa quantità $\nabla\Psi$ rappresenta un vettore e, se la moltiplichiamo per l'altro scalare φ, otteniamo un nuovo vettore $\varphi(\nabla\Psi)$. Possiamo applicare il teorema della divergenza a questo vettore: abbiamo in tal modo che

$$\int_S \varphi(\nabla\Psi) \bullet \vec{n} dS = \int_\tau \text{div}[\varphi(\nabla\Psi)] d\tau$$

D'altra parte, usando le identità vettoriali dimostrate in precedenza, sappiamo che

$$\text{div}[\varphi(\nabla\Psi)] = \nabla \bullet [\varphi(\nabla\Psi)] = \nabla\varphi \bullet \nabla\Psi + \varphi\nabla^2\Psi$$

per cui possiamo anche scrivere che

$$\int_S \varphi(\nabla\Psi) \bullet \vec{n} dS = \int_\tau [\nabla\varphi \bullet \nabla\Psi + \varphi\nabla^2\Psi] d\tau = \int_\tau (\nabla\varphi \bullet \nabla\Psi) d\tau + \int_\tau \varphi\nabla^2\Psi d\tau$$

A questo punto, ripetiamo lo stesso identico discorso, ma considerando non più il vettore $\varphi(\nabla\Psi)$, ma il vettore $\Psi(\nabla\varphi)$: è chiaro che otteniamo

$$\int_S \Psi(\nabla\varphi) \bullet \vec{n} dS = \int_\tau (\nabla\Psi \bullet \nabla\varphi) d\tau + \int_\tau \Psi\nabla^2\varphi d\tau$$

Adesso, ricordando che il prodotto scalare è commutativo, possiamo affermare che $\nabla\Psi \bullet \nabla\varphi = \nabla\varphi \bullet \nabla\Psi$: di conseguenza, le due relazioni integrali cui siamo pervenuti sono

$$\int_S \varphi(\nabla\Psi) \bullet \vec{n} dS = \int_\tau (\nabla\varphi \bullet \nabla\Psi) d\tau + \int_\tau \varphi\nabla^2\Psi d\tau$$

$$\int_S \Psi(\nabla\varphi) \bullet \vec{n} dS = \int_\tau (\nabla\varphi \bullet \nabla\Psi) d\tau + \int_\tau \Psi\nabla^2\varphi d\tau$$

La prima di queste relazioni prende il nome di **prima identità di Green in forma scalare** e, come visto, non è altro che la conseguenza del teorema della divergenza applicato al vettore $\varphi(\nabla\Psi)$.

Sottraendo membro a membro quelle due relazioni e riducendo entrambi i membri ad un solo integrale, possiamo dunque concludere che

$$\boxed{\int_S [\varphi(\nabla\Psi) - \Psi(\nabla\varphi)] \bullet \vec{n} dS = \int_\tau (\varphi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\varphi) d\tau}$$

Questa relazione integrale prende il nome di **seconda identità di Green in forma scalare**. E' chiaro, sempre in base al teorema della divergenza, che l'equivalente differenziale di quella relazione integrale è

$$\varphi(\nabla\Psi)-\Psi(\nabla\varphi)=\varphi\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\varphi$$

Tornando alla prima identità di Green, possiamo osservare che prima ne è stata esposta la cosiddetta "*forma scalare*", che si differenzia dalla "*forma vettoriale*", che si ottiene nel modo seguente: consideriamo due distinti vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$; del secondo vettore calcoliamo il rotazionale $\mathrm{rot}\vec{B}=\nabla\times\vec{B}$; questo rotazionale è a sua volta un vettore e possiamo perciò moltiplicarlo vettorialmente per il vettore $\vec{A}$: otteniamo il vettore

$$\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)$$

A questo vettore possiamo ancora una volta applicare il teorema della divergenza: in base a questo teorema, si ha che

$$\int_S\left[\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\right]\bullet\vec{n}dS=\int_\tau \mathrm{div}\left[\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\right]d\tau$$

D'altra parte, in base alle identità vettoriali dimostrate in precedenza, possiamo anche scrivere che

$$\mathrm{div}\left[\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\right]=\left(\nabla\times\vec{A}\right)\bullet\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\vec{A}\bullet\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)$$

per cui, sostituendo nella relazione precedente, otteniamo

$$\boxed{\int_S\left[\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\right]\bullet\vec{n}dS=\int_\tau\left(\nabla\times\vec{A}\right)\bullet\left(\nabla\times\vec{B}\right)d\tau-\int_\tau\vec{A}\bullet\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)d\tau}$$

Questa è la **prima identità di Green in forma vettoriale**.

In modo del tutto analogo, si ottiene anche la **seconda identità di Green in forma vettoriale**: per prima cosa, dobbiamo scambiare i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, in modo da ottenere che

$$\int_S\left[\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]\bullet\vec{n}dS=\int_\tau\left(\nabla\times\vec{B}\right)\bullet\left(\nabla\times\vec{A}\right)d\tau-\int_\tau\vec{B}\bullet\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)d\tau$$

Tenendo conto della proprietà commutativa del prodotto scalare (applicata al primo integrale a secondo membro), questa equivale anche a

$$\int_S\left[\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]\bullet\vec{n}dS=\int_\tau\left(\nabla\times\vec{A}\right)\bullet\left(\nabla\times\vec{B}\right)d\tau-\int_\tau\vec{B}\bullet\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)d\tau$$

Sottraendo membro a membro quest'ultima relazione dalla prima identità di Green (in forma vettoriale) e riducendo entrambi i membri ad un solo integrale, possiamo dunque concludere che

$$\boxed{\int_S\left[\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]\bullet\vec{n}dS=-\int_\tau\left[\vec{B}\bullet\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\bullet\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\right]d\tau}$$

e questa è appunto la **seconda identità di Green in forma vettoriale**.

Trasformazioni di coordinate

Nella soluzione dei problemi di campi elettromagnetici, conviene utilizzare di volta in volta il sistema di riferimento più adatto alle caratteristiche geometriche del problema in esame. Per esempio, in strutture rettangolari conviene usare il **sistema cartesiano**, in sistemi a simmetria sferica le **coordinate sferiche**, in sistemi a simmetria ellittica (come, per esempio, alcuni tipi di fibre ottiche) le **coordinate ellittiche** e così via. E' chiaro, dunque, che conviene trovare delle relazioni che consentano di passare da un sistema di riferimento all'altro in modo più o meno veloce.

Consideriamo 3 funzioni u_1 , u_2 e u_3 che godano della proprietà di essere continue e differenzialibili nelle tre variabili x_1, x_2 e x_3: possiamo perciò rappresentare tali funzioni nella forma

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1,x_2,x_3) \\ u_2 &= u_2(x_1,x_2,x_3) \\ u_3 &= u_3(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

Queste tre funzioni, con queste semplici ipotesi, costituiscono una *trasformazione dalle coordinate* (x_1,x_2,x_3) *alle coordinate* (u_1,u_2,u_3), ossia consentono di passare dal sistema di riferimento (x_1,x_2,x_3) al sistema di riferimento (u_1,u_2,u_3).

Per definizione, il differenziale di ciascuna delle funzioni (u_1,u_2,u_3) è dato dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned} du_1 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} dx_k \\ du_2 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} dx_k \\ du_3 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_3}{\partial x_k} dx_k \end{aligned}$$

Queste tre relazioni si possono anche scrivere in forma matriciale nel modo seguente:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{T} d\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}$$

In questa relazione, **T** prende il nome di **matrice di trasformazione**. Il determinante di questa matrice si chiama invece **Jacobiano** e si indica, in forma compatta, come

$$\mathbf{J} = |\mathbf{T}| = \frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}$$

E' possibile dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\mathbf{J} = \nabla u_1 \bullet \nabla u_2 \times \nabla u_3$$

Nel caso in cui lo Jacobiano sia diverso da zero, la matrice **T** può essere invertita e la relazione matriciale di prima può essere usata per ricavare d**x**:

$$d\mathbf{x} = \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix} = \mathbf{T}^{-1} d\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{vmatrix}$$

Coordinate curvilinee

Supponiamo di avere un punto P_0 individuato dalle coordinate $(x_{10}\ ,\ x_{20}\ ,\ x_{30})$ relative al sistema di coordinate $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3)$. Per passare al sistema di coordinate $(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$ ci basta applicare le opportune trasformazioni descritte nel paragrafo precedente, per cui le nuove coordinate saranno

$$u_{10} = u_1(x_{10}, x_{20}, x_{30})$$
$$u_{20} = u_2(x_{10}, x_{20}, x_{30})$$
$$u_{30} = u_3(x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

Il punto P_0 risulta dunque collocato nella intersezione delle superfici coordinate $u_1=u_{10}$, $u_2=u_{20}$ e $u_3=u_{30}$. Queste superfici si intersecano lungo 3 curve, che si chiamano **curve coordinate**: é chiaro che, lungo una qualsiasi di queste curve, può variare una sola delle tre coordinate; per esempio, lungo la curva di equazioni

$$\begin{cases} u_1 = u_{10} \\ u_2 = u_{20} \end{cases}$$

l'unica coordinata che può variare è u_3. Fissato un valore anche per questa coordinata, viene individuato un punto.

Le tre curve coordinate si intersecano a loro volta in un punto, nel quale possiamo perciò costruire un nuovo sistema di riferimento: in particolare, possiamo costruire un sistema di coordinate rettangolari dove i 3 assi sono individuati dai tre versori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ diretti lungo la tangente alle tre curve coordinate nella direzione delle u_i (i=1,2,3) uscenti.

Queste u_i (i=1,2,3) si chiamano **coordinate curvilinee**: se esse si intersecano ad angolo retto, costituiscono un **sistema di riferimento curvilineo ortogonale** e i tre versori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono ovviamente ortogonali tra loro.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry