# Appunti di
# Elaborazione numerica dei segnali
# Capitolo 2 - **DFT (parte I)**



## DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

Consideriamo un generico segnale s(t) tempo-continuo passa-basso (per comodità) e supponiamo di sottoporlo ad un campionamento con frequenza di campionamento $f_C=1/T_C$ che rispetti il *teorema di Nyquist*[1]. Sappiamo bene che il corrispondente segnale campionato si può esprimere in due modi del tutto equivalenti:

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)\delta(t - nT_C) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_C)$$

Mentre nel capitolo precedente abbiamo usato solo la seconda di queste espressioni, adesso ci serviremo soprattutto della prima, in modo sostanzialmente da esprimere $s_C(t)$ come una sequenza di numeri:

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)\delta(t - nT_C)$$

Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier di questo segnale. Potremmo seguire la strada seguita nel capitolo precedente, in cui si considerava $s_C(t)$ come prodotto di s(t) per il *pettine di campionamento* e quindi si prendeva, in frequenza, la convoluzione dei due spettri. Al contrario, in

[1] Ciò significa, come ben sappiamo, che la frequenza di campionamento è superiore al doppio della banda (monolatera) di s(t)

questa sede scegliamo un’altra strada e precisamente quella di applicare la *proprietà di linearità* della trasformata di Fourier, in base alla quale possiamo calcolare $S_C(f)$ come somma delle trasformate dei singoli termini $s(nT_C)\delta(t-nT_C)$: ricordando allora che la trasformata di un impulso è un esponenziale complesso, abbiamo che

$$S_C(f) = F\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)\delta(t-nT_C)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[s(nT_C)\delta(t-nT_C)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)F[\delta(t-nT_C)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)e^{-j2\pi fnT_C}$$

***Osservazione***

Sull’espressione ottenuta è importante fare una osservazione: se consideriamo la definizione di *trasformata di Fourier* di un generico segnale s(t) tempo-continuo, sappiamo che

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Nell’ipotesi che il segnale s(t) sia una somma di impulsi negli istanti $nT_C$, quell’integrale può essere tranquillamente sostituito da una sommatoria, il che significa scrivere che

$$S(f) = T_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)e^{-j2\pi fnT_C}$$

dove il fattore moltiplicativo $T_C$ tiene conto della dimensionalità dell’integrale (che è un integrale appunto nel tempo).

Confrontando allora l’espressione appena riportata con quella prima ottenuta per $S_C(f)$, si nota che proprio il fattore moltiplicativo $T_C$ contribuisce a distinguere le due. Questo ci serve ad evidenziare che lo spettro trovato prima per $S_C(f)$ non è una precisa approssimazione della trasformata di Fourier, proprio per la mancanza del termine moltiplicativo $T_C$.

La formula ricavata per $S_C(f)$ non è chiaramente implementabile in un calcolatore, in quanto la sommatoria è estesa ad infiniti termini, mentre noi non abbiamo una memoria di capacità infinita né possiamo aspettare per un tempo infinito l’esito del campionamento. Al contrario, noi possiamo effettuare la nostra osservazione del segnale s(t) solo per un tempo finito, il che equivale a considerare un numero finito di campioni.

Supponiamo allora di aver preso solo N campioni del nostro segnale s(t), numerati da 0 ad N-1: abbiamo che

$$s_C(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C)\delta(t-nT_C) \longrightarrow S_C(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C)e^{-j2\pi fnT_C}$$

Abbiamo scelto evidentemente i campioni partendo da t=0 e finendo in $t=(N-1)T_C$.

E’ intuitivo aspettarsi che il contenuto informativo di questo segnale campionato sia diverso da quello ottenuto con un campionamento di durata infinita. Cerchiamo allora di renderci conto di questo fatto con una analisi quantitativa.

L’operazione di considerare solo un numero finito di campioni del nostro segnale s(t) può essere interpretata in due modi, perfettamente equivalenti:

- dato s(t), lo *finestriamo*, cioè ne consideriamo l’andamento entro un dato intervallo di tempo di durata finita, e poi lo campioniamo;

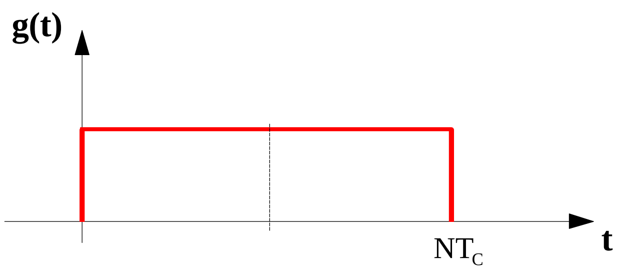
- il secondo modo è invece quello di campionare prima s(t) e poi di selezionare un numero finito di campioni.

*Possiamo cioè indifferentemente ritenere che il campionamento venga fatto prima o dopo la finestratura,* visto che il risultato finale è lo stesso. Ragioniamo allora in frequenza, supponendo di finestrare prima il segnale e poi di campionare.

L'operazione di **finestratura** consiste nella moltiplicazione del segnale per un rettangolo di durata finita (ed altezza unitaria). Indichiamo tale durata con $NT_C$, dove $T_C$ è il periodo di campionamento (mentre, ovviamente, N rappresenta il numero di campioni che andremo a prendere successivamente): il segnale finestrato ha espressione

$$s_f(t) = s(t) \cdot g(t) = s(t) \cdot \mathrm{rect}\left( \frac{t - \frac{NT_C}{2}}{NT_C} \right)$$

dove l'espressione apparentemente complicata del rettangolo deriva dal fatto che esso non è centrato nell'origine, ma nell'istante $NT_C/2$, visto che si suppone di estendere la finestratura da t=0 a $t=NT_C$.




Per calcolare lo spettro di $s_f(t)$, dobbiamo dunque convolvere i due spettri: lo spettro del rettangolo g(t), applicando la definizione, è

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{0}^{NT_C} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} \left[ e^{-j2\pi ft} \right]_0^{NT_C} = \ldots = NT_C \frac{\sin(\pi f NT_C)}{\pi f NT_C} e^{-j\pi f NT_C}$$

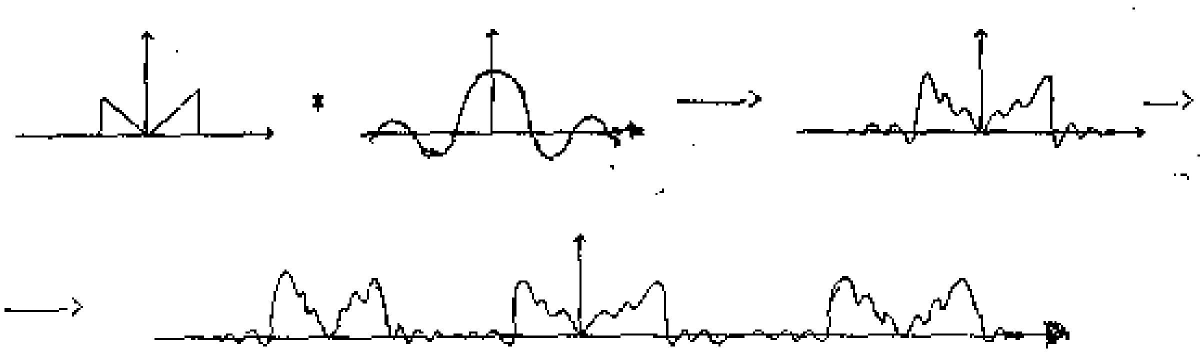
(il termine di fase deriva chiaramente dal fatto che il rettangolo non è centrato in t=0, mentre, se lo fosse, il suddetto termine di fase scomparirebbe) per cui lo spettro del *segnale finestrato* è

$$S_f(f) = S(f) * G(f) = S(f) * NT_C \frac{\sin(\pi f NT_C)}{\pi f NT_C} e^{-j\pi f NT_C}$$

Adesso dobbiamo campionare $s_f(t)$, il che significa, nel dominio della frequenza, prendere lo spettro $S_f(f)$ appena calcolato e periodicizzarlo a passo $f_C=1/T_C$:

$$S_{Cf}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ S(f) * NT_C \frac{\sin(\pi f NT_C)}{\pi f NT_C} e^{-j\pi f NT_C} \right]_{f=nf_C}$$

La figura seguente mostra allora come è fatto questo segnale, che è la cosiddetta **trasformata di Fourier tempo-discreta** (brevemente **DTFT**):



*La prima operazione indicata è la finestratura del segnale s(t), che in frequenza corrisponde alla convoluzione di S(f) per il sin(f)/f (corrispondente al rettangolo di finestratura nel tempo). La successiva operazione è il campionamento del segnale finestrato, operazione che, in frequenza, corrisponde ad una periodicizzazione dello spettro del segnale finestrato*

La convoluzione tra S(f) ed il sin($f$)/$f$, cioè la trasformata del *rettangolo di finestratura*, dà origine ad un segnale che somiglia ad S(f) periodicizzato, ma con in più delle oscillazioni sia in banda sia fuori banda; tale segnale è, teoricamente, a banda infinita, per cui <u>il segnale che si ottiene dal successivo campionamento non può fare a meno di presentare una sovrapposizione di repliche, cioè un errore di *aliasing*</u>. Questo, quindi, significa che, nell'intervallo non ambiguo $[-f_C/2, f_C/2]$, il segnale campionato presenta la replica di nostro interesse cui sono sommate tutte le altre repliche spettrali.

E' nostro interesse, allora, ridurre l'influenza delle repliche che fanno da disturbo ed abbiamo un solo modo per farlo: aumentare la durata della finestra di osservazione. Infatti, ci basta tener conto che il sin($f$)/$f$ per cui moltiplichiamo S(f) presenta gli zeri in $1/NT_C$ e multipli e decresce inoltre in modo proporzionale a $NT_C$: aumentando quindi $NT_C$, noi otteniamo il duplice effetto di avvicinare gli zeri del sin($f$)/$f$ e di velocizzare il decadimento delle sue code, ottenendo dunque un disturbo via via minore nell'*intervallo non ambiguo*[2].

A livello quantitativo, c'è un <u>criterio molto semplice</u> per individuare il valore ottimale di $NT_C$ (durata dell'osservazione): fissato un arbitrario valore di $NT_C$, andiamo a valutare i valori di $S_{Cf}(f)$ all'interno dell'intervallo non ambiguo[3]; successivamente aumentiamo $NT_C$ e ricalcoliamo gli stessi valori; fin quando osserviamo variazioni consistenti dei valori di $S_{Cf}(f)$, dobbiamo continuare ad aumentare $NT_C$; *quando invece osserviamo variazioni sulla quarta o quinta cifra decimale, allora possiamo fermarci, perché significa che il contributo delle code delle repliche adiacenti è diventato trascurabile rispetto alla precisione da noi desiderata.*

Riassumendo, quindi, la **DTFT** (cioè l'operazione di finestratura e successivo campionamento di s(t)) ci può dare una <u>accettabile approssimazione dello spettro[4] di s(t)</u>, a patto di tollerare sia la periodicizzazione in frequenza (il che, però, sappiamo non essere un problema quando il segnale è passa-basso, cioè a banda limitata) e, soprattutto, l'aliasing inevitabile dovuto al troncamento della sequenza di numeri che consideriamo (dobbiamo cioè accettare che tra $-f_C/2$ e $f_C/2$ si ottenga non lo spettro di s(t), ma lo spettro del segnale ottenuto finestrando s(t) tra t=0 e $t=NT_C$).

---

[2] D'altra parte, non c'è da stupirsi di questo risultato: quanto maggiore è la durata $NT_C$ della finestra di osservazione, tanto più ci approssimiamo al campionamento ideale e quindi tanto più il segnale campionato si approssima a quello ottenibile, idealmente, con infiniti campioni (e sempre nell'ipotesi di rispettare il teorema del campionamento).

[3] E' chiaro che consideriamo solo alcune frequenze

[4] inteso cioè come la trasformata di Fourier "classica" del segnale s(t)

In qualche modo, quindi, la DTFT ci dà una buona approssimazione dello spettro di s(t), ottenuta da un numero finito di campioni di s(t) stesso. C'è però un problema: la suddetta approssimazione dello spettro di s(t) risulta essere una funzione continua della frequenza.

$$S_{Cf}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ S(f) * NT_C \frac{\sin(\pi f N T_C)}{\pi f N T_C} e^{-j\pi f N T_C} \right]_{f=nf_C}$$

Quindi, fondamentalmente, *con la DTFT passiamo da una rappresentazione discreta nel tempo (costituita dai campioni $s(nT_C)$ del segnale finestrato) ad una rappresentazione continua in frequenza.* Questa ha il pregio di consentirci il calcolo di $S_{Cf}(f)$ in qualsiasi frequenza, ma, viceversa, ha il difetto di non essere rappresentabile nella memoria di un calcolatore. Dobbiamo allora fare un ulteriore passo avanti rispetto a questi discorsi: dobbiamo ottenere una rappresentazione discreta anche nel dominio della frequenza. A questo requisito risponde la **DFT** , che sarà analizzata nei prossimi paragrafi.

# DFT (Discrete Fourier Transform)

## INTRODUZIONE

Abbiamo concluso il paragrafo precedente osservando che la *DTFT* di un segnale s(t) tempo-continuo non va bene ai nostri scopi (che sono quelli di una elaborazione numerica del segnale anche nel dominio della frequenza) per il semplice fatto che non è implementabile in un calcolatore:

$$s(t) \xrightarrow{\text{campionamento}} s(nT_C) \xrightarrow{\text{DTFT}} S_C(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C) e^{-j2\pi f n T_C}$$

Infatti, se da un lato facciamo uso di un numero finito di campioni del segnale s(t) nel tempo, dall'altro otteniamo una rappresentazione del corrispondente spettro che risulta una funzione continua della frequenza. *Affinché anche la rappresentazione in frequenza sia memorizzabile sul calcolatore, dobbiamo dunque discretizzare la rappresentazione di frequenza.*

Il problema è allora il solito: data una funzione continua della frequenza, corrispondente allo spettro di s(t), dobbiamo campionarla. Possiamo allora fare immediatamente due considerazioni:

- in primo luogo, dovendo campionare diventa cruciale la scelta del passo di campionamento (in frequenza) se si vuole conservare il contenuto informativo del segnale di partenza;
- in secondo luogo, così come campionare nel dominio del tempo equivale ad ottenere un segnale periodico in frequenza, vale anche il duale, *ossia campionare nel dominio della frequenza equivale ad ottenere un segnale periodico nei tempi.*

Focalizziamo l'attenzione sulla seconda osservazione: quando noi campioniamo s(t) nel tempo, otteniamo dal campionatore un segnale $s_C(t)$ la cui trasformata è la ripetizione periodica di S(f); dualmente, *se campioniamo S(f), otteniamo un segnale la cui antitrasformata non può che essere una ripetizione periodica di* `s(t).` Detto in altre parole, il segnale ottenuto campionando S(f) può essere interpretato come la trasformata del segnale ottenuto periodicizzando s(t) a passo opportuno.

*`L'operazione effettuata dalla`* **DFT** *`consiste dunque in due passi essenziali: periodicizzare s(t) e calcolare il corrispondente spettro.`* Verifichiamo analiticamente quanto appena detto.

Supponiamo di voler ottenere un campionamento di S(f) a passo $f_C$ (questa è una frequenza di campionamento per il momento generica, diversa da quella usata nel tempo). Analiticamente, ciò significa che l'esito del campionamento sarà un segnale

$$S(f) \xrightarrow{\text{campionamento a passo } f_C} S_{DFT}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nf_C)\delta(f - nf_C) = S(f)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f - nf_C)$$

dove, per il momento, stiamo considerando il caso ideale di infiniti campioni.

Consideriamo allora il segnale s(t) e periodicizziamolo[5] a passo $T_C=1/f_C$. Otteniamo il segnale

$$s(t) \xrightarrow{\text{periodicizzazione a passo } T_C} g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT_C)$$

Dobbiamo calcolare lo spettro di g(t). Dal corso di *Teoria dei Segnali* sappiamo già come si calcola lo spettro di un segnale periodico: anziché considerare il segnale nella sua infinita durata, dato che il contenuto informativo si ripete uguale in ciascun periodo, è sufficiente considerare un qualsiasi periodo e calcolare la trasformata del segnale solo in esso[6]. Calcoliamo allora la trasformata di g(t) nel *periodo fondamentale*, che va da $-T_C/2$ a $T_C/2$:

$$S_P(f) = \int_{-T_C/2}^{T_C/2} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

D'altra parte, essendo g(t) un segnale periodico, esso ammette una rappresentazione in termini di sviluppo in serie di Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT_C) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi\frac{k}{T_C}t}$$

dove il generico coefficiente dello sviluppo ha notoriamente espressione

$$c_k = \frac{1}{T_C}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T_C}t}dt$$

Se allora confrontiamo questa espressione con quella di $S_P(f)$, ci accorgiamo immediatamente che $c_k$ corrisponde a $S_P(f)$ calcolato in $f=k/T_C$ (cioè campionato) e moltiplicato per $1/T_C$:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_C}S_P\left(\frac{k}{T_C}\right)}$$

[5] Anche se sarà chiaro in seguito, è importante scegliere il passo di periodicizzazione di s(t), in quanto bisogna fare comunque in modo che da g(t) si possa comunque isolare s(t), selezionando i campioni entro un dato intervallo di tempo.

[6] Si calcola cioè la trasformata della restrizione del segnale g(t) al periodo considerato

Abbiamo dunque trovato *è possibile passare dallo sviluppo in serie di g(t) (cioè di s(t) periodicizzato) a $S_P(f)$ semplicemente campionando quest'ultima funzione a passo $1/T_C$ e scalando i campioni di $T_C$.*

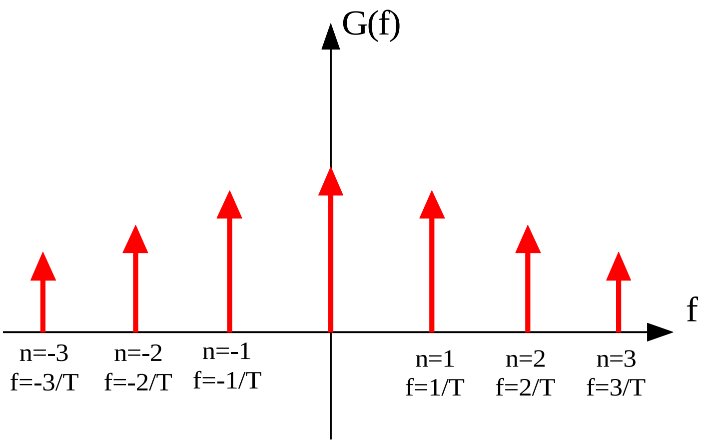
Questo risultato ci serve per calcolare lo spettro di g(t). Infatti, adottando la descrizione di g(t) come sviluppo in serie di Fourier e considerando l'espressione appena trovata per i $c_k$, abbiamo che

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi\frac{k}{T_C}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_C} S_P\left(\frac{k}{T_C}\right) e^{j2\pi\frac{k}{T_C}t} = \frac{1}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P\left(\frac{k}{T_C}\right) e^{j2\pi\frac{k}{T_C}t}$$

da cui, trasformando (e applicando la linearità della trasformata di Fourier), ricaviamo che

$$G(f) = \frac{1}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P\left(\frac{k}{T_C}\right) \mathcal{F}\left[e^{j2\pi\frac{k}{T_C}t}\right] = \frac{1}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P\left(\frac{k}{T_C}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_C}\right)$$

Questo risultato conferma che *<u>una periodicizzazione nei tempi equivale ad un campionamento in frequenza:</u>* infatti, G(f) è una sequenza di infiniti impulsi, equispaziati di $f_C=1/T_C$, ciascuno di area opportuna.




*Spettro del segnale g(t), ossia s(t) periodicizzato a passo $T_C$: gli impulsi sono equispaziati di $1/T_C$ e il generico impulso, posizionato in $k/T_C$ , ha area proporzionale al valore di G(f) in $k/T_C$.*

<u>Tutto questo discorso vale a prescindere da come sia fatto il segnale di partenza s(t)</u>. Ci sono infatti due casi:

- il primo caso è quello in cui s(t) è un segnale di durata limitata (e quindi banda teoricamente infinita) interamente contenuto nell'intervallo $[-T_C/2,T_C/2]$: in questo caso, possiamo evidentemente scrivere che

$$S_P(f) = \int_{-T_C/2}^{T_C/2} g(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T_C/2}^{T_C/2} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- il secondo caso è invece quello in cui s(t) è un segnale di durata infinita (banda finita), per cui l'integrale che definisce $S_P(f)$ contiene effettivamente solo il periodo base di g(t).

Torniamo ora al nostro problema di fondo, che possiamo impostare nel modo seguente: abbiamo a disposizione un segnale s(t) tempo-continuo; ne vogliamo dare una rappresentazione numerica nei tempi, per cui lo campioniamo a frequenza $f_C$; l'esito del campionamento è un segnale $s_C(t)$ che in frequenza risulta continuo e periodico (di periodo $f_C$); la porzione di tale spettro che ci interessa è quella contenuta in $[-f_C/2, f_C/2]$ e vogliamo darne una rappresentazione numerica, cioè la vogliamo campionare. Ci serve allora determinare il numero di campioni che ci consenta di descrivere in modo completo un periodo dello spettro di $s_C(t)$.

Indichiamo allora con Δf il passo di campionamento in frequenza: per quanto detto prima, questo corrisponde a periodicizzare s(t) con passo 1/Δf:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(t - \frac{n}{\Delta f}\right) \xleftrightarrow{DFT} \begin{cases} S_C(n\Delta f) \\ \text{per } -\frac{f_C}{2} \le f \le \frac{f_C}{2} \end{cases}$$

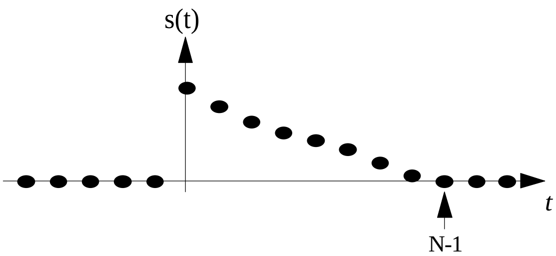
Sottolineiamo che, in questi discorsi, ***il segnale s(t) non è quello tempo-continuo di partenza, ma quello discreto ottenuto dal campionamento nel tempo di s(t).*** Di conseguenza, sarebbe più opportuno parlare di sequenza di campioni $s(nT_C)$ corrispondente ad s(t) che non di segnale s(t). Su questo aspetto, comunque, torneremo dopo.

Così come facevamo per il campionamento dei tempi, dobbiamo adesso valutare come è fatto g(t):

- se *il segnale s(t) è di durata limitata*[7], possiamo sicuramente scegliere un passo Δf tale che g(t) non presenti sovrapposizione delle repliche di s(t); in particolare, dovremo scegliere Δf sufficientemente piccolo da garantire che il periodo di ripetizione di s(t) nei tempi sia maggiore o almeno uguale alla durata di s(t) stesso; ovviamente, non ci converrà nemmeno prendere Δf troppo piccolo, in quanto ci troveremmo con un segnale g(t) in cui le repliche di s(t) non solo sono separate, ma anche molto distanziate, il che equivarrebbe ad uno spreco di campioni (sempre in frequenza);

- se invece s(t) è di durata illimitata, allora non potremo evitare la sovrapposizione, cioè un errore di alias nel tempo.

Consideriamo dunque il caso di s(t) di durata limitata, come potrebbe essere quello della figura seguente:




Come scegliamo il passo Δf di campionamento in frequenza? Dobbiamo garantire la separazione delle repliche di s(t), ma non dobbiamo nemmeno esagerare con tale separazione. La cosa più sensata è fare in modo che la prima replica si presenti subito dopo la fine della sequenza di partenza. E' facile ottenere questo: sviluppando parzialmente la sommatoria di prima, abbiamo che

[7] Un segnale s(t) si dice a durata limitata se esso risulta identicamente uguale a 0 al di fuori di un dato intervallo di temporale

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(t-\frac{n}{\Delta f}\right)=....+s\left(t+\frac{1}{\Delta f}\right)+s(t)+s\left(t-\frac{1}{\Delta f}\right)+s\left(t-\frac{2}{\Delta f}\right)+....$$

La sequenza di campioni di s(t) parte da t=0 e finisce in $t=(N-1)T_C$ (cioè è lunga N campioni), per cui dobbiamo fare in modo che la prima replica, ossia $s\left(t-\frac{1}{\Delta f}\right)$, parta dall'istante $t=NT_C$; ci basta allora porre

$$\boxed{\Delta f=\frac{1}{NT_C}}$$

Così facendo, otteniamo infatti

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(t-\frac{n}{1/NT_C}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t-nNT_C)=....+s(t+NT_C)+s(t)+s(t-NT_C)+s(t-2NT_C)+....$$

La prima replica si estende da $NT_C$ a $(2N-1)T_C$; la seconda replica si estende da $2NT_C$ a $(3N-1)\,T_C$ e così via.

*La particolarità di questa scelta del passo di campionamento è che otteniamo <u>lo stesso numero di campioni sia nel tempo sia in frequenza</u>:* infatti, in frequenza, se campioniamo da $-f_C/2$ a $f_C/2$, ossia da $-1/2T_C$ a $1/2T_C$, e usiamo un passo $\Delta f=1/NT_C$, il numero di campioni è

$$\frac{\text{ampiezza dell'intervallo di campionamento}}{\text{passo di campionamento}}=\frac{\frac{1}{2T_C}-\left(-\frac{1}{2T_C}\right)}{\frac{1}{NT_C}}=N$$

ed anche N erano i campioni nel tempo.

Riepiloghiamo dunque questi discorsi con la seguente tabella:

$$\text{campionamento nel tempo}\longrightarrow\begin{cases}\text{intervallo di campionamento: }[0,(N-1)T_C]\\ \text{numero di campioni: }N\\ \text{passo di campionamento: }T_C\end{cases}$$

$$\text{campionamento in frequenza}\longrightarrow\begin{cases}\text{intervallo di campionamento: }[-1/2T_C,1/2T_C]\\ \text{numero di campioni: }N\\ \text{passo di campionamento: }\Delta f=1/NT_C\end{cases}$$

## FORMULE DI TRASFORMAZIONE E ANTITRASFORMAZIONE

Adesso quantifichiamo in modo più completo la formula di trasformazione di Fourier discreta (**DFT**) e la corrispondente formula di antitrasformazione (**IDFT**).

Abbiamo detto che la DFT si può vedere come l'esito di due successive operazioni: prima periodicizziamo s(t) a passo $1/\Delta f$ e poi trasformiamo con i metodi classici di Fourier. Abbiamo anche detto che noi non conosciamo proprio s(t), ma la corrispondente sequenza dei campioni ottenuti a passo $T_C$. Quindi, quando parliamo di periodicizzare s(t), parliamo in pratica di periodicizzare la sequenza di campioni descrittiva di s(t). Traduciamo questi concetti in formule.

Partiamo dal segnale g(t) ottenuto periodicizzando s(t) a passo (opportuno) 1/Δf:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s\left(t - \frac{n}{\Delta f}\right)$$

Abbiamo già esaminato l'espressione di g(t) come sviluppo in serie di Fourier: essendo $T_g=1/\Delta f$ il periodo di g(t), l'espressione è

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{j2\pi\frac{k}{T_g}t} = \frac{1}{T_g}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P\left(\frac{k}{T_g}\right) e^{j2\pi\frac{k}{T_g}t} = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P\left(\frac{k}{\Delta f}\right) e^{j2\pi kt\Delta f}$$

Dato che noi conosciamo i campioni di s(t), anche g(t) non potrà che essere formato dagli stessi campioni, ripetuti periodicamente. Ha senso perciò porre $t=nT_C$, per cui

$$g(nT_C) = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P\left(\frac{k}{\Delta f}\right) e^{j2\pi knT_C\Delta f}$$

Abbiamo inoltre detto prima che è sensato porre $\mathbf{\Delta f=1/NT_C}$, in modo da evitare la sovrapposizione delle sequenze di campioni: sostituendo, abbiamo perciò che

$$g(nT_C) = NT_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P(kNT_C) e^{j2\pi knT_C\frac{1}{NT_C}} = NT_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P(kNT_C) e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Ponendo allora genericamente $c_k = NT_C S_P(kNT_C)$, possiamo scrivere che

$$g(nT_C) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad n = 0,1,....,(N-1)$$

A proposito di quella sommatoria, si possono verificare alcune proprietà:

- in primo luogo, i termini dello sviluppo che si ottengono per valori di k multipli interi di N sono tutti costituiti dal solo coefficiente $c_K$;
- in secondo luogo, si osserva anche che

$$e^{j2\pi k\frac{n}{N}} = e^{j2\pi(k+N)\frac{n}{N}}$$

Sulla base di queste osservazioni, si nota che sia per i termini con k positivo sia per quelli con k negativo, i termini esponenziali si ripetono periodicamente ogni N termini. Questo consente di ridurre la sommatoria ad N termini $d_k$, dove però ogni termine è a sua volta la somma di infiniti altri termini.

$$g(nT_C) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad n = 0,1,....,(N-1)$$
$$\text{dove} \quad d_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m+kN}$$

Il passaggio ulteriore consiste nel verificare che anche i coefficienti $d_k$ sono ottenibili come sommatorie di un numero finito di termini:

$$d_k = \sum_{m=0}^{N-1} g(mT_C) e^{-j2\pi r \frac{m}{N}} \qquad k = 0,1,....,N-1$$

Possiamo dunque scrivere le seguenti due formule, ponendo $d_k$=G(k):

$$g(nT_C) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad n = 0,1,.....,N-1$$
$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(nT_C) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad k = 0,1,....,N-1$$

Queste due formule coinvolgono però il segnale g(t), mentre a noi interessa s(t). Tuttavia, possiamo osservare, nell'espressione di G(k), che i campioni $g(nT_C)$ coinvolti nella sommatoria sono quelli tra t=0 e t=(N-1)$T_C$, per cui coincidono con i campioni di s(t). Possiamo perciò concludere che

$$\boxed{\begin{array}{ll} s(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} & n = 0,1,.....,N-1 \\ S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} & k = 0,1,....,N-1 \end{array}}$$

Queste sono le formule che definiscono la **DFT** e la **IDFT**. Entrambe le formule constano di un numero finito di elementi: noti gli N campioni di s(t), è possibile calcolare il vettore di N elementi costituente S(k) e, viceversa, noto il vettore di N elementi costituente S(k) è possibile risalire agli N campioni di s(t).

Notiamo una forte somiglianza di queste formule con quelle valide nel caso tempo-continuo: la trasformata inversa è come quella inversa a meno del segno dell'esponente (così come nel caso tempo-continuo) e del fattore 1/N. Questo fattore moltiplicativo è dunque l'unica novità rispetto al caso continuo.

E' evidente anche un'altra cosa: *la formula di trasformazione, che cioè consente di passare dalla sequenza s(n) alla sequenza S(k), non è altro che la DTFT, nella quale però si considerano infiniti campioni, campionata a passo 1/N$T_C$:*

$$s(t)\xrightarrow{\text{campionamento}}s(nT_C)\xrightarrow{\text{DTFT con infiniti campioni}}S(f)=\sum_{n=0}^{\infty}s(nT_C)e^{-j2\pi fnT_C}$$

$$S(f)\xrightarrow{\text{DFT (con N campioni) su un intervallo limitato}}S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi\frac{k}{NT_C}nT_C}=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}$$

Questo fatto rappresenta un <u>modo molto più immediato di interpretare la DFT</u>: *si tratta del campionamento (a passo opportuno e su un intervallo finito di frequenze) della trasformata di Fourier (ad infiniti campioni) di una sequenza temporale discreta $s(nT_C)$.* E’ ovvio che la possibilità di campionare su un intervallo finito di frequenza esiste perché lo spettro della sequenza $s(nT_C)$ è lo spettro di s(t) periodicizzato a passo $1/T_C$, per cui il contenuto informativo che ci interessa è contenuto in qualsiasi periodo si voglia utilizzare.

## *Verifica della formula di antitrasformazione*

Prima di proseguire, possiamo renderci conto facilmente del fatto che la formula di trasformazione da $s(nT_C)$ a S(k) sia invertibile, ossia del fatto che la conoscenza di S(k) consenta effettivamente di risalire alla sequenza $s(nT_C)$ di campioni nel tempo.

Per verificare l’invertibilità di S(k), ci basta applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, il quale ci consente di ragionare, anziché con una sequenza $s(nT_C)$ generica, con una sequenza molto particolare, costituita da un solo campione non nullo, in un istante qualsiasi, e tutti gli altri campioni nulli: possiamo ad esempio considerare

$$s(nT_C)=\begin{cases}1 & n=n_0\\0 & n\neq n_0\end{cases}$$

Calcoliamo allora la DFT di questa particolare sequenza di campioni nel tempo: applicando la definizione vista prima e tenendo conto che l’unico campione non nullo si ha per $n=n_0$, abbiamo che

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}=s(n_0T_C)e^{-j2\pi n_0\frac{k}{N}}=e^{-j2\pi n_0\frac{k}{N}}\qquad k=0,1,....,N-1$$

Il vettore dei campioni che definiscono la DFT è dunque il seguente:

$$1,e^{-j2\pi n_0\frac{1}{N}},e^{-j2\pi n_0\frac{2}{N}},....,e^{-j2\pi n_0\frac{N-1}{N}}$$

dove il primo campione è unitario dato che l’esponente vale 0.

Se adesso applichiamo la formula di antitrasformazione (IDFT), al fine di risalire a $s(nT_C)$, otteniamo quanto segue:

$$s(nT_C)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}S(k)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j2\pi n_0\frac{k}{N}}e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j2\pi(n-n_0)\frac{k}{N}}\qquad n=0,1,.....,N-1$$

Abbiamo dunque che il generico campione $s(nT_C)$ è dato dalla somma (scalata di un fattore N) di N termini del tipo $e^{j2\pi(n-n_0)\frac{k}{N}}$, con k=0,1,...,N:

$$n=1 \longrightarrow s(T_C)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(1-n_0)\frac{k}{N}} = \frac{1}{N}\left(1+e^{j2\pi(1-n_0)\frac{1}{N}}+e^{j2\pi(1-n_0)\frac{2}{N}}+\ldots+e^{j2\pi(1-n_0)\frac{N-1}{N}}\right)$$

$$n=2 \longrightarrow s(2T_C)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(2-n_0)\frac{k}{N}} = \frac{1}{N}\left(1+e^{j2\pi(2-n_0)\frac{1}{N}}+e^{j2\pi(2-n_0)\frac{2}{N}}+\ldots+e^{j2\pi(2-n_0)\frac{N-1}{N}}\right)$$

...

$$n=n_0 \longrightarrow s(n_0T_C)=\frac{1}{N}\cdot N=1$$

...

$$n=N-1 \longrightarrow s((N-1)T_C)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(N-1-n_0)\frac{k}{N}} = \frac{1}{N}\left(1+e^{j2\pi(N-1-n_0)\frac{1}{N}}+e^{j2\pi(N-1-n_0)\frac{2}{N}}+\ldots+e^{j2\pi(N-1-n_0)\frac{N-1}{N}}\right)$$

Tranne quella per $n=n_0$, che risulta unitaria, tutte le altre sommatorie valgono evidentemente 0 in quanto il versore $e^{j2\pi(n-n_0)\frac{k}{N}}$ fa sempre un numero intero di giri e quindi la somma genera un poligono chiuso, cioè a somma 0. Concludiamo quindi che la ricostruzione della sequenza $s(nT_C)$ è fedele.

Non si trattava, però, di una sequenza generica, ma di una sequenza con una particolarità importante: una qualsiasi altra sequenza $s(nT_C)$ può essere ricavata da quella appena ricavata tramite una opportuna combinazione lineare. Di conseguenza, applicando la sovrapposizione degli effetti, deduciamo che la ricostruzione di $s(nT_C)$ a partire da $S(k)$ è possibile per qualsiasi sequenza $s(nT_C)$ di partenza.

### *Simbologia adottata*

Concludiamo il paragrafo introducendo la classica notazione usata per esprimere la DFT e la IDFT:

$$\boxed{\begin{array}{ll} s(n)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} S(k)W_N^{nk} & n=0,1,\ldots\ldots,N-1 \\ S(k)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} s(n)W_N^{-nk} & k=0,1,\ldots\ldots,N-1 \end{array}}$$

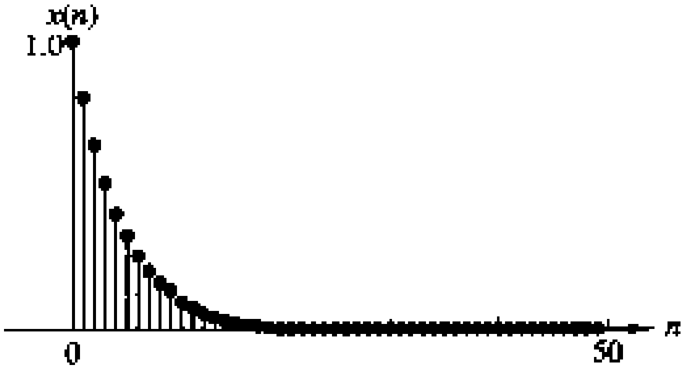
In pratica, si è posto $W_N=e^{j\frac{2\pi}{N}}$ e questo termine rappresenta semplicemente un versore.

### *Esempio*

Consideriamo una sequenza x(n) di tipo esponenziale, che possiamo così rappresentare:

$$x(t)=\begin{cases} a^t & \text{per } t\ge 0 \\ 0 & \text{per } t<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{campionamento a passo } T_C} x(n)=\begin{cases} a^n & \text{per } n\ge 0 \\ 0 & \text{per } n<0 \end{cases}$$

In pratica, il segnale x(t) di partenza vale 0 prima di t=0 e vale $a^t$ per $t\geq 0$. Il successivo campionamento (a passo $T_C$) produce una sequenza che, per **a=0.8**, è fatta nel modo seguente:




Il fatto che la sequenza decresca nel tempo dipende ovviamente dal fatto di aver preso 0<a<1; se fosse stato a>1, la sequenza sarebbe cresciuta nel tempo.

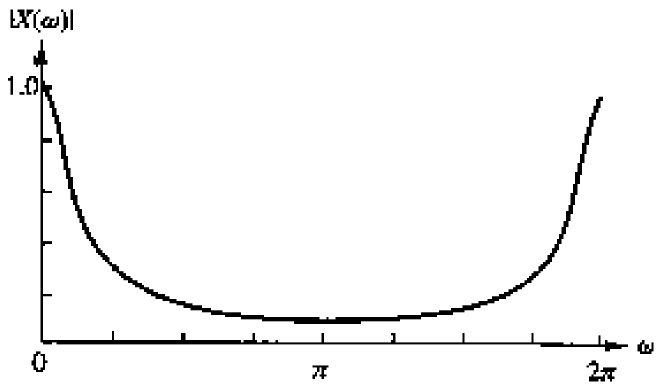
E’ subito evidente un fatto: il segnale x(t) considerato, e quindi anche la corrispondente sequenza, è di durata infinita, il che significa che una eventuale periodicizzazione, come si vedrà tra un attimo, non potrà che presentare *aliasing*. Allo stesso tempo, però, un segnale esponenziale decresce praticamente a 0 dopo un certo tempo, per cui è intuitivo aspettarsi che si ottengano risultati diversi a seconda di come si effettua il campionamento. Vediamo i dettagli

Intanto, supponiamo, per semplicità, di prendere $T_C=1$.

Calcoliamo la trasformata di Fourier della sequenza x(n): se consideriamo un numero infinito di campioni (per cui non è una DTFT), otteniamo

$$X(f)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)e^{-j2\pi fn}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j2\pi fn}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j2\pi f}\right)^{n}=\frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}$$

Questo spettro è di tipo complesso, per cui presenta un modulo ed una fase (facilmente ricavabili, peraltro), ed è periodico[8]. Consideriamo allora solo il modulo, il cui andamento (riportato in funzione di $\omega=2\pi f$), con riferimento al primo periodo, è quello della figura seguente:




Si tratta, come sappiamo, di uno spettro continuo.

[8] Ricordiamo, infatti, ancora una volta che lo spettro della sequenza x(n), ottenuta campionando x(t), è una periodicizzazione dello spettro di x(t), a passo $1/T_C$, dove $T_C$ è il periodo di campionamento nel tempo.

Adesso campioniamo X(f), nel primo periodo e con un numero N di campioni pari a quelli nel tempo, con un passo di campionamento $\Delta f=1/N$, il che equivale a considerare le frequenze $f_k=k/N$, per $k=0,....,N-1$:

$$X(k)=\frac{1}{1-ae^{-j2\pi\frac{k}{N}}}$$

Questa sequenza X(k) rappresenta la DFT della sequenza x(n) di partenza. Ci interessa sapere se X(k) consente di ricostruire la sequenza di partenza x(n). Analiticamente, dobbiamo applicare la IDFT, il che equivale, sostanzialmente, ad eseguire due operazioni:

- in primo luogo antitrasformare X(k): questo ci darà una sequenza $\hat{x}(n)$ corrispondente alla periodicizzazione di x(t) a passo N:

$$\hat{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty}X(k)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}$$

- in secondo luogo, azzerare tutto quello che c'è al di fuori del periodo fondamentale, in modo da isolare x(n):

$$x(n)=\begin{cases}\hat{x}(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Abbiamo dunque quanto segue:

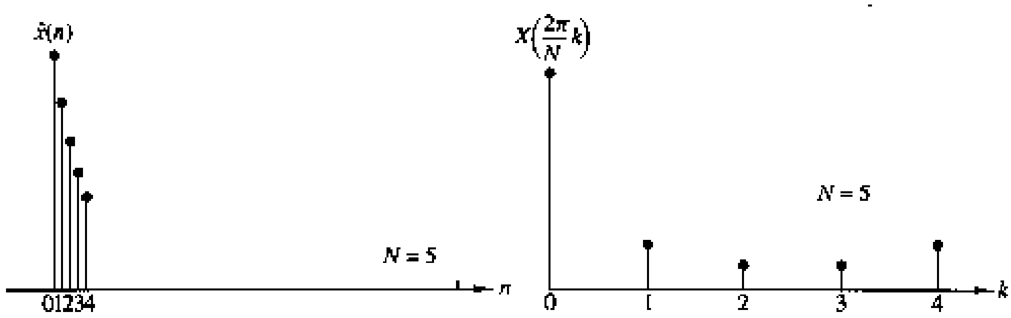
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{1-ae^{-j2\pi\frac{k}{N}}}e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=...=\frac{a^n}{1-a^N}$$

Il risultato ottenuto chiarisce perfettamente quello che succede: il numeratore della frazione coincide esattamente con la sequenza x(n) che ci interessava ricostruire, ma è presente un termine a denominatore (che poi è semplicemente un fattore di scala) che differenzia quanto ottenuto da quanto volevamo ottenere. Questa differenza non è altro che l'alias dovuto al fatto che la sequenza x(n) di partenza non era a durata limitata, per cui la sua periodicizzazione nei tempi ha prodotto sovrapposizione dei campioni.

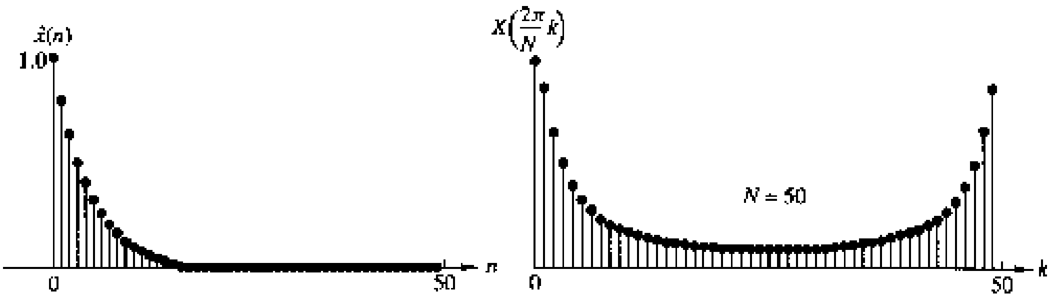
D'altra parte, si osserva anche un'altra cosa: all'aumentare di N, infatti, il termine $a_N$ diminuisce e quindi l'errore di alias tende a scomparire. Questo è dovuto al fatto, già accennato, che il segnale esponenziale decresce praticamente a 0 dopo un certo tempo, per cui più estendiamo il campionamento nel tempo, più ci riconduciamo, in pratica, ad una sequenza di durata limitata.

Le figure seguenti chiariscono ancora meglio il concetto:

- nella figura seguente è illustrato quello che accade se prendiamo appena 5 campioni del segnale x(t) di partenza; nella figura di sinistra è riportata la sequenza $\hat{x}(n)$ ottenuta con la IDFT, mentre in quella di destra lo spettro ricavato con la DFT:



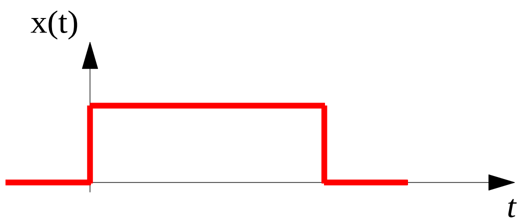

- ben diverso è quello che si ottiene prendendo invece 50 campioni del segnale x(t) di partenza



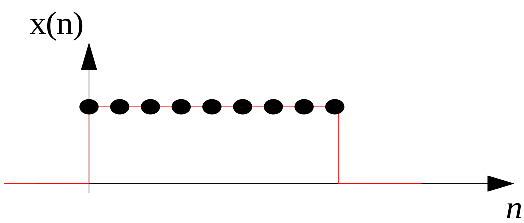

La differenza, tra i due casi, è evidentemente nel fatto che l'estensione del periodo di campionamento (e cioè del numero di campioni) porta a considerare un segnale di durata limitata, che quindi rispetta le ipotesi sotto cui la DFT è una valida approssimazione dello spettro del segnale stesso. Lo si nota, proprio, osservando come le due DFT appena riportata somigliano allo spettro X(f) riportato prima: la DFT ottenuta con 5 campioni è una "lontana parente" di X(f), mentre la DFT ottenuta con 50 campione è una descrizione estremamente fedele di X(f).

## *Esempio: metodo dello "zero padding"*

Facciamo un altro esempio significativo di calcolo di DFT, considerando, come segnale x(t) di partenza, un classico rettangolo di durata finita.




Campionando questo rettangolo solo nell'intervallo di tempo in cui è non nullo e supponendo di considerare, per tale intervallo, L campioni, abbiamo quanto segue:



$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{per } 0\le t\le A\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \xrightarrow{\text{campionamento}} x(n)=\begin{cases}1 & \text{per } 0\le n\le L-1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Avendo a che fare con un rettangolo, sappiamo che il suo spettro è del tipo sin(*f*)/*f*. Dato che, però, noi ragioniamo sulla sequenza x(n) ottenuta campionando x(t), deduciamo che lo spettro di x(n) sarà la periodicizzazione del sin(*f*)/*f*. Vediamo i dettagli.

Calcoliamo la trasformata di Fourier della sequenza x(n): applicando la definizione

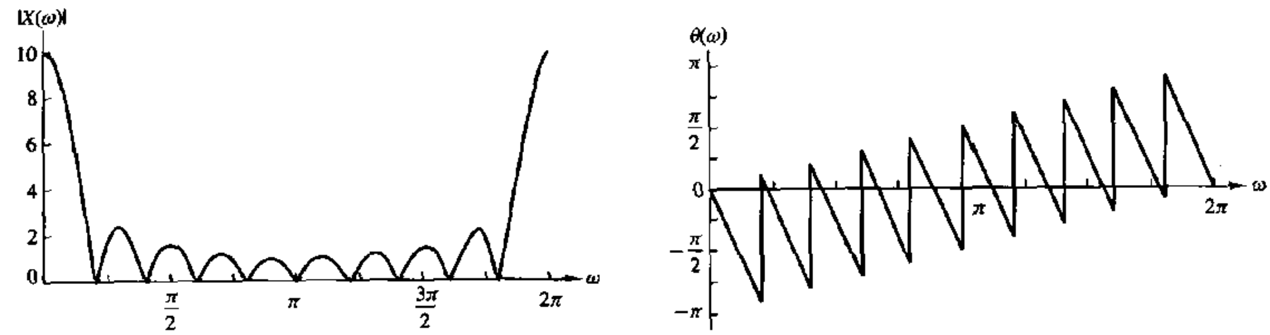
$$X(f)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)e^{-j2\pi fn}=\sum_{n=0}^{L-1}e^{-j2\pi fn}=\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j2\pi f}\right)^n=\frac{1-e^{-j2\pi fL}}{1-e^{-j2\pi f}}$$

Con semplici passaggi matematici, si ottiene di esprimere X(f) nella forma

$$X(f)=\frac{\sin(\pi fL)}{\sin(\pi f)}e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}}$$

Ancora una volta, abbiamo dunque uno spettro complesso (il termine di fase interviene in quanto il rettangolo di partenza non era centrato nell'origine). Si tratta anche di uno spettro periodico, per i motivi ormai ben noti.

L'andamento del modulo e della fase di tale spettro nel primo periodo sono riportati (in funzione di $\omega=2\pi f$) nella figura seguente, nell'ipotesi di L=10:




Adesso calcoliamo la DFT di x(n), estendendola ad un numero N, per il momento generico, di campioni: abbiamo che

$$f_k=\frac{k}{N}\longrightarrow\omega_k=2\pi\frac{k}{N}\longrightarrow\quad X(k)=\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{N}L\right)}{\sin\left(\pi\frac{k}{N}\right)}e^{-j2\pi\frac{k}{N}\frac{L-1}{2}}$$

dove ovviamente k=0,...,N-1.

<u>Il tipo di descrizione offerta da X(k) viene a dipendere strettamente dal valore di N</u>. Una situazione assolutamente particolare, in questo caso, si ottiene scegliendo N=L (cioè prendendo in frequenza lo stesso numero di campioni di cui disponiamo nel tempo): si ottiene, infatti che

$$X(k) = \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{N} N\right)}{\sin\left(\pi \frac{k}{N}\right)} e^{-j2\pi \frac{k}{L}\frac{L-1}{2}} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\pi \frac{k}{N}\right)} e^{-j2\pi \frac{k}{L}\frac{L-1}{2}}$$

Per qualsiasi valore di k>0, la quantità sin(kπ) è nulla, per cui risulta anche nullo X(k); per k=0, invece, anche il denominatore di quella frazione risulta nullo, il che indica una forma indeterminata: applicando il teorema di L'Hopital, si ricava facilmente che X(k=0)=L.

Quindi, prendendo N=L, si ottiene che

$$X(k) = \begin{cases} L & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,...,L-1 \end{cases}$$

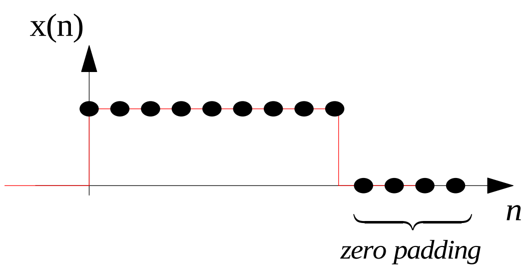
Si ottiene cioè uno spettro identicamente nullo tranne nell'origine, dove vale L. Il motivo di questo risulta è evidente se si osserva l'andamento del modulo e della fase di X(f): entrambi sono infatti nulli proprio nelle pulsazioni $\omega_k=2\pi k/N$ in cui abbiamo effettuato il campionamento, tranne la pulsazione $\omega_0=0$, nella quale X(ω)=0.

In realtà, però, <u>il fatto che X(k) sia venuta =0 per tutti i punti tranne che in k=0 non costituisce un problema dal punto di vista analitico</u>: infatti, è facile verificare che, calcolando la IDFT (con L campioni) di X(k), si ottiene proprio x(n).

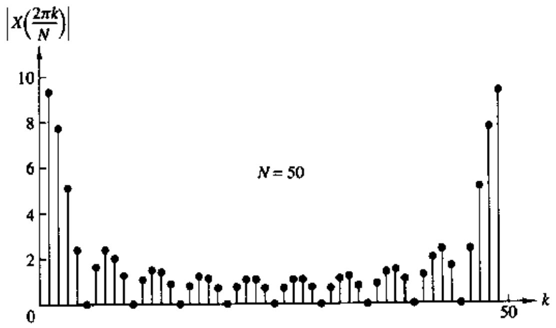
D'altra parte, se è vero che la DFT ad L campioni risulta sufficiente per rappresentare la sequenza x(n) nel dominio delle frequenze, è anche vero che essa non fornisce un sufficiente dettaglio per una buona rappresentazione grafica delle caratteristiche spettrali di x(n): infatti, noi visualizziamo semplicemente un impulso, di area L, centrato in 0, mentre invece abbiamo visto che l'andamento di X(f), in modulo è fase, è ben più complicato. Ha senso allora chiedersi come si possa rimediare a questo inconveniente.

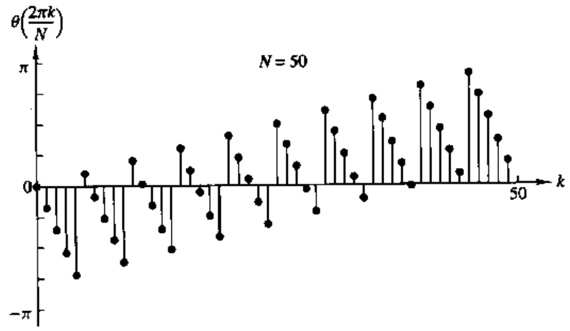
L'unico modo a nostra disposizione è chiaramente quello di aumentare il numero N di campioni, rendendolo maggiore di L (tanto quanto basta ad ottenere una buona rappresentazione grafica dello spettro).

Questa operazione di aumentare il numero di campioni in frequenza è assolutamente equivalente ad un'altra operazione: supponiamo di voler comunque ottenere un numero N di campioni in frequenza pari al numero L di campioni nel tempo; se disponiamo, inizialmente, di un numero fisso L di campioni nel tempo, l'unico modo di aumentarli, senza modificare il contenuto informativo, è quello di aggiungere altri campioni fittizi, che dovranno essere tutti nulli. In altre parole, data la sequenza x(n) di partenza, composta da L campioni, la allunghiamo inserendo un certo numero di 0:

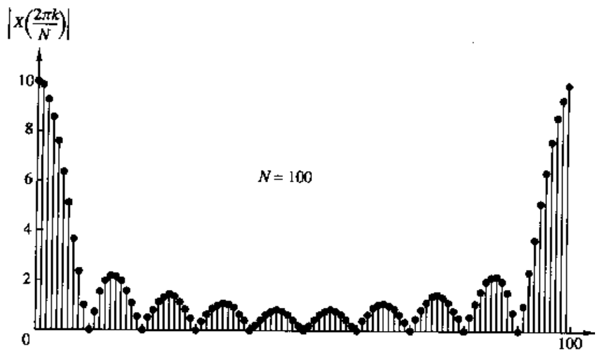


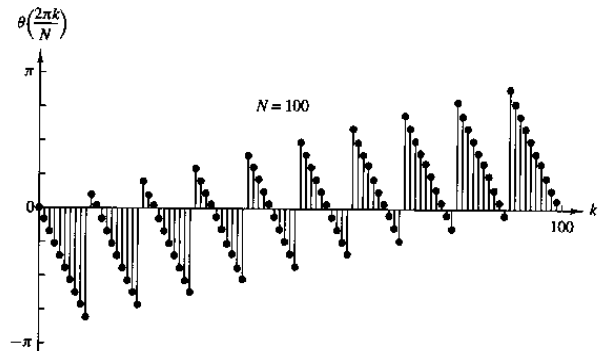

Questo metodo prende il nome di **zero padding**. A questo punto, possiamo usare un numero N=L di campioni in frequenza maggiore di prima, il che ci consente di descrivere con maggiore dettaglio lo spettro. Ad esempio, nella figura seguente viene riportata la X(k), in termini di modulo e fase, nel caso di N=L=50 campioni:




Aumentando ancora il numero di campioni, prendendo N=100, si ottiene quanto segue:




## OSSERVAZIONE: NUMERO DI CAMPIONI NEL TEMPO ED IN FREQUENZA

Sulla scorta di quanto visto nell'ultimo esempio, è opportuno approfondire ulteriormente il legame esistente tra il numero di campioni di cui è composta la sequenza x(n) di partenza ed il numero di campioni di cui è composta la corrispondente DFT.

A tal proposito, consideriamo la formula della IDFT, nell'ipotesi che la DFT sia stata costruita usando N campioni:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n\frac{k}{N}} \qquad n = 0,1,.....,N-1$$

Come abbiamo avuto modo di vedere in precedenza, questa formula contiene in sé una ipotesi implicita: infatti, a rigore, essa consente di risalire, da X(k), non alla sequenza x(n) di partenza, quanto a questa sequenza periodicizzata:

$$g(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n\frac{k}{N}} \qquad n = 0,1,.....,N-1$$

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n - mN)$$

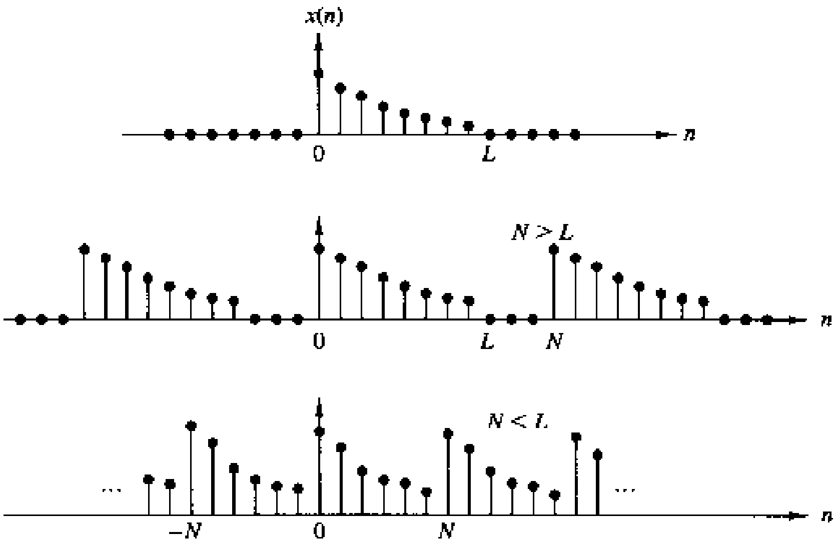
Allora, il fatto di porre a primo membro direttamente x(n) presuppone che la periodicizzazione di x(n) non presenti *aliasing*, ossia che x(n) sia di durata limitata e che il passo di campionamento in frequenza Δf sia stato scelto opportunamente.

In definitiva, `la IDFT, a rigore, consente di ricostruire solo g(n) partendo dai campioni dello spettro X(f) della sequenza x(n); se` *g(n) è una <u>ripetizione periodica non aliasata</u> di x(n), allora la IDFT consente, di fatto, di ricostruire x(n) a partire da X(k).*

Consideriamo dunque la sequenza x(n), supponendo che sia di durata limitata. Questo significa che tale sequenza è costituita da un numero finito di campioni[9]: lo indichiamo con L. Come si è visto in precedenza, non siamo obbligati a prendere, anche in frequenza, lo stesso numero L di campioni; al contrario, possiamo prendere un numero generico N di campioni in frequenza, a patto però di rispettare un <u>vincolo fondamentale</u>: infatti, se l'intervallo di campionamento è fissato, il numero di campioni determina il passo di campionamento $\Delta f$ e questo, come detto, determina il passo con cui viene effettuata la periodicizzazione di x(n):

$$g(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n - mN)$$

Per evitare l'aliasing, è necessario scegliere $\boxed{N \geq L}$. Ce ne possiamo rendere conto con un semplice esempio, rappresentato nella figura seguente:




La sequenza x(n) di partenza è di durata limitata L (l'ultimo campione è quello numerato con L-1, cui segue il primo campione nullo della sequenza) ed è indicata nella figura in lato; scegliendo un numero N di campioni, in frequenza, maggiore di L, otteniamo la sequenza periodica indicata nella figura centrale: è evidente che tale sequenza non presenta aliasing tra le varie ripetizioni di x(n), per cui la replica centrale può essere tranquillamente isolata. Lo stesso, invece, non accade quando prendiamo N<L (figura in basso): in questo caso, la periodicizzazione di x(n) crea sovrapposizione parziale tra le varie repliche (*aliasing*), il che impedisce la ricostruzione.

Quindi, mentre nel primo caso (N>L), la IDFT consente di ricostruire x(n), nel secondo caso (N<L), la IDFT consente di ricostruire solo g(n), che è una ripetizione periodica aliasata di x(n). Il caso limite è ovviamente quello in cui N=L, nel qual caso le repliche di x(n) sono perfettamente affiancate, ma comunque separabili una dall'altra.

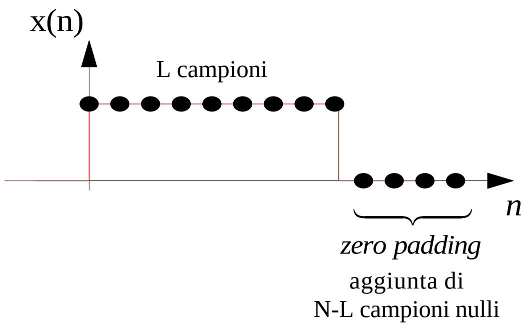
La conclusione del discorso è dunque la seguente: *lo spettro di un segnale aperiodico tempo-discreto di durata finita L può essere esattamente ricostruito dai campioni del suo spettro, presi nelle frequenze equispaziate $f_k=k/N$, solo se $N^3L$.*

[9] Tale numero è dunque la lunghezza della sequenza

C'è anche un altro punto di vista dal quale osservare questa questione. Supponiamo di avere a disposizione una sequenza x(n) lunga L campioni (da 0 ad L-1). Ne vogliamo calcolare la DFT basata su N campioni, con N>L. Applicando allora la classica definizione, otteniamo

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad k = 0,1,....,N-1$$

La sommatoria è ovviamente estesa al numero L di campioni temporali di cui disponiamo. Ci chiediamo che cosa succede se, al posto di calcolare la DFT direttamente di x(n), calcoliamo la DFT della sequenza ottenuta da x(n) aggiungendo tanti campioni nulli (**zero padding**), in coda, quanti ne servono per avere un numero totale N di campioni:




*Descrizione del metodo dello "zero padding" nel caso in cui x(n) sia frutto del campionamento di un rettangolo: agli L campioni ottenuti dal campionamento vengono aggiunti, in coda, N-L campioni nulli, in modo da ottenere un numero N di campioni pari a quelli che si intende usare in frequenza*

Dal punto di vista dell'informazione posseduta dal segnale, non è cambiato assolutamente nulla rispetto alla sequenza originale, il che significa, in parole povere, che è rimasto identico lo spettro X(f) della sequenza. Al contrario, l'aver aggiunto dei campioni (sia pure nulli) consente un calcolo più preciso della DFT basata su N campioni, che si traduce, all'atto pratico, in una migliore visualizzazione dello spettro. L'esempio considerato prima era rappresentativo proprio di questi concetti.

Sulla base di queste considerazioni, diventa facile risolvere il problema inverso: supponiamo di partire, questa volta, dalla DFT di una sequenza x(n) e la indichiamo con X(k); supponiamo inoltre che tale DFT sia lunga N campioni; vogliamo calcolare la IDFT di X(k), sapendo che la sequenza risultante x(n) è lunga L campioni. Scriveremo ovviamente che

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad n = 0,1,.....,L-1$$

il che implica che x(n) risulterà identicamente nulla per n=L,L+1,....,N-1.

## PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLA DFT

Le proprietà di cui gode la DFT sono assolutamente analoghe a quelle della trasformata di Fourier per segnali discreti e per segnali continui. Esistono d'altra parte anche delle alte proprietà, come quella della convoluzione circolare, che differenziano profondamente la DFT dalle altre trasformate.

## Linearità

Consideriamo due segnali discreti periodici x(nT) e y(nT) e indichiamo con X(kF) e Y(kF) le rispettive DFT. Si può dimostrare facilmente che la DFT del segnale

$$z(nT) = ax(nT) + by(nT)$$

è semplicemente data da

$$Z(kF) = aX(kF) + bY(kF)$$

Quindi, la DFT di una sequenza z(n) ottenuta come combinazione lineare di altre due sequenze è pari alla combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, delle singole DFT.

## Traslazione nel tempo

Consideriamo il generico segnale s(nT) discreto e la sua trasformata di Fourier S(kF); consideriamo inoltre il nuovo segnale $z(nT) = s(nT - n_0 T)$ ottenuto traslando s(nT) nei tempi di una quantità $n_0T$ multipla del periodo di campionamento.

Si può dimostrare che la DFT del nuovo segnale z(nT) è

$$Z(kF) = S(kF)e^{-j2\pi f\frac{n_0}{N}}$$

## Traslazione in frequenza

Sia sempre s(nT) un generico segnale discreto con DFT S(kF). Consideriamo inoltre la funzione $Z(kF) = S(kF - k_0 F)$. si può dimostrare che essa rappresenta la DFT del segnale

$$z(nT) = s(nT)e^{j2\pi n\frac{k_0}{N}}$$

## Simmetria circolare di una sequenza

Consideriamo una sequenza x(n) di durata finita e indichiamo con L la sua lunghezza (per cui è composta da L campioni, numerati da 0 ad L-1). Ne possiamo calcolare la DFT basata su un numero N≥L di campioni, ottenendo perciò un vettore X(k) ad N elementi. Abbiamo visto che questo vettore X(k) è equivalente alla DFT di una sequenza periodica $x_p(t)$, di periodo N, ottenuta periodicizzando nei tempi la sequenza x(n). Possiamo esprimere tale sequenza periodica nella semplice forma

$$x_p(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n - iN)$$

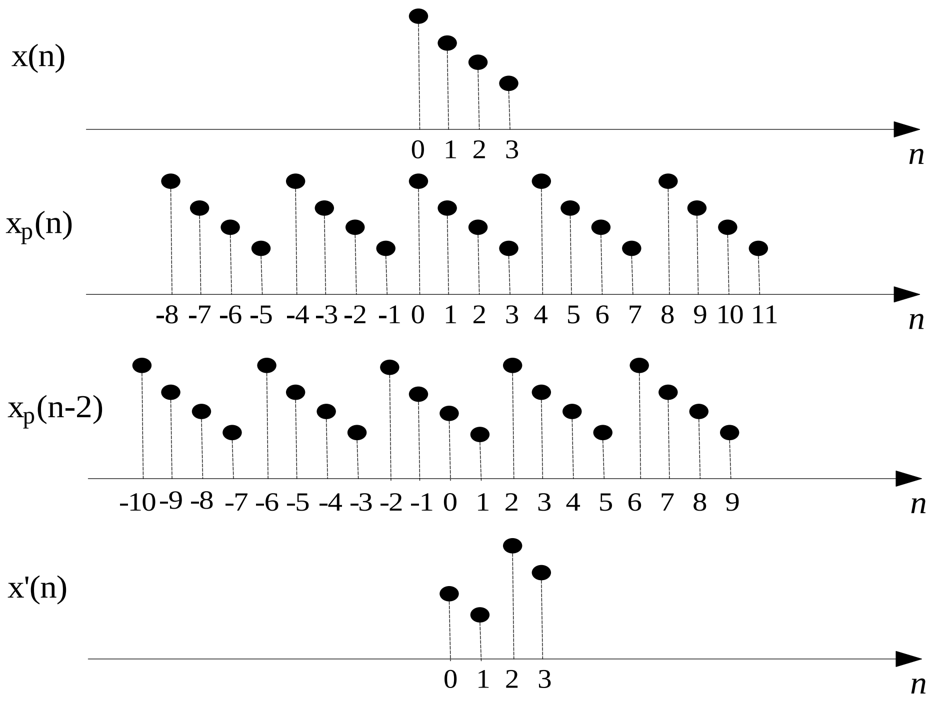
Adesso supponiamo di shiftare la sequenza periodica $x_p(n)$ di k unità verso destra. Otteniamo una sequenza $x'_p(n)$ ancora periodica, che possiamo esprimere facilmente nel modo seguente:

$$x'_p(n) = x_p(n - k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n - k - iN)$$

In questa nuova sequenza possiamo isolare i campioni contenuti nel primo periodo, che va sempre dal campione di posizione 0 a quello di posizione N-1:

$$x'(n) = \begin{cases} x'_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La caratteristica di questa nuova sequenza x'(n) è evidente: essa è ottenuta dalla sequenza x(n) di partenza tramite uno shift circolare. La figura seguente mostra nel dettaglio i passaggi che abbiamo appena effettuato, nel caso semplice di una sequenza lunga N=4 campioni e di uno shift k=2:




Partendo da x(n), il primo passo è la periodicizzazione, in modo da ottenere $x_p(n)$; il secondo passo consiste nello shiftare i campioni di $x_p(n)$ verso sinistra di 1 posizione e di shiftare la numerazione degli stessi campioni verso destra di 1 posizione; infine, l'ultimo passo consiste nell'isolare i campioni numerati da 0 a 3.

Esiste una simbologia convenzionale per rappresentare uno shift circolare di una sequenza:

$$x(n) \xrightarrow{\text{shift circolare di k campioni verso destra}} x'(n) = x((n-k))_N$$

La quantità k indica il numero di campioni per lo shift, mentre la quantità N indica la lunghezza della sequenza x(n) di partenza. Si assume, ovviamente, che la direzione predefinita di shift sia verso destra, il che significa che uno shift verso sinistra sarà indicato con $x((n+k))_N$.

Nel caso della figura precedente, in cui N=4 e k=2, si ha quanto segue:

$$x(n) = \left(x(0) \quad x(1) \quad x(2) \quad x(3)\right) \longrightarrow x'(n) = x((n-2))_4 \longrightarrow \begin{cases} x'(0) = x((-2))_4 = x(2) \\ x'(1) = x((-1))_4 = x(3) \\ x'(2) = x((0))_4 = x(0) \\ x'(3) = x((1))_4 = x(1) \end{cases}$$

Ci sono dei casi in cui lo shift circolare appena descritto porta a dei risultati particolari. A questo proposito, sussistono due definizioni, relative a sequenze di lunghezza finita N:

- una sequenza x(n) è detta **circolarmente pari** se è simmetrica rispetto al punto 0 del circolo, il che significa semplicemente che

$$x(n) = x(N-n) \qquad 1 \le n \le N-1$$

- una sequenza x(n) è detta **circolarmente dispari** se è antisimmetrica rispetto al punto 0 del circolo, il che significa semplicemente che

$$x(n) = -x(N-n) \qquad 1 \le n \le N-1$$

## *Simmetria hilbertiana*

Concentriamoci adesso su una delle proprietà più importanti della DFT. Quando abbiamo introdotto la trasformata “classica” di Fourier di un segnale tempo-continuo, abbiamo detto che, se il segnale è reale, la sua trasformata gode della *simmetria hilbertiana*:

$$s(t) \text{ reale} \xleftrightarrow{\text{Fourier}} S(-f) = S^*(f)$$

In base a questa relazione, la generica componente spettrale a frequenza $f_X$ è pari al complesso coniugato della componente a frequenza $f_X$.

Qualcosa di simile accade anche per la DFT.

Cominciamo con un discorso puramente analitico, partendo dalla definizione di DFT:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad k = 0,1,....,N-1$$

Questa definizione ci dice, in pratica, come calcolare, dato il vettore di N campioni del segnale s(t), il vettore di N campioni che costituisce il campionamento di S(f):

$$\boxed{s(0) \mid s(T_C) \mid s(2T_C) \mid \ldots \mid \ldots \mid s((N-1)T_C)} \xrightarrow{\text{DFT}} \boxed{S(0) \mid S\left(\frac{1}{N}f_C\right) \mid S\left(\frac{2}{N}f_C\right) \mid \ldots\ldots \mid \ldots.. \mid S\left(\frac{N-1}{N}f_C\right)}$$

Supponiamo adesso di voler calcolare il vettore S(k) a partire dall’ultimo campione e andando via via verso sinistra: ciò significa, semplicemente, calcolare S(N-k) con k=1,2,....?. Non ha ovviamente senso considerare k=0, in quanto i campioni di cui disponiamo nel vettore sono fino a quello di ordine N-1. Non solo, ma non siamo in grado di dire, per il momento, qual è l’ultimo valore di k da considerare. Lo vedremo più avanti.

Per calcolare il generico campione S(N-k), ci basta applicare la definizione di DFT:

$$S(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C) e^{-j2\pi n \frac{N-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C) e^{-j2\pi n \frac{N}{N}} e^{j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_C) e^{-j2\pi n} e^{j2\pi n \frac{k}{N}}$$

Il generico termine $e^{-j2\pi n}$ vale evidentemente 1 per qualsiasi valore di n: basta esprimere il termine in notazione trigonometrica cos(2πn)-jsin(2πn) per verificare che la parte reale vale 1 mentre quella immaginaria è nulla. Abbiamo dunque che

$$S(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}$$

In questa relazione, possiamo anche scrivere che $e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=e^{-j2\pi n\frac{(-k)}{N}}$, da cui risulta quindi che

$$S(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{(-k)}{N}}=S(-k)$$

La relazione **S(N-k)=S(-k)** rappresenta una <u>importantissima proprietà della DFT</u>, che commenteremo meglio più avanti. Proseguiamo invece il ragionamento.

Il generico termine $s(nT_C)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}$ all'interno della sommatoria ha un'altra particolarità: se i campioni $s(nT_C)$ sono reali (cioè se s(t) è reale), esso è il complesso coniugato di $s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}$. In altre parole, se $s(nT_C)$ è una sequenza reale, possiamo scrivere che

$$S(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)\left(e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}\right)^*=\left(\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}\right)^*=S^*(k)$$

Abbiamo cioè concluso che, per una <u>sequenza reale</u>, la DFT gode della proprietà per cui

$$\boxed{S(N-k)=S(-k)=S^*(k)}$$

Consideriamo adesso in particolare la proprietà per cui, a prescindere dal fatto che s(t) sia reale o meno, risulta $\boxed{S(N-k)=S(-k)}$, per k =1,2,.....? .

Ricordiamoci di come si perviene alla DFT: dato il segnale s(t) tempo-continuo di partenza, lo si campiona, ottenendo uno spettro periodico $S_C(f)$, e si campiona tale spettro periodico in un assegnato periodo, ottenendo appunto la sequenza S(k). In effetti, essendo $S_C(f)$ periodico (di periodo $f_C=1/T_C$, dove $T_C$ è il *passo di campionamento nei tempi*), abbiamo la più totale libertà di scelta del periodo in cui campionare, dato che il contenuto informativo si ripete ogni periodo. Come abbiamo visto, si sceglie il cosiddetto *periodo base*, che va da $-1/2T_C$ a $1/2T_C$([10]).

Il problema è, però, che la definizione di DFT non include tutti i campioni relativi a tale periodo, ma quelli relativi al periodo che va da 0 a $1/T_C$:

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}} \qquad k = 0,1,....,N-1$$

[10] Ricordiamo che il passo di campionamento in frequenza è $\Delta f=1/NT_C$ ed i campioni presi sono in numero N, per cui l'intervallo di campionamento è di ampiezza $N\bullet\Delta f=1/T_C$.

Allora, è evidente che i primi campioni, quelli cioè relativi all'intervallo $[0,1/2T_C]$ vanno bene, mentre non sappiamo a cosa corrispondono i successivi campioni:

per N pari $\longrightarrow$

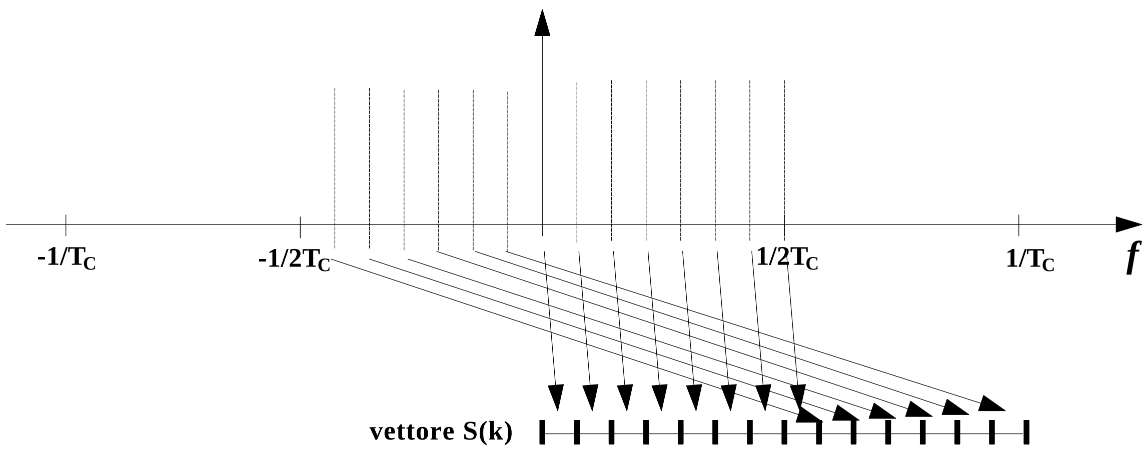
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(0)$ | $S\left(\frac{1}{N}f_C\right)$ | $S\left(\frac{2}{N}f_C\right)$ | ... | $S\left(\frac{N/2}{N}f_C\right)$ | ??? | ??? | ??? | ??? | ??? |

per N dispari $\longrightarrow$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(0)$ | $S\left(\frac{1}{N}f_C\right)$ | $S\left(\frac{2}{N}f_C\right)$ | ... | $S\left(\frac{(N-1)/2}{N}f_C\right)$ | ??? | ??? | ??? | ??? | ??? |

Ce lo dice la proprietà per cui $S(N-k)=S(-k)$: l'ultimo campione S(N-1) corrisponde a S(-1), ossia al valore di S(f) nella frequenza $-1/NT_C$; il penultimo campione S(N-2) corrisponde ad S(-2) e così via per frequenze di modulo via via maggiore.

Dove ci dobbiamo fermare? Evidentemente, dato che abbiamo campionato solo nell'intervallo non ambiguo, dovremo considerare solo i campioni relativi a questo intervallo.




*Costruzione del vettore della DFT nel caso si sia scelto un numero N pari di campioni nell'intervallo di campionamento. La figura considera il caso di N=14 campioni: allora, nel vettore S(k), il primo campione è relativo alla frequenza f=0; i successivi 6 campioni sono per le frequenze comprese tra 0 e la frequenza di Nyquist; l'8° campione corrisponde alla frequenza di Nyquist ed i campioni successivi corrispondono alle frequenze negative, partendo da quella di modulo maggiore e andando via via verso quelle di modulo minore.*

Esplicitiamo ancora meglio il concetto. Prendendo i vari valori di k nell'espressione di S(k), abbiamo il seguente vettore rappresentativo della DFT:

$$\text{per N pari} \longrightarrow S(0), S\left(\frac{1}{NT_C}\right), S\left(\frac{2}{NT_C}\right), \ldots, S\left(\frac{N/2-1}{NT_C}\right), S\left(\frac{N/2}{NT_C}\right), S\left(\frac{N/2+1}{NT_C}\right), \ldots, S\left(\frac{N-1}{NT_C}\right)$$

$$\text{per N dispari} \longrightarrow S(0), S\left(\frac{1}{NT_C}\right), S\left(\frac{2}{NT_C}\right), \ldots, S\left(\frac{(N-1)/2}{NT_C}\right), S\left(\frac{(N+1)/2}{NT_C}\right), \ldots, S\left(\frac{N-1}{NT_C}\right)$$

Consideriamo il caso di **N pari** (cioè il caso rappresentato nell'ultima figura):

$$\text{per N pari} \longrightarrow \underset{f=0}{\underset{\uparrow}{S(0)}} \quad \underset{f=1/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(1)}} \quad \underset{f=2/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(2)}} \quad \ldots \quad \underset{f=\frac{N/2-1}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}-1\right)}} \quad \underset{f=\frac{1}{2T_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}\right)}} \quad \underset{f=?}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}+1\right)}} \quad \ldots \quad \underset{f=?}{\underset{\uparrow}{S(N-1)}}$$

Il primo elemento del vettore è quello relativo alla continua (f=0). Seguono gli elementi relativi alle frequenze positive. L'elemento che si ottiene per k=N/2 è

$$S\left(\frac{N/2}{NT_C}\right)=S\left(\frac{1}{2T_C}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j2\pi n\frac{N/2}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}s(nT_C)e^{-j\pi n}$$

e si tratta quindi del valore di S(f) nella *frequenza di Nyquist* $1/2T_C$.

Gli elementi che si ottengono per k superiore ad N/2 corrispondono, in base alla relazione $S(N-k)=S(-k)$, alle frequenze negative, prima quelle di modulo maggiore e poi via via quelle di modulo minore:

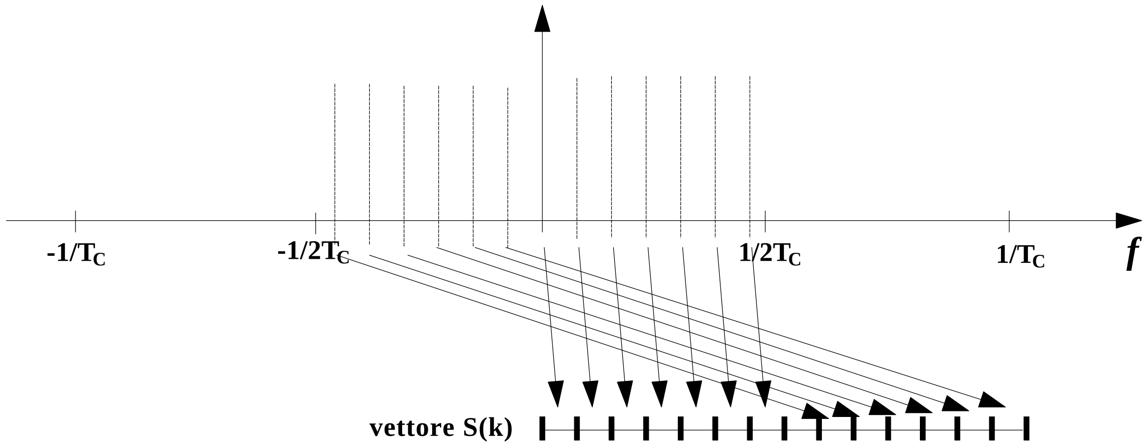
$$\text{per N pari} \longrightarrow \underset{f=0}{\underset{\uparrow}{S(0)}} \quad \underset{f=1/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(1)}} \quad \underset{f=2/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(2)}} \quad \ldots \quad \underset{f=\frac{N/2-1}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}-1\right)}} \quad \underset{f=\frac{1}{2T_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}\right)}} \quad \underset{f=-\frac{N/2-1}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}+1\right)}} \quad \underset{f=-\frac{N/2-2}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N}{2}+2\right)}} \quad \underset{f=-1/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(N-1)}}$$

C'è qualche problema per quanto riguarda l'elemento corrispondente alla frequenza di Nyquist (k=N/2), del quale non possiamo calcolare il valore corretto per evidenti problemi di simmetria. D'altra parte, tale campione non serve poi a molto: se, quando abbiamo campionato nel tempo, abbiamo rispettato il teorema del campionamento ed abbiamo scelto $f_C$ sufficientemente più grande della banda B del segnale, in $f_C/2$ non c'è segnale, per cui possiamo sicuramente porre il campione a 0; se invece non abbiamo rispettato il campionamento, allora in corrispondenza di $f_C/2$ abbiamo sicuramente un problema di aliasing, per cui il campione diventa non significativo e possiamo nuovamente porlo a 0.

Nel caso di **N dispari**, è ovvio che questi problemi scompaiono, in quanto non disponiamo del termine relativo alla frequenza di Nyquist:

$$\text{per N dispari} \longrightarrow \underset{f=0}{\underset{\uparrow}{S(0)}} \quad \underset{f=1/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(1)}} \quad \underset{f=2/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(2)}} \quad \ldots \quad \underset{f=\frac{(N-1)/2}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N-1}{2}\right)}} \quad \underset{f=-\frac{(N-1)/2}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N+1}{2}\right)}} \quad \underset{f=-\frac{(N-3)/2}{NT_C}}{\underset{\uparrow}{S\left(\frac{N+3}{2}\right)}} \quad \underset{f=-1/NT_C}{\underset{\uparrow}{S(N-1)}}$$

Graficamente, abbiamo quanto segue:




*Costruzione del vettore della DFT nel caso si sia scelto un numero N dispari di campioni nell'intervallo di campionamento. La figura considera il caso di N=13 campioni: il primo campione è relativo alla frequenza f=0; i successivi 6 campioni sono per le frequenze comprese tra 0 e la frequenza di Nyquist (esclusa); i successivi 6 campioni sono per le frequenze negative, partendo da quella di modulo maggiore e andando via via verso quelle di modulo minore.*

## OSSERVAZIONE

Consideriamo un generico sistema tempo-continuo caratterizzato da una funzione di risposta all'impulso h(t) e dalla corrispondente trasformata H(f). Volendo condurre uno studio di questo sistema mediante un calcolatore, dobbiamo passare dal mondo tempo-continuo al mondo tempo-discreto. Possiamo discretizzare sia i tempi, campionando h(t) per passare ad h(n), sia le frequenze, campionando H(f) e passando ad H(k) oppure direttamente applicando la DFT ad h(n). C'è allora da porre attenzione ad alcune cose.

Supponiamo di voler discretizzare le frequenze partendo da H(f) e campionandola. Scegliamo il solito passo di campionamento $\Delta f=f_C/N=1/NT_C$, dove $T_C$ è il passo di campionamento che intendiamo usare poi nei tempi. Campionare H(f) significa periodicizzare h(t):

$$H(f)\xrightarrow[\text{in frequenza}]{\text{campionamento}}H(k)\xrightarrow[\text{di Fourier}]{\text{antitrasformata}}h_C(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h\left(t-\frac{n}{\Delta f}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(t-nNT_C)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(t)\delta(t-nNT_C)$$

Ad esempio, se H(f) è il filtro passa-basso ideale, per cui h(t) è del tipo sin(t)/t, la funzione $h_C(t)$ è un sin(t)/t periodicizzato a passo $NT_C$.

Nei tempi, siamo ancora nel dominio del continuo. Al contrario, a noi interessa una rappresentazione campionata anche nei tempi, per cui dobbiamo adesso compiere due operazioni: essendo $h_C(t)$ periodico, dobbiamo scegliere un qualsiasi periodo, troncare il segnale su tale e campionare (a passo $T_C$):

$$h_C(t)\xrightarrow{\text{finestratura}}h_F(t)\xrightarrow[\text{nel tempo}]{\text{campionamento}}h_F(nT_C)$$

E' ovvio che, se scegliamo il periodo base (corrispondente cioè ad n=0 nella sommatoria di prima), la finestratura ci dà proprio h(t).

L'operazione di finestratura equivale, in frequenza, a convolvere lo spettro di $h_C(t)$ con la trasformata del rettangolo di finestratura, cioè con sin(*f*)/*f*. Ma lo spettro di $h_C(t)$ sappiamo essere

H(k), cioè una sequenza finita di impulsi. La convoluzione va allora a posizionare i sin(*f*)/*f* a cavallo di tali impulsi e poi a sommare. Schematicamente, abbiamo infatti che

$$h_C(t) \xrightarrow{\text{finestratura}} h_F(t) = h_C(t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{NT_C}\right) \xleftrightarrow{\text{in frequenza}} H_F(f) = H(k) * \frac{\sin(f)}{f} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(f - n\Delta f)}{(f - n\Delta f)}$$

Lo spettro che otteniamo dalla finestratura è chiaramente continuo e, tra l'altro, di banda infinita, dato che il sin(*f*)/*f* è a banda infinita. Il successivo campionamento interviene a periodicizzare tale spettro, determinando un inevitabile *errore di aliasing*.

Lo scopo di questo discorso è ancora una volta quello di evidenziare che, *lavorando con un numero finito di campioni, sia nel tempo sia in frequenza, non possiamo esimerci dall'errore di alias. L'unica cosa che possiamo fare è scegliere il passo di campionamento (nel tempo ed in frequenza, dato che i due passi sono legati univocamente) in modo opportuno:* tale modo opportuno consiste chiaramente nel fare in modo che la sovrapposizione dei Seni Cardinali coinvolga le code di più basso valore, in modo da avere contributi trascurabili.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1