

# Appunti di Elettronica

## Capitolo 2

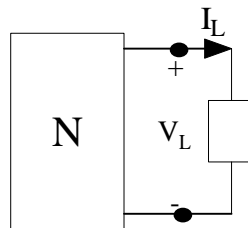
### "Punto operativo" di un circuito

DETERMINAZIONE DEL PUNTO OPERATIVO DI UN CIRCUITO .....	2
<i>Introduzione</i> .....	2
<i>Circuito con un solo elemento non-lineare: metodo del fixed point</i> .....	3
Esempio: circuito con diodo.....	4
Esempio: circuito con diodo Zener .....	6
Esempio: circuito con due elementi non lineari.....	7
Circuito con 3 elementi non lineari.....	10
<i>Approssimazione lineare a tratti delle caratteristiche</i> .....	16
TEOREMI GENERALI PER I CIRCUITI RESISTIVI .....	19
<i>Teorema 1</i> .....	19
<i>Teorema 2</i> .....	19
<i>Teorema 3</i> .....	19
Conseguenza: caso del diodo tunnel.....	19

## Determinazione del punto operativo di un circuito

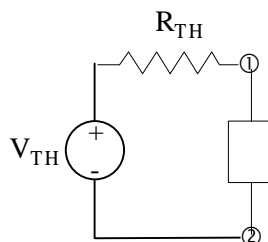
### Introduzione

Supponiamo di avere un circuito contenente un solo elemento non lineare a due terminali (ad esempio un *diode*) e, per il resto, solo elementi lineari e generatori indipendenti. Al fine di evidenziare questa particolare natura del circuito, lo possiamo schematizzare nel modo seguente:



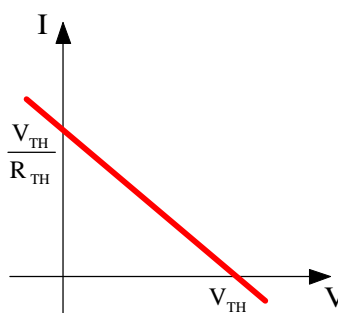
Evidentemente, L è il bipolo non lineare, mentre il monoporta N rappresenta la restante parte del circuito, composta solo da elementi lineari (ad esempio solo resistori) e generatori indipendenti. Ci chiediamo, allora, quale sia il "punto di lavoro" o "punto di riposo" o "**punto operativo**" di questo circuito.

Per la determinazione del punto operativo, conviene senz'altro sostituire il monoporta N mediante il suo equivalente di Thevenin, dando ovviamente per scontato che N soddisfi le condizioni imposte dal teorema di Thevenin:



A questo punto, i metodi possibili sono essenzialmente di due tipi:

- il cosiddetto **metodo grafico** consiste nel trovare, graficamente appunto, l'intersezione tra la caratteristica del bipolo non lineare e quella dell'equivalente di Thevenin, che sappiamo essere del tipo riportato nella figura seguente:

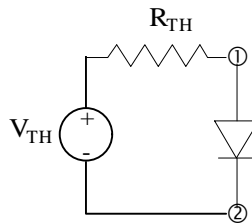


- il **metodo numerico** consiste invece nel trovare, con metodi numerici opportuni, l'intersezione tra le equazioni che rappresentano le due caratteristiche.

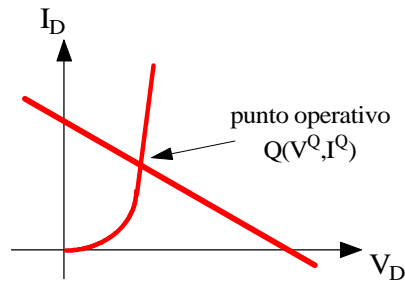
E' chiaro che il metodo grafico comporta delle approssimazioni maggiori rispetto a quello numerico (il quale, teoricamente, può essere del tutto esente da approssimazioni), ma è abbastanza più rapido e meno laborioso.

## Circuito con un solo elemento non-lineare: metodo del fixed point

A titolo di esempio di quanto detto nel paragrafo precedente, vediamo come è possibile utilizzare un metodo numerico per calcolare il punto di lavoro di un circuito nel caso in cui l'elemento a due terminali non lineare sia un semplice *diode pn*:



A livello grafico, l'intersezione tra le caratteristiche fornisce quanto segue:



N.B. Ovviamente, si è considerata, per quanto riguarda il diodo, solo la parte di caratteristica I-V relativa alla polarizzazione diretta, in quanto il circuito è chiaramente tale da garantire questa condizione di polarizzazione.

A livello analitico, c'è invece da risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1 \right) \\ V_D = V_{TH} - R_{TH} I_D \end{cases}$$

La complessità matematica di questo sistema deriva dal fatto che si tratta di un sistema trascendente per via della presenza del termine esponenziale: questo impedisce l'applicazione dei normali metodi analitici per la risoluzione dei sistemi lineari e obbliga perciò all'uso di opportuni *metodi numerici*. Quale potrebbe essere, allora, un metodo numerico appropriato per questa situazione?

Parliamo del cosiddetto **metodo iterativo del fixed point**:

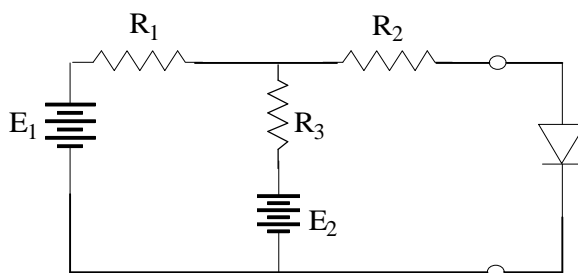
- si fissa un valore iniziale, da scegliere con oculatezza, della corrente  $I_Q$  del punto di lavoro;
- si sostituisce questo valore nell'equazione del diodo, trovando il corrispondente valore di tensione  $V_Q$ ;
- il valore  $V_Q$  viene sostituito nell'equazione della retta, trovando un nuovo valore  $I'_Q$  della corrente;
- si ripete quindi iterativamente il procedimento fino al momento in cui i valori di  $I_Q$  e  $V_Q$ , a seguito di ulteriori sostituzioni, si mantengono costanti: la costanza di tali valori indica infatti che è stato individuato il punto di lavoro.

*L'opportunità di usare un metodo del genere deriva dal fatto che la corrente nel diodo ha una crescita molto rapida dopo che è stata raggiunta l'accensione del diodo stesso e questo costituisce una garanzia di convergenza del metodo.*

Abbiamo inoltre detto prima che, per applicare questo metodo, è necessario fissare un valore iniziale arbitrario di corrente. Come scegliere questo valore? E' subito chiaro che il valore da scegliere deve avere un significato fisico: difatti, non avrebbe senso fissare un valore superiore a  $V_{TH}/R_{TH}$ , in quanto, come si nota dall'intersezione delle caratteristiche, non si potranno mai avere valori di corrente superiori a  $V_{TH}/R_{TH}$ . Di conseguenza, la "stima iniziale" della corrente potrebbe essere proprio  $V_{TH}/R_{TH}$ .

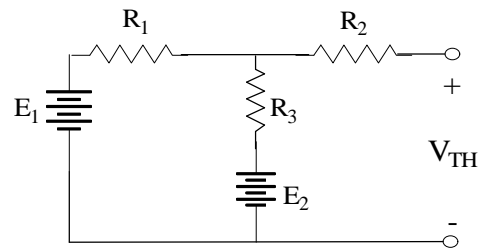
## Esempio: circuito con diodo

Usando il metodo dell'equivalente di Thevenin, cerchiamo il punto di lavoro del seguente circuito:



Dobbiamo trovare l'equivalente di Thevenin alla porta AB del circuito.

Cominciamo con il calcolo della  $V_{TH}$ , che è la tensione di ingresso alla porta AB quando tale porta è in condizioni di cortocircuito; ciò significa che si tratta della tensione alla porta del circuito seguente:



Dato che non scorre corrente alla porta, la tensione che cerchiamo è quella ai capi del “percorso” contenente  $R_1$  ed  $E_2$ . Possiamo allora applicare la sovrapposizione degli effetti. Passivando il generatore  $E_2$ , il contributo di  $E_1$  è

$$V_{TH,1} = V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1$$

Passivando invece  $E_1$ , il contributo di  $E_2$  è

$$V_{TH,2} = V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

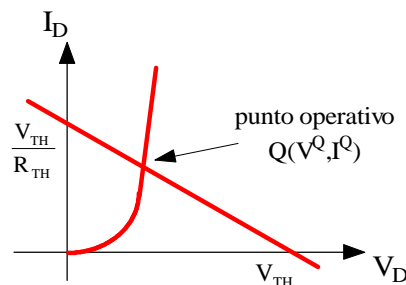
Concludiamo dunque che la tensione di Thevenin è

$$V_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

Passiamo al calcolo della  $R_{TH}$ , ossia la resistenza vista dai morsetti AB, quando  $E_1$  ed  $E_2$  sono passivati: si tratta chiaramente della serie tra  $R_3$  ed il parallelo tra  $R_1$  ed  $R_2$ , per cui è

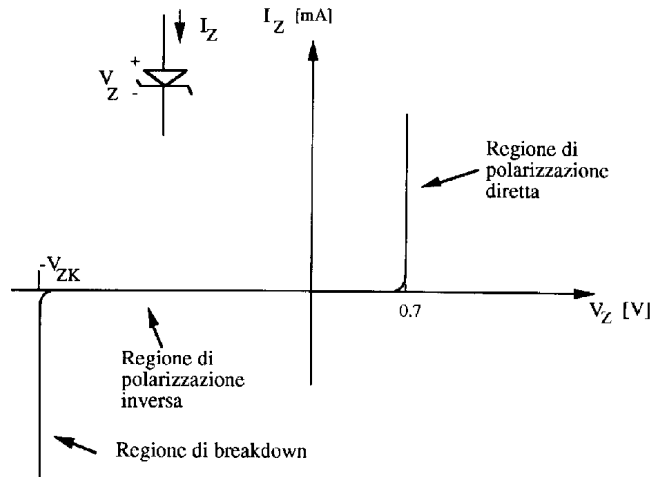
$$R_{TH} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Fatti questi conti, il punto operativo del circuito sarà dato dall'intersezione della caratteristica del diodo e della caratteristica del circuito equivalente di Thevenin appena determinato:

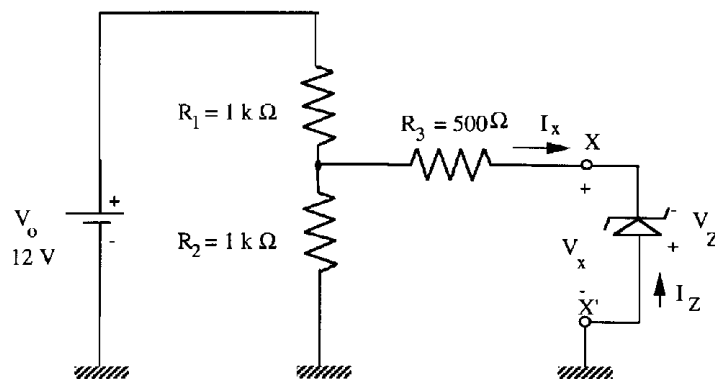


## Esempio: circuito con diodo Zener

Il **diodo Zener** è un normale diodo pn, caratterizzato però dal fatto di avere una *tensione inversa di breakdown* ( $V_{ZK}$ ) piuttosto stabile <sup>(1)</sup>. Una tipica caratteristica I-V di un diodo Zener è fatta nel modo seguente:



Consideriamo allora il seguente circuito impiegante un diodo Zener:



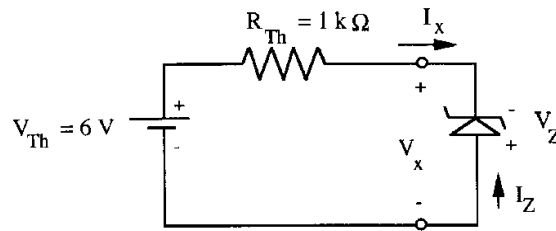
Ci interessa determinare il punto operativo del circuito, ossia, in definitiva, il punto operativo del diodo.

Per fare questo, la prima cosa opportuna da fare è quella di sostituire la parte di circuito a sinistra del diodo con il suo equivalente di Thevenin:

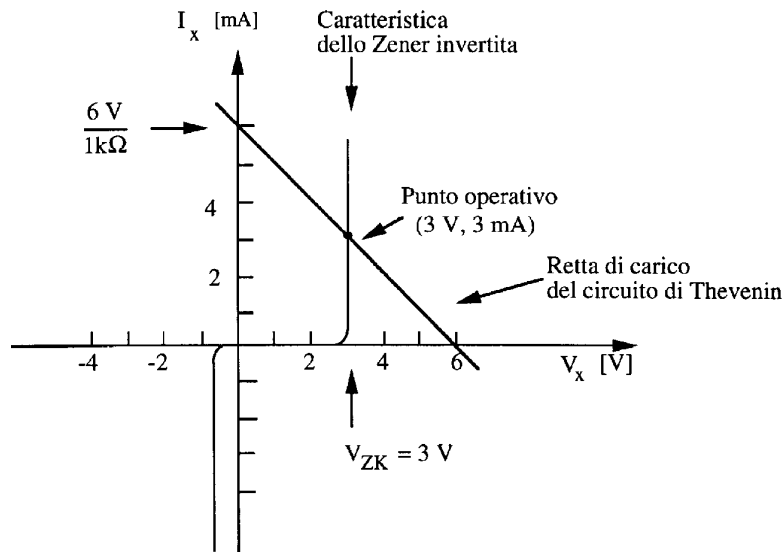
- la tensione di Thevenin non è altro che la tensione a vuoto alla porta X-X': si osserva facilmente che essa coincide con la partizione di  $V_0$  su  $R_2$ ; essendo poi  $R_2$  uguale ad  $R_1$ , si deduce immediatamente che  $V_{th} = V_0/2$ ;
- la resistenza di Thevenin, invece, è la resistenza vista dalla porta X-X' (cioè il rapporto tensione/corrente a tale porta) quando  $V_0$  è passivato: si trova facilmente che  $R_{th} = R_3 + R_1 // R_2 = 1k\Omega$

<sup>1</sup> Questa peculiarità lo rende particolarmente utile per simulare un generatore di tensione.

Il circuito da analizzare si riduce dunque al seguente:



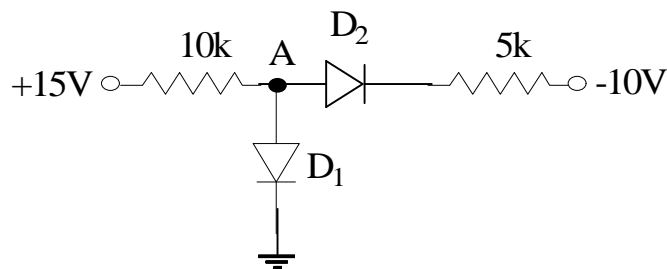
Da un punto di vista grafico, il punto operativo si trova intersecando la *retta di carico* corrispondente all'equivalente di Thevenin con la caratteristica I-V del diodo invertita nelle sue polarità:



### Esempio: circuito con due elementi non lineari

Le situazioni esaminate nei paragrafi precedenti prevedevano un circuito con un solo elemento non-lineare (in particolare un diodo, ma potevamo anche considerare, ad esempio, un elemento con caratteristica quadratica del tipo  $I = k(V - V_0)^2$ ). Vediamo, allora, come è possibile procedere, per via essenzialmente qualitativa, nel caso in cui il circuito in esame contenga due elementi non lineari, ad esempio due diodi.

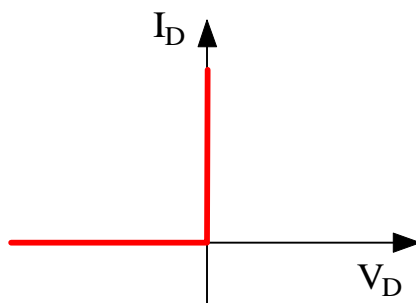
Supponiamo perciò che il circuito sia fatto nel modo seguente:



E' subito evidente che il punto di lavoro di questo circuito è condizionato dallo "stato" (acceso o spento) dei due diodi. Le possibilità sono ovviamente 4:

diodo $D_1$	diodo $D_2$
ON	ON
ON	OFF
OFF	ON
OFF	OFF

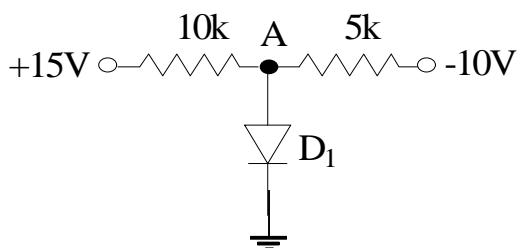
Facciamo, per semplicità, l'ipotesi che i due diodi siano ideali, il che significa che la loro caratteristica tensione-corrente è fatta nel modo seguente:



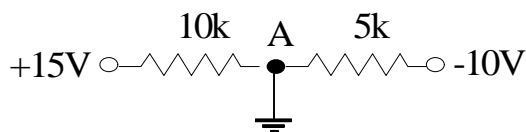
Questa caratteristica dice, in pratica, che ciascun diodo non lascia passare corrente (cioè si comporta come un circuito aperto) quando la tensione applicata ai suoi capi è negativa, mentre invece si comporta come un cortocircuito quando tale tensione è positiva.

Sulla base di ciò e sulla base della tabella riportata prima, andiamo allora a vedere quali possibili situazioni si possono creare nel circuito.

Cominciamo a verificare se i due diodi possono essere entrambi accesi: supponiamo ad esempio che  $D_2$  sia acceso; se è acceso, esso si comporta come un cortocircuito, per cui il circuito è il seguente:



Se anche  $D_1$  è acceso, significa che il punto A è a massa, per cui il circuito è equivalente al seguente:





La corrente che scorre nel resistore da 10kΩ è

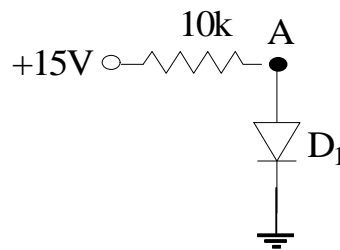
$$I_1 = \frac{15}{10 \cdot 10^3} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$$

mentre quella che scorre in quello da 5kΩ è

$$I_2 = \frac{0 - (-10)}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$$

La corrente  $I_1$  è una corrente entrante nel nodo A, mentre la corrente  $I_2$  è una corrente uscente; allora, prendendo positiva la corrente entrante, la corrente che deve fluire nel diodo  $D_1$  è  $I = I_1 - I_2 = -0.5 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$ . Questa è una corrente che raggiunge il nodo A attraverso il ramo di  $D_1$ , ossia è una corrente inversa per  $D_1$ : ma noi stiamo supponendo che  $D_1$  sia acceso, per cui possiamo escludere che i due diodi siano entrambi accesi.

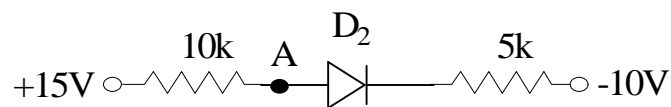
Verifichiamo allora se è possibile che i due diodi siano entrambi spenti. Supponiamo, ad esempio, che  $D_2$  sia spento:



Se è spento anche  $D_1$ , la tensione al punto A è positiva e quindi la tensione ai capi di  $D_2$  è senz'altro positiva, per cui  $D_2$  non può essere spento.

Abbiamo dunque scartato due possibilità. Ne rimangono altre due.

Supponiamo ad esempio che il diodo  $D_1$  sia spento: se  $D_1$  è spento, nel suo ramo non scorre corrente, per cui il circuito si riduce semplicemente a



Supponiamo inoltre che  $D_2$  sia acceso: ciò significa che lo possiamo sostituire con un cortocircuito, per cui il circuito diventa



Possiamo allora calcolarci la corrente che scorre nel ramo, visto che i due resistori sono in serie: essa vale evidentemente

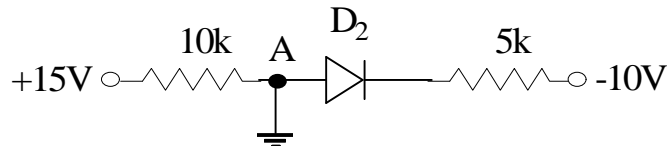
$$I = \frac{15 - (-10)}{10k + 5k} = \frac{25}{15 \cdot 10^3} = 1.67 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$$

Possiamo anche calcolarci la tensione nel punto A, che risulta essere la tensione ai capi del diodo  $D_1$ : risulta evidentemente

$$V_A = 15 - 1.67 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 = 15 - 16.7 = -1.7(\text{V})$$

Abbiamo dunque trovato che la tensione nel punto A è negativa, il che significa che la tensione ai capi di  $D_1$  è negativa e, quindi, che l'ipotesi fatta di  $D_1$  spento e  $D_2$  acceso è consistente.

L'ultima possibilità da verificare è che  $D_1$  sia acceso e  $D_2$  spento: se  $D_1$  è acceso, il circuito è

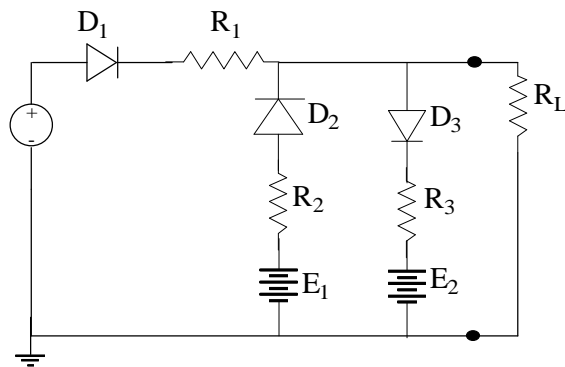


Essendo il punto A a massa, la tensione ai capi del diodo  $D_2$  è certamente positiva, per cui  $D_2$  non può essere spento.

Possiamo concludere che *l'unica possibilità di funzionamento di questo circuito è che il diodo  $D_1$  sia spento, mentre  $D_2$  sia acceso*. I dati numerici sul punto di lavoro sono stati trovati prima.

### Circuito con 3 elementi non lineari

Complichiamo ulteriormente i nostri discorsi, considerando un circuito resistivo in cui i diodi presenti siano ben 3:



I dati numerici su questo circuito sono i seguenti:  $R_1=2.5\text{k}\Omega$ ;  $R_2=5\text{k}\Omega$ ;  $R_3=5\text{k}\Omega$ ;  $R_L=5\text{k}\Omega$ ;  $E_1=6\text{V}$ ;  $E_2=20\text{V}$ .

Supponiamo ancora una volta che i tre diodi siano ideali.

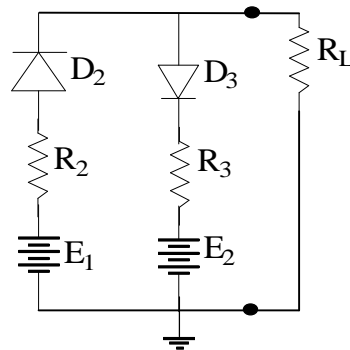
Vogliamo la tensione  $V_L$  ai capi del carico  $R_L$  al variare della tensione in ingresso  $V_{IN}$ : vogliamo cioè la *caratteristica di trasferimento in tensione* di questo circuito.

Così come abbiamo visto nell'esempio precedente, tutto sta a capire in quali condizioni (acceso o spento) si trovano i tre diodi al variare della tensione ingresso. Il modo più facile di procedere è quello di partire da un valore molto alto o molto basso della  $V_{IN}$  e di procedere poi per valori via via decrescenti o crescenti di tale tensione.

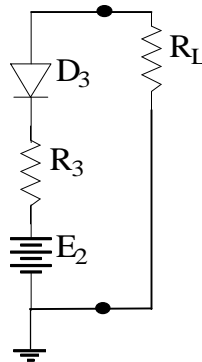
Partiamo perciò da un valore negativo molto basso della  $V_{IN}$  (cioè  $V_{IN}$  negativa e molto alta in valore assoluto). Se  $V_{IN}$  è una tensione negativa alta, è ragionevole pensare che il diodo  $D_1$  sia sottoposto ad una tensione inversa, per cui facciamo

l'ipotesi che, per il momento,  $D_1$  sia spento, salvo, ovviamente, a verificarne poi la correttezza.

Dire che  $D_1$  è spento significa, in pratica, dire che la tensione in ingresso non ha alcuna influenza sul circuito, il quale risulta essere il seguente:



Restano ora da indagare le condizioni dei due diodi. Supponiamo ad esempio che  $D_2$  sia spento; ciò significa che anche il ramo in cui si trova  $D_2$  è come se fosse assente:

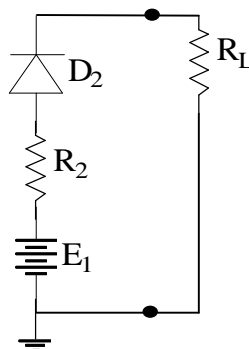


La tensione ai capi di  $D_3$  è allora

$$v_{D_3} = -E_2 - (R_L + R_3)I$$

Questa è una tensione negativa, per cui  $D_3$  deve essere necessariamente spento.

Tuttavia, è facile verificare che, se  $D_3$  è spento, necessariamente  $D_2$  deve essere acceso. Se  $D_3$  è spento, per cui il ramo che lo contiene è come se non ci fosse, il circuito può essere visualizzato nel modo seguente:



E' chiaro, allora, che, per lo stesso motivo per cui  $D_3$  è spento,  $D_2$  deve essere acceso: infatti, la tensione ai capi di  $D_2$  è

$$v_{D_2} = E_1 + (R_L + R_2)I$$

ed è una tensione senz'altro positiva.

Possiamo allora concludere che, fino a quando  $D_1$  è spento, la situazione più ragionevole è che  $D_2$  sia acceso e, quindi,  $D_3$  sia spento. In questa situazione, il circuito è l'ultimo disegnato con, in più, un cortocircuito al posto di  $D_2$ : dato che  $R_L$  e  $R_2$  sono in serie, possiamo dunque scrivere che la tensione in uscita vale

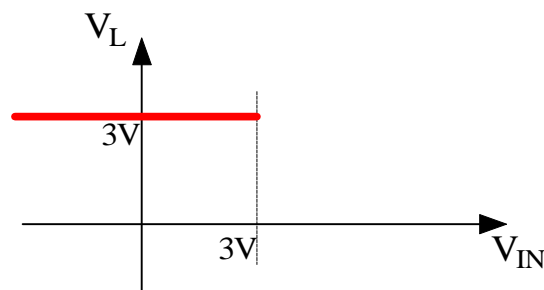
$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_3} E_1 = 3V$$

Ottenuto questo valore numerico, dobbiamo andare a verificare se le ipotesi fatte sono congruenti con esso: dobbiamo cioè verificare se le tensioni ai capi di  $D_1$  e  $D_3$  risultano effettivamente negative, nel qual caso le ipotesi sono congruenti, oppure no, nel qual caso dovremo cambiare ipotesi. Effettivamente, si verifica facilmente che le ipotesi sono corrette, per cui possiamo cominciare ad affermare che, *quando la tensione in ingresso è negativa ed elevata in valore assoluto, la tensione in uscita è indipendente da essa ed è approssimativamente costante sul valore 3V.*

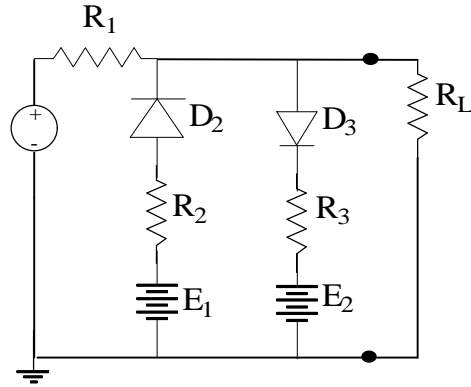
Adesso si tratta di capire quando questa situazione viene modificata man mano che la tensione in ingresso aumenta, ossia diventa meno negativa. E' chiaro che le cose possono cambiare solo nel momento in cui il diodo  $D_1$  si accende. Ci chiediamo allora quando  $D_1$  si può accendere: la tensione ai capi di  $D_1$ , fin quando esso è spento, vale  $V_{D_1} = V_{IN} - V_L$ ; allora avendo prima trovato che, per  $V_{IN}$  piccola, la  $V_L$  si mantiene costante e pari a 3V, è chiaro che il diodo si accenderà non appena  $V_{IN}=3V$ , in quanto è in corrispondenza di questo valore della tensione in ingresso che la tensione ai capi di  $D_1$  si annulla ed eventualmente prende a crescere.

Possiamo allora perfezionare quanto detto prima dicendo che *la tensione di uscita vale 3V fino a quando la tensione in ingresso, partendo da -∞, arriva a sua volta al valore 3V.*

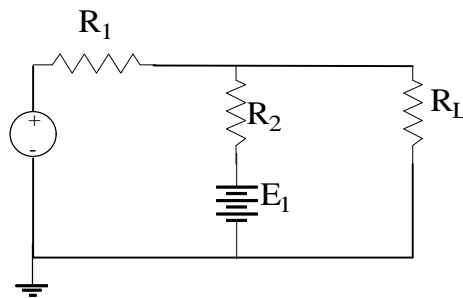
Da un punto di vista grafico, possiamo perciò cominciare a tracciare la caratteristica di trasferimento nel modo seguente:



Supponiamo, a questo punto, che la tensione in ingresso abbia superato il valore 3V e che quindi  $D_1$  si sia acceso. Ciò significa che questo diodo si comporta adesso da cortocircuito, per cui possiamo cominciare a ridisegnare il circuito nel modo seguente:



Dobbiamo ancora una volta capire in che condizione si trovano adesso i diodi  $D_2$  e  $D_3$ . Ragioniamo un momento su  $D_2$ : la tensione applicata all'anodo del diodo è  $E_1=6V$  diminuita della caduta di tensione su  $R_2$ ; viceversa, la tensione applicata al catodo è  $V_{IN}=3V$  diminuita della caduta di tensione su  $R_1$ . E' ragionevole pensare, allora, che  $D_2$  sia sottoposto ad una tensione positiva e cioè sia acceso. Per un motivo perfettamente analogo, anche se opposto, è ragionevole pensare, invece, che  $D_3$  sia spento. Possiamo quindi ipotizzare, salvo a verificarlo dopo, che il circuito sia adesso il seguente:



Il calcolo della tensione di uscita può allora essere fatto applicando il principio della sovrapposizione degli effetti: passivando l'ingresso, abbiamo  $R_2$  in serie al parallelo tra  $R_1$  ed  $R_L$ , per cui la tensione su  $R_L$  risulta essere

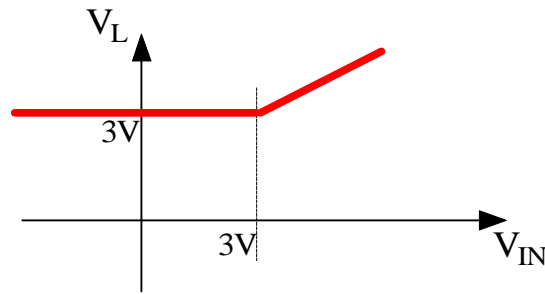
$$V'_L = \frac{(R_1 // R_L) E_1}{(R_1 // R_L) + R_2} = 1.5(V)$$

Passivando, invece,  $E_1$ , abbiamo  $R_1$  in serie al parallelo tra  $R_2$  ed  $R_L$ , per cui la tensione su  $R_L$  risulta essere

$$V''_L = \frac{(R_2 // R_L) V_{IN}}{(R_2 // R_L) + R_1} = 0.5V_{IN}$$

per cui possiamo concludere che  $V_L = 0.5V_{IN} + 1.5$ .

Abbiamo dunque una dipendenza lineare, con coefficiente pari a 0.5, della tensione di uscita dalla tensione in ingresso, per cui possiamo andare a perfezionare la caratteristica grafica prima tracciata:



Dobbiamo adesso stabilire fino a quando permane la situazione appena descritta.

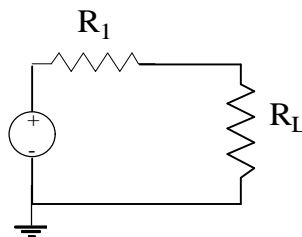
E' chiaro che  $D_1$  rimarrà d'ora in poi sempre acceso, per cui le uniche due possibilità sono che si spenga  $D_2$  oppure che si accenda  $D_3$ . Quale delle due avviene prima? Si tratta di stabilire se fa prima la tensione su  $D_2$  a diventare negativa o la tensione su  $D_3$  a diventare positiva.

Dato che la tensione sul catodo di  $D_3$  è pari a 20V, perché si abbia l'accensione di  $D_3$  è necessario che la tensione di uscita arrivi a sua volta al valore 20V; al contrario, la tensione sull'anodo di  $D_2$  è pari a poco meno di 6V, per cui la condizione perché si abbia lo spegnimento di  $D_2$  è che la  $V_L$  arrivi all'incirca al valore 6V. Deduciamo perciò che lo spegnimento di  $D_2$  avviene senz'altro prima dell'accensione di  $D_3$ .

Il valore della tensione di ingresso in corrispondenza del quale si ha l'accensione di  $D_2$  si ricava facilmente: dato che  $V_L$  e  $V_{IN}$  sono adesso legate dalla relazione  $V_L = 0.5V_{IN} + 1.5$ , basta imporre che sia  $V_L = 6V$  per ottenere che

$$V_{IN} = 2 * (6 - 1.5) = 9V$$

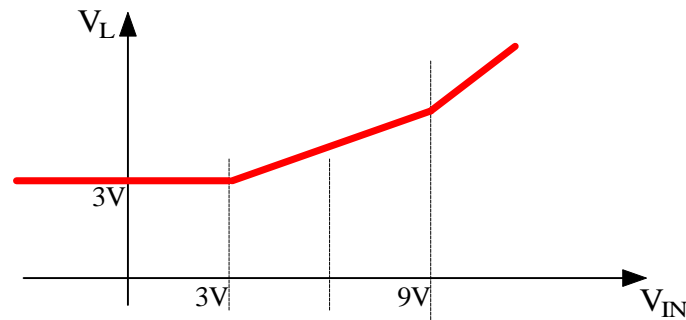
Quindi, quando la tensione di ingresso raggiunge il valore 9V, il diodo  $D_2$  si spegne, mentre  $D_3$  rimane spento e  $D_1$  acceso. Il circuito diventa allora il seguente:



I due resistori sono in serie, per cui la tensione in uscita vale adesso

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_1} V_{IN} = 0.67V_{IN}$$

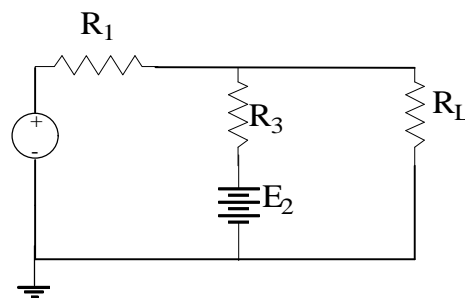
In pratica, rispetto alla situazione precedente, la dipendenza tra tensione di uscita e tensione di ingresso è sempre lineare, ma con una pendenza leggermente maggiore (in quanto si passa da 0.5 a 0.67):



Continuando ad aumentare la tensione ingresso, si arriva al momento in cui la tensione di uscita raggiunge i 20V: a questo punto, c'è l'accensione del diodo  $D_3$ .

Il valore della tensione in ingresso a partire dal quale  $D_3$  risulta acceso si ottiene in modo analogo a prima, ossia imponendo che  $20(V) = 0.67V_{IN}$ : da qui si ricava che  $V_{IN} = 29.8(V)$ .

A partire da questo valore, se  $D_3$  è acceso, il circuito diventa il seguente:



Il calcolo della tensione di uscita può essere fatto ancora una volta applicando il principio della sovrapposizione degli effetti:

- passivando l'ingresso, abbiamo  $R_3$  in serie al parallelo tra  $R_1$  ed  $R_L$ , per cui la tensione su  $R_L$  risulta essere

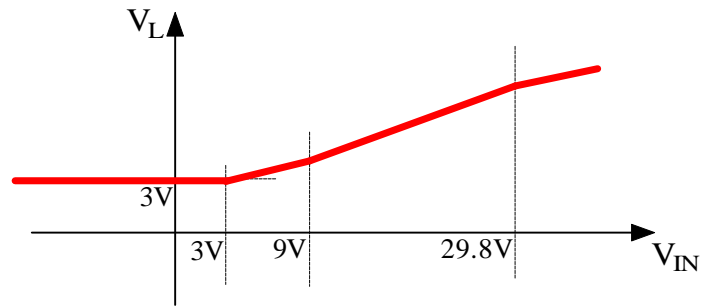
$$V'_L = \frac{(R_1 // R_L)E_1}{(R_1 // R_L) + R_3} = 1.5(V)$$

- passivando, invece,  $E_2$ , abbiamo  $R_1$  in serie al parallelo tra  $R_3$  ed  $R_L$ , per cui la tensione su  $R_L$  risulta essere

$$V''_L = \frac{(R_3 // R_L)V_{IN}}{(R_3 // R_L) + R_1} = 0.5V_{IN}$$

Possiamo concludere che  $V_L = 0.5V_{IN} + 1.5$  e questo è lo stesso andamento che la tensione di uscita aveva nell'intervallo  $[3V, 9V]$ .

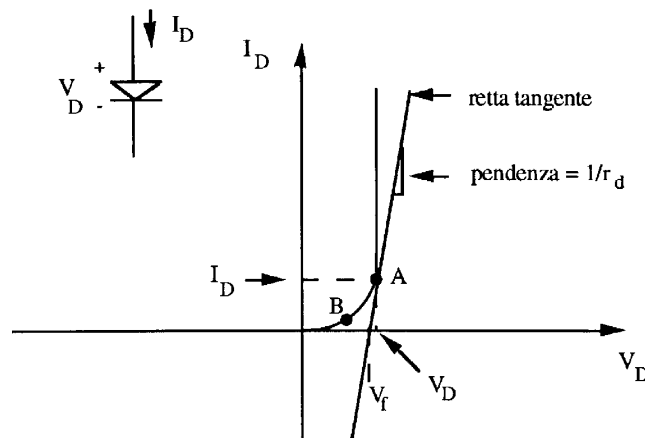
Possiamo dunque completare la caratteristica nel modo seguente:



E' chiaro che, per tensioni superiori a 29.8V, non cambia più nulla nel circuito.

## Approssimazione lineare a tratti delle caratteristiche

La caratteristica corrente-tensione della maggior parte dei dispositivi non lineari può essere approssimata graficamente con una opportuna **sequenza di tratti rettilinei**. Consideriamo, ad esempio, una giunzione pn portata a funzionare nel punto A indicato nella figura seguente:



La tangente alla curva I-V nel punto A attraversa l'asse delle tensioni nel punto  $V_f$  ed ha una pendenza costante: si ha che

$$\frac{dI_D}{dV_D} = \frac{1}{r_d}$$

Il tratto "verticale" della caratteristica può quindi essere approssimato con un tratto rettilineo di equazione

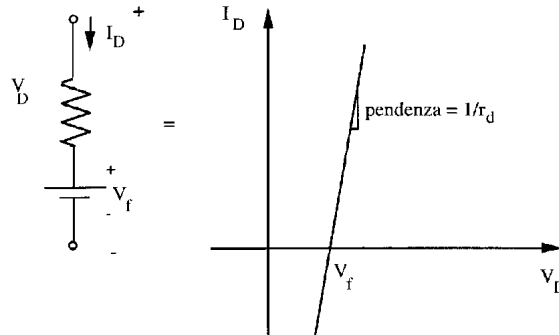
$$V_D = V_f + I_D r_d = V_f + I_D \frac{dV_D}{dI_D}$$

Considerando che la corrente del diodo, quando è acceso, è data dalla nota relazione  $I_D \cong I_S e^{V_D/\eta V_T}$ , possiamo dunque scrivere che

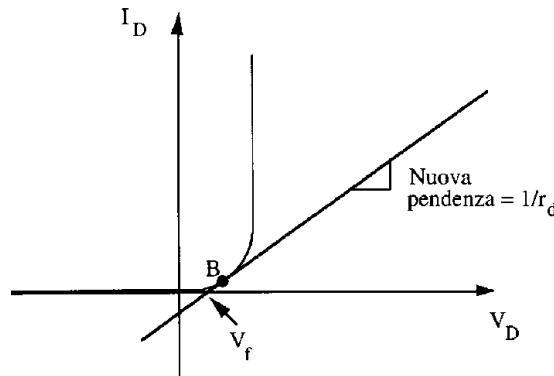
$$r_d = \frac{dV_D}{dI_D} \cong \frac{\eta V_T}{I_D^0}$$



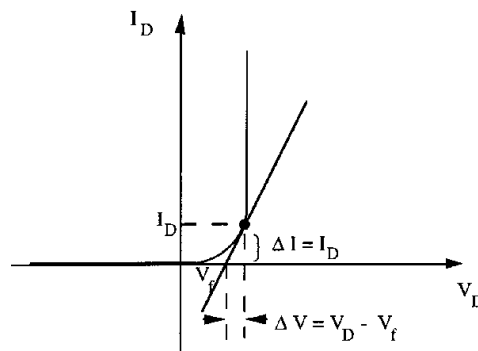
dove abbiamo indicato con  $I_D^0$  la corrente che attraversa il diodo nel punto A di polarizzazione.



Naturalmente, se al posto di considerare il punto A, consideriamo il punto B (sempre con riferimento al grafico di prima), i parametri dell'equazione cambiano e l'approssimazione peggiora:



Resta infine da capire come si può determinare il valore di  $V_f$ . Se ne può fare una determinazione grafica, basata su quanto indicato nella figura seguente:



Applicando il significato analitico di  $r_d$ , possiamo infatti scrivere che

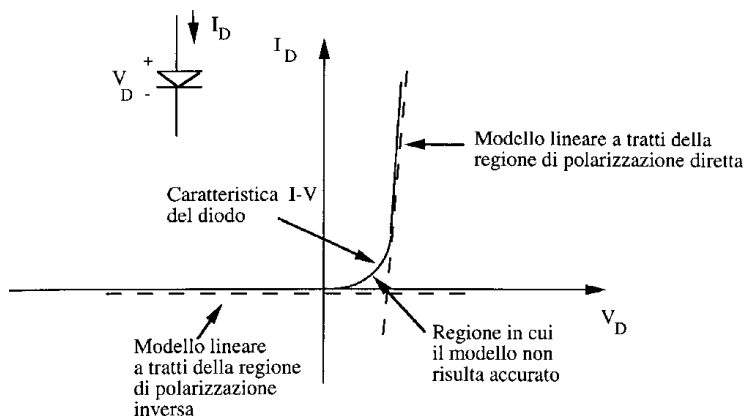
$$\frac{1}{r_d} = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{I_D}{V_D - V_f} \longrightarrow V_D - V_f = r_d I_D \longrightarrow V_f = V_D - r_d I_D$$

Considerando che  $V_D = \eta V_T \ln\left(\frac{I_D}{I_S} + 1\right)$ , possiamo dunque concludere che

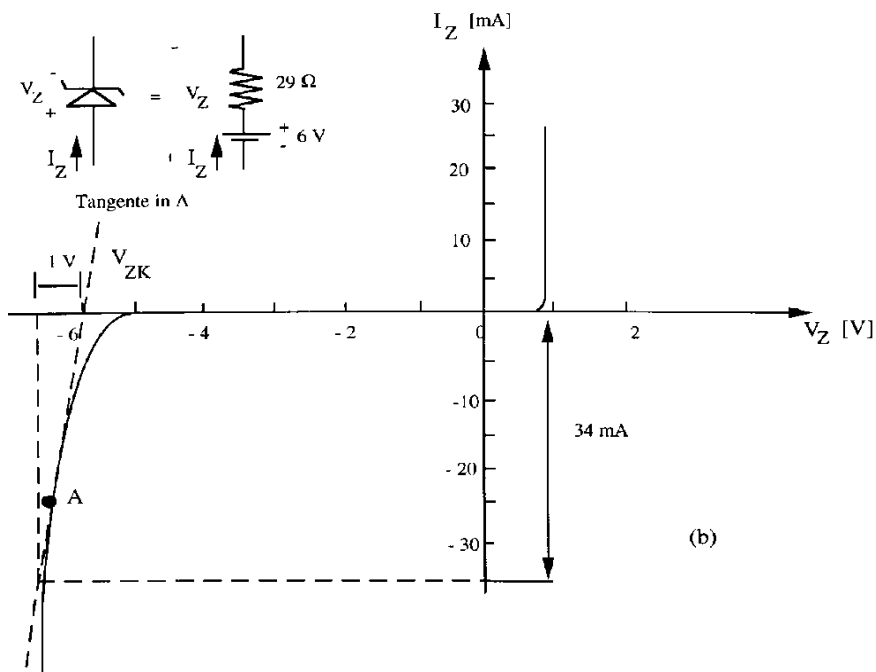
$$V_f = \eta V_T \ln\left(\frac{I_D}{I_S} + 1\right) - r_d I_D$$

Abbiamo dunque concluso che, una volta noto il punto operativo del diodo, è possibile calcolare la  $r_d$  e la  $V_f$  e tali valori consentono di ben approssimare la caratteristica I-V del diodo stesso con due tratti rettilinei.

Questa approssimazione è buona salvo nel tratto  $0 < V_D < V_f$ , dove invece le differenze con la caratteristica reale sono più marcate.



L'approssimazione lineare a pezzi (brevemente **PWL**, che sta per *Piece Wise Linear*) può essere estesa anche agli altri tipi di dispositivi non lineari con le stesse procedure. Ad esempio, il grafico seguente indica come è possibile effettuare l'approssimazione PWL della caratteristica di un diodo Zener:



## Teoremi generali per i circuiti resistivi

### Teorema 1

Dato un circuito resistivo, non lineare, risolvibile (che cioè ammette almeno un punto operativo), esiste sempre una caratteristica driving point per qualsiasi coppia di terminali.

### Teorema 2

Dato un circuito resistivo, non lineare, risolvibile, esiste sempre una caratteristica ingresso-uscita tra ogni coppia di porte.

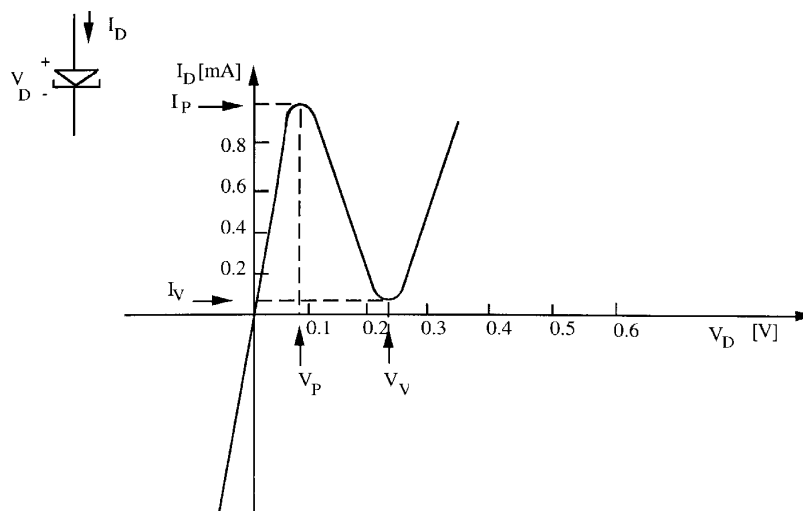
### Teorema 3

Sia dato un circuito resistivo non lineare contenente solo elementi a 2 terminali. Nell'ipotesi che ciascuno di tali elementi presenti una caratteristica I-V monotona crescente con V e nell'ipotesi che il circuito sia privo di maglie formate solo da generatori di tensione e/o di insiemi di taglio formati solo da generatori di corrente, sussistono i seguenti 3 risultati:

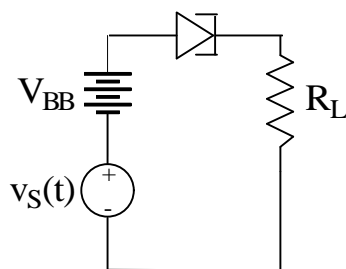
- il circuito ha una sola soluzione;
- la caratteristica driving point ad ogni porta del circuito è monotona crescente:
- la pendenza, in ogni punto, delle caratteristiche statiche  $V_{IN}/V_{OUT}$ , per ogni coppia di porte, non può superare i  $45^\circ$  (il che significa che non si possono avere amplificazioni di tensione).

### Conseguenza: caso del diodo tunnel

In base al teorema appena enunciato, deduciamo che è possibile produrre una amplificazione di tensione in un circuito che contenga anche solo un elemento a due terminali con una caratteristica corrente-tensione che non sia monotona crescente. Un tipico elemento che soddisfa a questa condizione è il **diodo tunnel**, la cui caratteristica tensione-corrente è notoriamente del tipo seguente:

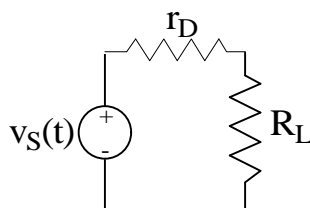


Per esempio, verifichiamo se è possibile ottenere una amplificazione di tensione mediante un circuito del tipo seguente:



In questo circuito, abbiamo un generatore di tensione continua  $V_{BB}$  il cui scopo fondamentale è quello di polarizzare il diodo nel punto di lavoro desiderato. Alla tensione applicata da questo generatore si sovrappone un generatore di piccolo segnale  $v_S(t)$  che noi intendiamo amplificare ai capi del carico  $R_L$ .

La prima cosa da fare è dunque polarizzare il diodo nel punto di lavoro desiderato; proviamo ad esempio a scegliere un punto di lavoro che si trovi sul tratto della curva I-V con pendenza negativa: se operiamo la solita linearizzazione a tratti della caratteristica del diodo, possiamo sostituire la serie tra il diodo stesso e  $V_{BB}$  con un resistore di resistenza  $r_D$  pari alla resistenza di conduzione del diodo. Il circuito diventa dunque il seguente:



A questo punto, la tensione ai capi del carico è chiaramente

$$v_L(t) = \frac{R_L}{r_D + R_L} v_S(t)$$

e risulta effettivamente maggiore di  $v_S(t)$  in quanto la resistenza di conduzione  $r_D$  del diodo è negativa.

Autore: **Sandro Petrizzelli**  
 e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)  
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>