Appunti di Fisica II
Campo magnetico e potenziale vettore

Proprietà differenziali del campo magnetico 1
Analogie con l'elettrostatica 3
Il potenziale vettore per il campo magnetico 3
Potenziale vettore generato da un circuito filiforme 7
Campo magnetico generato da una corrente rettilinea indefinita 9
Campo magnetico generato da un foglio piano indefinito di corrente 12

PROPRIETÀ DIFFERENZIALI DEL CAMPO MAGNETICO

Una delle leggi fondamentali sul campo magnetico è notoriamente rappresentata dal **teorema di Ampere**, in base al quale la circuitazione del campo $\vec{B}$ lungo un qualsiasi percorso chiuso è pari al prodotto della costante μ_0 (permeabilità del vuoto) per la somma algebrica della correnti stazionarie concatenate al percorso:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I$$

Un'altra legge fondamentale del campo magnetico si deduce dall'evidenza sperimentale: è noto che, *in natura, non esistono masse magnetiche libere* (mentre invece esistono masse elettriche libere); questo significa che non ci sono sorgenti di campo magnetico analoghe alle sorgenti del campo elettrico e da questo consegue che *le linee di flusso del campo $\vec{B}$ debbano necessariamente essere linee chiuse.* In termini formali, questa proprietà si esprime dicendo che il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa deve essere nullo:

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0 \qquad \forall S \text{ chiusa}}$$

Questa proprietà va sotto il nome di **teorema di Gauss per il campo magnetico**, in evidente contrapposizione con il *teorema di Gauss per il campo elettrico*, il quale afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è pari al rapporto tra la carica netta contenuta all'interno di tale superficie e la costante ε_0.

Adesso vogliamo fornire una **formulazione differenziale** di queste due proprietà (teorema di Ampere e teorema di Gauss per il campo magnetico), valida cioè punto per punto nella regione presa in esame.

Possiamo cominciare proprio dal teorema di Gauss, modificando l'integrale di superficie in un integrale di volume e ponendo quest'ultimo uguale a zero (come dice il teorema):

$$\oint_{VOL} \mathrm{div}\vec{B} \bullet d\vec{\tau} = 0$$

Data l’arbitrarietà nella scelta del volume di integrazione, richiedere che sia nullo quell’integrale equivale a richiedere che sia nulla la funzione integranda, per cui deduciamo che, in ogni punto dello spazio, risulta

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B}=0}$$

Questo è appunto il **teorema di Gauss per il campo magnetico in forma differenziale**: esso dice che *il campo magnetico è SOLENOIDALE, ossia non presenta sorgenti (al contrario del campo elettrico) e che le sue linee di forza sono linee chiuse.*

Passiamo adesso al teorema di Ampere, che è esprimibile come

$$\oint_{\Gamma}\vec{B}\bullet d\vec{\ell}=\mu_0\int_{S}\vec{J}\bullet\vec{n}dS$$

dove S è una qualsiasi superficie che si poggi sul percorso chiuso Γ.

Possiamo applicare il *teorema della circuitazione* all'integrale di linea e trasformarlo in un integrale di superficie:

$$\int_{S_1}\vec{B}\bullet\vec{n}dS=\mu_0\int_{S}\vec{J}\bullet\vec{n}dS$$

dove S_1 è una qualsiasi superficie che si appoggia sul contorno di integrazione Γ, così come la superficie S.

Dato che la scelta delle due superfici è arbitraria, possiamo prenderle uguali, nel qual caso l’uguaglianza degli integrali si traduce in quella delle funzioni integrande: deduciamo dunque che

$$\boxed{\mu_0\vec{J}=\mathrm{rot}\vec{B}}$$

che è appunto la **legge di Ampere in forma differenziale**.

Abbiamo in definitiva trovato due equazioni differenziali che legano il campo magnetico $\vec{B}$ alla distribuzione spaziale $\vec{J}(x,y,z)$ delle correnti che lo generano. Riportando le espressioni complete della *divergenza* e del *rotore*, abbiamo quanto segue:

$$\mathrm{div}\vec{B}=0\longrightarrow\frac{\partial B_X}{\partial x}+\frac{\partial B_Y}{\partial y}+\frac{\partial B_Z}{\partial z}=0$$

$$\mu_0\vec{J}=\mathrm{rot}\vec{B}\longrightarrow\begin{cases}\mu_0 J_X=\dfrac{\partial B_Z}{\partial y}-\dfrac{\partial B_Y}{\partial z}\\[2ex]\mu_0 J_Y=\dfrac{\partial B_X}{\partial z}-\dfrac{\partial B_Z}{\partial z}\\[2ex]\mu_0 J_Z=\dfrac{\partial B_Y}{\partial x}-\dfrac{\partial B_X}{\partial y}\end{cases}$$

La seconda relazione è chiaramente di tipo vettoriale, per cui ne sintetizza 3 di natura scalare che tengono conto delle 3 componenti del rotazionale e delle rispettive 3 componenti della densità di corrente. La prima è invece una relazione di tipo scalare.

ANALOGIE CON L'ELETTROSTATICA

Prima di proseguire, possiamo subito notare alcune analogie tra il *teorema di Gauss per l'elettrostatica* e il *teorema di Ampere per l'elettromagnetismo*:

- il teorema di Gauss (in forma integrale) per l'elettrostatica dice che il flusso totale del campo elettrico uscente da una qualsiasi superficie chiusa S è pari al rapporto tra la carica totale interna e la costante e_0; il teorema di Ampere (in forma integrale) per l'elettromagnetismo dice che la circuitazione del campo magnetico lungo un qualsiasi percorso chiuso è pari al prodotto della costante μ_0 per la somma algebrica delle correnti stazionarie "interne" al circuito;
- il teorema di Gauss (in forma differenziale) per l'elettrostatica dice che $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$; il teorema di Ampere (in forma differenziale) per l'elettromagnetismo dice che $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$;
- il campo elettrico è irrotazionale mentre il campo magnetico è solenoidale (divB=0).

IL POTENZIALE VETTORE PER IL CAMPO MAGNETICO

Facciamo un rapido riepilogo di alcuni importanti concetti di **elettrostatica**. Intanto, lo studio dell'elettrostatica si basa fondamentalmente su <u>due equazioni differenziali</u>:

- teorema di Gauss in forma differenziale, secondo cui

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

  dove ρ è la densità spaziale di carica;

- campo elettrico irrotazionale (o conservativo):

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

Il fatto che il campo elettrico sia conservativo permette l'introduzione della cosiddetta funzione **potenziale elettrostatico**: esiste cioè una particolare funzione scalare **V(r)** tale che, in ogni punto dello spazio sede di un campo elettrico **E(r)**, il valore di tale campo sia ottenibile come

$$\vec{E}(r) = -\mathrm{grad}V(r)$$

Vale la regola generale secondo cui un qualsiasi campo vettoriale derivato da un campo scalare in questo modo risulti irrotazionale: infatti si ha che

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \mathrm{rot}(-\mathrm{grad}V) = -\mathrm{rot}(\mathrm{grad}V) = 0$$

in base alle proprietà degli operatori differenziali.

La scelta della funzione scalare V(r) dalla quale derivare il campo elettrico non è univoca: infatti, è facile verificare che, se la funzione scalare V(r) soddisfa all'equazione $\vec{E}(r) = -\text{grad}V(r)$, anche la funzione

$$V'(r) = V(r) + \cos t$$

soddisfa alla stessa relazione. Questo significa che un qualsiasi campo elettrico, a meno di ulteriori considerazioni, può essere derivato da un numero infinito di potenziali scalari.

Per rendere invece univoca la scelta del potenziale da cui derivare il campo, basta attribuire un valore arbitrario (scelto nel modo più comodo possibile) alla costante *cost*. Ad esempio, in tutti i casi in cui non ci sono cariche all'infinito, è possibile porre uguale a zero il valore di tale costante, il che significa assumere nullo il potenziale dei punti situati all'infinito.

Il fatto che il campo elettrico sia legato alla funzione potenziale dalla relazione $\vec{E}(r) = -\text{grad}V(r)$ consente di legare direttamente il potenziale V(r) alla distribuzione di cariche che generano il campo. Si usano a tale scopo l'operatore *divergenza* e il teorema di Gauss enunciato all'inizio: si ha infatti che

$$\text{div}\vec{E} = \text{div}(-\text{grad}V) = -\text{div}(\text{grad}V) = -\nabla^2 V$$

Poiché il teorema di Gauss dice che $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, possiamo concludere che

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

*Questa equazione differenziale è nota come **equazione di Poisson** ed esprime appunto il legame tra il potenziale associato al campo e la distribuzione di cariche che generano il campo stesso.*

Un caso particolare di questa equazione si ha quando non c'è alcuna distribuzione di carica a generare alcun campo: infatti, quando si verifica la condizione $\rho=0$ l'equazione di Poisson diventa semplicemente

$$\nabla^2 V = 0$$

e prende il nome di **equazione di Laplace**. Questa equazione impone come deve variare il potenziale scalare in ogni punto dello spazio vuoto, cioè privo di cariche.

Ancora riguardo il potenziale scalare, data una distribuzione spaziale arbitraria di carica con densità ρ, il potenziale V(r) da essa generato in un punto P a distanza r si ottiene sommando i contributi dovuti all'intera distribuzione, per cui è pari a

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{1}{r}\rho(r)d\tau$$

Il tutto a meno di una costante arbitraria che può essere posta uguale a zero se la distribuzione di cariche è al finito. Questa funzione V(r) così ottenuta è proprio la soluzione generale della equazione di Poisson.

Detto questo, vogliamo adesso ricavare, anche per il campo magnetico, una funzione che svolga la stessa funzione del potenziale scalare per il campo elettrico.

Il discorso sarà analogo a quello fatto poco fa per l'elettrostatica. In primo luogo, le equazioni fondamentali finora viste della **magnetostatica** sono due:

- il *teorema di Gauss per il campo magnetico* dice che il campo magnetico è solenoidale, cioè

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

- il *teorema di Ampere in forma differenziale* dice che

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

dove $\vec{J}$ è la densità di corrente (stazionaria) e μ_0 è stata chiamata *permeabilità del vuoto*.

Una immediata considerazione, rispetto al campo elettrico, è la seguente: *il campo magnetico (salvo nel caso particolare di spazio vuoto privo di correnti) non è irrotazionale, cioè non è conservativo.* Questo impedisce di derivare il campo magnetico da un campo scalare come invece avevamo fatto per il campo elettrico.

Tuttavia, il fatto che il campo magnetico sia solenoidale ci permette di derivare il campo magnetico da un altro campo, questa volta vettoriale, che indicheremo con $\vec{A}$. Infatti, possiamo verificare facilmente che, se il campo $\vec{B}$ ed il campo $\vec{A}$ sono legati dalla relazione

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

allora il campo magnetico continua ad essere solenoidale. La verifica di questo fatto è immediata:

$$\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = 0$$

in base ancora una volta alle proprietà degli operatori differenziali.

Quindi, nella magnetostatica, ad un certo campo magnetico $\vec{B}$ è sempre possibile associare un campo vettoriale $\vec{A}$ al quale è legato dalla relazione $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$. Naturalmente, se facciamo uso di un riferimento cartesiano e consideriamo l'espressione delle componenti del rotazionale di un vettore in tale riferimento, è immediato calcolarsi le relazioni scalari che legano le componenti di $\vec{B}$ a quelle di $\vec{A}$:

$$B_X = \frac{\partial A_Z}{\partial y} - \frac{\partial A_Y}{\partial z}$$
$$B_Y = \frac{\partial A_X}{\partial y} - \frac{\partial A_Z}{\partial x}$$
$$B_Z = \frac{\partial A_Y}{\partial x} - \frac{\partial A_X}{\partial y}$$

In perfetta analogia con l'elettrostatica, la funzione vettoriale $\vec{A}(\vec{r})$ prende il nome di **potenziale vettore**.

<u>Anche il potenziale vettore, a meno di ulteriori specifiche, non è univoco per un assegnato campo</u>: infatti, se la funzione $\vec{A}(\vec{r})$ soddisfa alla relazione $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, è facile verificare che anche la funzione

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \mathrm{grad}\left(g(\vec{r})\right)$$

con g(r) arbitraria funzione scalare, soddisfa alla stessa relazione.

Quindi, *senza ulteriori specifiche, ad un dato campo magnetico è possibile associare infiniti potenziali vettori.* Per rendere invece univoca la scelta del potenziale vettore, bisogna imporre una seconda condizione cui esso deve soddisfare, oltre quella espressa dalla relazione $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$. *La condizione che viene imposta è che anche il potenziale vettore, come il campo magnetico, sia solenoidale,* cioè che soddisfi in ogni punto alla relazione

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0$$

Riepilogando, dato un qualsiasi campo magnetico $\vec{B}$, è possibile associare a tale campo uno ed un solo campo vettoriale $\vec{A}$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \\ \mathrm{div}\vec{A} = 0\end{array}}$$

Ancora, così come in elettrostatica avevamo legato il potenziale scalare alla distribuzione di cariche generatrici del campo, allo stesso modo vogliamo adesso legare il potenziale vettore al sistema di correnti che generano il campo magnetico.

In base al teorema di Ampere abbiamo che

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 J$$

Sostituendo $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, otteniamo

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right) = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0 J$$

Poiché la divergenza del potenziale vettore è nulla per ipotesi, otteniamo la relazione finale

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0 J}$$

E' evidente che *questa equazione è, per il magnetismo, l'analogo dell'equazione di Poisson per l'elettrostatica:* rispetto ad essa, il potenziale scalare è stato sostituito dal potenziale vettore, il reciproco della costante dielettrica del vuoto ε_0 è stata sostituita dalla permeabilità del vuoto μ_0, la densità spaziale di carica ρ è stata sostituita dal densità di corrente (stazionaria) $\vec{J}$.

Proprio l'analogia con l'equazione di Poisson ci permette di dare una soluzione all'equazione ottenuta. Intanto, osserviamo che quella ottenuta è una equazione vettoriale che equivale a 3 equazioni scalari (se usiamo un riferimento cartesiano):

$$\nabla^2 A_X = -\mu_0 J_X$$
$$\nabla^2 A_Y = -\mu_0 J_Y$$
$$\nabla^2 A_Z = -\mu_0 J_Z$$

Ciascuna di questa equazioni è del tutto analoga all'equazione di Poisson: la soluzione di quest'ultima era la funzione V(r) data da

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{1}{r}\rho(r)d\tau$$

Analogamente, la soluzione di una qualsiasi delle 3 equazioni ottenute, ad esempio quella lungo la direzione x, sarà

$$A_X(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{1}{r}J_X d\tau$$

Le tre soluzioni scalari possono ovviamente essere sintetizzate in un'unica relazione vettoriale:

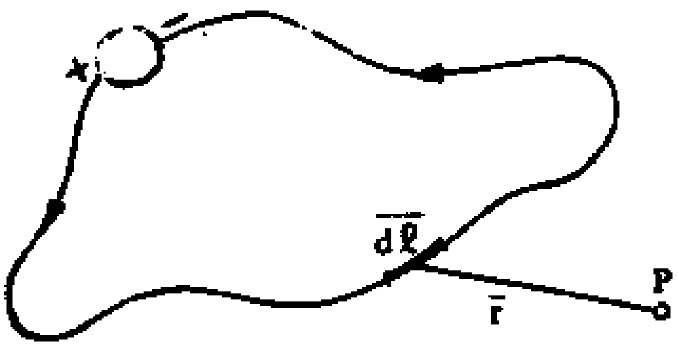
$$\boxed{\vec{A}(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}}{r}d\tau}$$

Questa è dunque una relazione che permette di determinare il potenziale vettore a partire dalla distribuzione delle correnti. Spesso, per determinare il campo magnetico prodotto da un sistema di correnti, conviene prima determinare il potenziale vettore tramite questa formula e poi passare al campo magnetico tramite la relazione $\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}$. Esiste del resto anche una relazione che mette in contatto diretto il campo magnetico con un sistema qualsiasi di correnti.

POTENZIALE VETTORE GENERATO DA UN CIRCUITO FILIFORME

La formula ottenuta nel paragrafo precedente per la valutazione del potenziale vettore a partire da un sistema generico di correnti ha evidentemente carattere del tutto generale ed è inoltre spesso complessa da utilizzare quanto i sistemi di corrente non sono di tipo elementare. Un caso in cui la suddetta formula assume una forma semplice è quello dei **circuiti filiformi** percorsi da **correnti stazionarie**.

Supponiamo di avere un circuito del tipo riportato nella figura seguente:



Abbiamo dunque un **generatore di forza elettromotrice** ai cui morsetti è collegato un filo conduttore. Il generatore, tramite la d.d.p. ai propri morsetti, stabilisce una corrente I (costante lungo tutto il filo) caratterizzata da una certa densità $\vec{J}$; la corrente che scorre nel filo genera un campo magnetico $\vec{B}$ al quale possiamo associare un certo potenziale vettore $\vec{A}$. Vogliamo valutare questo potenziale vettore in un punto P che disti r da un generico elementino del filo. La formula da applicare è quella ottenuta al paragrafo precedente, ma, come preannunciato, è possibile semplificarla.

Intanto, indichiamo con dS la sezione (costante) del filo e con dl la lunghezza dell'elementino scelto: allora, il volume occupato da tale elementino sarà

$$dV = dSdl$$

Eseguendo il prodotto con la densità di corrente, otteniamo

$$\vec{J}dV = \vec{J} \cdot dS \cdot dl = I \cdot d\vec{l}$$

dove abbiamo inglobato nel segno di vettore di $d\vec{l}$ il verso secondo cui scorre la corrente (e quindi il verso di $\vec{J}$).

La formula da applicare è

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}}{r} d\tau$$

In base a quanto detto poco fa, possiamo fare qualche passaggio sulla funzione integranda:

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}}{r} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{I \cdot d\vec{l}}{r}$$

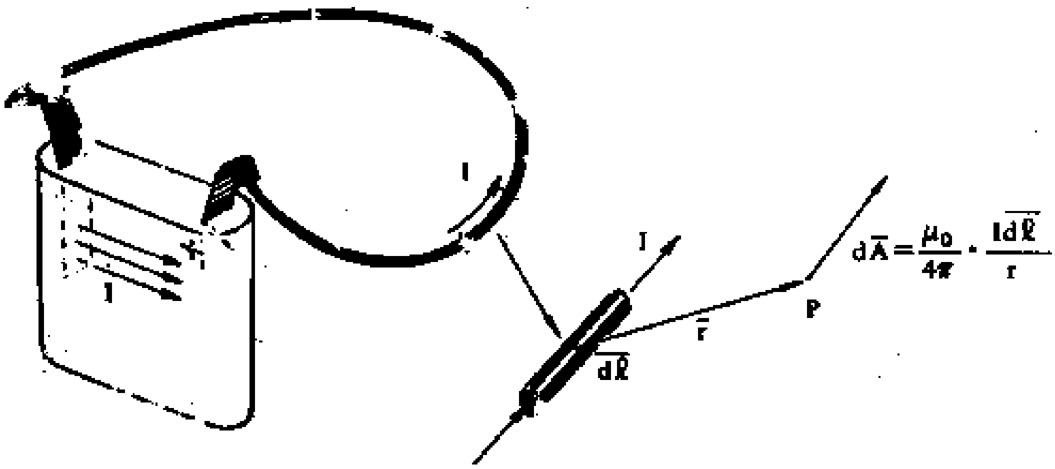
L'integrale da risolvere non è più di volume, ma di linea, proprio per il fatto di essere passati dalla densità spaziale di corrente alla corrente stessa.

In definitiva, *il potenziale vettore prodotto nel punto P distante r dal circuito è dato dal prodotto del fattore costante $m_0/4p$ e da un integrale, esteso alla lunghezza di tutto il filo, della funzione* $\frac{I \cdot d\vec{l}}{r}$. Ovviamente, usando un sistema di riferimento cartesiano, questa equazione vettoriale può essere facilmente trasformata in 3 corrispondenti equazioni scalari.

Osserviamo che l'ultima formula che abbiamo scritto può essere riscritta nel modo seguente:

$$\vec{A}(x,y,z) = \oint_\Gamma d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{I \cdot d\vec{l}}{r} \longrightarrow \boxed{d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I \cdot d\vec{l}}{r}}$$

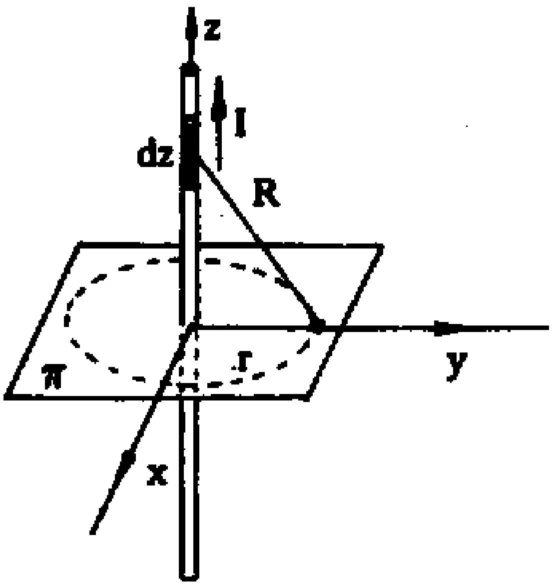
In pratica, quanto appena scritto ci dice che, sfruttando la **linearità** delle equazioni della magnetostatica, è possibile applicare il **principio di sovrapposizione** per calcolare il potenziale vettore generato dal circuito filiforme in questione: si tratta cioè di pensare al potenziale vettore totale come somma di tanti contributi $d\vec{A}$, indipendenti tra loro, dovuti ai vari tratti $d\vec{l}$ del circuito:



CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA CORRENTE RETTILINEA INDEFINITA

Consideriamo un conduttore cilindrico, sottile, molto lungo, rettilineo e verticale, all'interno del quale scorre una corrente I diretta verso l'altro. Supponiamo, per comodità, che gli estremi del conduttore che si chiudono sul generatore siano sufficientemente distanti dalla parte di conduttore presa in esame. Valutiamo allora il campo magnetico prodotto da tale corrente.

La figura seguente illustra la situazione:



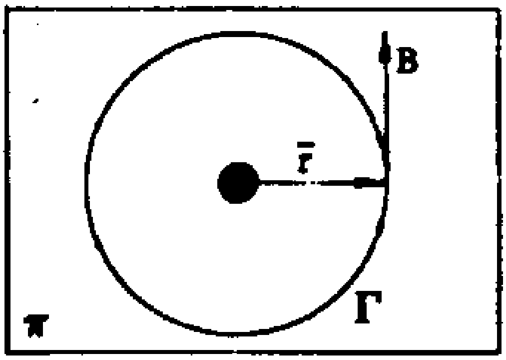
Ci sono due modi per risolvere questo problema:

- quello più comodo è senz'altro l'applicazione del teorema di Ampere, che in questo caso sfrutta a pieno la particolare simmetria del problema;
- il secondo metodo, meno immediato ma comunque utile dal punto di vista didattico, è quello di determinare prima il potenziale vettore e poi di risalire, da questo, al campo magnetico.

Cominciamo dall'applicazione del teorema di Ampere:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I$$

Come cammino di circuitazione scegliamo una circonferenza, giacente nel piano π ortogonale al conduttore e con centro coincidente con il conduttore:



E' noto che, in questa situazione, il campo magnetico giace a sua volta sul piano π, per cui il prodotto scalare $\vec{B} \bullet d\vec{\ell}$ si riduce ad un prodotto ordinario: tenendo anche conto che il campo deve essere costante a distanza r costante dalla corrente, scriviamo che

$$\mu_0 I = \oint_{\Gamma} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} B d\ell = B \cdot 2\pi r$$

dove ovviamente $2\pi r$ è la lunghezza della circonferenza lungo cui abbiamo calcolato l'integrale. Concludiamo dunque che

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Adesso proviamo a ripetere il calcolo del campo magnetico usando il potenziale vettore. L'equazione da applicare è quella vista nel precedente paragrafo, dato che la corrente è anche in questo caso filiforme:

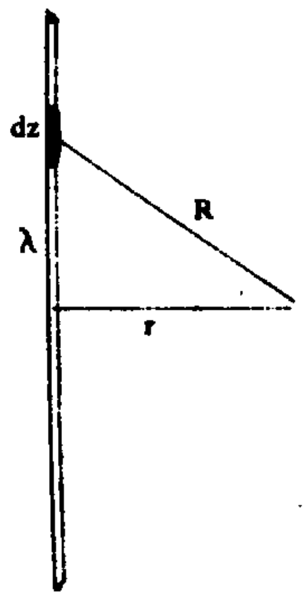
$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{R} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I \cdot d\vec{l}}{R}$$

dove R è la distanza del generico $d\vec{l}$ dal punto in cui stiamo calcolando il potenziale vettore.

Scegliamo un riferimento cartesiano con l'asse z coincidente con il conduttore e quindi con il piano [x,y] coincidente con il piano π. In questa situazione, tutti gli elementi $d\vec{l}$ del circuito sono paralleli all'asse z, il che significa che l'unico integrale non nullo è quello rispetto all'asse z: quindi

$$d\vec{l} = dx \cdot \vec{a}_X + dy \cdot \vec{a}_Y + dz \cdot \vec{a}_Z = dz \cdot \vec{a}_Z \longrightarrow \begin{array}{l} A_X(x,y,z) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_\Gamma \dfrac{I \cdot dx}{R} = 0 \\ A_Y(x,y,z) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_\Gamma \dfrac{I \cdot dy}{R} = 0 \\ A_Z(x,y,z) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_\Gamma \dfrac{I \cdot dz}{R} \end{array}$$

La situazione è dunque quella descritta nella figura seguente:



Si può facilmente ricavare la soluzione dell'unico integrale rimasto: si trova infatti che

$$A_Z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r$$

Aggiungendo l'informazione vettoriale, concludiamo dunque che

$$\boxed{\vec{A}(r) = A_Z(r) \cdot \vec{a}_Z = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \right) \cdot \vec{a}_Z}$$

Quindi, *il potenziale vettore generato da una corrente rettilinea è parallelo e discorde (data la presenza del segno negativo) rispetto alla corrente stessa e cresce con la distanza in modo logaritmico.*

Noto il potenziale vettore, possiamo risalire al corrispondente campo magnetico applicando la relazione $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$. In base alla definizione di rotore, scriviamo perciò che

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \longrightarrow \begin{cases} B_X = \dfrac{\partial A_Z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_Y}{\partial z} = \dfrac{\partial A_Z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r\right) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}(\ln r) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{y}{r^2} \\ B_Y = \dfrac{\partial A_X}{\partial z} - \dfrac{\partial A_Z}{\partial z} = -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r\right) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}(\ln r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{x}{r^2} \\ B_Z = \dfrac{\partial A_Y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_X}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Abbiamo dunque concluso che il campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea non presenza la componente parallela alla corrente, ossia giace su piani ortogonali alla corrente stessa:

$$\boxed{\vec{B}(x,y,z) = \vec{B}_X \cdot \vec{a}_X + \vec{B}_Y \cdot \vec{a}_Y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{r^2}\cdot \vec{a}_X + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{r^2}\cdot \vec{a}_Y}$$

Possiamo anche fare qualche passaggio in più: infatti, mettendo in evidenza il termine comune $\mu_0 I/2\pi r^2$, troviamo che

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y\cdot\vec{a}_X + x\cdot\vec{a}_Y)$$

In base a questa relazione, è facile rendersi conto che il campo magnetico risulta ortogonale al vettore $\vec{r} = x\cdot\vec{a}_X + y\cdot\vec{a}_Y$: eseguendo infatti il prodotto scalare tra i due vettori, otteniamo

$$\vec{B}\bullet\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\left[(-y\cdot\vec{a}_X + x\cdot\vec{a}_Y)\bullet(x\cdot\vec{a}_X + y\cdot\vec{a}_Y)\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\left[(-y\cdot\vec{a}_X\bullet(x\cdot\vec{a}_X + y\cdot\vec{a}_Y) + x\cdot\vec{a}_Y\bullet(x\cdot\vec{a}_X + y\cdot\vec{a}_Y))\right] =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\left[(-yx + xy)\right] = 0$$

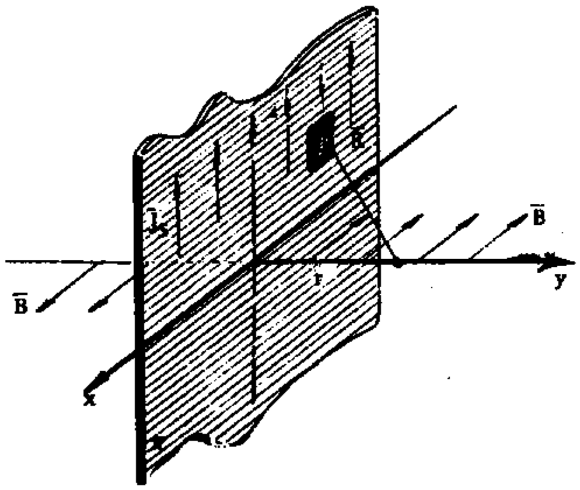
Non solo, ma possiamo anche osservare che il modulo del campo magnetico vale

$$|\vec{B}| = \left|\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y\cdot\vec{a}_X + x\cdot\vec{a}_Y)\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}|(-y\cdot\vec{a}_X + x\cdot\vec{a}_Y)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\cdot r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Quindi, il modulo del campo magnetico dipende solo dalla distanza r del punto in cui calcoliamo il campo dalla corrente. In base a queste considerazione, deduciamo che *le linee di forza di $\vec{B}$ sono circonferenze concentriche con la corrente e che $\vec{B}$ decresce come 1/r,* così come avevamo ricavato all'inizio tramite il teorema di Ampere.

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN FOGLIO PIANO INDEFINITO DI CORRENTE

Consideriamo un **piano indefinito verticale** percorso da una corrente elettrica con densità costante rivolta verso l'altro:



Vogliamo valutare il campo prodotto da questa corrente.

Come prima cosa, dobbiamo sceglierci in modo conveniente un sistema di riferimento, come fatto nella figura: evidentemente, si è scelto un riferimento con l'asse z parallela e concorde al vettore $\vec{J}$ e con il piano (x,y) ortogonale al foglio di corrente.

Per la risoluzione del problema, calcoleremo prima il potenziale vettore e poi risaliremo al campo magnetico. Applichiamo perciò la "solita" relazione

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{J}}{R} d\tau$$

Avendo supposto che la densità di corrente sia distribuita su un piano, la densità di corrente da considerare è una densità superficiale, per cui l'integrale non è più di volume, ma di superficie:

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_S}{R} dS$$

Inoltre, dato che $\vec{J}_S = J_S \cdot \vec{a}_Z$, è chiaro che anche il potenziale vettore ha solo la componente z diversa da zero:

$$A_Z(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{J_S}{R} dS$$

Anche in questo caso, si individua facilmente la soluzione di questo integrale, tenendo conto che la densità di corrente è supposta costante su tutto il piano: si trova che

$$A_Z(x,y,z) = \frac{\mu_0 J_S}{4\pi}\int_S \frac{1}{R} dS = \frac{\mu_0 J_S}{4\pi}\int_S \frac{1}{R} dS = -\frac{\mu_0 J_S}{2} r$$

Aggiungendo l'informazione vettoriale, concludiamo che

$$\vec{A}(x,y,z) = A_Z(x,y,z)\cdot\vec{a}_Z = -\frac{\mu_0 J_S}{2} r \cdot \vec{a}_Z$$

Possiamo da qui ricavare il campo magnetico:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \longrightarrow \begin{cases} B_X = \dfrac{\partial A_Z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_Y}{\partial z} = \dfrac{\partial A_Z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\mu_0 J_S}{2} r\right) = -\dfrac{\mu_0 J_S}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}(r) \\ B_Y = \dfrac{\partial A_X}{\partial z} - \dfrac{\partial A_Z}{\partial z} = -\dfrac{\partial A_Z}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{\mu_0 J_S}{2} r\right) = \dfrac{\mu_0 J_S}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}(r) \\ B_Z = \dfrac{\partial A_Y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_X}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

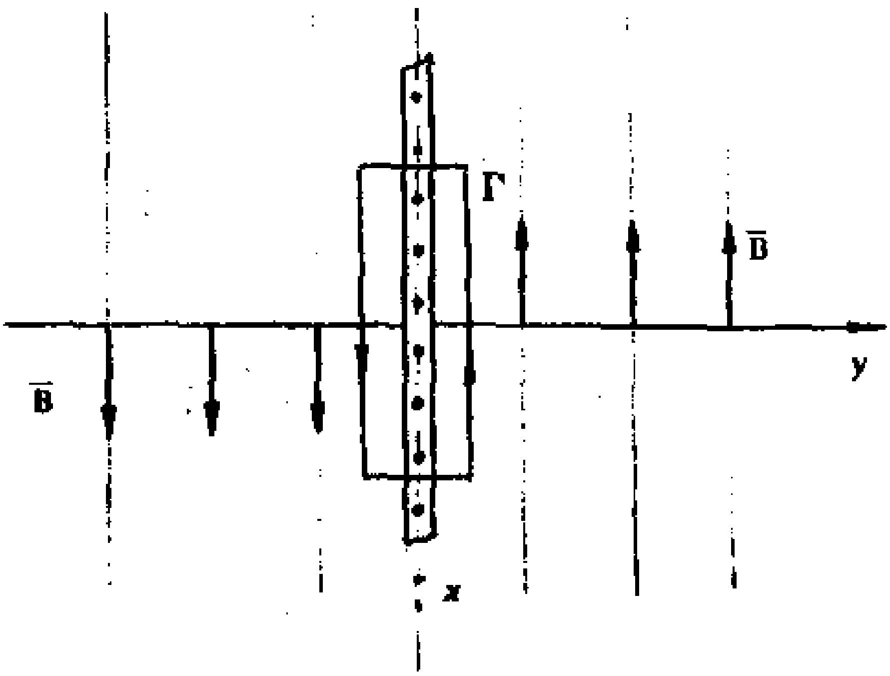
Osservando che il vettore $\vec{r}$ (che individua il punto in cui calcoliamo il campo rispetto al centro del sistema di riferimento) ha solo la componente y, concludiamo che il campo magnetico presenta solo la componente x e questa vale

$$B_X = -\frac{\mu_0 J_S}{2}\frac{\partial}{\partial y}(r) = -\frac{\mu_0 J_S}{2}\frac{\partial}{\partial}(|y|) = -\frac{\mu_0 J_S}{2}\frac{\partial |y|}{\partial y} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 J_S}{2} & y > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 J_S}{2} & y < 0 \end{cases}$$

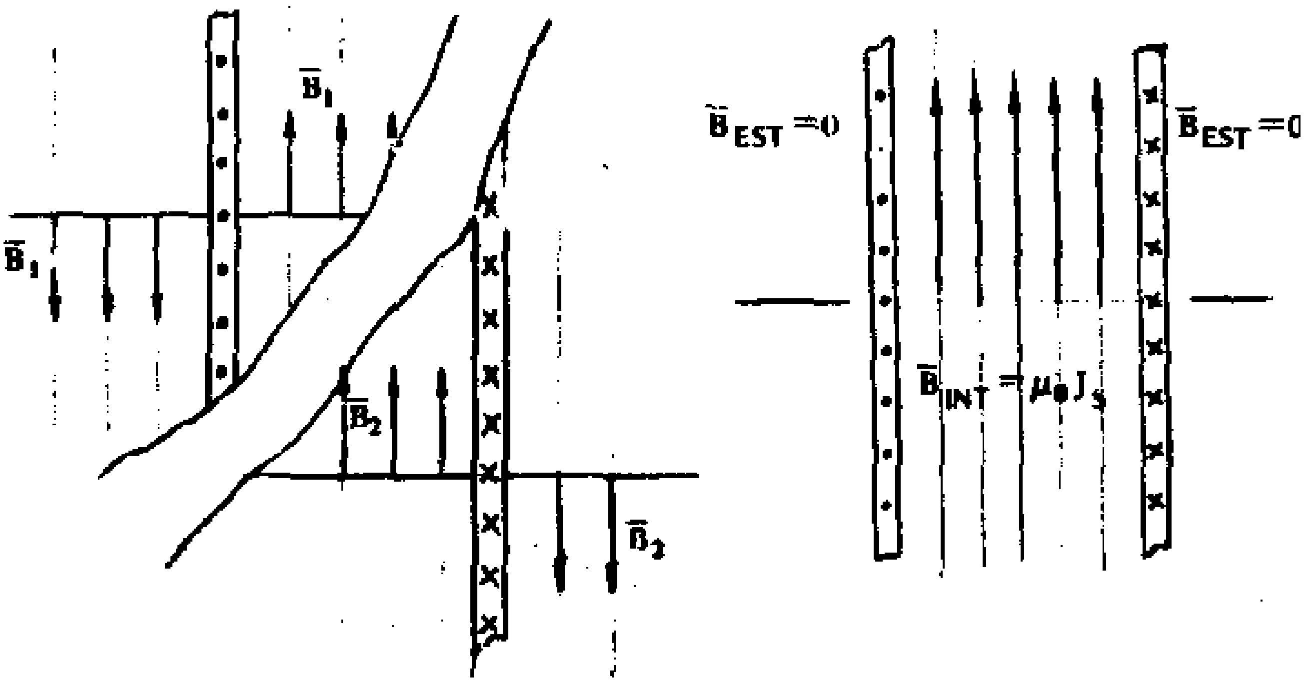
In conclusione, *il campo magnetico prodotto da un piano indefinito percorso da corrente (con densità costante) ha solo la componente lungo l'asse x ed è costante in tutto il semispazio di destra (dove vale* $-\mu_0 J_S/2$*) e, separatamente, il semispazio di sinistra (dove vale* $\mu_0 J_S/2$*).* In corrispondenza del piano su cui scorre la corrente, il campo magnetico presenta una **discontinuità** che vale evidentemente

$$\Delta B = \left|B(y=0^-) - B(y=0^+)\right| = \mu_0 J_S$$

La figura seguente mostra il campo da una parte e dall'altra del foglio di corrente tramite una "vista dall'alto":



Adesso complichiamo leggermente il nostro problema, considerando due piani paralleli percorsi da correnti superficiali con densità $\vec{J}_S$ uguali ed opposte. Applicando il **principio di sovrapposizione degli effetti**, il campo complessivo sarà la somma dei campi prodotti singolarmente dai due fogli: allora, in base a quanto trovato prima, i due campi si sommeranno in modo concorde nella regione spaziale compresa tra i fogli e in modo discorde altrove. La figura seguente mostra il concetto:



Questo risultato ci consente di prevedere che, *quando due conduttori sono percorsi da correnti opposte, il campo tende ad essere massimo nella regione tra i conduttori mentre invece tende ad annullarsi altrove. Questo è tanto più vero quanto minore è la distanza tra i conduttori rispetto alla estensione lineare delle superfici di questi tra loro affacciate.*

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1