Teoria dei Segnali

La Convoluzione
(esercizi)

parte prima

Si ricorda che la convoluzione tra due segnali x(t) e y(t) , reali o complessi, indicata simbolicamente come:

$$C_{xy}(\tau) = x(t) * y(t)$$

è data indifferentemente dalle due espressioni:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt$$

e

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)y(t)dt$$

Dalla prima si passa alla seconda con un semplice cambiamento di variabili.

La convoluzione è un operatore lineare, come è facile dimostrare applicando la definizione, per cui se $y(t) = u(t) + v(t)$ si ha:

$$C_{xy}(\tau) = x(t) * (u(t) + v(t)) = C_{xu}(\tau) + C_{xv}(\tau)$$

Questa proprietà è molto utile per semplificare il calcolo di convoluzioni di segnali decomponibili nella somma di segnali più semplici.

E' anche facile dimostrare che se è nota la $C_{xy}(\tau)$, la convoluzione tra $x(t - t_0)$ e $y(t - t_1)$ vale $C_{xy}(\tau - t_0 - t_1)$. Infatti:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)y(\tau - t + t_1)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t + t_0 + t_1)dt = C_{xy}(\tau - t_0 - t_1)$$

Per calcolare una convoluzione nel dominio del tempo bisogna allora eseguire le seguenti operazioni in successione:

1) Invertire l'asse di rappresentazione di uno dei due segnali [Si passa cioè da x(t) a x(-t) oppure da y(t) a y(-t)];
2) sul segnale il cui asse è stato invertito operare una traslazione che è negativa quando avviene verso sinistra e positiva quando avviene verso destra;
3) calcolare il prodotto tra il segnale traslato e l'altro non traslato;
4) calcolare l'area del prodotto.

Esercizio n.1

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A \operatorname{rect}_{\Delta 1}(t - \Delta 1/2)$$

e

$$y(t) = B \operatorname{rect}_{\Delta 2}(t - \Delta 2/2)$$

essendo $\Delta 1$ più piccolo di $\Delta 2$.
I due segnali sono riportati nella figura 1.1

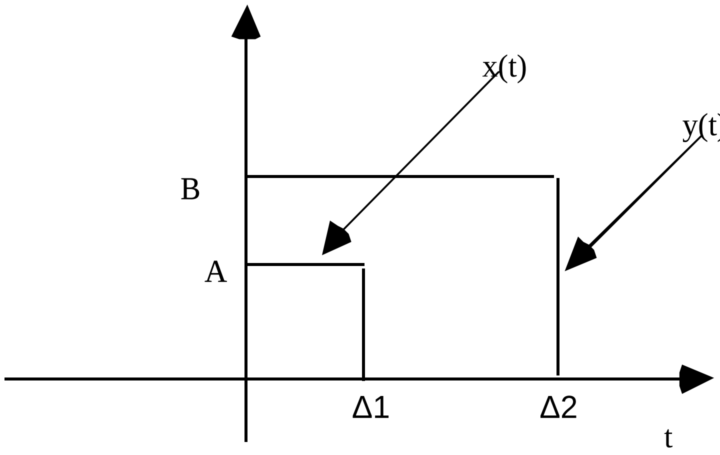

Fig.1.1

Come sopra ricordato, la prima operazione da fare è quella di invertire l'asse di uno dei due segnali, ad esempio x(t) (Fig.1.2).

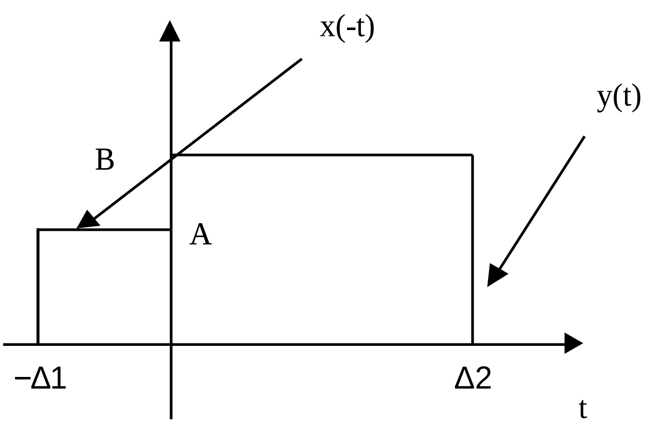

Fig.1.2

Successivamente si deve traslare x (-t); è evidente che traslazioni negative, cioè verso sinistra, fanno si che non vi siano intervalli di tempo in cui i due segnali x $(\tau - t)$ e y(t) siano contemporaneamente presenti; questo implica che il loro prodotto è sempre nullo e quindi per τ minore di zero $C_{xy}(\tau)$ è sempre nulla.

La figura 1.3 mostra la situazione esistente per traslazioni positive e minori di Δ1.

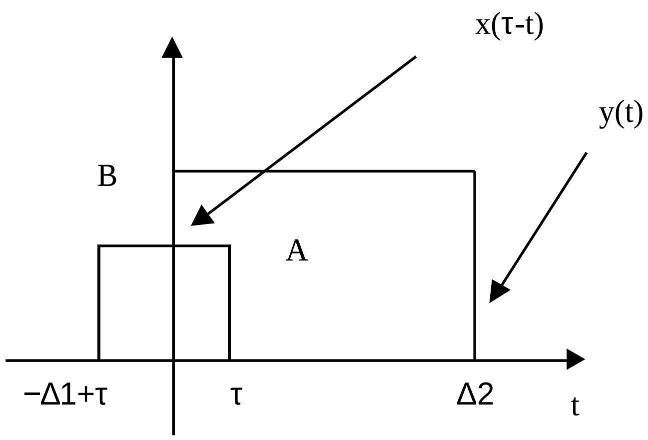

Fig.1.3

Gli estremi di integrazione dell'integrale di convoluzione saranno allora 0 e τ e pertanto si scriverà :

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} AB\,dt = AB\tau$$

La convoluzione cresce linearmente raggiungendo per τ = Δ1 il valore ABΔ1.

Per τ compreso tra Δ1 e Δ2 si può facilmente osservare come il valore della convoluzione rimanga costante; infatti, indipendentemente dal valore di τ, la durata della sovrapposizione dei due segnali rettangolari rimane Δ1 e pertanto il valore della convoluzione è ABΔ1.

Successivamente per traslazioni comprese tra Δ2 e (Δ2 + Δ1)si realizza la situazione descritta in fig. 1.4 .

In questo caso si scriverà: $C_{xy}(\tau) = \int_{\tau - \Delta 1}^{\Delta 2} AB\,dt = AB(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)$

Per valori di τ ancora maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla.

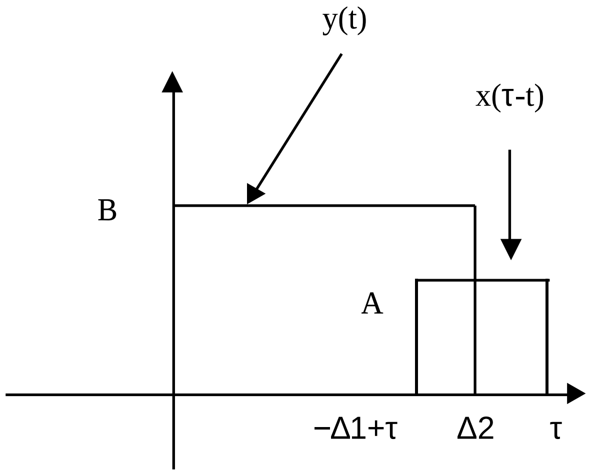

Fig.1.4

In definitiva si ha:

$C_{xy}(\tau) = 0$ per $\tau \leq 0$ e per $\tau > (\Delta 1 + \Delta 2)$

$C_{xy}(\tau) = AB\,\tau$ per $0 < \tau \leq \Delta 1$

$C_{xy}(\tau) = AB\,\Delta 1$ per $\Delta 1 < \tau \leq \Delta 2$

$C_{xy}(\tau) = AB\,(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)$ per $\Delta 2 < \tau \leq (\Delta 1 + \Delta 2)$

L'andamento della convoluzione è riportato nella fig.1.5
Si può osservare, e questo vale in generale, che l'intervallo di tempo in cui la convoluzione è diversa da 0 è pari alla somma degli intervalli in cui sono diversi da 0 i segnali convoluti.

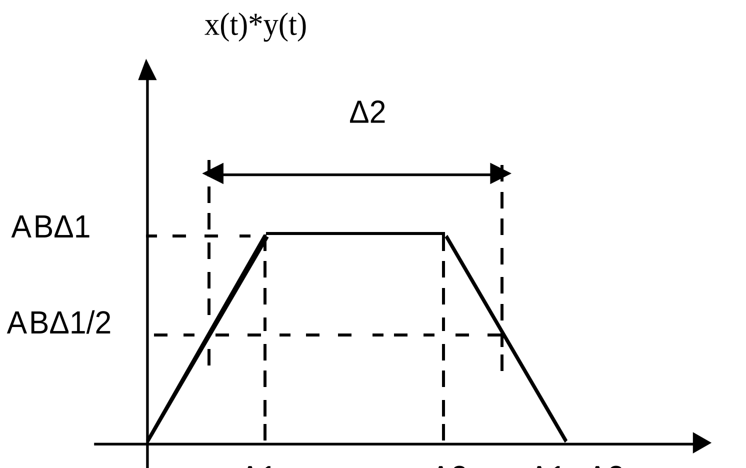

Fig.1.5

Si dice che l'impulso di fig.1.5 ha una durata $\Delta 2$ in quanto convenzionalmente si assume come durata di un impulso il tempo che passa tra l'istante in cui, nel tempo di salita, si raggiunge un

valore che è il 50% di quello finale e quello, nel tempo di discesa, in cui si raggiunge lo stesso valore. Il tempo di salita e quello di discesa sono in questo caso entrambi uguali a $\Delta 1$.
Un segnale a forma trapezoidale si ottiene come convoluzione di due segnali rettangolari, di cui uno dura quanto il tempo di salita ($\Delta 1$) e il secondo ha una durata uguale a quella dello stesso impulso trapezoidale ($\Delta 2$).
Nel caso particolare in cui in cui $\Delta 1$ sia uguale a $\Delta 2$ (si indica con Δ il valore comune), il trapezio degenera in un triangolo di base 2Δ e altezza $AB\Delta$; la durata convenzionale - come sopra definita - è ancora Δ (fig.1.6).

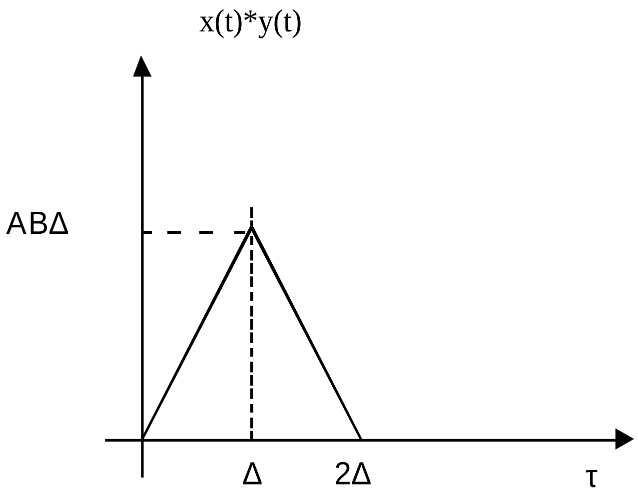

Fig.1.6

Simbolicamente questo segnale si indica come $AB\Delta tri_{\Delta}(t - \Delta)$, essendo $tri_{\Delta}(t)$ un segnale triangolare di ampiezza unitaria e centrato nell'origine.

Esercizio n.2

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = (At/\Delta 1)\ \mathrm{rect}_{\Delta 1}(t - \Delta 1/2)$$

e

$$y(t) = B\ \mathrm{rect}_{\Delta 2}(t - \Delta 2/2)$$

essendo $\Delta 1$ più piccolo di $\Delta 2$.
I due segnali sono riportati nella figura 2.1

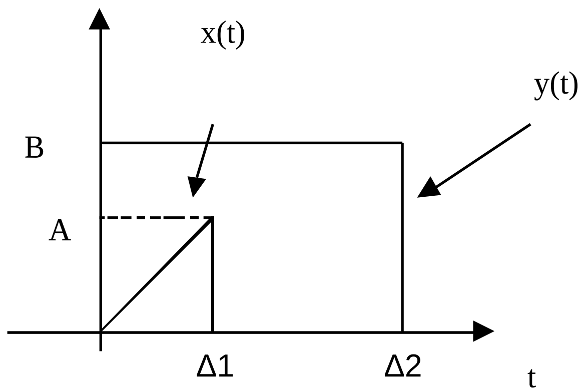

Fig.2.1

La prima operazione da fare è sempre quella di invertire l'asse di uno dei due segnali, anche in questo caso x(t) (Fig.2.2).

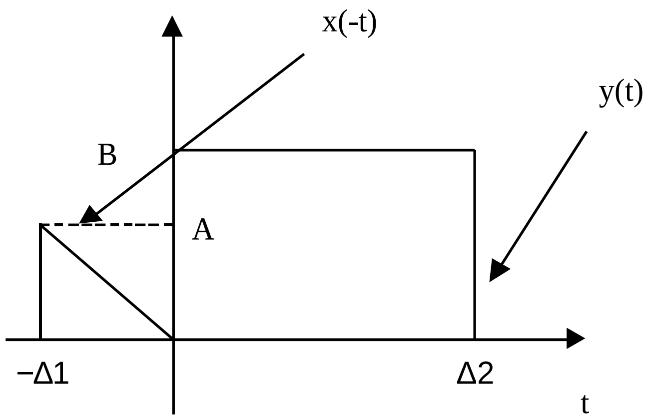

Fig.2.2

Successivamente si deve traslare x (-t); le traslazioni negative, anche in questo caso, fanno si che non vi siano intervalli di tempo in cui i due segnali x (τ -t) e y(t) siano contemporaneamente presenti; allora il loro prodotto è nullo e quindi per τ minore di zero $C_{xy}(\tau)$ è sempre nulla.
La figura 2.3 mostra la situazione esistente per traslazioni positive e minori di $\Delta 1$.

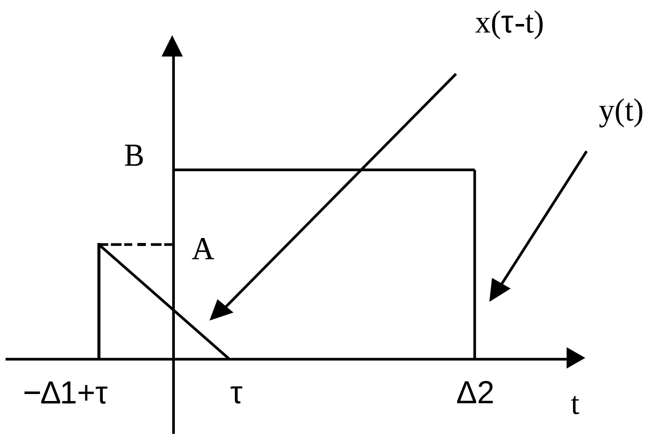

Fig.2.3

La regione in cui entrambi i segnali non sono nulli è quella compresa tra 0 e τ. Gli estremi di integrazione dell'integrale di convoluzione saranno allora 0 e τ:

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\Delta 1} AB(\tau - t)dt$$

Per risolvere facilmente questo integrale si può osservare che esso non è altro se non l'area di un triangolo di base τ e altezza ABτ/ Δ1; la sua area pertanto vale $AB\tau^2/2\Delta 1$ e questo è allora il valore della convoluzione nell'intervallo di tempo in esame.
La convoluzione cresce in modo parabolico raggiungendo per τ = Δ1 il valore ABΔ1/2.
Anche adesso per τ compreso tra Δ1 e Δ2 si può facilmente osservare come il valore della convoluzione rimanga costante; infatti, indipendentemente dal valore di τ, la durata della sovrapposizione dei due segnali rettangolari rimane Δ1(fig.2.4) e pertanto il valore della convoluzione è ABΔ1/2.

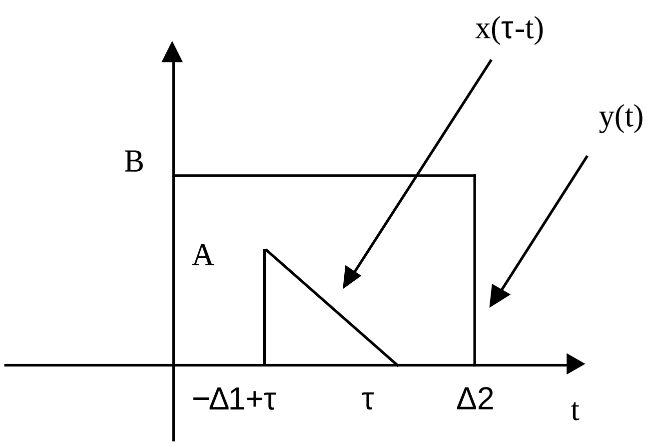

Fig.2.4

Successivamente per traslazioni comprese tra $\Delta 2$ e $(\Delta 2 + \Delta 1)$ si realizza la situazione descritta in fig. 2.5 .
In questo caso si scriverà:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{\tau - \Delta 1}^{\Delta 2} \frac{1}{\Delta 1} AB(\tau - t)dt$$

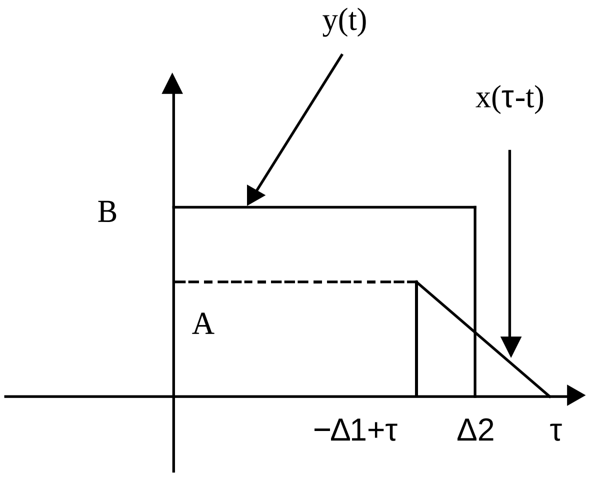

Fig.2.5

Si può osservare che, in questo caso , il calcolo dell'integrale di convoluzione coincide con il calcolo dell'area del trapezio rettangolo di altezza $(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)$, base maggiore AB e base minore $AB(\tau - \Delta 2)/\Delta 1$ (per calcolare tale valore basta ricorrere alla similitudine dei triangoli).
Allora l'integrale di convoluzione vale:

$$C_{xy}(\tau) = AB(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)[(\tau - \Delta 2)/\Delta 1 + 1]/2 = AB[\Delta 1^2 - (\tau - \Delta 2)^2]/2\Delta 1$$

La convoluzione assume il valore $AB\Delta 1/2$ per $\tau = \Delta 2$ e vale 0 per $\tau = \Delta 1 + \Delta 2$.
Per valori di τ ancora maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla.
In definitiva si ha:

$C_{xy}(\tau) = 0$	per $\tau \le 0$ e per $\tau > (\Delta 1 + \Delta 2)$
$C_{xy}(\tau) = AB\tau^2/2\Delta 1$	per $0 < \tau \le \Delta 1$
$C_{xy}(\tau) = AB\,\Delta 1/2$	per $\Delta 1 < \tau \le \Delta 2$
$C_{xy}(\tau) = AB[\Delta 1^2 - (\tau - \Delta 2)^2]/2\Delta 1$	per $\Delta 2 < \tau \le (\Delta 1 + \Delta 2)$

Tale andamento è riportato nella fig.2.6

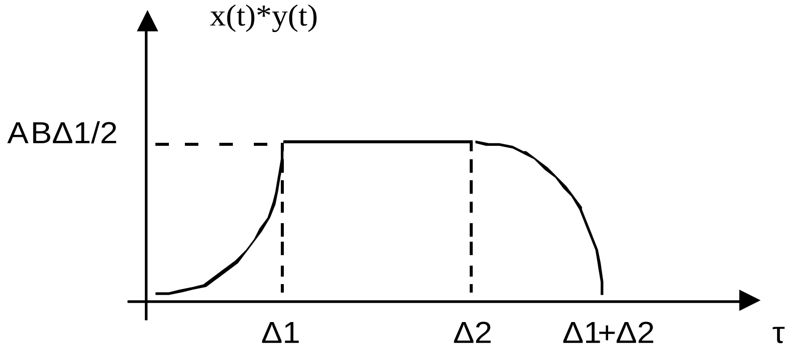

Fig.2.6

Si può ancora osservare che l'intervallo di tempo in cui la convoluzione è diversa da 0 dura la somma degli intervalli in cui sono diversi da 0 i segnali convoluti.

Esercizio n.3

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\, e^{-a(t - t_0)}\, u_{-1}(t - t_0)$$

e

$$y(t) = B\, e^{-b(t - t_1)}\, u_{-1}(t - t_1)$$

a, b sono due quantità positive con a>b. I due segnali sono riportati nella fig. 3.1.

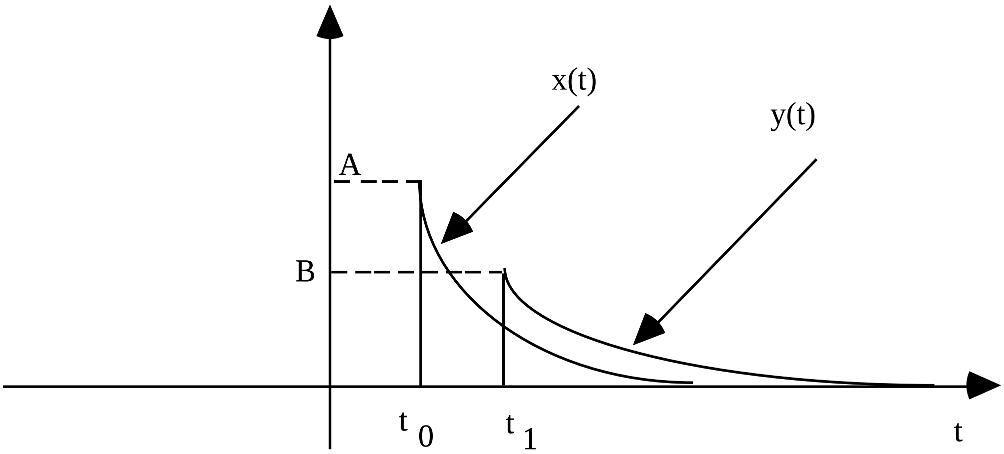

Fig.3.1

Come al solito bisogna invertire l'asse di uno dei due segnali prima di operare le traslazioni. (fig.3.2).

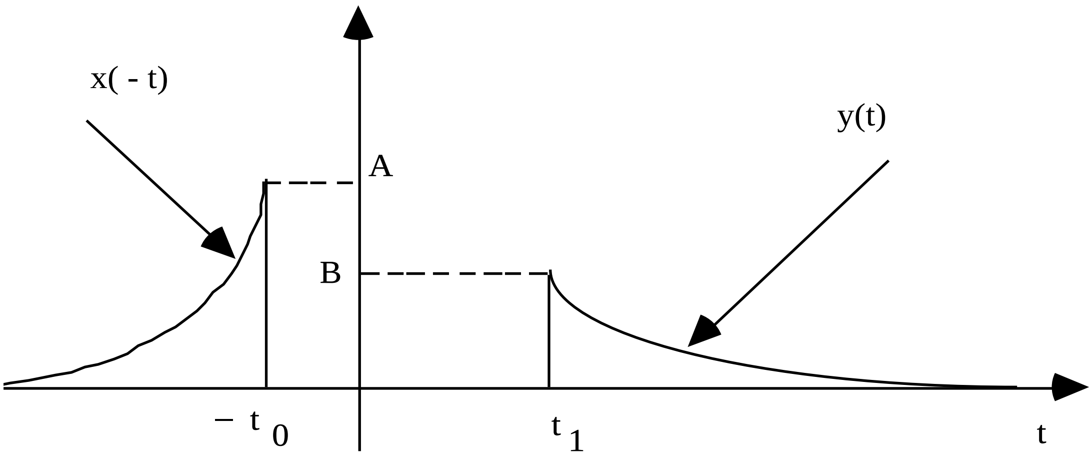

Fig.3.2

In questo caso è facile osservare come traslazioni negative conducono ad una convoluzione nulla, ma questo risultato si ottiene anche per traslazioni positive e inferiori a $t_0 + t_1$.In entrambi i casi $x(\tau - t)$ e $y(t)$ non sono mai contemporaneamente diversi da 0.

Per valori di τ maggiori di $t_0 + t_1$ la convoluzione non è nulla (Fig.3.3).

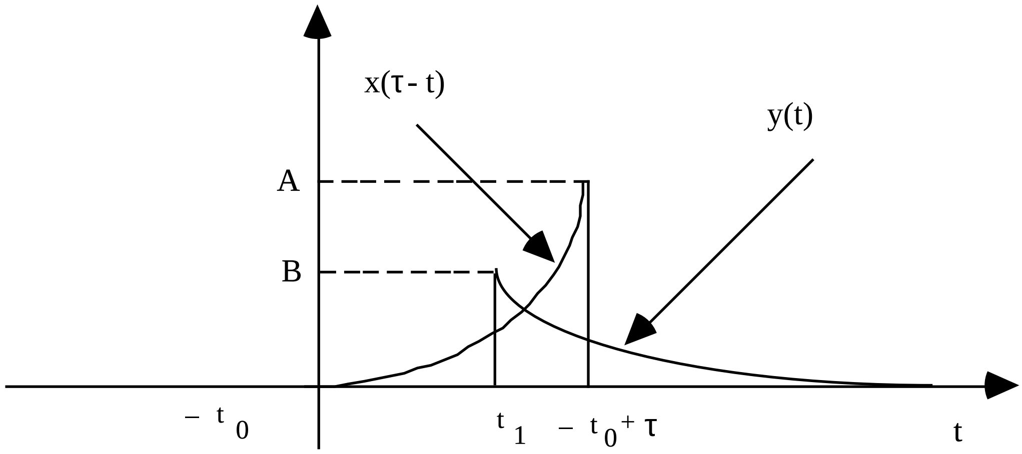

Fig.3.3

e sarà data dalla espressione:

$$C_{xy}(\tau) = AB\int_{t_1}^{-t_0+\tau} e^{-b(t-t_1)}\, e^{-a(\tau-t-t_0)}\,dt$$

che dà:

$$C_{xy}(\tau) = ABe^{b\,t_1 + a(t_0-\tau)}\int_{t_1}^{-t_0+\tau} e^{(a-b)t}\,dt$$

e quindi:

$$C_{xy}(\tau) = ABe^{b\,t_1 + a(t_0-\tau)}\frac{1}{(a-b)}\left(e^{(a-b)(-t_0+\tau)} - e^{(a-b)t_1}\right)$$

che può essere modificato come:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{AB}{(a-b)}\left(e^{-b(\tau-t_0-t_1)} - e^{-a(\tau-t_0-t_1)}\right)$$

Nel caso in cui t_0 e t_1 fossero entrambi nulli si avrebbe il risultato:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{AB}{(a-b)}\left(e^{-b\tau} - e^{-a\tau}\right)$$

Si può verificare come la presenza dei termini di ritardo t_0 e t_1 causa una traslazione di $t_0 + t_1$ della convoluzione calcolata per ritardi nulli, come indicato nell'introduzione.

La fig.3.4 rappresenta il risultato della convoluzione per AB = 8, a =2 , b =1, t_0 e t_1 nulli.

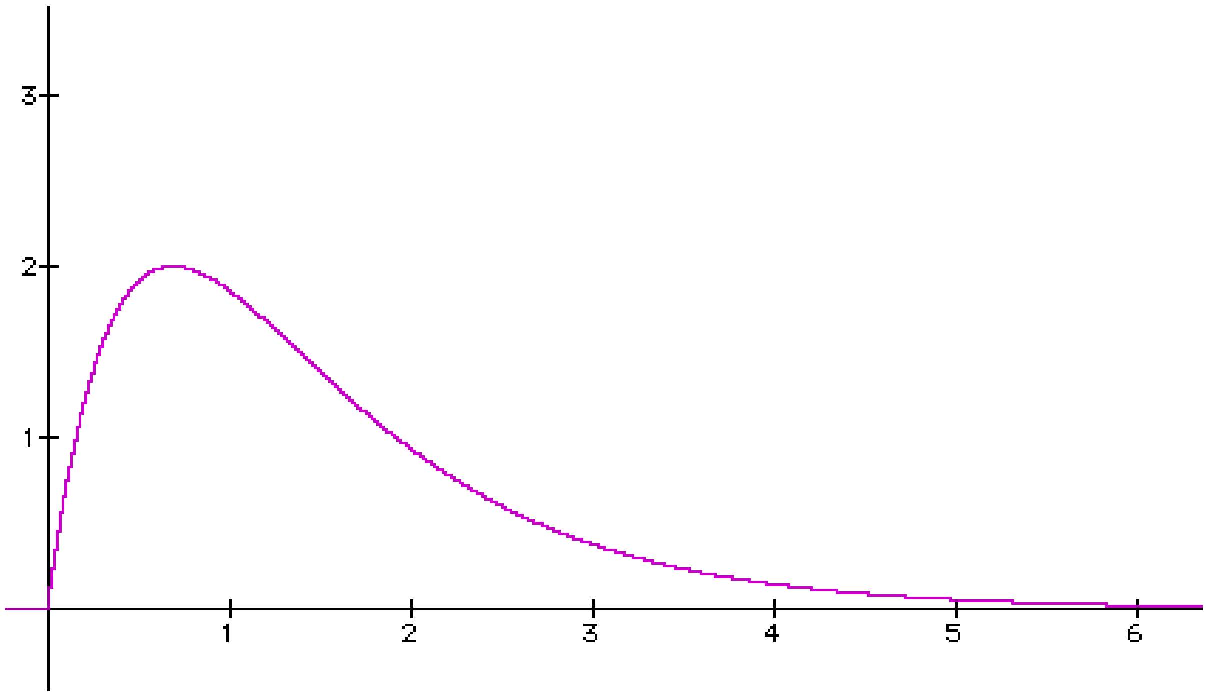

Fig.3.4

Nel caso in cui i coefficienti a e b fossero tra loro uguali le due precedenti formule, ponendo semplicemente b = a, ci porterebbero a forme indeterminate.
Con normali operazioni di limite si ottiene:

$$C_{xy}(\tau) = AB\,(\tau - t_0 - t_1)e^{-a(\tau - t_0 - t_1)}$$

e:

$$C_{xy}(\tau) = AB\,\tau e^{-a\tau}$$

Queste formule valgono per $\tau > t_0 + t_1$ e > 0 rispettivamente essendo nulla la convoluzione per valori di tempo inferiori.

La fig.3.5 rappresenta il risultato della convoluzione nel caso a =b =1 e AB ancora uguale a 8.

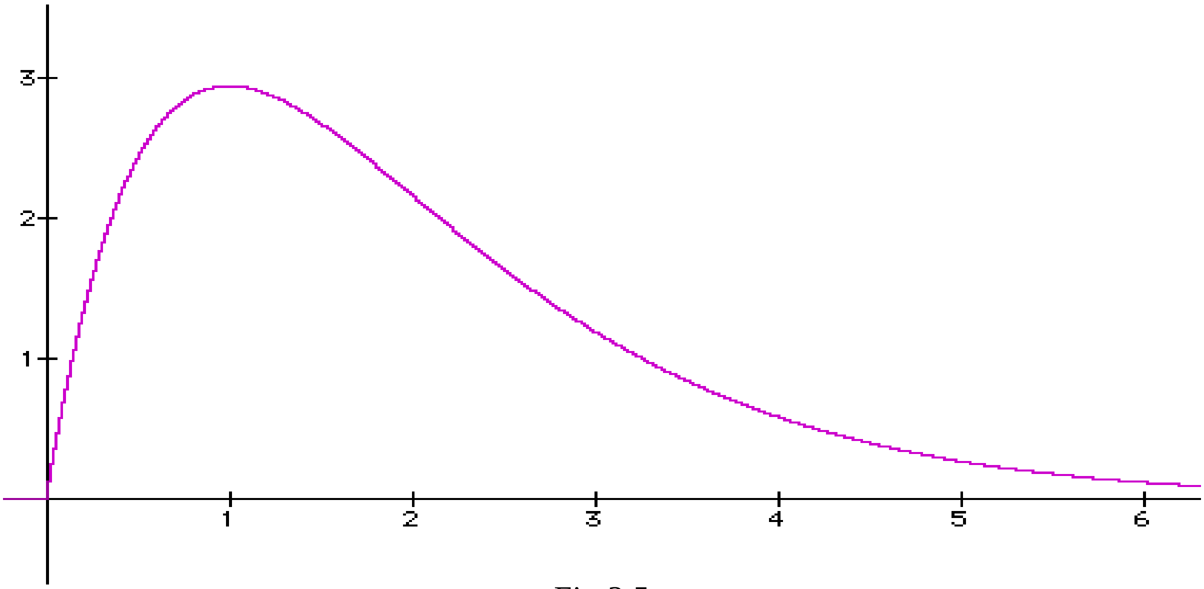

Fig.3.5

Esercizio n.4

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\ \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

e

$$y(t) = A\ [\mathrm{rect}_{\Delta}(t - 5\Delta/2) - \mathrm{rect}_{\Delta}(t - 7\Delta/2)]$$

I due segnali sono riportati nella figura 4.1

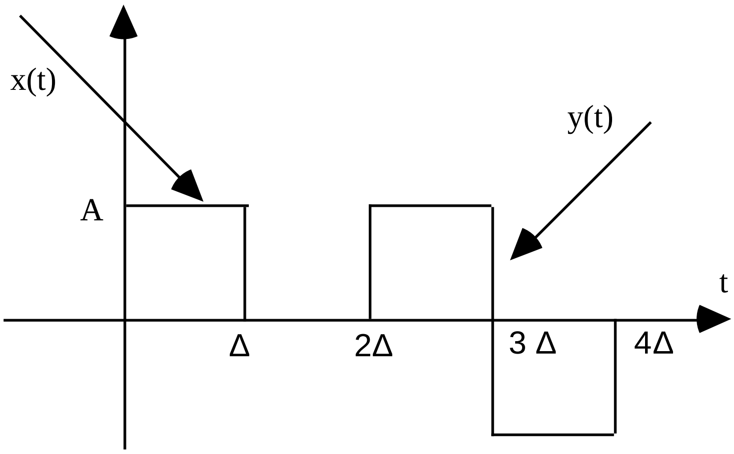

Fig.4.1

Per risolvere facilmente tale problema si può ricorrere a quanto indicato nell'introduzione circa la linearità dell'operazione convoluzione.

Allora:

$$x(t) * y(t) = A\ \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2) * A\ [\mathrm{rect}_{\Delta}(t - 5\Delta/2) - \mathrm{rect}_{\Delta}(t - 7\Delta/2)] =$$

$$= A^2 \{ rect_\Delta(t - \Delta/2) * rect_\Delta(t - 5\Delta/2) + rect_\Delta(t - \Delta/2) * rect_\Delta(t - 7\Delta/2)\}$$

Dall'esercizio 1 possiamo ricavare l'espressione della convoluzione tra due rettangoli che dà:

$$rect_\Delta(t) * rect_\Delta(t) = \Delta tri_\Delta(t)$$

Tenendo conto della regola di traslazione si ottiene allora in conclusione:

$$C_{xy}(\tau) = A^2 \{\Delta\, tri_\Delta(t - 3\Delta) - \Delta tri_\Delta(t - 4\Delta)\}$$

La fig.4.2 illustra $C_{xy}(\tau)$.

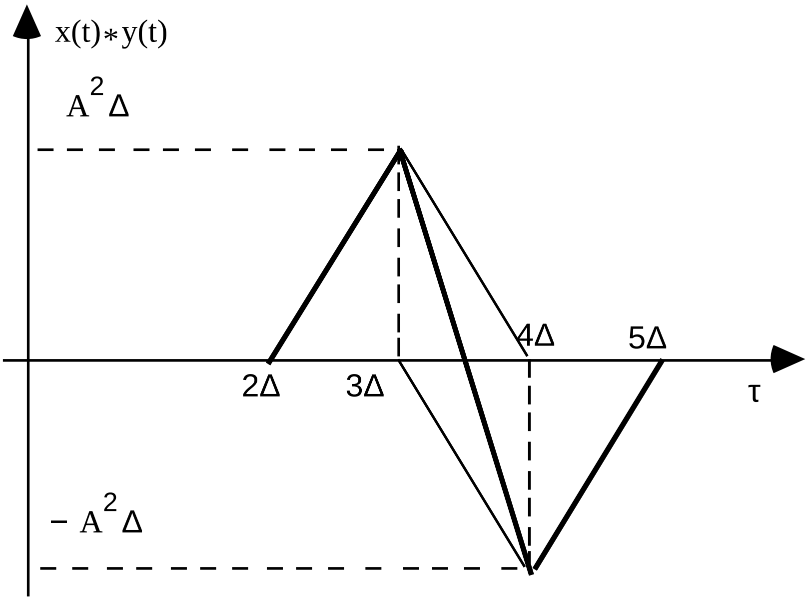

Fig.4.2

Esercizio n.5

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = t \operatorname{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

e

$$y(t) = (\Delta - t) \operatorname{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

I due segnali sono riportati nella figura 5.1

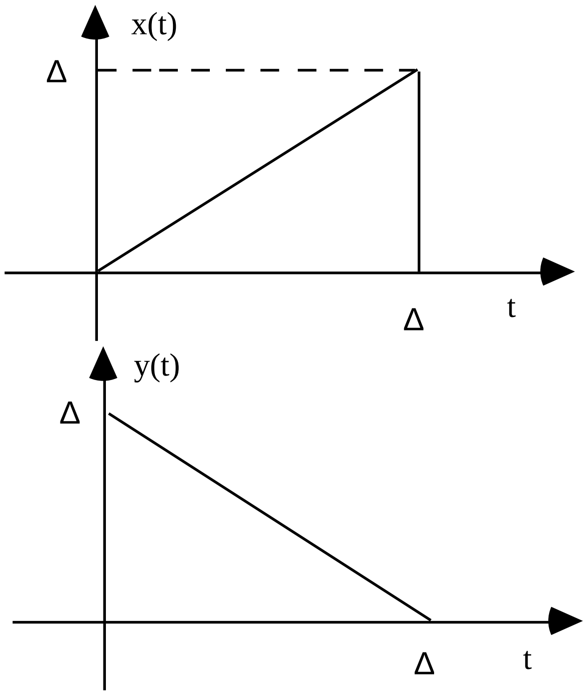

Fig.5.1

Anche ora è facile osservare che per τ minore di zero $C_{xy}(\tau)$ è sempre nulla.
Per $0 \le \tau < \Delta$ si ha la situazione descritta in figura 5.2.

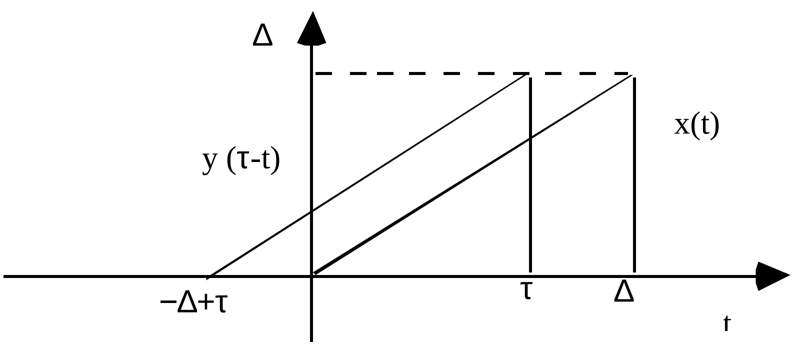

Fig.5.2

Si ha allora:

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} t\ (\Delta-\tau+t)\, dt =$$

$$= (\Delta-\tau)\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} = \Delta\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6}$$

Per $\Delta \le \tau < 2\Delta$ si ha invece la situazione descritta in figura 5.3.

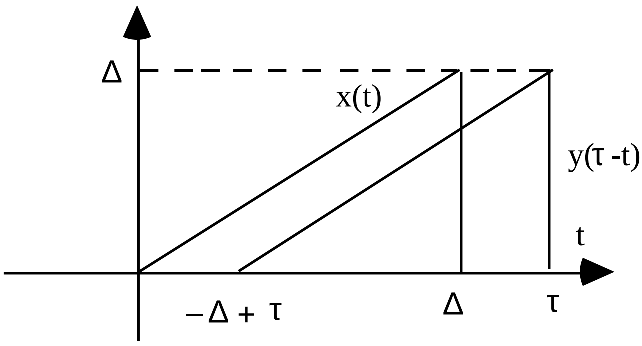

Fig.5.3

e la convoluzione diventa:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\Delta+\tau}^{\Delta} t\ (\Delta-\tau+t)\, dt = \int_0^{2\Delta-\tau} (x-\Delta+\tau)\ x\, dx =$$

$$= \frac{(2\Delta-\tau)^3}{3} + (\tau-\Delta)\frac{(2\Delta-\tau)^2}{2}$$

Per valori di τ superiori la convoluzione torna ad essere nulla.
Si può osservare che $C_{xy}(\Delta)$ vale $\Delta^3/3$. Il risultato della convoluzione è riportato nella fig.5.4 per Δ = 2.

Fig.5.4

Esercizio n.6

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\ \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

e

$$y(t) = \cos(2\pi f t)$$

Applicando la definizione di convoluzione si può scrivere:

$$C_{xy}(\tau) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2) \cos(2\pi f(\tau - t))\, dt$$

e quindi anche :

$$C_{xy}(\tau) = A\int_{0}^{\Delta} \cos(2\pi f(t - \tau))dt = \frac{A}{2\pi f}\int_{-2\pi f\tau}^{2\pi f(\Delta-\tau)} \cos x\, dx =$$

$$= \frac{A}{2\pi f}\left\{\sin(2\pi f(\Delta - \tau)) + \sin(2\pi f\tau)\right\}$$

Utilizzando note formule goniometriche si può ancora scrivere:

$$= \frac{A}{2\pi f}\left\{\sin(2\pi f\Delta)\cos(2\pi f\tau) + (1 - \cos(2\pi f\Delta))\sin(2\pi f\tau)\right\} =$$

$$= \frac{A}{2\pi f} M \cos(2\pi f\tau + \varphi)$$

con $$M = \sqrt{2 - 2\cos(2\pi f\Delta)} = 2\sin(\pi f\Delta)$$

e

$$\varphi = tg^{-1}\frac{\cos(2\pi f\Delta) - 1}{\sin(2\pi f\Delta)} = tg^{-1}\frac{\cos^2(\pi f\Delta) - \sin^2(\pi f\Delta) - 1}{2\sin(\pi f\Delta)\cos(\pi f\Delta)} =$$

$$= tg^{-1}\frac{-2\sin^2(\pi f\Delta)}{2\sin(\pi f\Delta)\cos(\pi f\Delta)} = - tg^{-1}\frac{\sin(\pi f\Delta)}{\cos(\pi f\Delta)} = - \pi f\Delta$$

Si può osservare come la convoluzione tra una sinusoide e un impulso rettangolare sia ancora una sinusoide della stessa frequenza con ampiezza e fase modificate.
Questo è vero qualunque sia la forma del segnale x(t).

Esercizio n.7

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\, tri_\Delta(t)$$

e

$$y(t) = \delta(t - \theta)$$

Per definizione la convoluzione è:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A tri_\Delta(t)\, \delta(\tau - t - \theta) dt$$

Tenendo conto delle proprietà campionatrici della funzione di dirac si ottiene:

$$C_{xy}(\tau) = A tri_\Delta(\tau - \theta)$$

L'impulso di Dirac ha "trascinato" il segnale con cui è convoluto nel suo punto di applicazione.
Se è θ nullo si può osservare come la convoluzione del segnale con l'impulso di dirac coincide col segnale stesso.

$$x(t) * u_0(t) = x(t)$$

Rispetto all'operatore di convoluzione l'impulso di Dirac centrato rappresenta l'elemento unitario.