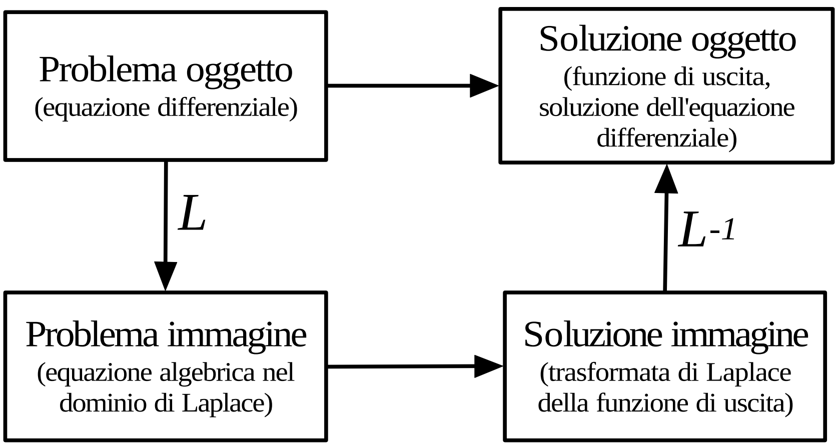
Appunti di Controlli Automatici

Uso della trasformazione di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali

Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le **trasformazioni funzionali**, ossia le trasformazioni che associano funzioni a funzioni. In particolare, siamo qui interessati all'uso della **trasformata di Laplace**.

Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra **funzioni oggetto***, normalmente funzioni del tempo, e* **funzioni immagine** *di diversa natura.* In questo modo, le operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come per esempio la derivazione o l'integrazione, corrispondono ad operazioni più semplici sulle funzioni immagine e, di conseguenza, al **problema oggetto** viene ad essere associato un **problema immagine** di più facile soluzione:



Una volta ricavata la soluzione del problema immagine, si passa alla soluzione del problema oggetto eseguendo, sulle funzioni immagine, l'operazione di **antitrasformazione** (o trasformazione inversa).

Per essere più chiari, quando c'è da risolvere una equazione differenziale o integro-differenziale (problema oggetto), è possibile procedere nel modo seguente:

- in primo luogo, si trasforma l'equazione differenziale in una equazione algebrica (problema immagine) mediante l'applicazione della trasformata di Laplace; in questo passaggio, che comporta essenzialmente l'applicazione delle proprietà di derivazione nel tempo e di integrazione nel tempo, è importante fare attenzione alle *condizioni iniziali*;
- successivamente, si risolve l'equazione algebrica in modo da ottenere la soluzione immagine;
- a questo punto, è possibile risalire alla soluzione dell'equazione differenziale di partenza (cioè alla soluzione oggetto) applicando semplicemente l'antitrasformata di Laplace alla soluzione immagine.

Questo, dunque, in linea generale. Vediamo ora i dettagli matematici.

Il punto di partenza è l'equazione differenziale generica caratteristica di un **sistema lineare stazionario** avente n uscite ed m ingressi:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

Siamo interessati a conoscere la funzione di uscita y(t) che soddisfa questa equazione e le condizioni iniziali specificate, vale a dire i valori di y e delle sue derivate (fino a quella di ordine n-1) nell'istante $t=0^-$. Possiamo allora scomporre (in base al cosiddetto **teorema di separazione**) la soluzione generale y(t) nella somma della soluzione $y_0(t)$ dell'equazione omogenea e di quella $y_1(t)$ corrispondente a condizioni iniziali tutte nulle:

- l'equazione omogenea associata a quella completa è

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0$$

Applicando l'operatore **trasformata di Laplace** e tenendo conto delle condizioni iniziali sull'uscita (necessarie per l'applicazione del teorema di derivazione), essa diventa

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i \left. \frac{d^{k-i-1} y(t)}{dt} \right|_{t=0^-}$$

da cui si ricava che la **trasformata di Laplace della risposta libera** è

$$Y_0(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i \left. \frac{d^{k-i-1} y(t)}{dt} \right|_{t=0^-}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- in modo analogo, applicando l'operatore trasformata di Laplace all'equazione completa, nell'ipotesi questa volta di condizioni iniziali nulle, otteniamo

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \ldots + b_0 X(s)$$

da cui si ricava che la **trasformata di Laplace della risposta forzata** è

$$Y_1(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} X(s)$$

A questo punto, possiamo sommare le due soluzioni, in modo da ottenere la trasformata di Laplace dell'uscita complessiva:

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i \left. \frac{d^{k-i-1} y(t)}{dt} \right|_{t=0^-} + \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right) X(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Questa è dunque la soluzione immagine del nostro problema. Per ottenere la soluzione oggetto, ossia la funzione y(t), non dobbiamo far altro che applicare l'antitrasformazione di Laplace:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

Spesso, nell'ambito dei controlli automatici, si fa riferimento a **sistemi inizialmente in quiete**, ossia con tutte le condizioni iniziali nulle. In questo caso, è evidente che $Y_0(s)=0$ e quindi che l'uscita del sistema si riduce all'**uscita forzata**:

$$Y(s) = Y_1(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} X(s) \longrightarrow y(t) = L^{-1}[Y_1(s)]$$

In base a questa relazione, la trasformata di Laplace del segnale di uscita si ottiene semplicemente moltiplicando la trasformata del segnale di ingresso per la seguente **funzione di trasferimento** del sistema:

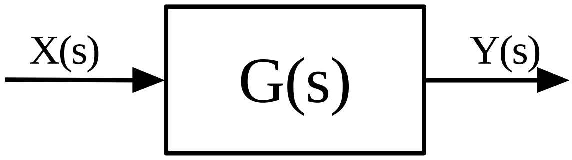
$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

La funzione di trasferimento di un sistema è dunque una funzione della variabile s con la caratteristica che, moltiplicandola per la trasformata della funzione di ingresso, si ottiene la trasformata dell'evoluzione forzata.

E' chiaro che la funzione di trasferimento di un sistema assume una espressione particolarmente semplice nel caso in cui il sistema (dinamico lineare stazionario) abbia 1 solo ingresso (m=1) ed 1 sola uscita (n=1):

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

I **sistemi dinamici lineari stazionari ad una sola variabile** sono perciò spesso rappresentati come nella figura seguente:



Si tratta cioè di un blocco entro il quale viene specificata la funzione di trasferimento del sistema.

E' bene osservare che *non tutti i sistemi dinamici, anche se lineari e stazionari, sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali fratte*. Un esempio tipico è il **ritardo puro**, la cui funzione di trasferimento è trascendente: infatti, se l'ingresso è x(t), l'uscita è y(t)=x(t-T) e, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{L[x(t-T)]}{L[x(t)]} = \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts}$$

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry