

Appunti di “Controlli Automatici 1”

Capitolo 1 – Introduzione ai “controlli”

<i>Introduzione ai “sistemi controllati”</i>	2
<i>Schemi a blocchi</i>	3
<i>Modelli matematici</i>	4
<i>Condizioni iniziali</i>	5
<i>Sistemi lineari o non lineari</i>	5
<i>Sistemi stazionari o non stazionari</i>	6
<i>Controlli ad azione diretta e in retroazione</i>	6
<i>Esempio: motore in corrente continua con eccitazione costante</i>	10
<i>Reti correttrici e schemi misti</i>	15
<i>Esempio: regolazione di un motore in corrente continua</i>	16
<i>Riepilogo della simbologia</i>	18
MODELLI MATEMATICI DI ALCUNI SISTEMI DINAMICI	20
<i>Metodo deduttivo per la costruzione del modello matematico di un sistema</i>	20
<i>Modelli dinamici</i>	21
<i>Circuiti elettrici</i>	21
Esempio	21
<i>Sistemi meccanici</i>	22
Esempio	25
Esempio	27
<i>Oggetti statici ed oggetti dinamici</i>	28
Esempio	28
ESEMPI DI SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE	30
<i>Premessa</i>	30
<i>Amplificazione elettronica: servomeccanismo di posizione</i>	30
<i>Amplificazione pneumatica</i>	31
<i>Sistemi a segnali campionati</i>	32

Introduzione ai "sistemi controllati"

L' **automazione** è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o quanto meno a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e di impianti.

Un importante capitolo della scienza dell'automazione è costituito dalla disciplina dei **controlli automatici**: *tale disciplina si occupa dello studio dei dispositivi (detti "regolatori", "controllori" o più semplicemente "dispositivi di controllo") mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto **sistema controllato**) in modo che esso subisca l'evoluzione nel tempo considerata migliore possibile.*

Un **sistema** è un insieme di parti, dette **oggetti** o anche **sub-sistemi**, che operano in cooperazione tra loro per un qualche fine comune. Ciascun oggetto è identificato da opportuni **attributi**, ossia da precise *grandezze fisiche* legate tra loro da *leggi analitiche*: queste grandezze fisiche sono generalmente variabili nel tempo e le si chiama perciò **variabili**. Le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo si dicono **segnali**.

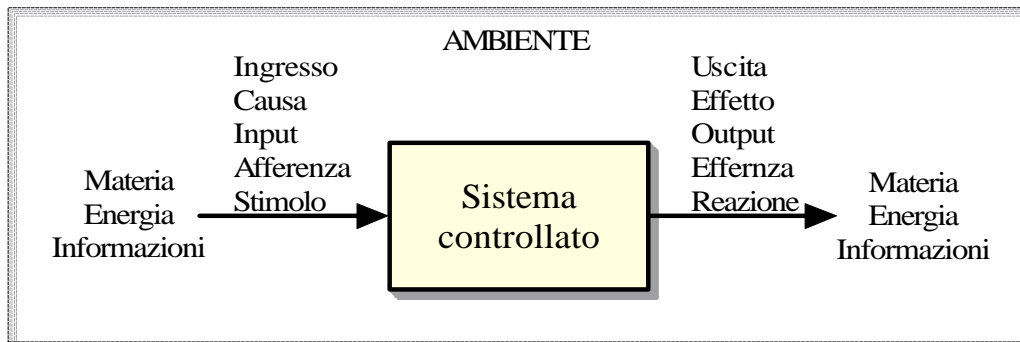
Solitamente, nei sistemi, l'evoluzione di alcune variabili è conseguenza dell'evoluzione di altre: ecco perché si distinguono le **variabili di ingresso** (o **variabili indipendenti** o **cause**) e le **variabili di uscita** (o **variabili dipendenti** o **effetti**). Quando, le variabili di un sistema sono state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita, si parla di **sistema orientato**.

E' possibile inoltre classificare le variabili di ingresso: ci sono infatti le **variabili manipolabili**, ossia quelle il cui andamento può essere imposto arbitrariamente, e le **variabili non manipolabili**, dette anche **disturbi**, sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di un altro operatore.

Essenzialmente, quindi, le variabili di ingresso sono classificabili in 3 categorie:

- **ingressi di segnale**: ad esempio, se consideriamo un PC, si tratta dei dati battuti su tastiera;
- **ingressi di mantenimento**: si tratta di ingressi generalmente contenenti grosse quantità di energia, spesso necessarie per il funzionamento del sistema; sempre nell'esempio di un PC, un tipico ingresso di mantenimento è la corrente elettrica di alimentazione. Anche se, *generalmente, ad ogni ingresso sono associate materia, energia ed informazioni*, gli ingressi di mantenimento trasportano essenzialmente energia;
- **disturbi**: si tratta generalmente di azioni che l'*ambiente* esercita sul sistema, diverse da quelle azioni che invece sono state volontariamente predisposte sul sistema (cioè appunto gli ingressi di segnale e quelli di mantenimento). Sono dunque ingressi indesiderati (spesso imprevedibili), ma dei quali bisogna necessariamente tener conto. Lo scopo dei controlli automatici è fondamentalmente quello di prevenire l'azione dei disturbi sul sistema progettato. In quest'ottica, *il compito del "controllo" è di predisporre delle azioni in modo tale che il sistema si comporti in un certo modo (ossia fornisca delle determinate uscite) a prescindere dalla presenza di eventuali disturbi*. Ciò presuppone, ovviamente, che il sistema possa discriminare, mediante opportuni meccanismi, i segnali dai disturbi: esso deve reagire agli ingressi nel modo voluto, mentre non deve invece reagire ai disturbi.

Ogni sistema è separato, mediante un **confine** (fisico o astratto) dall'**ambiente**, ossia da ciò che circonda il sistema ed è diverso dal sistema stesso. *L'ambiente scambia con il sistema energia, materia ed informazioni.*



Un sistema deve avere principalmente 3 requisiti:

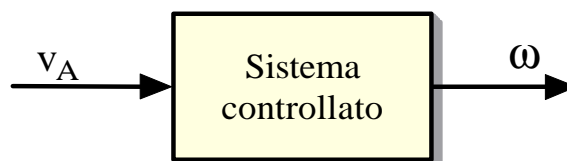
- **autonomia**: il sistema deve essere nettamente distinguibile dall'ambiente esterno; ciò significa che i legami tra le sue parti interne devono essere molto più forti rispetto a quelli che tali parti hanno con l'esterno;
- **coerenza**: i legami tra le parti interne devono essere tali da poter distinguere, all'interno del sistema, dei sistemi più piccoli, detti **sotto-sistemi**;
- **resilienza**: quando il sistema subisce delle sollecitazioni dall'esterno e si "mette in moto", deve essere in grado di tornare nello stesso stato in cui era inizialmente non appena le sollecitazioni hanno termine.

Noi ci occupiamo solo dei **sistemi aperti**, che cioè scambiano sia materia sia energia sia informazioni con l'ambiente esterno.

Schemi a blocchi

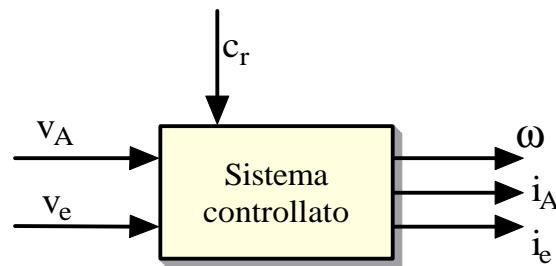
E' molto utile rappresentare i sistemi come **blocchi** e le loro variabili come **collegamenti** dei blocchi con l'ambiente esterno o con altri sistemi. I collegamenti sono in genere contraddistinti con **freccie orientate** verso il sistema se si tratta di ingressi per il sistema stesso o verso l'esterno se si tratta di uscite dal sistema.

Il caso più semplice è quello indicato nella figura seguente:



Si tratta di un **sistema ad una sola variabile** (rappresentativo cioè di un'unica relazione causa-effetto), in cui l'ingresso è rappresentato da v_A , mentre l'uscita da ω . Questo tipo di sistemi sono detti **S.I.S.O.**, che sta appunto per *Single Input Single Output*, e sono quelli di cui ci occuperemo nel corso.

Più complesso è invece il caso seguente:



In questo caso, abbiamo un **sistema a molte variabili**, visto che è rappresentativo di più relazioni causa-effetto.

Modelli matematici

Si dice che si conosce un **modello matematico** di un sistema quando si dispone di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite del sistema, noti che siano quelli degli ingressi. In questi modelli matematici, *le variabili corrispondono in genere a numeri reali, che ne costituiscono le misure in prefissate unità, mentre i segnali corrispondono a funzioni che legano tali numeri reali alla variabile reale tempo.*

Il modello matematico di un sistema può essere più o meno accurato; nei controlli automatici, si sacrifica spesso la precisione a favore della semplicità.

Per i sistemi SISO cui noi siamo interessati, vedremo che è sufficiente un'unica relazione che, a partire dall'ingresso, fornisce l'uscita: questa relazione prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema.

Se gli ingressi al sistema risultano costanti per lunghi periodi di tempo, è sufficiente utilizzare un **modello matematico statico** (o **puramente algebrico**), il quale descrive il legame tra i valori degli ingressi (supposti appunto costanti) ed i valori delle uscite che ad essi corrispondono una volta che il sistema abbia raggiunto una condizione di funzionamento in cui TUTTI i segnali siano costanti (si parla di **condizione** o **posizione** o **stato di equilibrio** o **stato di regime stazionario**). Generalmente, un modello statico è accettabile anche quando la variazione nel tempo degli ingressi è sufficientemente lenta in rapporto ai tempi di risposta propri del sistema.

Il modello statico di un sistema ad una sola variabile sarà dunque dato dall'unica funzione $y=f(x)$ di una sola variabile, mentre il modello statico di un sistema a molte variabili consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi).

I modelli matematici statici non sono usati spesso nello studio dei sistemi di controllo, in quanto non danno alcuna informazione sul cosiddetto **regime transitorio**, cioè sull'andamento temporale delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario ad un altro. In generale, il progetto dei dispositivi di controllo è basato invece proprio su specifiche riguardanti il comportamento del sistema in regime transitorio.

Per descrivere il comportamento di un sistema in regime transitorio bisogna ricorrere ad un modello matematico più generale, detto **modello matematico**

dinamico: tale modello è costituito da una o più equazioni differenziali esprimenti legami non solo tra le variabili di ingresso e di uscita, ma anche tra le loro rispettive derivate rispetto al tempo. *L'intero corso dei Controlli Automatici è dedicato allo studio delle proprietà dei modelli matematici dinamici.*

Condizioni iniziali

In generale, quando si studia il comportamento di un sistema in regime transitorio (determinando l'andamento delle uscite corrispondente ad un fissato andamento degli ingressi, ossia determinandone la **risposta** ad una fissata **eccitazione**), si suppone generalmente che il sistema sia **inizialmente in quiete**, ossia che le variabili di ingresso e di uscita siano inizialmente tutte nulle e che l'uscita (o le uscite) rimarrebbe nulla se l'ingresso (o gli ingressi) non subisse variazioni.

Se invece questa ipotesi di **quiete iniziale** non è soddisfatta, l'uscita non dipende più solo dall'ingresso, ma anche dalla **condizione iniziale** (o **stato iniziale**) del sistema.

E' importante precisare che il valore nullo di una variabile può essere un opportuno **valore di riferimento**, rispetto al quale essa viene misurata, per cui la condizione di quiete è in pratica un qualunque stato di equilibrio.

Sistemi lineari o non lineari

Un modello matematico (o un sistema) si dice **lineare** quando soddisfa la **proprietà di sovrapposizione degli effetti**, che andiamo ad enunciare: supponiamo che il sistema si trovi inizialmente in quiete; supponiamo inoltre che esso abbia n ingressi e che $x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)$ e $x''_1(t), x''_2(t), \dots, x''_n(t)$ siano due qualunque insiemi di segnali in ingresso a tale sistema; supponiamo anche che il sistema abbia m uscite e che le risposte agli insiemi di segnali di ingresso prima citati siano rispettivamente $y'_1(t), y'_2(t), \dots, y'_m(t)$ e $y''_1(t), y''_2(t), \dots, y''_m(t)$; supponiamo infine di scegliere due qualsiasi costanti reali a e b e di porre in ingresso al sistema il seguente insieme di segnali:

$$ax'_1(t) + bx''_1(t), ax'_2(t) + bx''_2(t), \dots, ax'_n(t) + bx''_n(t)$$

Allora, sotto tutte queste ipotesi, diremo che il sistema è **lineare** se l'insieme di risposte corrispondente a questo insieme di ingressi è

$$ay'_1(t) + by''_1(t), ay'_2(t) + by''_2(t), \dots, ay'_m(t) + by''_m(t)$$

Un modello o un sistema che invece non soddisfa questa proprietà si dirà **non lineare**.

E' bene osservare che ci sono diversi sistemi che ammettono modelli lineari solo a patto che i valori delle variabili non escano da determinati campi.

Sistemi stazionari o non stazionari

Un modello matematico o un sistema, lineare o meno che sia, si dice *stazionario* quando soddisfa la **proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti**, che andiamo ad enunciare: supponiamo che il sistema (ad n ingressi ed m uscite) si trovi inizialmente in quiete; supponiamo che $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sia un generico insieme di segnali in ingresso e supponiamo che il corrispondente insieme di risposte sia $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$; supponiamo infine di scegliere una generica costante reale positiva T e di porre in ingresso al sistema il seguente insieme di segnali:

$$x_1(t-T), x_2(t-T), \dots, x_n(t-T)$$

Allora, sotto queste ipotesi, diremo che il sistema è **stazionario** se l'insieme di risposte corrispondente a questo insieme di ingressi è

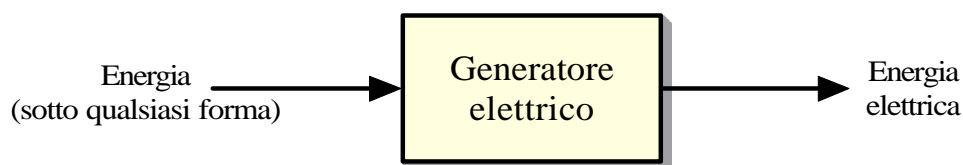
$$y_1(t-T), y_2(t-T), \dots, y_m(t-T)$$

Un modello o un sistema che invece non soddisfa questa proprietà si dirà **non stazionario**.

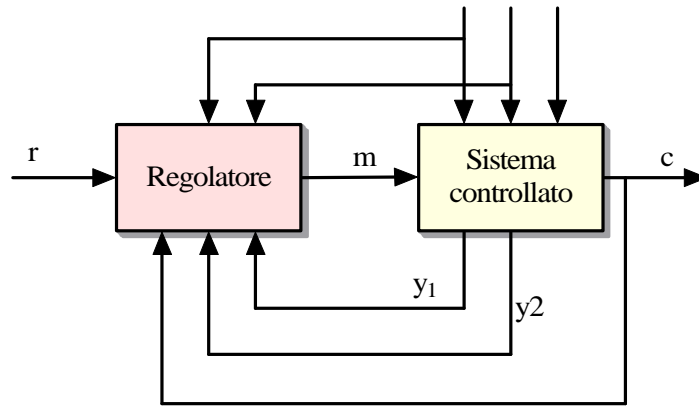
In pratica, quindi, un sistema è stazionario (o anche **tempo-invariante**) se, traslando l'ingresso di una quantità T , esso risponde con la stessa uscita, ma traslata anch'essa di T . Se, invece, il sistema risponde con una uscita diversa, allora non è stazionario (o anche **tempo-variante**).

Controlli ad azione diretta e in retroazione

Consideriamo un semplice sistema ad una sola *variabile controllata*, nel quale cioè è individuata una sola variabile di uscita sul cui andamento nel tempo si vuole e si può influire mediante un apposito *regolatore*. Pensiamo, ad esempio, ad un generatore elettrico, ossia un dispositivo che converte in energia elettrica della energia fornitagli dall'esterno sotto qualche altra forma:



L'obiettivo del controllo è quello di mantenere l'uscita su un valore costante nel tempo, ad esempio una tensione fissa sul valore 220V, a prescindere da eventuali disturbi agenti sul generatore. E' possibile ottenere questa azione di controllo mediante il collegamento illustrato nella figura seguente:



In questo schema, rispetto al precedente, è stato inserito un **regolatore** a monte del **sistema controllato** (il generatore); il collegamento tra i due è stato effettuato in modo che il regolatore possa agire su di una **variabile manipolabile** m , detta anche **segnale di attuazione** (nel caso del generatore elettrico, potrebbe trattarsi di un'altra tensione elettrica oltre quella di uscita). L'azione del regolatore si esplica mediante un **attuatore** (non riportato in figura), ossia un dispositivo che provvede a modificare la variabile manipolabile proporzionalmente ad un segnale fornito dal regolatore, dato dalla variazione di una grandezza fisica adatta per la trasmissione a distanza dell'informazione (ad esempio una tensione elettrica o una corrente elettrica o una pressione pneumatica). Al regolatore giungono informazioni sui valori di altre variabili di ingresso al sistema controllato, sulla **variabile controllata** c (la tensione di 220V nel caso del generatore) e su eventuali altre variabili di uscita del sistema controllato. Queste informazioni sono rese disponibili mediante dei **trasduttori** (non riportati in figura), ossia dispositivi che misurano una grandezza e la convertono in un'altra di diversa natura fisica, adatta per la trasmissione a distanza dell'informazione (ad esempio ancora una tensione elettrica o una corrente elettrica o una pressione pneumatica).

Non sempre gli ingressi non manipolabili (cioè i **disturbi**) del sistema controllato possono essere direttamente misurati e convertiti in un segnale da inviare al regolatore. Inoltre, tra gli ingressi non manipolabili si possono includere anche le cosiddette **variazioni parametriche**, cioè le variazioni, dovute a qualunque causa (ad esempio ad usura e deterioramenti vari), dei legami ingresso-uscita del sistema controllato. Tali variazioni parametriche non possono essere direttamente misurate tramite trasduttori, ma eventualmente solo dedotte con *metodi indiretti*, vale a dire con l'elaborazione di altre misure. In questi casi, il trasduttore è sostituito dall'*elaboratore*, ma lo schema indicato prima e le considerazioni fatte su di esso conservano la loro validità.

Una importante informazione che giunge al regolatore è data dalla **variabile di riferimento** (o **segnale di riferimento**), indicata in figura con r : essa condiziona infatti l'influenza del regolatore sulla variabile controllata c .

*Negli apparati di controllo più semplici, l'obiettivo dell'azione di controllo è il cosiddetto **inseguimento** (o **asservimento** o semplicemente **controllo**), nel senso che si vuole ottenere la proporzionalità, istante per istante, tra la variabile controllata e quella di riferimento: in termini analitici, un apparato ideale, progettato per l'inseguimento, deve dunque soddisfare una relazione del tipo*

$$c(t) = Kr(t)$$

dove la costante K è caratteristica dell'apparato ed è chiamata **costante di regolazione** (o anche **costante di controllo**).

L'altro possibile obiettivo per l'azione di controllo è la cosiddetta *regolazione*: mentre l'inseguimento si ha quando l'ingresso e l'uscita possono avere un andamento temporale qualsiasi, la **regolazione** si ha quando sia l'ingresso sia l'uscita sono delle quantità costanti. L'azione di regolazione si rende spesso necessaria in quanto i disturbi si oppongono al mantenimento dei valori costanti desiderati. Noi siamo interessati alle azioni di inseguimento, mentre solo in qualche caso particolare considereremo problemi di regolazione.

La relazione $c(t)=K \cdot r(t)$ tipica dell'inseguimento implica che la variabile controllata dipenda unicamente dalla variabile di riferimento e risulti invece indipendente da tutti gli altri eventuali ingressi (inclusi i disturbi) al sistema. Nella pratica, per la presenza di tali ingressi e per l'inerzia del sistema controllato (che non può chiaramente seguire un segnale di riferimento variabile troppo rapidamente nel tempo o addirittura discontinuo), la relazione $c(t)=K \cdot r(t)$ è soddisfatta a meno di un **errore**, cioè di uno scarto tra il valore effettivo della variabile controllata e quello che idealmente si vorrebbe ottenere: questo errore vale cioè

$$e_U(t) = Kr(t) - c(t)$$

dove $K \cdot r(t)$ è l'uscita che si vorrebbe ottenere, mentre $c(t)$ è quella che realmente si ottiene.

Si può anche definire un errore con riferimento alla variabile di ingresso: si avrà in questo caso che

$$e_I(t) = r(t) - \frac{1}{K} c(t)$$

Le **specifiche** che delineano la qualità di un apparato di controllo si riferiscono spesso all'andamento nel tempo dell'errore ed al suo valore in condizioni di regime stazionario.

C'è una importante classificazione dei sistemi controllati, basata sulle informazioni utilizzate dal regolatore per la propria azione di controllo:

- se il regolatore opera utilizzando, oltre al segnale di riferimento r , solo informazioni riguardanti gli ingressi del sistema controllato, allora si parla di **controllo ad azione diretta** (o **in catena aperta**) o meglio di **controllo in anello aperto** (in inglese **feedforward**);
- se, invece, il regolatore opera utilizzando, oltre ad r , solo informazioni riguardanti la stessa variabile controllata c ed altre uscite del sistema controllato, allora si parla di **controllo in retroazione** oppure **in catena chiusa** o anche **in anello chiuso** (in inglese **feedback**, che significa *alimentazione all'inverso*).

In altre parole, un controllo ad azione diretta è caratterizzato dal fatto che il valore della variabile manipolabile non dipende da quello della variabile controllata né da quelli di altre variabili dipendenti del sistema controllato; non ci sono dunque percorsi chiusi di segnale. Al contrario, in un controllo in retroazione, il valore della variabile manipolabile dipende da quello della variabile controllata

e da quelli di altre variabili dipendenti del sistema controllato, per cui è presente sempre almeno un percorso chiuso di segnale (detto **anello di retroazione**).

Per comprendere meglio in cosa consista un *controllo ad azione diretta*, facciamo il seguente esempio: consideriamo un caso di regolazione, in cui si vuol mantenere l'uscita su un valore costante Y_0 ; per ottenere questa relazione, è possibile procedere nel modo seguente: si effettuano delle prove sul sistema, sollecitandolo mediante diversi valori dell'ingresso e rilevando le corrispondenti uscite; inseriti su un grafico i valori dell'uscita corrispondenti ai diversi valori dell'ingresso, si ottiene una curva interpolante; fissando su questa curva il valore Y_0 , si ottiene il corrispondente valore U_0 dell'ingresso. Quella appena descritta è una tipica operazione di **taratura**. L'inconveniente, in un procedimento di questo tipo, è rappresentato proprio dalla presenza di eventuali ingressi, non voluti, che tendano ad alterare il funzionamento previsto per il sistema: può trattarsi di disturbi agenti dall'esterno (inclusi per esempio i fattori climatici) o di variazioni parametriche, cioè disturbi provenienti dall'interno del sistema. In entrambi i casi, questi fattori alterano le condizioni sotto le quali è possibile effettuare la taratura così come è stata descritta.

Un procedimento di questo tipo è adottabile solo quando non è richiesto un elevato grado di precisione dell'uscita e quando si cerca comunque una soluzione economica per il problema della regolazione. Se, invece, i margini per l'uscita sono molto più ristretti, allora la soluzione in anello aperto non funziona.

Esistono poi due tipi di retroazione:

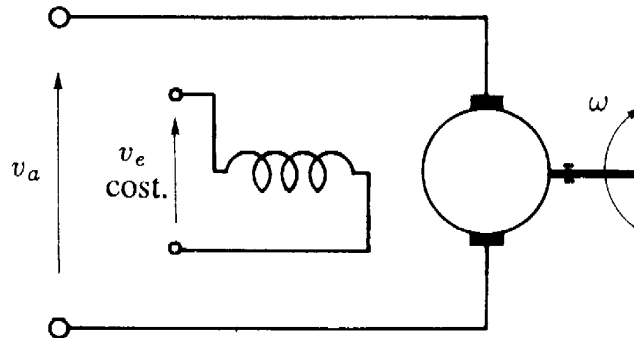
- la retroazione è **negativa** se, immaginando di sezionare in un punto qualsiasi l'anello di retroazione, una perturbazione del segnale a valle viene riportata con segno opposto sul segnale a monte del sezionamento;
- invece, la retroazione è **positiva** se la perturbazione a valle viene riportata con lo stesso segno sul segnale a monte del sezionamento.

Nei sistemi di controllo ad azione diretta, il valore della variabile manipolabile viene determinato entro il regolatore in base ad un modello matematico del sistema controllato, senza operare alcuna verifica sulla rispondenza del valore della variabile controllabile (ossia sul fatto che la relazione $c(t)=K \cdot r(t)$ sia effettivamente verificata): questi sistemi si definiscono perciò anche **controlli predittivi**, mentre invece i sistemi di controllo in retroazione sono detti **controlli esplorativi**, in quanto il valore della variabile manipolabile viene determinato in base alla misura della variabile controllata ma anche alla verifica della rispondenza alla relazione $c(t)=K \cdot r(t)$.

C'è anche da dire che, nella pratica, l'azione diretta e la retroazione si presentano generalmente insieme: infatti, poiché le due soluzioni tecniche hanno pregi e difetti complementari, nel progetto degli apparati di controllo più raffinati è opportuno utilizzarle entrambe, per esempio impiegando la metodologia tipica dei controlli ad azione diretta per migliorare la qualità di un sistema fondamentalmente in retroazione o viceversa.

Esempio: motore in corrente continua con eccitazione costante

Consideriamo il **motore in corrente continua**, con eccitazione costante, rappresentato nella figura seguente:



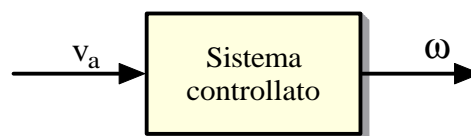
Il nostro scopo è quello di controllare la velocità ω del rotore, ossia di costruire un dispositivo che, agendo sulla **tensione di armatura** V_A (detta anche **segnale pilota** per la funzione svolta nel dispositivo), faccia in modo che sia soddisfatta, istante per istante, la seguente relazione di proporzionalità:

$$\omega(t) = K_C v_r(t)$$

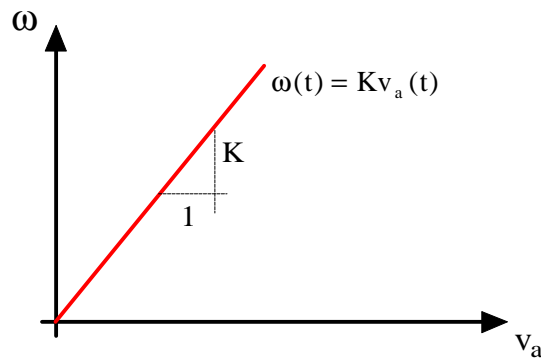
In questa relazione, V_r è una **variabile di riferimento** (consistente in una tensione ai capi dell'**avvolgimento di campo**), mentre K_C (**costante di regolazione**) è un parametro assegnato.

La tensione di riferimento V_r si suppone variabile molto lentamente o, al limite, costante, in modo che si possa utilizzare per il sistema un **modello statico**.

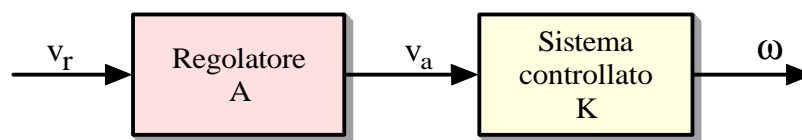
E' chiaro che il motore costituisce il sistema controllato (detto anche **plant**). La velocità angolare del rotore è la variabile controllata (cioè l'uscita), mentre la tensione d'armatura è la variabile manipolabile (cioè una variabile di ingresso sulla quale possiamo agire):



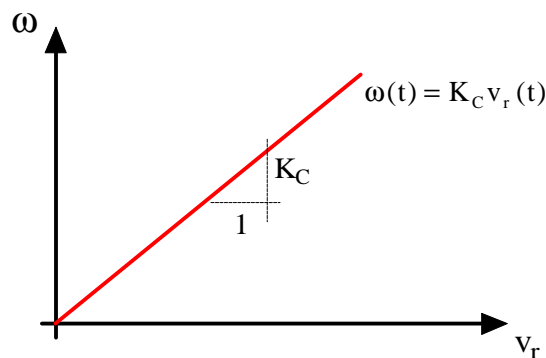
Facciamo l'ipotesi che la caratteristica statica del motore sia sufficientemente stabile e possa essere descritta dalla relazione lineare $\omega(t) = K v_a(t)$ (dove K è una costante nota):



Si può allora pensare di impiegare il **controllo ad azione diretta** il cui schema a blocchi è riportato nella figura seguente:



Questo schema si ottiene collegando, in cascata al motore, un amplificatore di tensione con guadagno $A=K_C/K$, dotato di uno stadio di uscita sufficientemente potente per pilotare il circuito d'armatura (in pratica, lo stadio di uscita dell'amplificatore costituisce l'attuatore del sistema di controllo). Si rende in questo modo soddisfatta la relazione di proporzionalità $\omega(t) = K_C v_r(t)$:



Ci sono tuttavia diversi aspetti negativi per lo schema appena illustrato:

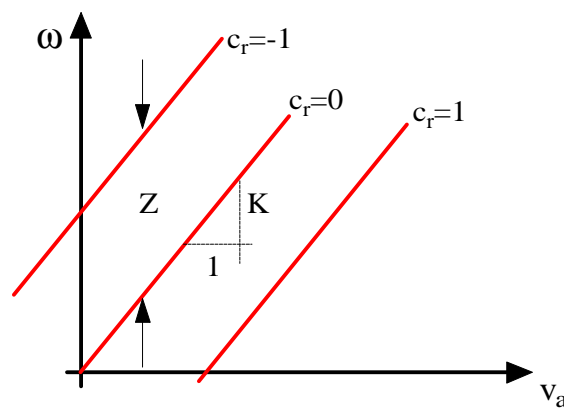
- in primo luogo, nel caso in cui la caratteristica statica del motore, anziché essere lineare del tipo $\omega(t) = K v_a(t)$, sia non-lineare, occorre costruire un amplificatore con caratteristica ingresso-uscita non-lineare, in modo che la caratteristica complessiva risulti lineare, come richiesto dalla relazione $\omega(t) = K_C v_r(t)$;
- in secondo luogo, in genere la velocità angolare ω è funzione, oltre che della tensione di armatura v_a , anche di altre variabili (**disturbi**), cosicché un controllo che si basi unicamente sulla validità della relazione $\omega(t) = K v_a(t)$ non può fornire risultati soddisfacenti: se, infatti, all'albero motore fosse collegato un dispositivo utilizzatore che sviluppi una **coppia resistente** C_r

variabile nel tempo, si verificherebbero variazioni della velocità angolare dovute proprio alle variazioni di tale coppia.

Allora, supponendo ancora valido un modello lineare per il motore, possiamo scrivere, al posto della relazione $\omega(t) = K v_a(t)$, una relazione che tenga conto anche della coppia resistente, cioè una relazione del tipo

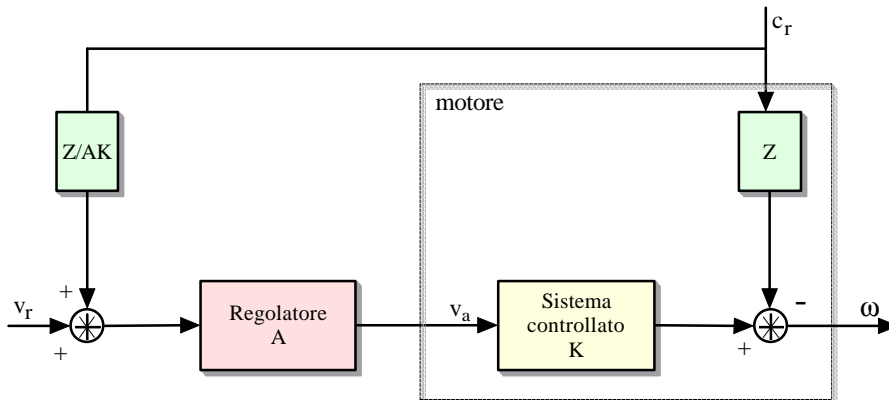
$$\omega(t) = K v_a(t) - Z c_r(t)$$

In questo modo, il sistema ha due ingressi ed il suo comportamento statico può essere rappresentato con una *famiglia di caratteristiche ingresso-uscita*, che in questo caso assume la configurazione rappresentata nella figura seguente:

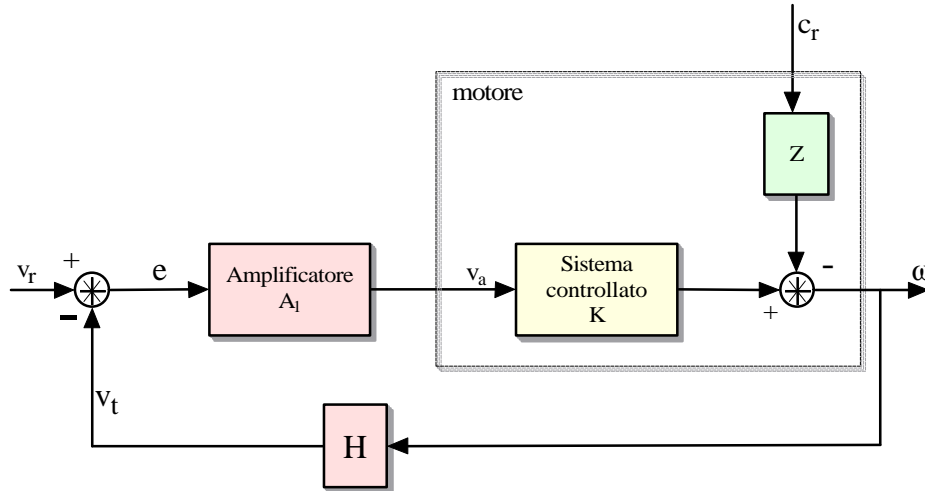


Si tratta cioè di rette diverse al variare di C_r .

Adesso, il controllo ad azione diretta considerato prima non fornisce più i risultati desiderati, in quanto la relazione $\omega(t) = K_C v_r(t)$ non viene più soddisfatta a causa della presenza, nel modello matematico del sistema controllato, del termine $Z c_r(t)$. Se il disturbo è misurabile facilmente (cosa che non avviene nel caso di una coppia), usando un trasduttore apposito, che trasmette istante per istante una tensione elettrica proporzionale al disturbo stesso, si può pensare di neutralizzarne o compensarne l'azione; si giunge in questo modo al regolatore, sempre ad azione diretta, il cui schema a blocchi è rappresentato nella figura seguente:



Ovviamente, si capisce che un regolatore di questo tipo si complica eccessivamente quando si debba tener conto di tutti i numerosi disturbi che possono inficiare la validità della relazione $\omega(t) = K v_a(t)$. Per questo motivo, conviene ricorrere ad un **controllo in retroazione negativa**, realizzabile secondo lo schema a blocchi rappresentato nella figura seguente:



In pratica, è stato eliminato il ramo che portava il valore della coppia c_r (moltiplicato per Z/AK) a sommarsi alla variabile di riferimento v_r , mentre è stato aggiunto un **ramo di retroazione** corrispondente all'azione di un trasduttore: la variabile controllata ω viene misurata mediante il trasduttore che genera un segnale $v_t(t)$ inviato al regolatore; questo segnale viene sottratto al segnale di riferimento $v_r(t)$, in modo da ottenere un segnale errore $e(t)$, che viene inviato all'ingresso di un amplificatore di guadagno A_1 , con stadio di uscita sufficientemente potente da poter pilotare direttamente il circuito di armatura del motore.

In condizioni di regime stazionario, sono dunque soddisfatte le seguenti relazioni:

$$\omega(t) = Ge(t) - Zc_r(t)$$

$$e(t) = v_r(t) - H\omega(t)$$

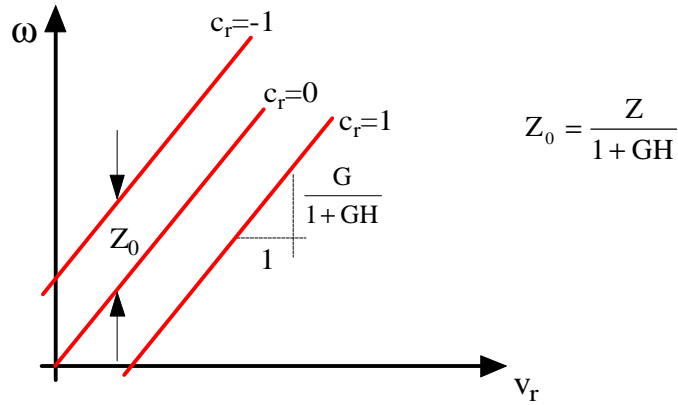
in cui si è posto $G=A_1K$ e si è indicata con H la **costante di traduzione** del trasduttore che misura ω . Sostituendo nella prima equazione l'espressione di $e(t)$ fornita dalla seconda, otteniamo dunque che

$$\omega(t) = Gv_r(t) - GH\omega(t) - Zc_r(t) \longrightarrow \omega(t) = \frac{G}{1+GH} v_r(t) - \frac{Z}{1+GH} c_r(t)$$

Se dovesse poi valere la condizione $G \cdot H \gg 1$, basterebbe scrivere che

$$\omega(t) \cong \frac{1}{H} v_r(t) - \frac{Z}{GH} c_r(t)$$

Le caratteristiche statiche del sistema complessivo diventano dunque quelle illustrate nella figura seguente:



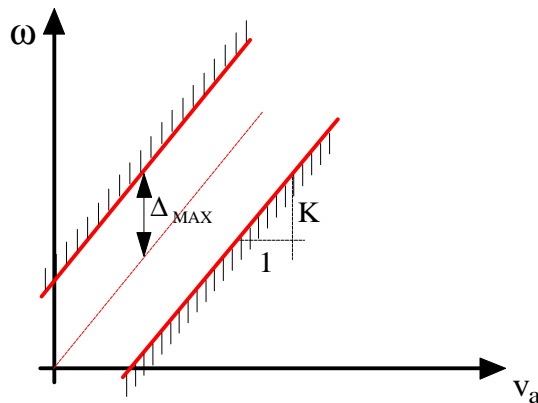
Facendo un confronto con quelle ottenute mediante il controllo ad azione diretta, si osserva una minore sensibilità al disturbo rappresentato dalla coppia $c_r(t)$: le diverse rette, al variare della coppia resistente, sono infatti più vicine tra loro.

Un altro vantaggio dello schema in retroazione è che, in base all'ultima relazione ottenuta, il legame tra v_r ed w tende ad essere indipendente da eventuali variazioni subite da A_1 e da K , in quanto tale legame dipende essenzialmente dalla costante H , che è relativa ad un componente lineare e molto stabile.

Detto questo, ci possiamo facilmente accorgere che un sistema di controllo in retroazione consente di eliminare anche altre cause di errore. Supponiamo infatti che il legame espresso dalla relazione $\omega(t) = K v_a(t)$ sia soddisfatto in modo molto approssimativo, date le numerose cause di errore che inficiano la validità di questo semplice modello lineare. Per tenere conto di queste cause di errore, possiamo genericamente scrivere che

$$\omega(t) = K v_a(t) \pm \Delta\omega(t)$$

dove $\Delta\omega(t)$ rappresenta appunto l'errore (tempo-variante) dovuto a disturbi, a non-linearità ed a variazioni del parametro K . Se questo errore, come avviene spesso, è limitato (vale a dire che $|\Delta\omega(t)| < \Delta_{MAX}$), questo fa sì che la velocità angolare effettiva, in funzione della tensione di armatura, sia sempre compresa nella fascia indicata nella figura seguente:



Assumendo allora la relazione $\omega(t) = K v_a(t) \pm \Delta\omega(t)$ come modello matematico del motore al posto della relazione $\omega(t) = K v_a(t) - Z c_r(t)$, possiamo progettare un sistema in retroazione caratterizzato dalle relazioni

$$\omega(t) = Ge(t) \pm \Delta\omega(t)$$

$$e(t) = v_r(t) - H\omega(t)$$

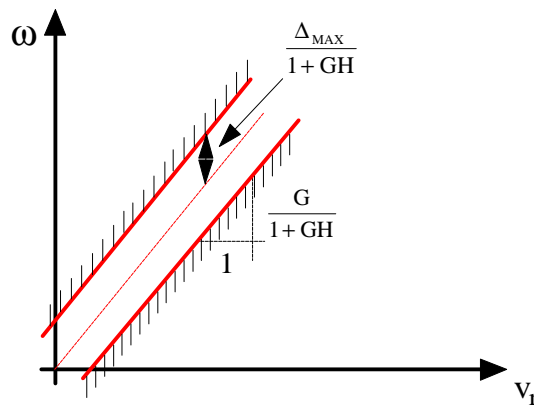
Sostituendo nella prima equazione l'espressione di $e(t)$ fornita dalla seconda, otteniamo dunque che

$$\omega(t) = Gv_r(t) - GH\omega(t) \pm \Delta\omega(t) \longrightarrow \omega(t) = \frac{G}{1+GH} v_r(t) \pm \frac{1}{1+GH} \Delta\omega(t)$$

Se dovesse ancora valere la condizione $G \cdot H \gg 1$, potremmo dunque concludere che

$$\omega(t) \xrightarrow{GH \gg 1} \frac{1}{H} v_r(t)$$

ossia che, quanto più $G \cdot H \gg 1$, tanto più l'influenza dei disturbi, delle non-linearità e delle variazioni dei parametri viene notevolmente ridotta, come si deduce dalla caratteristica della figura seguente:



Questo è dovuto appunto alla retroazione, che produce un segnale che dà luogo ad una variazione della tensione di armatura che si oppone a qualunque causa tendente a provocare un valore di ω diverso rispetto al valore imposto agendo su v_r .

In definitiva, questo esempio serve a mettere in evidenza i vantaggi dei controlli in retroazione rispetto ai controlli ad azione diretta: l'intrinseca robustezza dell'azione di regolazione in rapporto al fatto che il sistema controllato sia incerto, cioè con parametri non noti e/o soggetti a variare nel tempo. Ci sono addirittura dei casi in cui il controllo in retroazione è l'unico possibile, in quanto il controllo ad azione diretta comporterebbe un errore inaccettabile.

Reti correttive e schemi misti

Dalle considerazioni fatte nell'esempio precedente, emergono solo aspetti positivi del controllo in retroazione. In realtà, il controllo in retroazione ha un punto debole e cioè il fatto che le condizioni che assicurano un buon comportamento in regime stazionario (vale a dire relativa insensibilità ai disturbi, alle non-linearità ed alle variazioni parametriche) sono normalmente in contrasto con il requisito di un

soddisfacente comportamento in regime transitorio. In altre parole, *il buon comportamento in regime stazionario avviene a scapito del buon comportamento in regime transitorio.*

Per scendere ancora di più nei dettagli, abbiamo prima visto che la retroazione è tanto più efficace quanto maggiore è il cosiddetto **guadagno di anello**, ossia la costante che caratterizza il trasferimento di segnale, in condizioni di regime stazionario, lungo l'anello di retroazione: allora, mantenendo elevato il guadagno di anello, si corre spesso il rischio che il comportamento dinamico non sia soddisfacente.

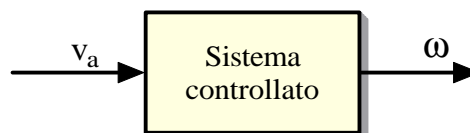
Per migliorare la risposta del sistema o addirittura per stabilizzare un sistema instabile senza ridurre il guadagno di anello (che si vuole elevato per avere la massima prontezza, la massima precisione e la massima insensibilità ai disturbi), è necessario inserire, nel dispositivo di controllo, degli opportuni *sistemi di correzione del comportamento dinamico*. Questi sistemi prendono il nome di **reti correttrici** e, entro certi limiti, possono migliorare il comportamento in regime transitorio, a parità di guadagno di anello.

Tuttavia, può anche accadere che, pur ricorrendo a reti correttrici, non si riesca ugualmente a rendere compatibile l'esigenza di un comportamento soddisfacente in regime transitorio con quella di una elevata insensibilità alle varie cause di perturbazione. In questi casi è necessario ricorrere a **schemi misti**: si adotta una azione diretta, in genere grossolana, che tende a ridurre la sensibilità ai disturbi più importanti, e ad una retroazione più precisa e raffinata, che peraltro, essendo già neutralizzate le maggiori cause di errore, non richiede un guadagno di anello eccessivamente alto e consente perciò un miglior comportamento in regime transitorio.

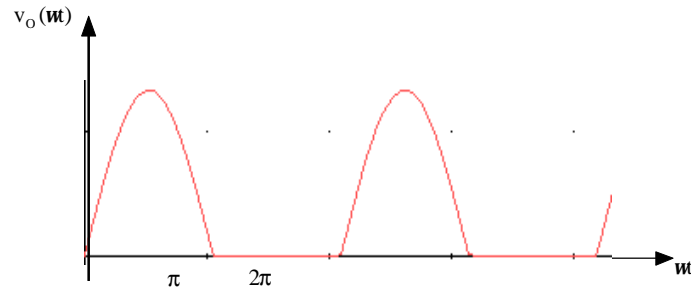
Generalmente, nei sistemi in retroazione, l'instabilità deriva dall'inerzia e dai ritardi propri del sistema controllato: questi fattori implicano solitamente che l'azione correttiva sulla variabile manipolabile si manifesti per un tempo eccessivo rispetto a quello strettamente necessario per l'annullamento dell'errore, il che porta ad una **sovracorrezione**, ossia ad un errore in senso opposto, che può essere addirittura superiore all'errore originario: in questo caso di innesca un regime di oscillazioni di ampiezza elevata.

Esempio: regolazione di un motore in corrente continua

Riprendiamo il caso esaminato nell'esempio precedente, con la differenza che ci poniamo come obiettivo quello di realizzare una **regolazione** di ω : vogliamo cioè fare in modo che la velocità del rotore risulti costante nel tempo.

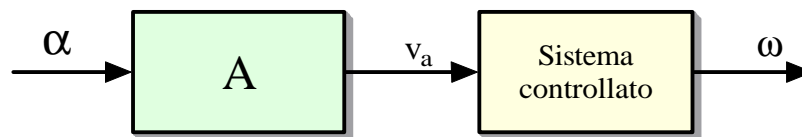


Per prima cosa, dobbiamo stabilire come alimentare il motore; a questo scopo, utilizziamo un **ponte raddrizzatore**, ossia un dispositivo di conversione di corrente elettrica alternata in corrente elettrica continua. La caratteristica del ponte è quella che la sua tensione di uscita (cioè la tensione di armatura v_a) non è perfettamente continua, ma ha un valore medio diverso da 0:

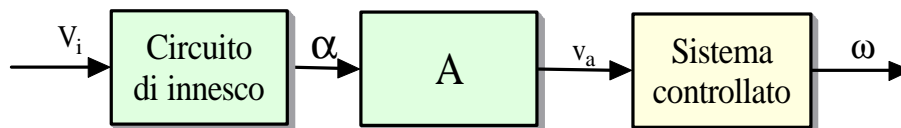


Usando allora degli opportuni **diodi controllati**, possiamo regolare il valore medio di v_a agendo sull'**angolo di accensione** α del ponte.

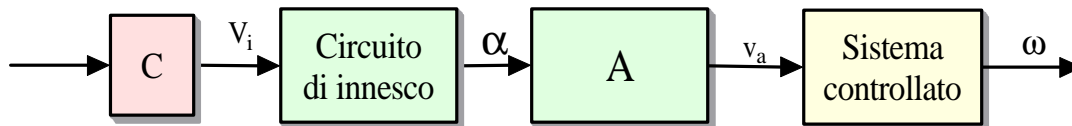
Abbiamo dunque uno schema del tipo seguente:



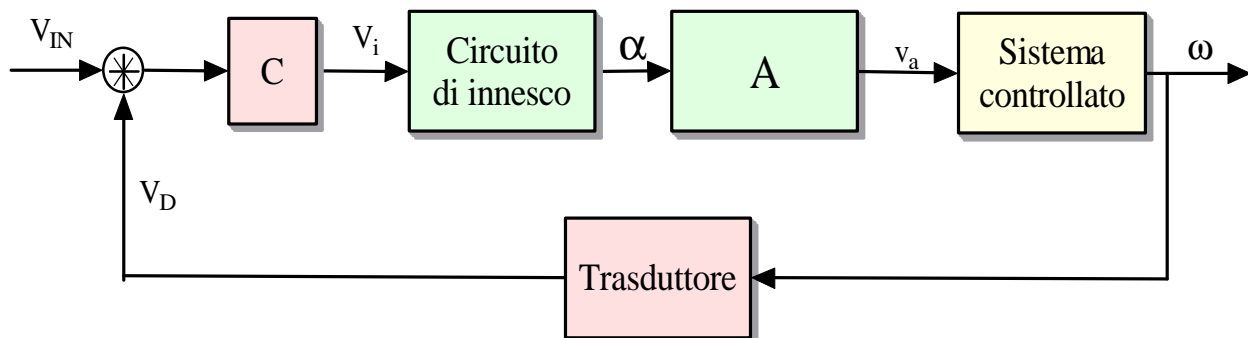
Per pilotare α , abbiamo inoltre bisogno di un opportuno **circuito di innesco**. Indicata con V_i la tensione in ingresso a questo circuito, risulterà dunque $\alpha = f(V_i)$:



A monte del circuito di innesco serve anche un opportuno controllore, sulla cui funzione, però, non ci soffermiamo:



L'ultimo componente è un trasduttore che misuri il valore assunto dalla variabile controllata ω :



Solitamente, come trasduttore in un dispositivo di questo tipo si usa una **dinamo tachimetrica**: si tratta di un generatore di corrente continua, ad eccitazione costante,

in grado di trasformare una variabile non elettrica, quale è appunto la velocità ω , in una variabile elettrica e , precisamente, in una tensione.

La tensione V_{IN} è quella che alimenta il tutto: il controllore C confronta V_{IN} con V_D (che è proporzionale ad ω) e pilota il circuito in base al confronto.

Lo schema progettato è chiaramente ad anello chiuso, ma si potrebbe pensare anche ad uno schema ad anello aperto, che si otterrebbe semplicemente eliminando il controllore ed il trasduttore. Il problema dello schema ad anello aperto sarebbe essenzialmente legato al cosiddetto **disturbo di carico**, ossia al fatto che il carico alimentato dal motore è variabile e quindi è poco prevedibile. Oltre a questo, ci sono anche questioni di influenza della temperatura sui vari campi magnetici ed anche diversi tipi di variazioni parametriche. L'insieme di questi disturbi renderebbe ω soggetta a variazioni troppo grandi per essere tollerabili, per cui l'anello chiuso è senz'altro da preferire.

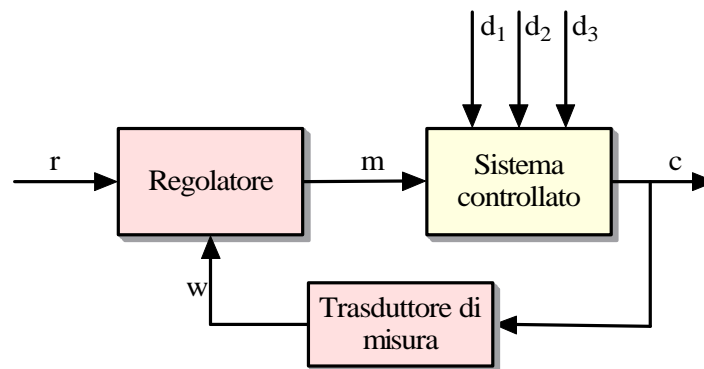
Nello schema ad anello chiuso, infatti, quale che sia la causa della variazione, quest'ultima viene rilevata dal controllore, il quale provvede, ignorando la causa, a compensare la presenza dell'errore in modo opportuno. Esso fa dunque in modo da mantenere la condizione di funzionamento desiderata, pur non conoscendo nel dettaglio le cause che tendono ad alterarla.

Si capisce dunque quale sia l'importanza del controllore, che deve conciliare l'elevata precisione con la quasi certezza che non si verifichino pericolosi fenomeni di instabilità.

Riepilogo della simbologia

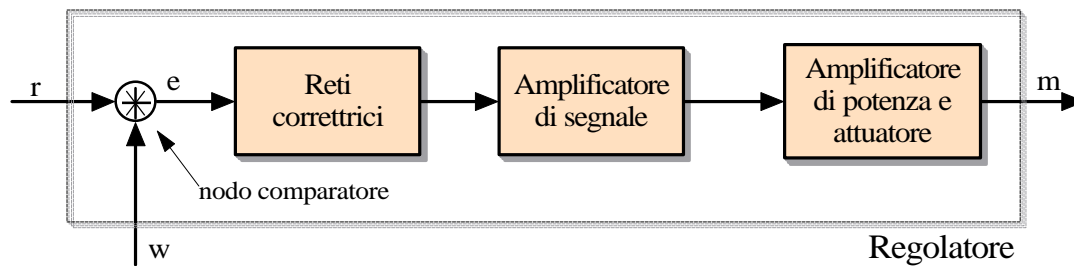
Per concludere questa prima parte, richiamiamo brevemente i termini ed i simboli introdotti nei precedenti paragrafi.

Un sistema di controllo totalmente in retroazione corrisponde allo schema a blocchi tipico rappresentato nella figura seguente:



In questo schema, r è la variabile di riferimento (detta anche **set point**), m è la variabile manipolabile, c la variabile controllata, d_1, d_2, d_3 i disturbi, w la variabile di retroazione. Lo scopo del dispositivo è quello di rendere la variabile controllata proporzionale, istante per istante, alla variabile di riferimento.

E' possibile anche distinguere i vari componenti del **regolatore**:



- un **nodo comparatore** (detto anche **organo di decisione**) che esegue la differenza tra il segnale di riferimento r e il segnale di retroazione w , generando il **segnale errore** e ; quest'ultimo ha importanza fondamentale, in quanto, come si è visto, influenza la regolazione del segnale m in ingresso al sistema controllato: non è importante sapere quale sia il motivo dell'errore rilevato, ma è importante solo l'azione di correzione che da esso dipende; naturalmente, quanto più consistente è l'errore, tanto maggiore sarà l'azione di correzione ⁽¹⁾;
- le **reti correttrici**, che servono ad elaborare il segnale errore per ottenere un miglioramento del comportamento dinamico del sistema complessivo;
- un **amplificatore di segnale**;
- un **amplificatore di potenza**;
- un **attuatore**, che deve agire sulla variabile manipolabile m del sistema controllato, variandola proporzionalmente al segnale elaborato ed amplificato.

Ricordiamo che, in molti casi, le grandezze variabili cui è affidata la trasmissione a distanza dei segnali non sono elettriche (tensioni e correnti), ma meccaniche (traslazioni e rotazioni di organi meccanici e forze) oppure idrauliche (pressione di aria o olio all'interno di condutture). Numerosi trasduttori, specie i più semplici, forniscono infatti segnali che non sono elettrici.

La principale caratteristica dei sistemi in retroazione è quella per cui deve essere possibile distinguere gli ingressi di controllo propriamente detti e gli ingressi di disturbo. *Il compito del controllista è quello di progettare i sottosistemi C (**controllore**) e T (**trasduttore**) in modo che l'uscita y sia legata all'ingresso u nel modo voluto e a prescindere dai disturbi e dalle variazioni parametriche.*

E' ovvio che la corrispondenza tra l'uscita e l'ingresso è possibile se si ha una descrizione matematica, cioè un **modello**, del sistema controllato (**plant**). Questo modello deve essere abbastanza fine se si vuole realizzare un efficiente sistema di controllo.

¹ Ricordiamo che l'organo di decisione può trovarsi sia nel **ramo diretto** (che è quello che va dall'errore all'uscita) sia nel **ramo di retroazione** (che va dall'uscita all'errore) sia anche in entrambi: in quest'ultimo caso, si parla di controllo con due gradi di libertà.

Modelli matematici di alcuni sistemi dinamici

Metodo deduttivo per la costruzione del modello matematico di un sistema

Esistono due modi diversi per costruire un modello matematico di un dispositivo reale:

- **modo induttivo:** si considera il sistema controllato come una sorgente di informazioni; dalla misura delle variabili esterne si passa a delle ipotesi.....
- **modo deduttivo:** si utilizzano quelle leggi, già esistenti, sulle quali sappiamo che si basa il comportamento di determinati oggetti.

Noi siamo interessati solo al metodo deduttivo, che possiamo schematicamente definire come composto dai seguenti 5 passi:

- individuare le varie parti che costituiscono il sistema in esame;
- individuare gli attributi che caratterizzano ciascuna di queste parti: naturalmente, vanno considerati solo gli attributi significativi per i nostri scopi, mentre sono inutili tutti gli altri;
- caratterizzare ogni oggetto individuato mediante un modello matematico: per esempio, nel caso di un circuito elettrico dobbiamo individuare il legame matematico tra gli attributi dell'oggetto di cui al punto precedente;
- stabilire i vincoli tra i vari oggetti: sempre con riferimento ad un circuito elettrico, si tratta di applicare le leggi di Kirchoff, mentre, per un sistema meccanico, si tratta delle leggi della dinamica;
- eliminare le variabili interne e orientare il sistema: bisogna cioè individuare il legame tra l'ingresso e l'uscita combinando opportunamente le leggi di cui al punto precedente.

Esaminando un sistema SISO mediante questo metodo deduttivo, si ottiene una relazione, corrispondente ad una equazione differenziale, del tipo

$$f(y, Dy, D^2y, \dots, D^n y, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) = 0$$

In altre parole, stabilire il comportamento del sistema controllato significa essenzialmente individuare l'equazione differenziale che lega l'ingresso u all'uscita y . Questa equazione, in generale, è piuttosto complessa, ma vedremo che essa si semplifica sotto opportune ipotesi.

E' importante sottolineare che vale sempre la relazione $m \leq n$, il che significa che il numero di ingressi non è mai superiore al numero di uscite (anche il caso in cui $m=n$ è un caso limite). Si tratta di un vincolo proveniente da precise ragioni fisiche, del quale non faremo mai a meno.

Modelli dinamici

Quando si studia un sistema di controllo in retroazione, dato che non si può prescindere dal problema della *stabilità* è necessario servirsi di modelli matematici dinamici, espressi da equazioni differenziali. Molto spesso, è possibile utilizzare **modelli dinamici lineari stazionari**, che consistono in equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, la cui soluzione è relativamente semplice.

In questa sezione vogliamo allora mostrare alcuni esempi tipici di modelli matematici dinamici, allo scopo di illustrare i procedimenti generali che usualmente si usano per la loro deduzione e allo scopo di chiarire le interessanti analogie esistenti tra modelli di sistemi fisici di diversa natura. Ci occuperemo invece in seguito della soluzione delle varie equazioni differenziali con cui avremo a che fare.

Circuiti elettrici

Sappiamo bene che i *circuiti elettrici lineari a parametri concentrati* sono sistemi complessi rappresentabili come interconnessioni di sistemi elementari o componenti quali resistenze, induttanze, capacità, generatori, trasformatori ideali e via dicendo.

Le equazioni che rappresentano il comportamento di questi componenti elettrici sono le seguenti:

$$\text{resistore} \longrightarrow v(t) = Ri(t)$$

$$\text{induttore} \longrightarrow v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LDi(t)$$

$$\text{condensatore} \longrightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{C} \frac{1}{D} i(t)$$

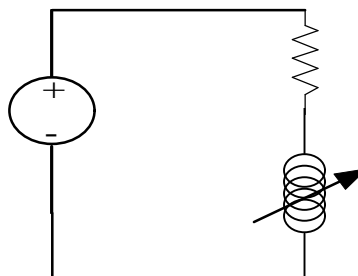
$$\text{generatore di tensione} \longrightarrow v(t) = V_0$$

$$\text{generatore di corrente} \longrightarrow i(t) = I$$

$$\text{trasformatore ideale} \longrightarrow \begin{cases} v_1(t) = \frac{N_1}{N_2} v_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t) \end{cases}$$

Esempio

Consideriamo il semplice circuito RL indicato nella figura seguente:



Il semplice fatto di aver disegnato il circuito rappresenta il 1° passo del metodo deduttivo, in quanto abbiamo individuato le parti costituenti il circuito, ossia il generatore, l'induttore e la resistenza. Abbiamo anche individuato gli attributi significativi di ciascun oggetto (2° passo): v_R ed i_R sono quelli per il resistore, ϕ e i_L sono quelli per l'induttore, V_g quello per il generatore.

Il 3° passo consiste nel trovare un legame tra gli attributi individuati: in questo caso, si tratta delle equazioni di funzionamento dei singoli elementi circuitali, ossia

$$v_R = Ri_R$$

$$v_L = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{di_L} \frac{di_L}{dt}$$

(si considera l'induttore come non lineare).

Il 4° passo consiste nello stabilire i vincoli tra i vari oggetti: nel caso di un circuito elettrico, si tratta semplicemente di applicare la LKC e la LKT, per cui abbiamo che

$$\text{LKC} \longrightarrow i_R = i_L = i_g$$

$$\text{LKT} \longrightarrow v_R + v_L = v_g$$

Il 5° passo è infine quello di mettere insieme le ultime 4 relazioni trovate, in modo da trovare il vincolo tra l'ingresso (rappresentato dalla tensione applicata dal generatore) e l'uscita (rappresentata ad esempio dalla corrente nel circuito):

$$Ri + \frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} = v_g$$

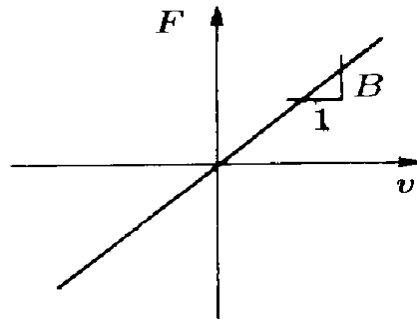
Questo è dunque il modello matematico del sistema controllato. Ovviamente, questo modello diventa utilizzabile solo a patto di conoscere come varia il flusso ϕ in funzione della corrente i , ossia a patto di conoscere con precisione la caratteristica dell'induttore non lineare.

Sistemi meccanici

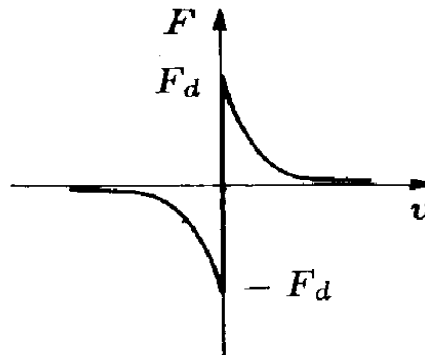
Le equazioni differenziali che descrivono il moto dei sistemi meccanici si ricavano, di regola, esprimendo l'equilibrio delle forze e delle coppie applicate a ciascuna delle parti in movimento. In generale, così come nel caso dei circuiti elettrici, ci cerca di adottare **modelli a parametri concentrati**, in quanto sono quelli di più facile impiego: per esempio, in un modello a parametri concentrati la massa di una molla, che risulta ovviamente distribuita, si supporrà trascurabile oppure concentrata agli estremi della molla stessa. Si cerca anche di adottare **modelli lineari**, anche se questo implica la limitazione dello studio a variazioni relativamente piccole delle grandezze in gioco.

Al contrario, nei sistemi meccanici esistono dei **fenomeni non-lineari**, i quali, per la discontinuità delle caratteristiche, non sono suscettibili neanche di una *linearizzazione locale*. Il più importante di questi fenomeni è l'**attrito**; volendo rimanere nel campo dei modelli lineari, bisognerebbe considerare solo l'**attrito viscoso**, consistente in una forza F o in una coppia che si oppone al moto ed è

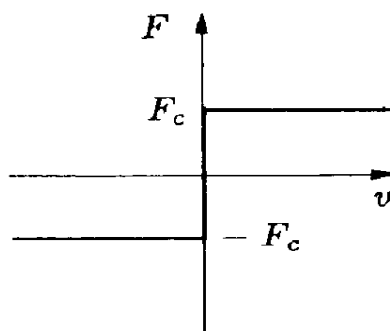
proporzionale alla velocità v , secondo una caratteristica del tipo indicato nella figura seguente:



In realtà, c'è spesso anche un **attrito secco** (detto anche **attrito al distacco**), consistente in una forza che equilibra la forza applicata e impedisce l'inizio del moto finché questa non supera una certa soglia F_d , oltre la quale il movimento inizia e la forza di attrito si annulla. Una rappresentazione approssimativa della caratteristica corrispondente è riportata nella figura seguente:

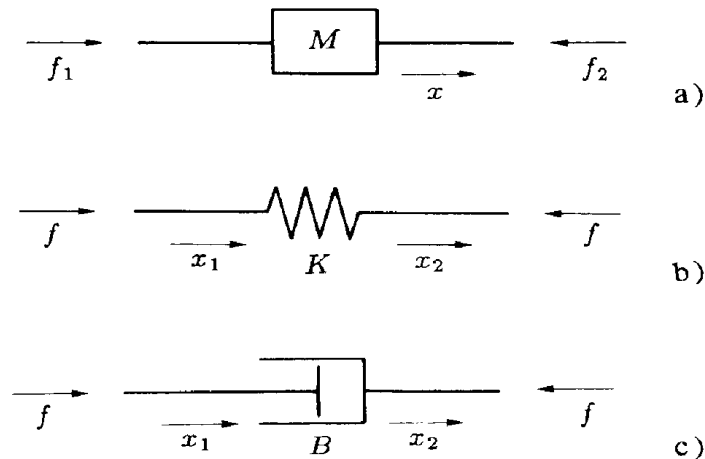


Infine, può essere presente il cosiddetto **attrito coulombiano**, caratterizzato da una forza nulla quando il corpo è immobile, costante quando esso è in movimento e tale da opporsi al moto. La caratteristica corrispondente è del tipo seguente:



L'attrito al distacco e l'attrito coulombiano sono fenomeni tipicamente non lineari, per cui, finché l'approssimazione risulta accettabile, nei modelli matematici si considera il solo attrito viscoso.

In quest'ottica, i *sistemi meccanici in moto traslatorio* si possono considerare costituiti da componenti elementari dei tipi rappresentati nella figura seguente:



- La figura a) rappresenta una **massa**, nella quale si manifestano le *forze di inerzia*: apparentemente si tratta di un elemento ad un solo terminale, ma in realtà ci sono due terminali, in quanto la posizione x è comunque presa rispetto ad un riferimento che, pur valendo 0, va comunque tenuto in considerazione. La relazione funzionale per questo elemento meccanico è

$$\Delta f(t) = f_1(t) - f_2(t) = M \frac{d^2x}{dt^2} = MD^2x$$

- La figura b) rappresenta una **molla**, in cui si concentrano le *forze di richiamo elastico*: si tratta di un elemento ideale, a due morsetti, definito dalla relazione

$$f(t) = K(x_1(t) - x_2(t))$$

nota come **legge di Hook**, dove x_1 ed x_2 indicano le posizioni dei due estremi della molla rispetto ad un prefissato riferimento. L'idealità di questo elemento deriva dal fatto che lo si suppone privo di massa e privo di attrito. Le uniche proprietà considerate sono quelle elastiche. Le variabili x_1 ed x_2 sono dette **variabili across**, mentre f è una **variabile true**.

- La figura c) indica infine un **ammortizzatore** (o **stantuffo**), in cui si concentrano le forze di attrito: si tratta sempre di un elemento ideale a due morsetti, dove l'idealità deriva sia dal fatto che si tiene conto solo delle proprietà di attrito sia dal fatto che le due variabili across (cioè le velocità Dx_1 ed Dx_2 dei due estremi) e la variabile true (cioè la forza f) si suppongono legate da semplice proporzionalità diretta:

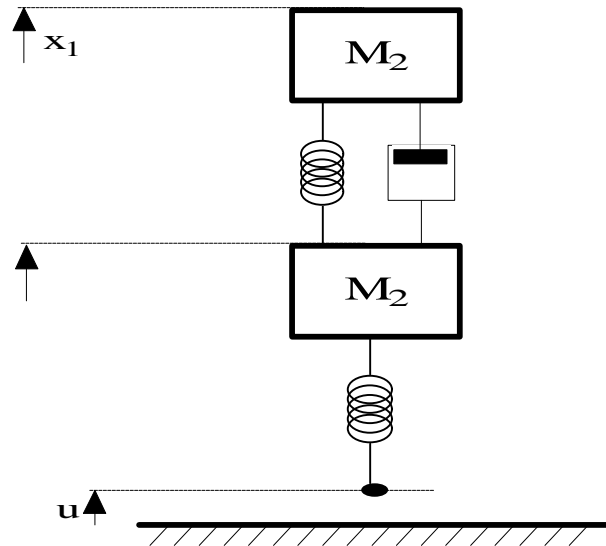
$$f(t) = B \frac{d}{dt}(x_1(t) - x_2(t)) = BD(x_1(t) - x_2(t))$$

In conclusione, quindi, un sistema meccanico sarà costituito da un collegamento, più o meno complesso, di questi elementi fondamentali.

Facciamo anche osservare che le relazioni funzionali appena elencate sono ottenute supponendo che gli estremi dei vari componenti meccanici siano sottoposti a moto traslatorio orizzontale.

Esempio

Consideriamo il prototipo della *sospensione di una automobile*, rappresentato nella figura seguente:



Cominciamo col fare qualche ipotesi semplificativa. Stiamo intanto considerando la sospensione di una sola ruota, nell'ipotesi che il peso dell'auto si ripartisca in parti uguali sulle quattro ruote; M_2 rappresenta la massa dell'auto che grava sulla sospensione considerata, mentre M_1 è la massa della ruota. La sospensione in sé è costituita da una molla e da uno stantuffo, supposto lineare quando invece nella realtà non è così. Facciamo inoltre l'ipotesi che si tratti di un sistema di traslazione che possa muoversi solo in direzione verticale.

Il suolo rappresenta il nostro piano di riferimento, per cui abbiamo associato a ciascuna massa una posizione rispetto a tale riferimento: x_1 rappresenta la posizione di M_1 rispetto al riferimento, mentre x_2 rappresenta la posizione di M_2 . C'è poi da definire la posizione dell'*estremo libero* della molla inferiore rispetto al riferimento: la indichiamo con u e la consideriamo come ingresso al nostro sistema. In questo modo, abbiamo stabilito il nostro sistema di riferimento.

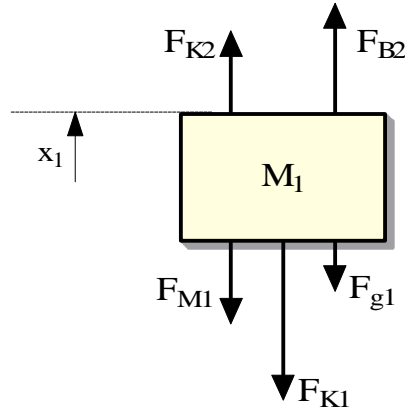
Passiamo adesso a scrivere le equazioni costituenti dei vari elementi, partendo dall'alto:

$$\begin{array}{ll}
 M_2 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{M2} = M_2 D^2 x_2 \\ F_{g2} = M_2 g \end{array} \right. & M_1 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{M1} = M_1 D^2 x_1 \\ F_{g1} = M_1 g \end{array} \right. \\
 k_2 \longrightarrow F_{K2} = k_2 [(x_2 - x_1) - L_2] & \\
 B_2 \longrightarrow F_{B2} = B_2 D(x_2 - x_1) & k_1 \longrightarrow F_{K1} = k_1 [(x_1 - u) - L_1]
 \end{array}$$

(ricordiamo che L_1 ed L_2 sono le elongazioni, rispettivamente, della molla 1 e della molla 2)

Il passo successivo è quello di imporre gli opportuni vincoli tra queste relazioni. Esistono vari modi per fare questo: un modo abbastanza comodo è quello di considerare ciascun corpo fisico come isolato da tutti gli altri, in modo da tracciare, per ciascun corpo, il diagramma di corpo libero nel generico istante t .

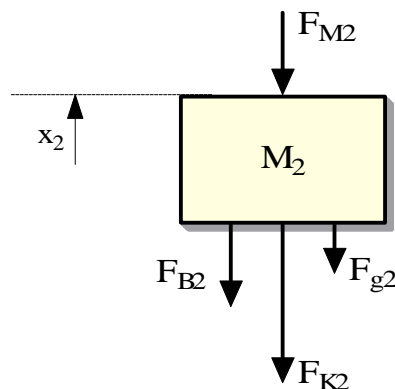
Partiamo allora dalla massa M_1 :



Applicando la 2° legge di Newton, otteniamo

$$M_1 \longrightarrow F_{M1} + F_{g1} + F_{K1} - F_{B2} - F_{K2} = 0$$

Passiamo adesso alla massa M_2 :



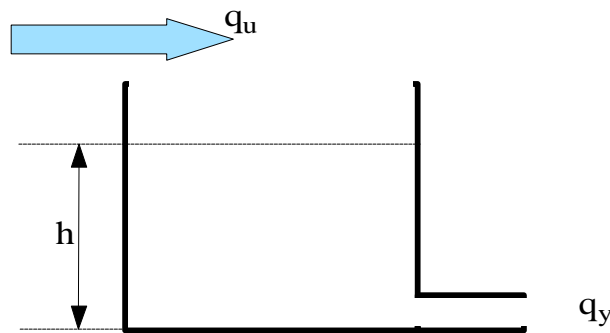
Il bilancio delle forze dice in questo caso che

$$M_2 \longrightarrow F_{M2} + F_{g2} + F_{K2} + F_{B2} = 0$$

Sostituendo le espressioni delle varie forze e combinando le due equazioni ottenute, perveniamo ad una equazione differenziale lineare (in quanto lo sono i vincoli e le relazioni costitutive) del 2° ordine, nelle incognite x_1 ed x_2 . Dato che a noi interessa il legame ingresso-uscita, dobbiamo poi individuare l'uscita, che può essere ad esempio la posizione di una delle due masse.

Esempio

Consideriamo un recipiente, di sezione S , contenente un certo liquido:



Siano s_y la sezione del tubo di uscita, q_u la portata di liquido immessa nel recipiente e q_y la portata di liquido in uscita dal recipiente stesso. L'obiettivo dell'azione di controllo è quello di mantenere costante il livello h di liquido nel recipiente, per cui si tratta di un problema di regolazione.

Una volta individuato l'oggetto controllato, ce ne serve il modello matematico e questo ci viene fornito dall'equivalente, in idraulica, della legge di Kirchoff per i circuiti: si tratta della legge

$$q_u - q_y = S \frac{dh}{dt}$$

E' possibile inoltre usare il *principio di Torricelli* per esprimere la portata in uscita in funzione di h : risulta infatti che $q_y = ks_y \sqrt{2gh}$, da cui otteniamo che

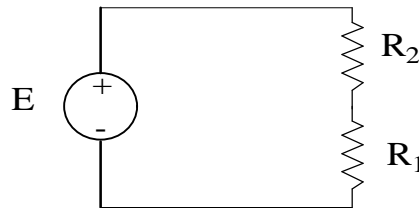
$$q_u - ks_y \sqrt{2gh} = S \frac{dh}{dt}$$

A questo punto, dobbiamo effettuare l'orientazione del problema, ossia dobbiamo scegliere l'ingresso e l'uscita: abbiamo poca scelta, in quanto l'uscita è ovviamente h , mentre l'ingresso non può che essere q_u .

Il passo successivo sarebbe quello di integrare l'equazione differenziale ottenuta poco fa, ma è una operazione tutt'altro che semplice. Possiamo allora procedere nel modo seguente: in primo luogo, possiamo provare a cercare un altro modello, che conduca ad una equazione differenziale facilmente integrabile; una volta integrata questa equazione, otterremo una soluzione chiaramente approssimata del nostro problema e dovremo modificarla in modo da tener conto della non-linearità del sistema. Una operazione di questo genere prende il nome di **linearizzazione**.

Oggetti statici ed oggetti dinamici

Consideriamo un semplice circuito elettrico costituito da un partitore di tensione:



Per conoscere la tensione ai capi di R_1 , in un qualsiasi istante t , è sufficiente conoscere E nello stesso istante, in modo da poter applicare la nota formula

$$V_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

Siamo dunque in presenza di ciò che chiamiamo **oggetto statico**: per conoscere l'uscita in un istante t , è sufficiente conoscere l'ingresso nello stesso istante t .

Un altro esempio di oggetto statico potrebbe essere un amplificatore, dove la tensione di uscita è sempre un multiplo prefissato della tensione in ingresso. Questa è però una visione parziale, in quanto c'è anche un aspetto dinamico legato al fatto che la velocità alla quale lavora un amplificatore è di gran lunga maggiore rispetto a quella del processo controllato.

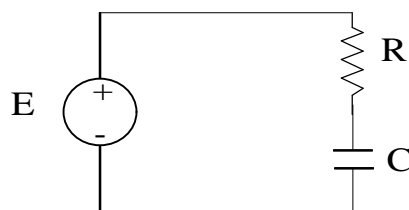
Un **oggetto dinamico** è, dunque, in generale, un oggetto tale che il valore dell'uscita in un istante dipende sia dal valore dell'ingresso in quell'istante sia dalla storia passata dell'oggetto stesso. Un oggetto tipicamente dinamico è un condensatore (anche se esistono dei casi particolari in cui anche un condensatore può essere considerato un oggetto statico).

E' sempre importante riuscire a capire se l'oggetto controllato è statico oppure dinamico: un criterio può essere quello per cui l'oggetto è statico solo se l'uscita e l'ingresso sono legati in modo invariabile in ogni istante, mentre, in caso contrario (cioè se è necessario considerare anche le condizioni iniziali) l'oggetto è dinamico.

La maggioranza dei sistemi sono di tipo dinamico e quindi, per essi, assumono importanza fondamentale le condizioni iniziali.

Esempio

Consideriamo un semplice circuito RC serie:



Scelte la tensione E come ingresso e la tensione V_R come uscita, sappiamo bene che il legame ingresso-uscita è rappresentato da una equazione differenziale del tipo

$$\frac{dy}{dt} = ay + bu$$

La soluzione di questa equazione è del tipo

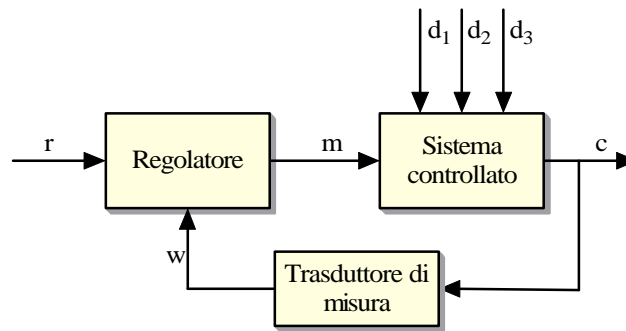
$$y(t) = e^{a(t-\tau)} y(\tau) + \int_{\tau}^t e^{a(t-\xi)} bu(\xi) d\xi$$

I 2 termini a secondo membro indicano chiaramente che l'oggetto in questione è dinamico.

Esempi di sistemi di controllo in retroazione

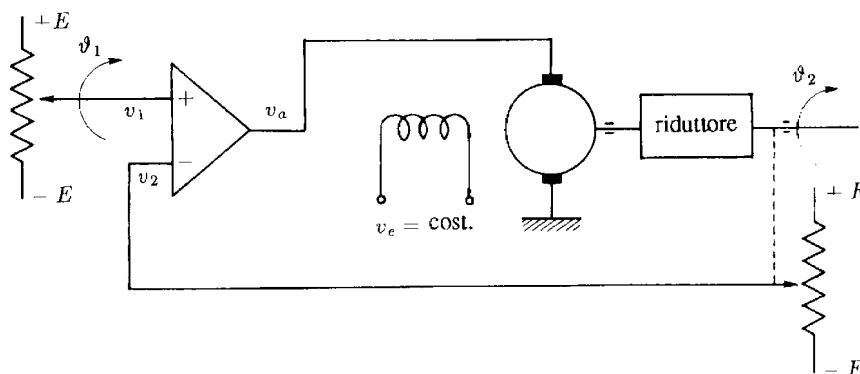
Premessa

Vogliamo adesso mostrare alcuni semplici esempi di sistemi di controllo in retroazione, al fine di mostrare come delle apparecchiature realizzate secondo tecniche spesso molto diverse si possano comunque ricondurre allo schema generale precedente citato e riportato nuovamente qui di seguito:

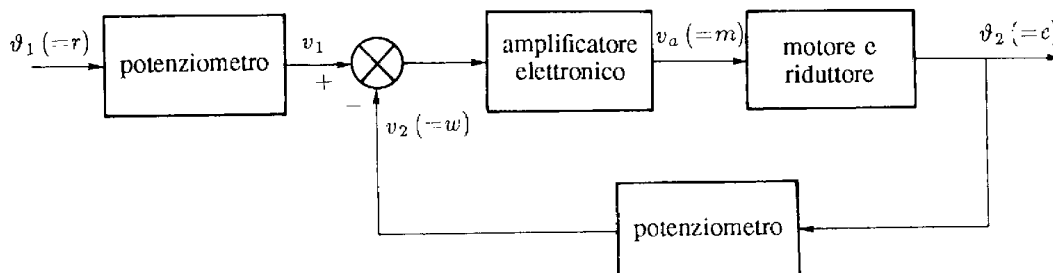


Amplificazione elettronica: servomeccanismo di posizione

Lo schema di un **servomeccanismo di posizione con motore elettrico in corrente continua** è riportato nella figura seguente:



Lo schema a blocchi ad esso corrispondente è il seguente:



L'ingresso e l'uscita del sistema sono delle *posizioni angolari*, indicate rispettivamente con θ_1 e θ_2 . Mediante dei **potenziometri**, queste posizioni angolari

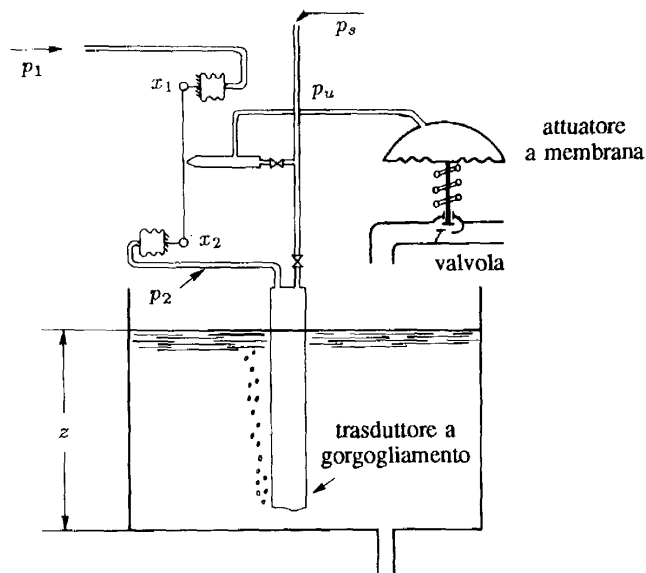
vengono convertite in segnali elettrici (rispettivamente v_1 e v_2) i quali vengono tra loro sottratti e amplificati utilizzando un **amplificatore elettronico con ingresso differenziale** (avente uno stadio di uscita con potenza adeguata). L'uscita dell'amplificatore alimenta direttamente il **circuito di armatura** di un **motore in corrente continua ad eccitazione indipendente**: tale motore, attraverso un **riduttore ad ingranaggi**, provvede a variare la posizione angolare θ_2 (cioè l'uscita) in direzione tale da diminuire il segnale errore $v_a = v_1 - v_2$. All'equilibrio (corrispondente al motore fermo), questo segnale errore è nullo, il che comporta chiaramente che $\theta_2 = \theta_1$, cioè che ci sia il perfetto inseguimento dell'ingresso da parte dell'uscita.

Spesso, i sistemi di controllo realizzati mediante questo schema comprendono anche una **rete correttiva**, costituita da un opportuno circuito RC collegato all'ingresso dell'amplificatore elettronico oppure in retroazione ad esso.

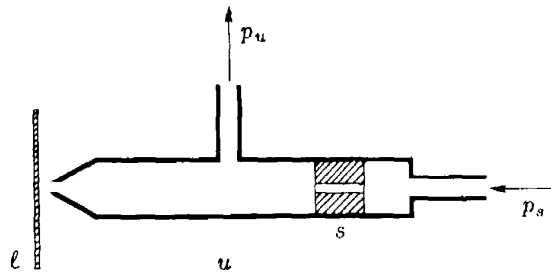
I servomeccanismi di posizione di piccola potenza si possono realizzare anche in corrente alternata, ossia impiegando motori in corrente alternata: così facendo si ottengono notevoli vantaggi in termini di semplicità e di affidabilità. In questi casi, i segnali che vengono elaborati nell'apparato di controllo sono dati da tensioni o correnti alternate modulate in ampiezza; la frequenza della portante è generalmente quella di rete.

Amplificazione pneumatica

Nella figura seguente è rappresentato lo schema di principio di un **dispositivo pneumatico** per la regolazione del livello dell'acqua in un serbatoio:



Il cuore del dispositivo è l'**amplificatore pneumatico**, costituito dal *sistema "lamina mobile - ugello"* rappresentato nella figura seguente:

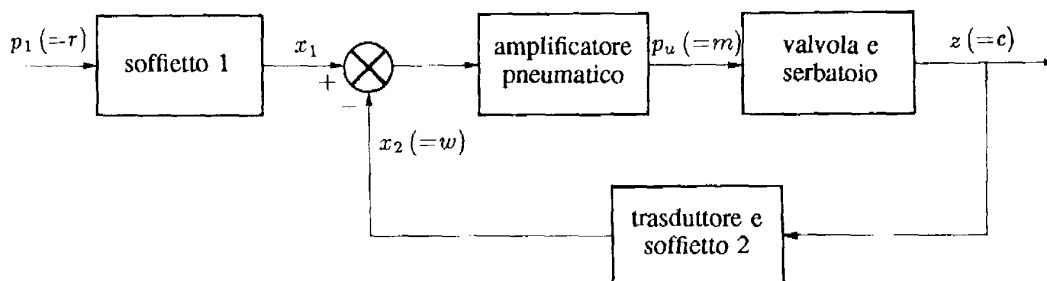


Aria compressa, a pressione p_s , viene inviata all'ugello u attraverso la strozzatura s . Spostando la lamina l si varia la portata di aria effluente e quindi la pressione p_u , che è data dalla pressione p_s diminuita della caduta di pressione nella strozzatura, dipendente da tale portata.

Lo spostamento della lamina è proporzionale alla differenza di due pressioni, che vengono convertite in spostamenti lineari mediante due **soffietti**: la pressione di riferimento p_1 (ingresso) e la pressione p_2 , proporzionale al livello z dell'acqua nel serbatoio (uscita). Il trasduttore livello-pressione è ottenuto semplicemente facendo gorgogliare una piccola portata di aria da un tubo immerso nel liquido: la pressione nel tubo risulta chiaramente uguale al carico piezometrico.

La pressione p_u all'uscita dell'ugello viene usata per variare, mediante un **attuatore a membrana**, la posizione dello **stelo** di una **valvola** che regola l'afflusso di liquido nel serbatoio. Poiché la completa escursione di pressione si ottiene con piccoli spostamenti della lamina, se l'ugello è in posizione centrale rispetto alla lamina all'equilibrio, sarà in pratica $p_1=p_2$: si ottiene in tal modo la regolazione del livello z ad un valore proporzionale alla pressione p_1 .

Lo schema a blocchi del regolatore è mostrato nella figura seguente:



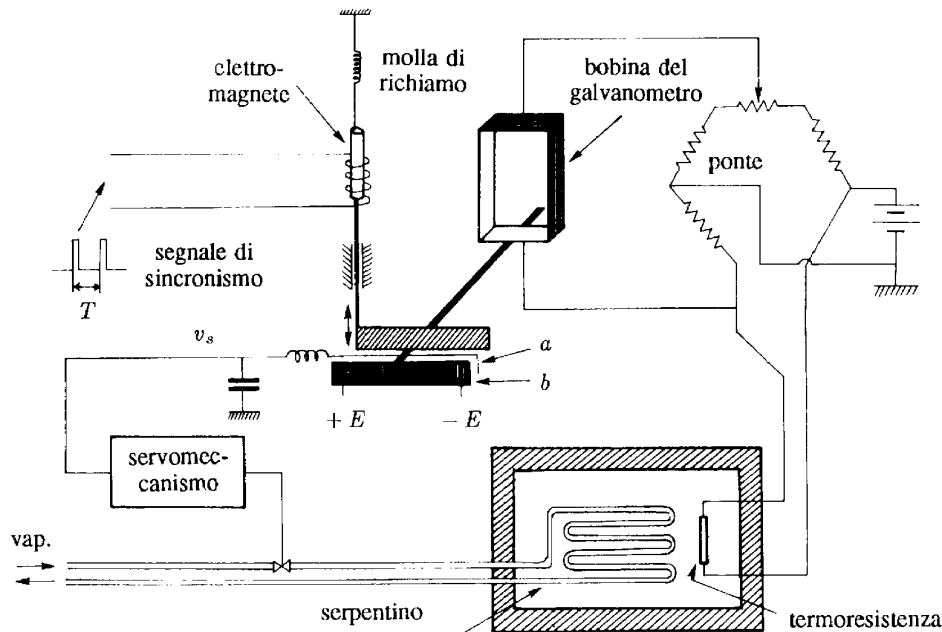
Sistemi a segnali campionati

In alcuni casi, la trasmissione del segnale in uno o più punti dell'anello di retroazione non avviene con continuità nel tempo, ma per **campioni** trasmessi in istanti discreti. Si effettua cioè un **campionamento** dei segnali tempo-continui e lo si effettua generalmente in due casi:

- quando la misura della variabile controllata non può avvenire con continuità a causa della scarsa potenza del trasduttore;
- quando i segnali vengono codificati, al fine di avere trasmissioni sicure a distanze elevate oppure al fine di eseguire una loro elaborazione mediante un calcolatore numerico: corrispondendo ogni livello di segnale ad una

opportuna sequenza di codice, è chiaro che la trasmissione non può essere continua.

Un esempio di **sistema di controllo a segnali campionati**, in cui il campionamento viene effettuato per non caricare il trasduttore di misura, è riportato nella figura seguente:



Esso si riferisce ad un controllo di temperatura ottenuto agendo, mediante una valvola, sulla portata di fluido riscaldante:

- la misura viene eseguita mediante una termoresistenza, inserita in un ponte il cui sbilanciamento viene rilevato da un galvanometro;
- periodicamente, mediante un opportuno segnale inviato ad un elettromagnete, l'indice del galvanometro viene abbassato e bloccato, fino a stabilire il contatto elettrico tra la barra conduttrice a e l'avvolgimento resistivo b , cosicché la barra a si porta ad una tensione v_s dipendente dalla posizione dell'indice all'istante in cui viene inviato l'**impulso di campionamento**;
- tale tensione viene "memorizzata" in un condensatore tra un istante di campionamento ed il successivo e viene quindi inviata, come segnale di retroazione, ad un servomeccanismo, che muove lo stelo della valvola.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>