Appunti di “Controlli Automatici 1”
Capitolo 2 - parte I
Trasformata di Laplace

Introduzione ai segnali (causali, regolari, di ordine esponenziale)

Considereremo solo funzioni del tipo

$$\begin{aligned} f : \Re &\longrightarrow C \\ t &\longrightarrow f(t) \end{aligned}$$

ossia funzioni di variabile reale a valori complessi. A queste funzioni si dà il nome di **segnali**.

In particolare, considereremo solo i cosiddetti **segnali causali**: si dice che *un segnale è **causale** se è nullo per qualsiasi t<0, ossia quindi se* $\forall t<0 \;:\; f(t)=0$ *.*

E' facile verificare che *somme e prodotti di segnali sono ancora dei segnali.*

Tra i segnali causali, distinguiamo 2 categorie molto importanti:

- *una segnale causale si dice **regolare** se, preso un qualsiasi intervallo limitato della retta reale, in esso il segnale presenta un numero finito di discontinuità di 1° specie,* ossia un numero finito di punti in ciascuno dei quali esistono finiti il limite sinistro e il limite destro di f(t), ma sono diversi;

- *un segnale causale si dice invece **di ordine esponenziale** se esistono un valore M>0 e un valore reale α tali che, per t sufficientemente grande, sia verificata la relazione* $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ *.* In termini analitici, ciò equivale a dire che esiste un numero reale γ tale che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{\gamma t}} = 0$$

Ovviamente, tutte le funzioni limitate soddisfano questa condizione per γ=0.

Per i segnali causali di ordine esponenziale, si può definire un **ordine**: si tratta dell'estremo inferiore dei valori reali α che soddisfano la condizione $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$. Si è soliti indicare tale ordine con il simbolo α_f.

N.B. Quando consideriamo una qualsiasi funzione reale f(t) e diciamo che si tratta di un segnale, in definitiva intendiamo dire che consideriamo quella funzione che è nulla prima di 0 e che coincide con f(t) per t>0. Questo comporta una conseguenza importante: consideriamo ad esempio la funzione cos(t), che in t=0 vale 1; questa funzione, considerata nel campo reale, ossia per t che va da -∞ a +∞, è continua in t=0; al contrario, il corrispondente segnale, in $t=0^-$ vale 0 mentre in $t=0^+$ vale 1, per cui presenta in t=0 una discontinuità. Diverso è il caso, per esempio, del segnale sin(t), il quale, invece, vale comunque 0 in t=0 per cui è continuo in tale punto.

Il segnale di Heavyside

Un particolare segnale, molto utile nella pratica, è il cosiddetto **segnale di Heavyside**, che si indica generalmente con **H(t)** ed è definito nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

In primo luogo, si tratta di un segnale "particolare", nel senso che ha parte immaginaria nulla, ossia è un *segnale a valori reali*; in secondo luogo, è evidentemente un segnale causale in quanto assume valore identicamente nullo prima di t=0; è anche un segnale regolare, in quanto presenta un numero finito (=0) di discontinuità di prima specie; infine, è di ordine esponenziale in quanto è possibile trovare M>0 ed α reale tali che $|H(t)| \leq Me^{\alpha t}$: per esempio, basta prendere M=1 e α=0, il che ci dice, tra l'altro, che 0 è l'ordine del segnale.

Definizione di "trasformata di Laplace"

Supponiamo di avere un segnale f(t) e supponiamo in particolare che sia regolare di ordine esponenziale. Per questo tipo di segnale ha senso parlare dell'operatore **trasformata di Laplace**, che è definito nel modo seguente:

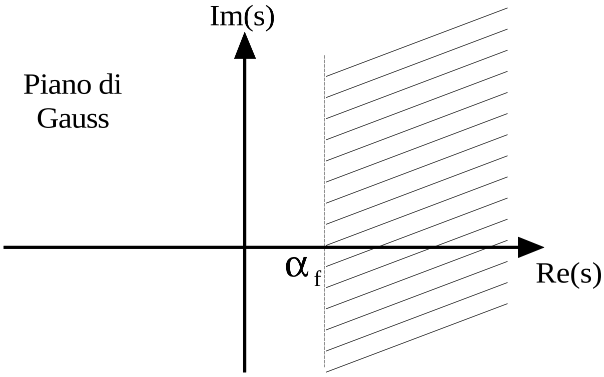
$$F(s) = L[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

La trasformata di Laplace è dunque un operatore che fa corrispondere al segnale f(t) (ossia una funzione complessa di variabile REALE), una funzione complessa nella variabile complessa s.

Non è detto che quell'integrale converga sempre, ossia non è detto che, dato il segnale f(t), se ne possa in ogni caso trovare la trasformata di Laplace. Sussiste infatti il seguente **criterio di esistenza**:

Teorema - *Indicato con α_f l'ordine del segnale f, la trasformata di Laplace di f esiste solo se $Re(s) > \alpha_f$.*

Questo teorema dice in pratica che l'**integrale di Laplace** ha senso solo assumendo per ipotesi che la variabile complessa *s* abbia parte reale maggiore dell'ordine del segnale in questione. Da un punto di vista grafico, quindi, il dominio di esistenza (meglio detto **dominio di convergenza**) della funzione F(s), nel **piano di Gauss** (il piano dei numeri complessi), è rappresentato dal semipiano a destra di α_f:



Dimostriamo quanto appena detto.

Se *s* è un numero complesso, lo possiamo scrivere nella forma $s=\mu+j\sigma$. Dato che il segnale f(t) è per ipotesi di ordine esponenziale, esisterà (in base alla definizione) almeno un numero reale α_0 tale $|f(t)| \le Me^{\alpha_0 t}$. Sempre in base alla definizione, sappiamo che l'ordine α_f del segnale è l'estremo inferiore dell'insieme di tutti gli α_0 che soddisfano quella relazione, per cui $\alpha_0>\alpha_f$. Per ipotesi, noi sappiamo anche che $Re(s)=\mu>\alpha_f$: tra tutti i possibili α_0, nulla ci vieta di scegliere quello tale che $\alpha_f < \alpha_0 < \mu$.

Premesso tutto questo, per dimostrare l'esistenza dell'integrale di Laplace del segnale f(t), dobbiamo far vedere che la funzione $f(t)e^{-st}$ ammette integrale improprio. Possiamo allora cominciare a scrivere che

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le |f(t)|e^{-\mu t} \le \left(Me^{\alpha_0 t}\right)e^{-\mu t} = Me^{(\alpha_0-\mu)t} = Me^{-(\mu-\alpha_0)t}$$

Abbiamo dunque trovato che la funzione $f(t)e^{-st}$ è maggiorata, in modulo, da una funzione che ammette integrale improprio, e questo ci garantisce che lo ammette anche essa.

N.B. Ritornando un attimo sulla definizione di trasformata di Laplace, segnaliamo che, a voler essere precisi, l'esistenza della trasformata di Laplace di un segnale f per un fissato $s\in C$ significa precisamente che esiste finita la quantità

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

Facciamo anche osservare un'altra cosa: in quell'integrale, è evidente che non intervengono in alcun modo i valori assunti dalla f prima di t=0, per cui, in linea di massima, questi valori potrebbero essere qualsiasi; la scelta di considerare invece solo segnali, cioè funzioni nulle prime di t=0, è dettata da altre esigenze, non ultima quella (che esamineremo in seguito) di riuscire a determinare l'espressione di un segnale a partire da quella della sua trasformata.

N.B. Tra le ipotesi sulla f(t) perché se ne possa calcolare la trasformata di Laplace c'è quella per cui f deve essere regolare, ossia deve presentare un numero finito di discontinuità di prima specie. Allora, dato che il valore di un integrale non cambia se il valore della funzione integranda viene alterato in un numero finito di punti, possiamo fissare a nostro arbitrio i valori di f nei punti di discontinuità: in altre parole, talvolta potremo prendere il limite destro della f in quel punto, talaltra prenderemo il limite sinistro, talaltra ancora la media dei due limiti.

Concludiamo questa introduzione osservando che le condizioni sotto le quali una funzione f(t) è trasformabile secondo Laplace sono abbastanza estese, per cui, in pratica, risultano soddisfatte da qualunque funzione del tempo che rivesta interesse nell'ambito dell'analisi dei sistemi. La condizione più importante è che f(t) sia nulla per t<0 e può essere in genere soddisfatta mediante una scelta opportuna dell'origine dei tempi.

In realtà, la condizione **f(t)=0 per t<0** non è strettamente necessaria per la trasformabilità della funzione (i cui valori per t<0 vengono comunque ignorati nell'operazione di integrazione), quanto per la biunivocità della trasformazione, in quanto, quando si esegue l'antitrasformazione, si ottiene comunque una funzione nulla per t<0.

Proprietà generali della trasformata di Laplace

Linearità

La trasformata di Laplace di un segnale (regolare di ordine esponenziale) è un operatore lineare, ossia verifica sempre le seguenti relazioni:

$$L[f(t)+g(t)](s) = L[f(t)](s) + L[g(t)](s)$$
$$L[a \cdot f(t)](s) = a \cdot L[f(t)](s)$$

dove f e g sono segnali regolari di ordine esponenziale e a una qualsiasi costante reale o complessa.

La dimostrazione di questa proprietà si effettua applicando semplicemente la definizione di trasformata di Laplace e ricordando la proprietà di linearità degli integrali rispetto alla somma ed al prodotto per costanti.

Proprietà

Data una funzione F(s), condizione necessaria affinché essa sia la trasformata di Laplace di un segnale f(t) è che sia verificata la relazione

$$\lim_{Re(s)\to+\infty} F(s) = 0$$

Nel caso la funzione F(s) non soddisfi questa condizione, è possibile affermare che non si tratta della trasformata di Laplace di alcun segnale. Al contrario, se quella condizione è verificata, questa possibilità esiste.

La dimostrazione di questa proprietà è abbastanza semplice. Per definizione di trasformata di Laplace, possiamo scrivere che

$$F(s) = L[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Dobbiamo allora far vedere che la funzione complessa F(s) così definita è infinitesima per Re(s)→+∞.

Abbiamo intanto, in base ad una nota proprietà degli integrali, che

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-st}\right|dt$$

Perché se ne possa calcolare la trasformata di Laplace, il segnale f(t) sarà certamente di ordine esponenziale: esisterà allora almeno un α_0 reale tale che $|f(t)| \le Me^{\alpha_0 t}$: posto allora s=μ+jω, possiamo scrivere che

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le |f(t)|e^{-\mu t} \le \left(Me^{\alpha_0 t}\right)e^{-\mu t} = Me^{(\alpha_0-\mu)t} = Me^{-(\mu-\alpha_0)t}$$

e, andando a sostituire nella relazione di prima con gli integrali, abbiamo che

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^{+\infty} Me^{-(\mu-\alpha_0)t}dt$$

Quell'integrale vale $M/(\mu-\alpha_0)$, per cui deduciamo che

$$\lim_{\mu\to+\infty} F(s) = \lim_{\mu\to+\infty} \frac{M}{\mu-\alpha_0} = 0$$

Olomorfia della trasformata di Laplace

Detta F(s) la trasformata di Laplace di un segnale f(t), essa è una funzione che risulta olomorfa nella regione di esistenza dell'integrale di Laplace, ossia in

$$A = \left\{s \in C \middle| Re(s) > \alpha_f\right\}$$

Anche in questo caso la dimostrazione è abbastanza semplice. Applicando infatti le note equazioni di Cauchy-Riemann alla trasformata di Laplace del segnale (di ordine esponenziale) f(t), otteniamo che

$$\frac{d}{d\mu}F(s)=\frac{d}{d\mu}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}f(t)\frac{d}{d\mu}\left(e^{-st}\right)dt=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot(-t)\left(e^{-st}\right)dt$$

$$\frac{d}{d\omega}F(s)=\frac{d}{d\omega}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}f(t)\frac{d}{d\omega}\left(e^{-st}\right)dt=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot(-jt)\left(e^{-st}\right)dt$$

Da qui si deduce evidentemente che l'equazione $\frac{d}{d\mu}F(s)=\frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}F(s)$, è soddisfatta per qualsiasi s nel piano complesso; dato, però, che s varia nell'insieme di definizione della trasformata di Laplace, deduciamo che, per quest'ultima, il dominio di esistenza e quello di olomorfia coincidono.

Smorzamento nel tempo

Sia dato il segnale f(t); si definisce **segnale smorzato di f nel punto *a*** il segnale **$g(t)=f(t)e^{at}$**. Nell'ipotesi che f sia di ordine esponenziale, anche g(t) lo è, per cui è possibile calcolare anche per quest'ultimo la trasformata di Laplace: si ottiene allora che

$$L\left[f(t)e^{at}\right](s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{(a-s)t}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt=L\left[f(t)e^{at}\right](s-a)$$

Quindi, *la trasformata di Laplace del segnale smorzato ([1]) di f è pari alla trasformata di f calcolata però nel punto s-a anziché nel punto s.* E' evidente che tale trasformata esiste solo per **$Re(s-a)>\alpha_f$**.

Spostamento nel tempo

Dato sempre il segnale f(t), si definisce **segnale shiftato di f nel punto *a*** il segnale

$$g(t)=H(t-a)f(t-a)$$

Si tratta in pratica del segnale f(t) traslato verso destra di un tratto pari ad *a*. Nel caso che f(t) sia di ordine esponenziale, lo è anche g(t) e possiamo quindi calcolarne la trasformata di Laplace:

$$L\left[H(t-a)f(t-a)\right](s)=\int_0^{+\infty}H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt=\int_a^{+\infty}f(t-a)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}f(T)e^{-(T+a)s}dT=$$
$$=e^{-as}L\left[f(t)\right](s)$$

dove abbiamo evidentemente posto T=t-a.

[1] Il termine "smorzamento" è appropriato per a numero reale negativo, mentre, nella proprietà enunciata, a può essere una qualsiasi costante complessa

Questa proprietà mostra dunque come *la trasformata di Laplace del segnale shiftato di f sia il prodotto del termine e^{-as} (che dipende proprio dallo shift considerato) per la trasformata della f.*

Derivazione (del 1° ordine) nel tempo

Sia dato il segnale f(t). Diremo che esso è *derivabile con continuità a tratti* se la sua derivata f'(t) esiste per t>0 tranne un numero finito o numerabile di punti e se è una funzione continua a tratti.

Supponiamo allora che il segnale f goda di questa proprietà e sia inoltre regolare di ordine esponenziale: sotto quest'ultima ipotesi, si dimostra che f'(t) è a sua volta un segnale di ordine esponenziale e prende il nome di **segnale derivato della f**. Vediamo allora quanto vale la sua trasformata di Laplace: si ha che

$$L[f'(t)](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\cdot(-s)e^{-st}dt = -f(t=0) + sL[f(t)](s)$$

Quindi, *la trasformata di Laplace del segnale derivato è pari alla somma di 2 termini: il primo è il prodotto di s per la trasformata di f; il secondo è il valore assunto da f nel punto t=0, cambiato però di segno.*

Facciamo osservare una cosa molto importante: nel caso la funzione f non sia continua in tutto [0,+∞[, potremmo comunque calcolare la sua derivata ed affermare che essa è valida nei punti in cui è ammessa la derivazione; tuttavia, in questo caso non potremo parlare di segnale derivato e non potremo applicare il risultato appena trovato.

Caso particolare: presenza di una discontinuità

Nelle stesse ipotesi della proprietà precedente, supponiamo che il punto t=α sia un punto di discontinuità per la funzione f(t). Detta allora f'(t) la derivata di f(t) (derivata che è valida solo nelle regioni in cui è possibile calcolarla), si dimostra che

$$L[f'(t)](s) = s\cdot L[f(t)](s) - \left[f(\alpha^+) - f(\alpha^-)\right]$$

E' evidente che i 2 termini tra parentesi tonda al secondo membro sono quelli che tengono conto della discontinuità della f nel punto z=α

Integrazione nel tempo

Consideriamo un generico segnale f(t). Consideriamo inoltre la funzione $\int_0^t f(x)dx$, che cioè associa al nostro segnale il suo integrale tra 0 e t. Questa funzione costituisce a sua volta un segnale, che per di più risulta di ordine esponenziale. Possiamo allora calcolarne la trasformata di Laplace. Per farlo consideriamo una funzione g(t) che goda di due proprietà: essa deve essere continua e tale che g'(t)=f(t).

Calcolando la sua trasformata di Laplace, abbiamo che

$$L[g'(t)](s) = s \cdot L[g(t)](s) - g(t = 0^+) = s \cdot L[g(t)](s)$$

e quindi ricaviamo che

$$L[g(t)](s) = \frac{1}{s} L[g'(t)](s) = \frac{1}{s} L[f(t)](s)$$

In altre parole, abbiamo concluso che *la trasformata di Laplace dell'integrale di un segnale è pari al prodotto di 1/s per la trasformata del segnale stesso.*

Quindi, <u>all'operazione di integrazione la trasformata di Laplace fa corrispondere la moltiplicazione per 1/s</u>.

Legame tra le trasformate di Fourier e Laplace

Esiste un interessante legame tra la trasformata di Laplace di un generico segnale f(t) e l'<u>*integrale di Fourier*</u> di una funzione in qualche modo legata a quello stesso segnale. Infatti, si ha quanto segue:

$$L[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} H(t)f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-st}dt$$

Posto adesso $s=\mu+j\omega$ (nell'ipotesi che $\mu>\alpha_f$), abbiamo che

$$L[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-(\mu+j\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H(t)f(t)e^{-\mu t}\right)e^{-j\omega t}dt = F\left[H(t)f(t)e^{-\mu t}\right](j\omega)$$

Quindi *la trasformata di Laplace del segnale f(t) è pari all'integrale di Fourier della funzione H(t)f(t)e*$^{-mt}$

Derivazione nel tempo di ordine n°

Abbiamo in precedenza visto a che cosa equivale l'operazione di derivata prima rispetto all'operatore trasformata di Laplace. Adesso vogliamo qui estendere il discorso alla derivata n-sima. Cominciamo dalla derivata seconda per poi arrivare al caso generale: si ha che

$$\begin{aligned} L[f''(t)](s) &= s \cdot L[f'(t)](s) - f'(0^+) = s \cdot \left[s \cdot L[f(t)](s) - f(0^+)\right] - f'(0^+) = \\ &= s^2 \cdot L[f(t)](s) - \left[s \cdot f(0^+) + f'(0^+)\right] \end{aligned}$$

Si deduce allora la seguente regola generale:

$$L[f^{(n)}(t)](s) = s^n \cdot L[f(t)](s) - \left[s^{n-1} \cdot f(0^+) + s^{n-2} \cdot f'(0^+) + ... + s \cdot f^{(n-2)}(0^+) + f^{(n-1)}(0^+)\right]$$

Questa proprietà è di notevole utilità pratica quanto di studiano le **equazioni differenziali**: infatti, è evidente che, applicando l'operatore trasformata di Laplace ad una equazione differenziale, di qualsiasi grado, nella incognita f(t), l'equazione viene trasformata in una equazione algebrica nella incognita F(s); una volta ricavata F(s), mediante una operazione di "antitrasformazione secondo Laplace" sarà possibile trovare f(t).

Proprietà di scala

Dato il segnale f(t), regolare di ordine α_0, e la sua trasformata F(s), è immediato calcolarsi la trasformata del segnale **f(t/a)**, dove *a* è una qualsiasi costante reale: risulta infatti

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right](s) = s \cdot L[f(s)](as) = a \cdot F(as)$$

dove la trasformata ottenuta vale solo per $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0 / a$.

Trasformate di Laplace di alcuni segnali notevoli

$$L[H(t)](s) = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$L[H(t-a)](s) = \frac{1}{s}e^{-as}$$

$$L[H(t)t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L[H(t)e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

$$L[H(t)t^n e^{at}](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$L[H(t)\sin(t)](s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$L[H(t)\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$L[H(t)\cos(t)](s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$L[H(t)\cos(t)](s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Facciamo osservare che la quasi totalità delle trasformate di Laplace di uso più corrente nell'analisi dei sistemi lineari si può dedurre dalla relazione fondamentale

$$L\left[t^n e^{at}\right](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

In questa relazione, n è un generico numero intero positivo, mentre a è una qualsiasi costante reale o complessa.

Derivazione nel dominio di Laplace

Dato il segnale f(t), regolare di ordine α_0, e la sua trasformata F(s), vogliamo calcolare la derivata, di ordine k, di F(s): applicando la definizione di trasformata di Laplace si ha che, si ha che

$$\frac{d^k}{ds^k}F(s) = \frac{d^k}{ds^k}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d^k}{ds^k}\left(e^{-st}\right)dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-1)^k e^{-st}t^k dt =$$
$$= (-1)^k \int_0^{+\infty}\left(f(t)t^k\right)e^{-st}dt = (-1)^k L\left[f(t)t^k\right]$$

Teorema del valore iniziale

Supponiamo di avere un segnale f regolare di ordine esponenziale. Supponiamo che si tratti anche di un segnale continuo, per cui ha senso parlare del segnale derivato f'(t). Supponiamo che tale segnale sia anch'esso di ordine esponenziale, per cui ne possiamo valutare la trasformata di Laplace. Il **teorema del valore iniziale** dice allora quanto segue:

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} sL[f(t)](s) = f(0^+)$$

La dimostrazione è facile. La trasformata di Laplace del segnale derivato f' è la funzione $G(s) = sF(s) - f(0)$. Di questa funzione possiamo calcolare il limite per $\mathrm{Re}(s)\to\infty$ in quanto esiste, in base alla ipotesi di continuità, il limite della f(s). Tuttavia, G(s) è la trasformata di un segnale di ordine esponenziale, per cui è infinitesima all'infinito (proprietà numero (2)), ossia si ha che

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} G(s) = 0 = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}\left[s\cdot L[f(t)](s) - f(0^+)\right]$$

e da qui viene fuori la tesi.

Teorema del valore finale

Sia dato sempre il segnale f regolare di ordine esponenziale. Supponiamo che f(t) sia un segnale continuo con derivata prima continua a tratti (o generalmente continua). Nell'ipotesi che esistano entrambi finiti i seguenti 2 limiti

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

questo teorema afferma che essi devono necessariamente coincidere ([1]).

Prima ancora di esaminare la dimostrazione, facciamo osservare che l'ipotesi per cui esista $\lim_{t\to\infty} f(t)$ equivale a supporre che i poli della funzione sF(s), ossia i poli di F(s), si trovino nel semipiano sinistro del piano complesso, il che significa che il sistema deve essere **stabile** (tutt'al più si può avere un polo semplicemente nell'origine, visto che F(s) viene moltiplicata per s). Ad esempio questo teorema si può applicare alla funzione $F(s)=\frac{1}{s+4}$, mentre non può essere applicato alla funzione $G(s)=\frac{1}{s-4}$.

Passiamo adesso alla dimostrazione del teorema.

L'esistenza del primo di quei due limiti ci dice che la funzione f(t) è limitata per $t\geq 0$, ossia ha ordine $\alpha_f=0$. Allora, preso un qualsiasi $s\in C$ tale che $Re(s)>0$, possiamo calcolare la trasformata di Laplace del segnale derivato f'(t), ossia

$$L[f'(t)](s) = sL[f(t)](s) - f(0^+)$$

L'esistenza del secondo limite, invece, ci dice che il secondo membro di quest'ultima relazione tende ad un valore finito quando $s\to 0$, per cui lo stesso noi possiamo affermare per il primo membro: ossia esiste finito

$$\lim_{s\to 0} L[f'(t)](s)$$

D'altra parte, possiamo scrivere che

$$L[f'(t)](s=0) = \left[\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt\right]_{s=0} = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = [f(t)]_0^{+\infty} = \left[\lim_{t\to+\infty} f(t)\right] - f(0)$$

e quindi, uguagliando, abbiamo che

$$L[f'(t)](s=0) = \left[\lim_{t\to+\infty} f(t)\right] - f(0) = \left[\lim_{s\to 0} sF(s)\right] - f(0)$$

da cui scaturisce la nostra tesi.

[1] Il termine "valore finale" indica evidentemente il valore di f all'∞. Questo teorema fornisce un criterio per il calcolo di questo valore finale, ma solo sotto quelle opportune ipotesi, le quali garantiscono l'esistenza di questo valore

Troncamento di un segnale

Prendiamo un qualsiasi punto α reale positivo e diverso da zero e consideriamo il segnale definito nel modo seguente:

$$g(t) = H(t) - H(t-a)$$

Questo non è altro che il segnale di Heavyside **troncato** nel punto α, cioè il segnale che coincide con quello di Heavyside fino al punto α e poi risulta nullo. E' molto facile trovarsi la trasformata di Laplace di questo segnale: si ha infatti, in base alle note proprietà, che

$$L[H(t) - H(t-\alpha)](s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{\alpha s}}{s} = \frac{1 - e^{\alpha s}}{s}$$

Questo concetto di segnale troncato ci permette di fare il seguente discorso: supponiamo di avere un generico segnale f(t) e supponiamo di essere interessati solo al tratto di segnale compreso nell'intervallo [α,β], con α e β numeri reali positivi non nulli. Per rappresentare analiticamente questo "tratto" di segnale noi lo scriviamo come

$$f(t)[H(t-\alpha) - H(t-\beta)]$$

Anche qui risulta facile il calcolo della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} & L[f(t)[H(t-\alpha) - H(t-\beta)]](s) = L[H(t-\alpha)f(t) - H(t-\beta)f(t)](s) = \\ & = L[H(t-\alpha)f(t)](s) - L[H(t-\beta)f(t)](s) = e^{-\alpha s}L[f(t)](s) - e^{-\beta s}L[f(t)](s) = \left(e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}\right)L[f(t)](s) \end{aligned}$$

Il segnale "rampa"

Si definisce **rampa** il segnale

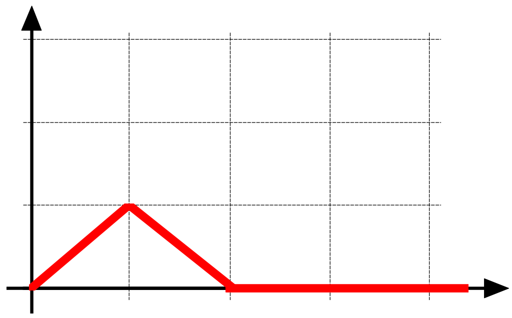
$$\boxed{r(t) = t \cdot H(t)}$$

Messo sotto questa forma, questo segnale ha rappresentazione grafica coincidente con quella della bisettrice del 1° e 3° quadrante, ossia la retta passante per l'origine e di coefficiente angolare 1.

L'utilità di questo segnale sta nel fatto che consente di rappresentare analiticamente, in modo efficace ai fini del calcolo della trasformata di Laplace, segnali comunque complessi. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1[\\ 2-t & t \in [1,2[\\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare una comoda rappresentazione analitica per questo segnale, che graficamente ha l'aspetto seguente:



Il tratto compresso nell'intervallo [0,1[coincide proprio con la funzione rampa; il secondo tratto è invece il segmento che congiunge (1,1) con (2,0), per cui è un segmento che, rispetto al precedente, parte da (1,1) ed ha coefficiente angolare -1; l'ultimo tratto è una semiretta che coincide con l'asse delle ascisse. La rappresentazione analitica del segnale sarà allora

$$f(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$$

Di questo segnale è immediato trovare la trasformata di Laplace:

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-2}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

Facciamo comunque notare che allo stesso risultato è possibile arrivare sfruttando il segnale derivato, che esiste in questo caso in quanto la funzione f è continua a tratti. Tale segnale è precisamente

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1[\\ -1 & t \in [1,2[\\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

e la sua rappresentazione analitica è

$$f'(t) = H(t) - 2H(t-1) + H(t-2)$$

La sua trasformata di Laplace è

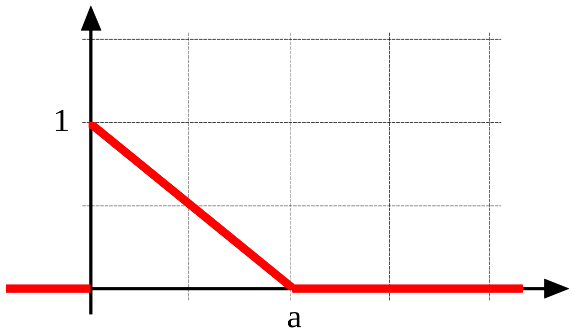
$$L[f'(t)](s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

e quindi quella di f(t) sarà

L[f(t)](s) = (1 / s)L[f'(t)](s) + discontinuità

Esempio

Calcoliamo la trasformata di Laplace del segnale il cui andamento è riportato nella figura seguente:



Tutto sta a trovare una comoda rappresentazione analitica di questo segnale: possiamo ad esempio scrivere che

$$f(t) = H(t) - \frac{1}{a}r(t) + \frac{1}{a}r(t-a)$$

da cui deduciamo che

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{a}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{a}\frac{1}{s^2}e^{-as} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{as}\left(1 + e^{-as}\right)\right)$$

Trasformata di Laplace di segnali periodici

Un segnale f(t) si dice che è **periodico di periodo T** se e soltanto se gode della proprietà per cui $f(t+T)=f(t)$ per $\forall t \geq 0$, che poi equivale anche a $f(t-T)=f(t)$ $\forall t \geq T$.

Quando si vuole effettuare la trasformata di Laplace di un segnale periodico, è ovvio che sorgono dei problemi con gli strumenti fino ad ora esposti, per il semplice fatto che non è possibile trovare una comoda rappresentazione analitica del segnale. E' perciò utile introdurre il concetto di **segnale troncato** di un segnale periodico.

Se T è il periodo del nostro segnale f(t), diremo che il segnale troncato di f in T è quel segnale $f_T(t)$ che è identico a f(t) nell'intervallo [0,T] e che è nullo altrove: possiamo scrivere perciò che

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proviamo allora a calcolare la trasformata di Laplace di tale segnale: è ovvio che questa rappresentazione non ci è affatto di aiuto; tuttavia, sfruttando quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo scrivere che

$$f_T(t) = f(t) \cdot [H(t) - H(t-T)]$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} L[f_T(t)](s) &= L[f(t)\cdot[H(t)-H(t-T)]](s) = L[f(t)\cdot H(t) - f(t)\cdot H(t-T)](s) = \\ &= L[f(t)\cdot H(t)](s) - L[f(t)\cdot H(t-T)](s) = L[f(t)](s) - e^{-Ts}L[f(t)](s) = \left(1-e^{-Ts}\right)\cdot L[f(t)](s) \end{aligned}$$

da cui concludiamo che

$$L[f(t)](s) = \frac{L[f_T(t)](s)}{1-e^{-Ts}}$$

In tal modo, la ricerca della trasformata di Laplace di un segnale periodico si riconduce alla ricerca di quella del suo segnale troncato.

Osservazione

Soffermiamoci sull'ultima relazione ottenuta: indicate con F(s) e $F_T(s)$ le trasformate di Laplace rispettivamente della f e della f_T, possiamo scriverla nella forma

$$F(s) = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$$

La funzione F(s), in quanto trasformata di Laplace, è una funzione olomorfa nella regione in cui esiste l'integrale di Laplace della f(t). Le eventuali singolarità di questa funzione sono le stesse della funzione a secondo membro e le andiamo a ricercare.

Le singolarità della funzione a secondo membro sono da ricercarsi tra 2 categorie di punti: le singolarità della funzione al numeratore, ossia $F_T(s)$, e gli zeri del denominatore. Per quanto riguarda la $F_T(s)$, essa è definita e olomorfa nella regione in cui esiste l'integrale di Laplace della funzione $f_T(t)$: tale integrale esiste per ogni s complesso tale che $Re(s)>\alpha_{fT}$. Ci serve dunque l'ordine della f_T: è evidente che l'ordine è pari a $-\infty$, per cui $F_T(s)$ è olomorfa in tutto C. Quindi, le eventuali singolarità della F(s) corrispondono alle radici della equazione $1-e^{-Ts}=0$. Questi zeri sono i punti $s\in C$ tali che

$$-sT = Log(1) = \log|1| + j(\arg(1)+2k\pi)$$

Ricordando che $\log|1|=0$ e che anche $\arg(1)=0$, quest'ultima relazione diventa $-sT = 2kj\pi$, per cui le singolarità della F(s) sono semplicemente i punti

$$s = \frac{2kj\pi}{T} \qquad \text{con } k\in Z$$

Trattandosi di zeri del primo ordine per il denominatore e di punti regolari per il numeratore, queste singolarità sono poli del 1° ordine per la funzione F(s). Si nota anche che si trovano tutti sull'asse immaginario, ossia mancano della parte reale. La conclusione è dunque che la trasformata di Laplace di un segnale periodico è una funzione olomorfa in tutto C privato di un numero infinito di punti che sono poli del 1° ordine e si trovano tutti sull'asse immaginario.

Il risultato inverso non è sempre vero, ma lo è spesso: in altre parole, se troviamo una funzione olomorfa le cui singolarità si trovano tutte sull'asse immaginario, è molto probabile che si tratti della trasformata di Laplace di un segnale periodico.

Esempio

Consideriamo la cosiddetta **onda quadra**, ossia il segnale

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 2n \le t < 2n+1, n \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si tratta di un segnale che potremmo definire "costante a tratti", nel senso che vale 1 e 0 su intervalli alternati di ampiezza 1. Il periodo di questo segnale è T=2. Per calcolarci la sua trasformata di Laplace, consideriamo il suo segnale troncato, che sarà

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

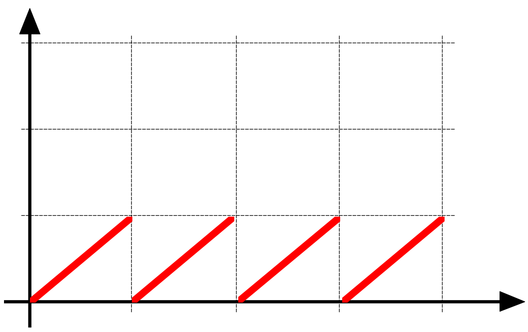
Lo possiamo rappresentare analiticamente come $f_2(t) = H(t) - H(t-1)$, per cui abbiamo che

$$L[f(t)](s) = \frac{L[f_2(t)](s)}{1-e^{-2s}} = \frac{L[H(t)](s) - L[H(t-1)](s)}{1-e^{-2s}} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}}{1-e^{-2s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

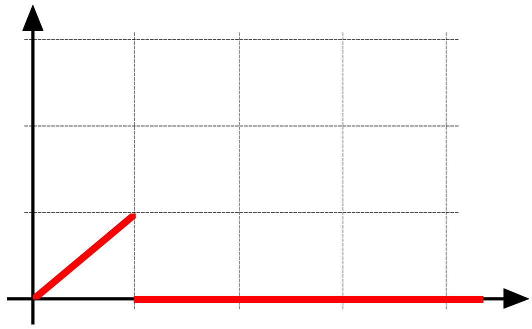
e questa trasformata è valida per Re(s)>0 in quanto questa è la condizione di esistenza della trasformata del segnale di Heavyside.

Esempio

Consideriamo il seguente segnale periodico:



Si tratta di un segnale di periodo T=1 . Per applicare la formula $F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$, ci serve la rappresentazione analitica del suo segnale troncato:



Dalla figura deduciamo che tale segnale troncato è

$$f_T(t) = r(t) - r(t-1) - H(t-1)$$

mentre la sua trasformata di Laplace è

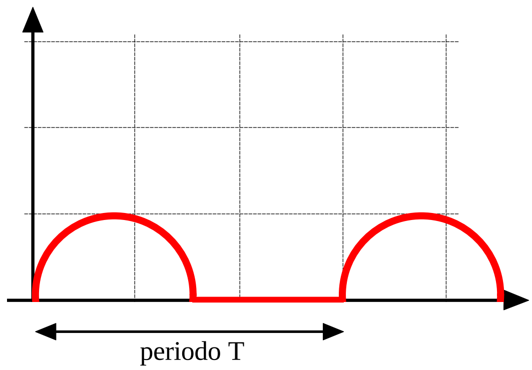
$$F_T(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}$$

Possiamo perciò concludere che la trasformata di f(t) ha espressione

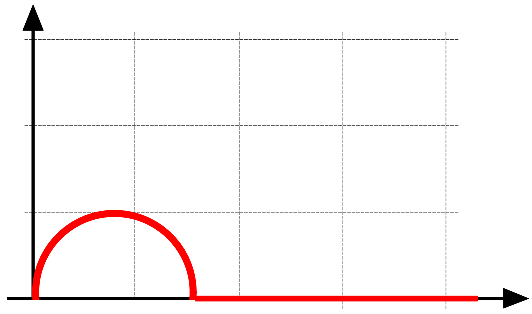
$$F(s) = \frac{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{1}{s}\frac{\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{s} - 1\right)e^{-s}}{1-e^{-s}}$$

Esempio

Consideriamo il seguente segnale periodico:



Si tratta di un segnale di periodo T generico. Il suo segnale troncato è fatto nel modo seguente:



e lo possiamo perciò scrivere nella forma

$$f_T(t) = \sin(\omega t)\left[H(t) - H\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$$

La sua trasformata di Laplace è dunque

$$F_T(s) = L\left[\sin(\omega t)\left[H(t) - H\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]\right] = L[H(t)\sin(\omega t)] - L\left[H\left(t - \frac{T}{2}\right)\sin(\omega t)\right] =$$

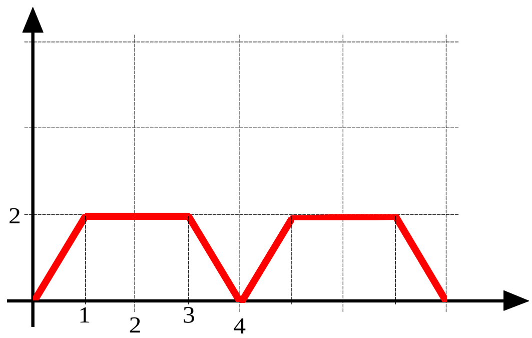
$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\left(1 - e^{-\frac{T}{2}s}\right)$$

e possiamo infine calcolare la trasformata di f(t):

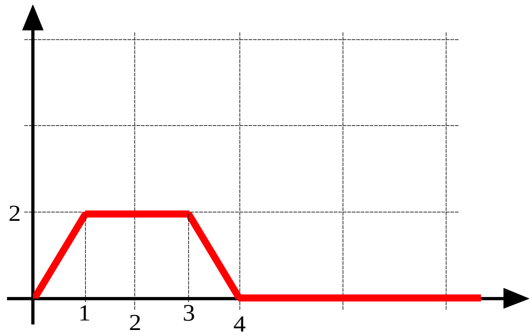
$$F(s) = \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\left(1 - e^{-\frac{T}{2}s}\right)}{1 - e^{-Ts}}$$

Esempio

Consideriamo il seguente segnale periodico:



Si tratta di un segnale di periodo T=4, il cui segnale troncato è fatto nel modo seguente:



La rappresentazione analitica di questo segnale troncato è

$$f_T(t) = 2r(t) - 2r(t-1) - 2r(t-3) + 2r(t-4)$$

e quindi la sua trasformata di Laplace è

$$F_T(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-3s} + \frac{2}{s^2}e^{-4s} = \frac{2}{s^2}\left(1 - e^{-s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right)$$

Possiamo perciò concludere che la trasformata di f(t) ha espressione

$$F(s) = \frac{\frac{2}{s^2}\left(1 - e^{-s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right)}{1 - e^{-4s}}$$

Prodotto di convoluzione tra segnali

Consideriamo le seguenti 2 funzioni reali generiche:

$$f : R \to R \qquad\qquad g : R \to R$$

Si definisce **prodotto di convoluzione** di queste due funzioni la seguente funzione:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-T)g(T)dT$$

Anche se non scendiamo nei dettagli, accenniamo al fatto che questo tipo di integrale esiste solo se le due funzioni considerate soddisfano determinate ipotesi.

Il prodotto di convoluzione è in definitiva un altro operatore, che agisce su due funzioni associando ad esse la funzione, nella variabile reale t, che viene fuori dalla risoluzione di quell'integrale. Segnaliamo che ***questo operatore gode delle proprietà commutativa, associativa e distributiva, mentre invece non esiste l'elemento neutro:*** questo significa che, data la generica funzione f, non esiste alcuna funzione h:R→R tale che $(f*h)(t) = f(t)$.

Prodotto di convoluzione tra segnali causali

Il prodotto di convoluzione assume importanza particolare se lo si collega all'operatore trasformata di Laplace. Per individuare questo legame, cominciamo a vedere quanto vale il prodotto di convoluzione tra due segnali causali: la differenza con il caso delle due funzioni generiche considerate prima sta nel fatto che i segnali causali sono sempre nulli prima di zero. Vediamo cosa questo possa implicare.

Siano f e g due segnali causali e, soprattutto, regolari. Calcoliamone il prodotto di convoluzione usando la definizione data prima:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-T)g(T)dT$$

La variabile di integrazione è la T: dato che g è un segnale causale, prima di t=0 è nulla, per cui l'estremo inferiore di integrazione può essere cambiato in 0.

Sempre definizione di segnale causale, la funzione f(t-T) è nulla per t-T< 0, ossia è nulla quando T>t: possiamo allora sostituire anche l'estremo superiore di integrazione con t. Concludiamo quindi che il prodotto di convoluzione tra due segnali causali è dato da

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(t-T)g(T)dT}$$

Senza scendere nemmeno qui in ulteriori dettagli, accenniamo al fatto che anche questo integrale esiste solo sotto certe ipotesi sulle 2 funzioni g e f:

tuttavia, si tratta di ipotesi meno rigide e generali rispetto a quelle sul prodotto di convoluzione di due funzioni generiche.

A questo punto, supponiamo che i due segnali f e g siano anche di ordine esponenziale: è possibile dimostrare che anche il loro prodotto di convoluzione, che abbiamo detto essere una funzione reale di variabile reale, è a sua volta un segnale di ordine esponenziale. E' possibile allora calcolarne la trasformata di Laplace. A questo proposito, vogliamo dimostrare è il seguente teorema:

Teorema - *La trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione di due segnali (regolari di ordine esponenziale) è pari al prodotto delle trasformate dei due segnali stessi.*

Cominciamo ad applicare le definizioni di trasformata di Laplace di un segnale e di prodotto di convoluzione di due segnali:

$$L[(f*g)(t)](s) = L\left[\int_0^t f(t-T)g(T)dT\right](s) = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(t-T)g(T)dT\right]e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\int_0^t f(t-T)g(T)e^{-st}dTdt$$

Per risolvere questo integrale, consideriamo il seguente dominio:

$$D = \left[(t,T)\in C \,\middle|\, \begin{matrix} 0 < t < +\infty \\ 0 < T < t \end{matrix}\right]$$

E' evidente allora che

$$L[(f*g)(t)](s) = \iint_D f(t-T)g(T)e^{-st}dTdt$$

Questo dominio D ha la proprietà di essere **normale** sia rispetto all'asse t (ascisse) sia rispetto all'asse T (ordinate): infatti, si tratta del dominio delimitato dalla bisettrice del primo quadrante (retta T=t) e dall'asse delle t. Possiamo allora applicare a quell'integrale doppio le note **formule di riduzione**:

$$L[(f*g)(t)](s) = \int_0^{+\infty} dT \int_T^{+\infty} f(t-T)g(T)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} g(T)dT \int_T^{+\infty} f(t-T)e^{-st}dt$$

Ponendo adesso x=t-T abbiamo che

$$L[(f*g)(t)](s) = \int_0^{+\infty} g(T)dT \int_0^{+\infty} f(x)e^{-s(x+T)}dx = \int_0^{+\infty} g(T)e^{-sT}dT \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx = L[f(t)](s)\cdot L[g(t)](s)$$

Possiamo dunque scrivere, analiticamente, che

$$\boxed{L[(f*g)(t)](s) = F(s)G(s)}$$

Successioni di segnali

Sia $(f_n(t))_{n\in N}$ una successione di segnali così fatti:

$$f_n(t) = n\left[H(t) - H\left(t - \frac{1}{n}\right)\right]$$

Calcoliamoci la trasformata di Laplace del generico di questi segnali:

$$L[f_n(t)](s) = L\left[n\left[H(t) - H\left(t - \frac{1}{n}\right)\right]\right](s) = n \cdot L\left[H(t) - H\left(t - \frac{1}{n}\right)\right](s) = n\frac{1 - e^{-\frac{1}{n}s}}{s}$$

Vediamo cosa succede a questa trasformata quando facciamo tendere n all'infinito: vogliamo cioè vedere se esiste e quanto vale

$$\lim_{n\to+\infty} L[f_n(t)](s) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{1 - e^{-\frac{1}{n}s}}{s}$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty}\frac{s}{n} = 0 \quad \forall s \in C$, possiamo porre y=s/n e scrivere che

$$\lim_{n\to+\infty} L[f_n(t)](s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-y}}{y}$$

e questo è un limite notevole che vale esattamente 1.

La funzione "Seno Integrale"

Si chiama **seno integrale di t** la funzione così definita:

$$si(t) = \int_0^t \frac{\sin T}{T} dT$$

dove T è una variabile reale. Si può dimostrare che si tratta di un segnale di ordine esponenziale, per il quale la trasformata di Laplace vale

$$L[si(t)](s) = L\left[\int_0^t \frac{\sin T}{T} dT\right](s) = \frac{1}{s} L\left[\frac{\sin t}{t}\right](s) = \frac{1}{s}\left(-\arctan(s) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry