

Appunti di Controlli Automatici 1

Capitolo 6 – parte II

Diagrammi di Nyquist

<i>Introduzione</i>	1
<i>Regole pratiche per il tracciamento dei diagrammi polari</i>	3
Comportamento alle basse frequenze	4
Comportamento alle alte frequenze.....	8
Comportamento alle frequenze intermedie.....	9
Caso particolare di 2 poli complessi coniugati: asintoto obliquo	10
Diagramma per $\omega \in (-\infty, 0^+)$	11
<i>Esempio: sistema passa-basso del 3° ordine</i>	12
<i>Esempio: sistema passa-basso di tipo 1</i>	14
<i>Esempio: sistema passa-basso di tipo 2</i>	17

Introduzione

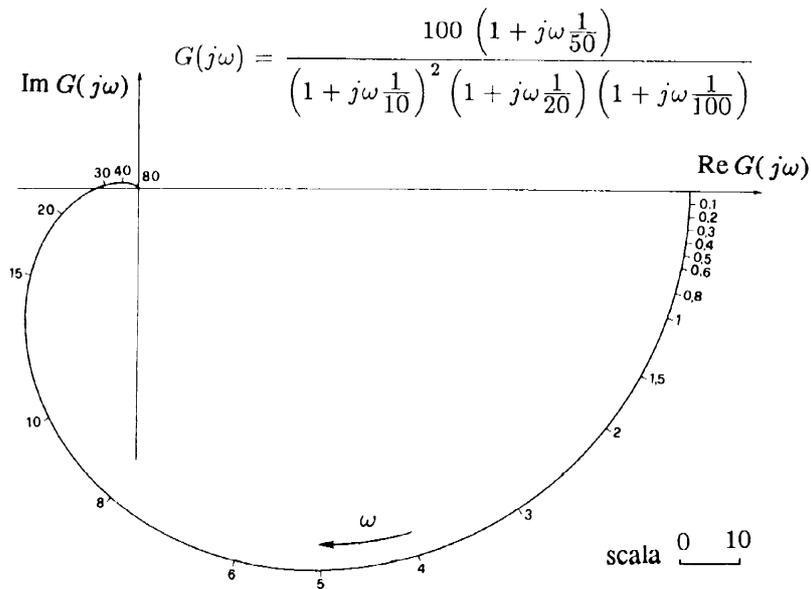
Abbiamo in precedenza osservato che la **funzione di risposta armonica**, $G(j\omega)$, di un sistema lineare stazionario può essere graficamente rappresentata in almeno due modi: nei paragrafi precedenti ci siamo occupati della sua rappresentazione in termini di modulo e fase, descrivendo i cosiddetti *diagrammi di Bode*, mentre adesso vogliamo occuparci della rappresentazione in termini di parte reale e parte immaginaria, descrivendo i cosiddetti **diagrammi di Nyquist** (detti anche **diagrammi polari**).

Il punto di partenza consiste dunque nell'esprimere $G(j\omega)$ nella forma seguente:

$$G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j\text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Un diagramma polare è una rappresentazione del valore di $G(j\omega)$, in termini appunto di parte reale e parte immaginaria (cioè nel piano di Gauss), al variare della pulsazione ω .

Un esempio di diagramma polare è riportato nella figura seguente:



Un generico punto della curva rappresenta il valore della $G(j\omega)$ in corrispondenza di una precisa pulsazione ω . A tale scopo, la curva è graduata in valori della pulsazione ω , nel senso che sono specificati su di essa i valori di ω corrispondenti ai vari punti, in numero sufficiente per una agevole interpolazione: questo consente una immediata determinazione dei valori di $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ e $\text{Im}\{G(j\omega)\}$, da leggersi rispettivamente sull'asse orizzontale e su quello verticale.

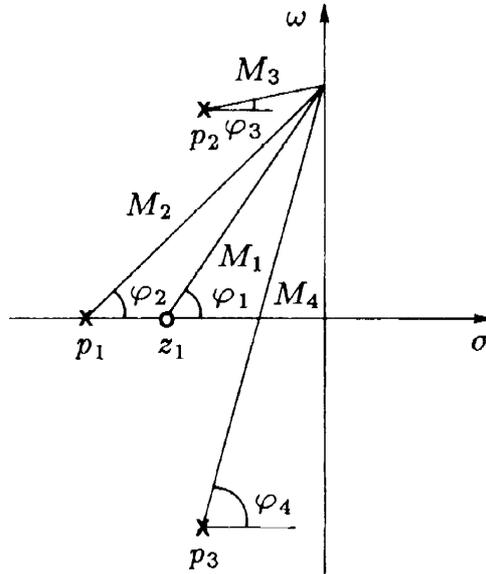
E' importante osservare il legame esistente tra i diagrammi polari e i diagrammi di Bode: poiché i valori del modulo $A(\omega)$ e dell'argomento $\varphi(\omega)$ sono facilmente determinabili sul diagramma polare in funzione della pulsazione, i diagrammi di Bode si possono facilmente dedurre dai diagrammi polari; meno agevole, ma comunque possibile, è invece la determinazione di $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ e $\text{Im}\{G(j\omega)\}$ sui diagrammi di Bode, cioè la costruzione, a partire da questi, dei diagrammi polari.

I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione: su di essi, in particolare, si basa un fondamentale criterio di stabilità (il criterio di Nyquist) che verrà più avanti enunciato.

Fatte queste premesse, esaminiamo due situazioni pratiche che spesso ricorrono quando si devono usare i diagrammi polari:

- La situazione più comune è quella in cui si vuole rappresentare, tramite il diagramma polare, la funzione di risposta armonica relativa ad un sistema di cui è data la funzione di trasferimento $G(s)$: in questo caso, una volta effettuata la sostituzione $s=j\omega$, il diagramma polare di $G(j\omega)$ si può tracciare sia *per punti*, separando le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di ω , sia anche tramite *regole pratiche* che più avanti provvederemo ad enunciare;
- una seconda situazione possibile è invece quella in cui è assegnata direttamente la mappa dei poli e degli zeri nel piano complesso ed è fissato un

valore ω_0 della pulsazione in corrispondenza del quale si vuole conoscere $G(j\omega)$: in questa situazione, la quantità $G(j\omega_0)$ si può facilmente determinare elaborando i dati di una costruzione grafica. Per esempio, supponiamo che la mappa assegnata sia quella indicata nella figura seguente:



La corrispondente funzione di risposta armonica avrà la seguente espressione:

$$G(j\omega) = k \frac{j\omega - z_1}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} = k \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)}$$

In questa espressione, le uniche quantità non note sono ω e k , in quanto i valori dei moduli M_i e degli angoli φ_i corrispondono, rispettivamente, a distanze ed angoli facilmente determinabili per via grafica.

Si può dunque ricavare $G(j\omega)$, a meno del valore del guadagno k , in corrispondenza di qualunque valore di ω . Eseguendo inoltre prodotti e quozienti per diversi valori numerici di ω , si può arrivare a costruire proprio $G(j\omega)$, sempre a meno del valore di k .

Regole pratiche per il tracciamento dei diagrammi polari

In molti casi, in particolare quando i diagrammi polari si impiegano per analizzare la **stabilità** dei sistemi in retroazione ⁽¹⁾, è sufficiente la conoscenza dell'andamento qualitativo del diagramma polare di $G(j\omega)$, in quanto è possibile limitare la conoscenza più precisa solo a porzioni di tale diagramma, situate in posizioni determinanti del piano complesso. Per il tracciamento qualitativo dei diagrammi polari risultano allora utili alcune **regole pratiche**, che ci accingiamo ad enunciare.

Partiamo dalla funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema in esame espressa nel modo seguente:

¹ Questo avviene tipicamente quando si utilizza il cosiddetto *criterio di stabilità di Nyquist*, che sarà enunciato in seguito.

$$G(s) = \frac{k_1}{(s)^\mu} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^{n-\mu} + a_{n-1} s^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu}$$

Da notare che abbiamo posto in evidenza gli eventuali poli nell'origine (supposti in numero pari a μ).

La corrispondente funzione di risposta armonica si ottiene ponendo $s=j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^{n-\mu} + a_{n-1} (j\omega)^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu}$$

Condurremo lo studio di questa funzione, considerandone parte reale e parte immaginaria, in tre distinti intervalli di frequenza: basse e bassissime frequenze ($\omega \rightarrow 0$), frequenze intermedie ed alte frequenze ($\omega \rightarrow \infty$). In particolare, ci interesseremo inizialmente solo ai valori di ω compresi nell'intervallo $(0, +\infty)$, mentre successivamente prenderemo in considerazione anche l'intervallo $(-\infty, 0)$.

Comportamento alle basse frequenze

Nell'ambito dell'intervallo $(0, +\infty)$, cominciamo a valutare l'andamento di $G(j\omega)$ alle **basse frequenze**, il che significa considerare $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$. Faremo riferimento, come accennato nel precedente paragrafo, alla $G(j\omega)$ espressa nella forma

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^{n-\mu} + a_{n-1} (j\omega)^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu}$$

Se ω è considerato molto piccolo (al limite 0^+), tutte le potenze di $j\omega$, sia a numeratore sia a denominatore, rappresentano dei termini trascurabili rispetto ai termini costanti b_0 e a_μ , per cui possiamo sicuramente affermare che $G(j\omega)$ è approssimabile con la seguente espressione:

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_0}{a_\mu}$$

L'andamento di questa funzione dipende evidentemente dal valore di μ , ossia dal numero di poli nell'origine, ossia dal **tipo** del sistema. Le possibilità da considerare sono solo due:

- il caso più semplice è quello di un sistema di **tipo 0**, per il quale cioè risulta $\mu=0$ (nessun polo nell'origine): sostituendo, otteniamo dunque che

$$G(j\omega) \cong k_1 \frac{b_0}{a_\mu}$$

La funzione risulta evidentemente costante (e reale) con la frequenza: questo fatto indica che il diagramma polare parte da un punto dell'asse reale di valore $k_1 b_0 / a_\mu$. In questo punto, la fase della funzione dipende dal segno proprio del coefficiente $k_1 b_0 / a_\mu$:

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = \begin{cases} 0 & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} > 0 \\ \pi & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} < 0 \end{cases}$$

- l'altra possibilità è quella in cui $\mu > 0$, ossia il sistema presenta almeno un polo nell'origine: in questo caso, la funzione non è più costante con la pulsazione, per cui la sua espressione risulta leggermente più complicata del caso precedente. Cominciamo a calcolare il suo argomento:

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) + \arg \left(\frac{1}{(j\omega)^\mu} \right) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) - \mu \frac{\pi}{2} \quad \mu > 0$$

Se poniamo

$$\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = \begin{cases} 0 & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} > 0 \\ \pi & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} < 0 \end{cases}$$

possiamo scrivere che

$$\arg G(j\omega) = \varphi - \mu \frac{\pi}{2}$$

Da qui deduciamo che la fase di $G(j\omega)$, per $\omega \rightarrow 0^+$, dipende sia dal segno della costante $k_1 \frac{b_0}{a_\mu}$ sia dal numero μ di poli nell'origine.

Per quanto riguarda il modulo, invece, si ottiene che

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{k_1 b_0}{(j\omega)^\mu a_\mu} \right| = \infty$$

Possiamo dunque riepilogare nel modo seguente il comportamento di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$:

- se il sistema è di tipo 0, il modulo di $G(j\omega)$ è $\left| k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right|$ mentre la fase è nulla o pari a π a seconda che il termine $k_1 \cdot b_0 / a_\mu$ sia positivo o negativo; il diagramma polare parte dunque in ogni caso dall'asse reale;
- se invece il sistema è di tipo almeno pari ad 1, il modulo di $G(j\omega)$ è ∞ , mentre la fase è $\varphi - \mu \cdot \pi / 2$, dove $\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right)$; il diagramma parte in questo caso da un punto all'infinito.

Questo è dunque quello che succede per $\omega \rightarrow 0^+$. Adesso vediamo cosa succede per valori di ω piccoli ma comunque non piccolissimi. Facciamo ancora riferimento alla funzione di risposta armonica espressa nella forma

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_\mu}$$

La differenza rispetto a quanto fatto prima è che, anziché trascurare tutte le potenze del termine $j\omega$, è lecito trascurare solo quelle di grado maggiore o uguale a 2, per cui possiamo approssimare la $G(j\omega)$ con la seguente espressione:

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_\mu}$$

Consideriamo dapprima il caso di sistema di **tipo 0**, per cui scriviamo che

$$G(j\omega) = k_1 \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_0}$$

Abbiamo visto prima che, se il sistema è di tipo 0, il diagramma parte dal punto dell'asse reale di ascissa $k_1 b_0 / a_\mu$. Allora, al fine di capire se il diagramma parte da tale punto con fase positiva o negativa, calcoliamo proprio la fase di $G(j\omega)$ in base all'espressione approssimata trovata poco fa:

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_0} \right) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_0} \frac{\frac{b_1}{b_0} j\omega + 1}{\frac{a_1}{a_0} j\omega + 1} \right) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_0} \right) + \arg \left(\frac{\frac{b_1}{b_0} j\omega + 1}{\frac{a_1}{a_0} j\omega + 1} \right)$$

Ponendo sempre $\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_0} \right)$, abbiamo che

$$\arg G(j\omega) = \varphi + \arg \left(\frac{b_1}{b_0} j\omega + 1 \right) - \arg \left(\frac{a_1}{a_0} j\omega + 1 \right) = \varphi + \arctg \left(\frac{b_1}{b_0} \omega \right) - \arctg \left(\frac{a_1}{a_0} \omega \right)$$

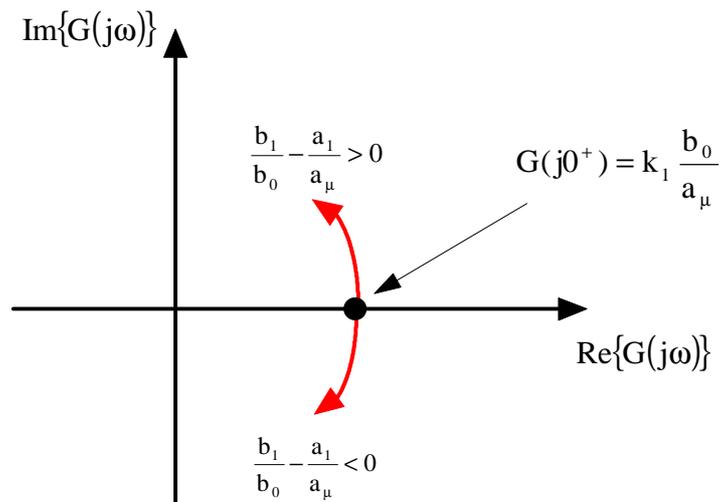
Dato che stiamo ragionando per valori molto piccoli di ω , possiamo confondere i due \arctg con i rispettivi angoli, per cui concludiamo che

$$\arg G(j\omega) \cong \varphi + \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} \right) \omega$$

In base a questa formula, se supponiamo $k_1 \frac{b_0}{a_0} > 0$, ossia $\varphi=0$, tutto viene a dipendere dal segno della quantità $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}$ (dato che ω è sempre positiva):

- se $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} > 0$, allora $\arg G(j\omega) > 0$, ossia il diagramma parte con fase positiva (ossia lascia l'asse reale ruotando in senso orario);
- se $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} < 0$, allora $\arg G(j\omega) < 0$, ossia il diagramma parte con fase negativa (ossia lascia l'asse reale ruotando in senso antiorario).

Nella figura seguente sono sintetizzate queste conclusioni:



La figura fa riferimento, ovviamente, al caso in cui $k_1 \frac{b_0}{a_0} > 0$.

Passiamo adesso al caso di un sistema di **tipo 1**, per il quale la funzione di risposta armonica, sempre per valori piccoli ma non troppo di $j\omega$, può essere approssimata con

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1 \frac{b_1 j\omega + b_0}{j\omega} a_1 - a_2 j\omega}{j\omega a_2 j\omega + a_1}$$

Abbiamo visto prima che, se il sistema è di tipo maggiore di 0, il modulo di $G(j\omega)$ è infinito per $\omega \rightarrow 0^+$, ossia il diagramma parte da un punto all'infinito. Vogliamo allora capire, nel caso di sistema di tipo 1, in che modo parte il diagramma: dimostreremo che esso parte seguendo un asintoto verticale avente una precisa ascissa.

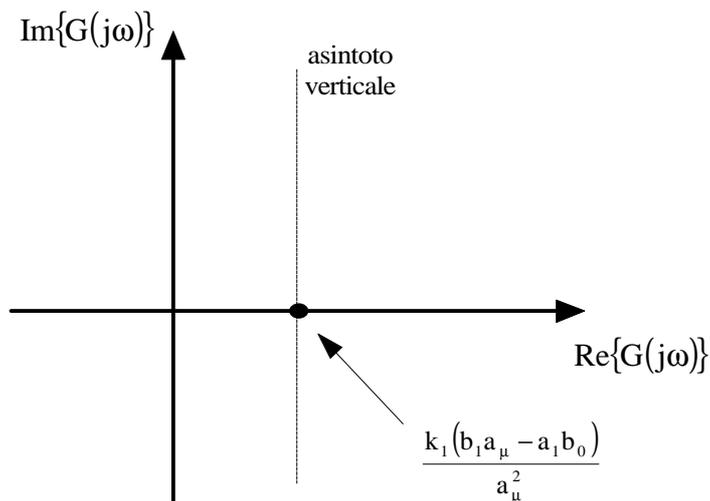
Convieni intanto razionalizzare l'espressione di $G(j\omega)$ nel modo seguente:

$$G(j\omega) = \frac{k_1 \frac{b_1 j\omega + b_0}{j\omega} a_1 - a_2 j\omega}{j\omega a_2 j\omega + a_1} = \frac{k_1 (b_0 + b_1 j\omega)(a_1 - a_2 j\omega)}{j\omega (a_1^2 + a_2^2 \omega^2)} = \frac{k_1 a_2 b_1 \omega^2 + (b_1 a_1 - a_2 b_0) j\omega + b_0 a_1}{j\omega (a_1^2 + a_2^2 \omega^2)}$$

Dato che stiamo considerando valori comunque piccoli di ω , possiamo trascurare, sia a numeratore sia a denominatore, i termini in ω^2 , per cui

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1 (b_1 a_1 - a_2 b_0) j\omega + b_0 a_1}{j\omega a_1^2} = \frac{k_1 (b_1 a_1 - a_2 b_0)}{a_1^2} - j \frac{k_1 b_0 a_1}{\omega a_1^2}$$

Abbiamo in tal modo separato la parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$: si osserva allora che, mentre la parte reale è costante con ω , il coefficiente della parte immaginaria è inversamente proporzionale ad ω , il che significa che, per $\omega \rightarrow 0$, risulta $\text{Im}\{G(j\omega)\} \rightarrow \infty$. Come anticipato, abbiamo dunque un **asintoto verticale**:



Questa figura fa chiaramente riferimento al caso in cui $\frac{k_1 (b_1 a_1 - a_2 b_0)}{a_1^2} > 0$, ma può anche risultare $\frac{k_1 (b_1 a_1 - a_2 b_0)}{a_1^2} < 0$.

Comportamento alle alte frequenze

Studiamo adesso il comportamento della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ alle **alte frequenze**, ossia per $\omega \rightarrow \infty$.

Consideriamo sempre $G(j\omega)$ espressa nella forma

$$G(j\omega) = \frac{k_1 \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{(j\omega)^\mu a_n (j\omega)^{n-\mu} + a_{n-1} (j\omega)^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu}}{a_n (j\omega)^{n-\mu} + a_{n-1} (j\omega)^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu}$$

Alle alte frequenze, risultano senz'altro prevalenti il termine in ω^m a numeratore e quello in $\omega^{n-\mu}$ a denominatore, per cui

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1 b_m (j\omega)^m}{(j\omega)^\mu a_n (j\omega)^{n-\mu}} = k_1 \frac{b_m (j\omega)^m}{a_n (j\omega)^n}$$

Portando i termini in $j\omega$ tutti a denominatore, abbiamo dunque che, alle alte frequenze, la funzione $G(j\omega)$ è esprimibile nella forma

$$G(j\omega) \cong k_1 \frac{b_m}{a_n (j\omega)^{n-m}}$$

Il caso più semplice che si può presentare è quello in cui $n=m$ (corrispondente ad un sistema avente un ugual numero di poli e di zeri): in questo caso, risulta evidentemente $G(j\omega) \cong k_1 \frac{b_m}{a_n}$, per cui il modulo e la fase di $G(j\omega)$ risultano essere

$$|G(j\omega)| = \left| k_1 \frac{b_m}{a_n} \right|$$

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_m}{a_n} \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k_1 \frac{b_m}{a_n} > 0 \\ \pi & \text{se } k_1 \frac{b_m}{a_n} < 0 \end{cases}$$

In questo caso, dunque, il diagramma per $\omega \rightarrow \infty$ ha modulo finito pari a $\left| k_1 \frac{b_m}{a_n} \right|$ e fase nulla o pari a π a seconda che $k_1 \frac{b_m}{a_n}$ sia un quantità rispettivamente positiva o negativa.

L'altro caso è quello in cui $m < n$ (corrispondente ad un **sistema passa-basso**, avente cioè un numero di poli maggiore rispetto al numero di zeri): in questo caso, risulta

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left| k_1 \frac{b_m}{a_n (j\omega)^{n-m}} \right| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\arg \left(k_1 \frac{b_m}{a_n (j\omega)^{n-m}} \right) \right] = \underbrace{\arg \left(k_1 \frac{b_m}{a_n} \right)}_{\varphi} + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\arg \left(\frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \right) \right] = \varphi - \left[(n-m) \frac{\pi}{2} \right]$$

Queste formule dicono che, per un sistema passa-basso, il diagramma polare tende all'origine (dato che il modulo di $G(j\omega)$ tende a 0) con fase $\varphi - \left[(n-m) \frac{\pi}{2} \right]$, ossia tangente ad uno degli assi coordinati.

Comportamento alle frequenze intermedie

Abbiamo dunque analizzato il comportamento di $G(j\omega)$ sia alle basse e bassissime frequenze ($\omega \rightarrow 0^+$) sia alle alte frequenze ($\omega \rightarrow +\infty$). Resta da determinare l'andamento di $G(j\omega)$ per frequenze intermedie comprese tra questi due estremi. In effetti, però, al contrario dei casi considerati prima, si possono trarre ben poche conclusioni analitiche a proposito di tale andamento: la determinazione precisa dell'andamento di $G(j\omega)$ per frequenze intermedie può essere fatta

solo calcolando tale funzione (in particolare la sua parte reale e la sua parte immaginaria) per diversi valori di ω (per ottenere un numero elevato di punti, è necessario l'ausilio del calcolatore).

Allora, diventa importante conoscere il valore di $G(j\omega)$ in alcuni **punti notevoli**. Per esempio, può essere importante individuare le eventuali intersezioni di $G(j\omega)$ con gli assi coordinati:

- per individuare eventuali intersezioni di $G(j\omega)$ con l'asse immaginario, è necessario risolvere l'equazione $\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0$: se esiste un valore ω_1 della pulsazione in corrispondenza del quale quella condizione è verificata, il corrispondente valore della funzione di risposta armonica sarà $G(j\omega_1) = j\text{Im}\{G(j\omega_1)\}$ e potrà essere riportato sul diagramma;
- in modo del tutto analogo, per individuare eventuali intersezioni di $G(j\omega)$ con l'asse reale, è necessario risolvere l'equazione $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$: se esiste un valore ω_2 della pulsazione in corrispondenza del quale quella condizione è verificata, il corrispondente valore della funzione di risposta armonica sarà $G(j\omega_2) = \text{Re}\{G(j\omega_2)\}$.

Caso particolare di 2 poli complessi coniugati: asintoto obliquo

Consideriamo adesso un caso particolare di funzione di risposta armonica: supponiamo che la funzione di trasferimento del sistema in esame abbia espressione

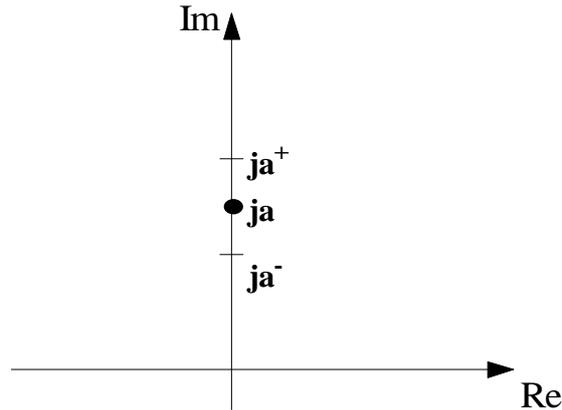
$$G(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{N(s)}{(s^2 + a^2)D_1(s)}$$

La caratteristica di $G(s)$ è evidentemente quella di avere due poli complessi coniugati che sono, in particolare, immaginari puri: infatti, il termine $s^2 + a^2$ corrisponde ai due poli $p_{1/2} = \pm ja$. Se allora poniamo $G_1(s) = k \frac{N(s)}{D_1(s)}$, possiamo scrivere che

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{(s + ja)(s - ja)}$$

Siamo interessati a calcolare la fase della funzione $G(s)$ nell'intorno di uno di questi due poli, ad esempio nell'intorno di $p_1 = ja$.

Calcoliamo allora tale fase in ja^+ (cioè leggermente al di sopra di ja) e in ja^- (cioè leggermente al di sotto di ja):



Cominciamo dal punto ja^+ :

$$\begin{aligned} \arg G(ja^+) &= \arg \left[\left(\frac{G_1(s)}{(s+ja)(s-ja)} \right)_{s=ja^+} \right] = \arg[G_1(ja^+)] - \arg[(s+ja)_{s=ja^+}] - \arg[(s-ja)_{s=ja^+}] = \\ &= \arg[G_1(ja^+)] - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \arg[G_1(ja^+)] - \pi \end{aligned}$$

Passiamo al punto ja^- :

$$\begin{aligned} \arg G(ja^-) &= \arg \left[\left(\frac{G_1(s)}{(s+ja)(s-ja)} \right)_{s=ja^-} \right] = \arg[G_1(ja^-)] - \arg[(s+ja)_{s=ja^-}] - \arg[(s-ja)_{s=ja^-}] = \\ &= \arg[G_1(ja^-)] + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \arg[G_1(ja^-)] \end{aligned}$$

A questo punto, dato che $G_1(s)$ non presenta singolarità in $+ja$, è ovvio che $\arg G_1(ja^-) = \arg G_1(ja^+)$. In base a questo, deduciamo che

$$\boxed{\arg G(ja^-) = \arg G(ja^+) - \pi}$$

Questa espressione dice che spostandoci da $s=ja^-$ e $s=ja^+$, ossia da $w=a^+$ ad $w=a^-$, la fase di $G(jw)$ ruota di -180° : questo fatto indica inequivocabilmente la presenza di un **asintoto obliquo**.

Diagramma per $\omega \in (-\infty, 0^-)$

Mentre nei paragrafi precedenti abbiamo determinato l'andamento del diagramma polare di $G(j\omega)$ per ω che varia nell'intervallo $(0^+, +\infty)$, vogliamo adesso ricavare l'andamento del diagramma polare di $G(j\omega)$ per ω che varia nell'intervallo $(-\infty, 0^-)$. Per ottenere tale andamento, basta fare la seguente considerazione: in base ad una nota proprietà della *trasformata di Laplace*, in base alla quale $G(s^*) = G^*(s)$, possiamo scrivere che

$$\boxed{G(-j\omega) = G^*(j\omega)}$$

Questa relazione dice, in concreto, che il diagramma polare di $G(j\omega)$ per $\omega \in (-\infty, 0^-)$ si ottiene semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse il diagramma ottenuto per $\omega \in (0^+, +\infty)$.

Esempio: sistema passa-basso del 3° ordine

Vogliamo tracciare il diagramma polare della funzione di risposta armonica del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+0.25)(s+2)}$$

Osservando che non ci sono poli nell'origine, deduciamo che il sistema è di tipo 0. Osservando inoltre che il grado del numeratore (=0) è inferiore a quello del denominatore (=3), deduciamo anche che si tratta di un sistema di tipo passa-basso. Infine, dato che tutti i poli sono a parte reale negativa, deduciamo che si tratta di un sistema asintoticamente stabile.

La prima operazione analitica da compiere è quella di mettere in evidenza, sia in corrispondenza dei poli sia in corrispondenza degli eventuali zeri, le costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{20}{0.5(1+s)(1+4s)(1+0.5s)} = \frac{40}{(1+s)(1+4s)(1+0.5s)}$$

La seconda operazione consiste nel sostituire $s=j\omega$ al fine di ottenere la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{40}{(1+j\omega)(1+j4\omega)(1+j0.5\omega)}$$

Studiamo il comportamento alle *basse frequenze*, in modo da individuare il punto di partenza del diagramma relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$, e il comportamento alle *alte frequenze*, in modo da individuare il punto di arrivo del diagramma sempre relativo allo stesso intervallo. Vedremo poi di capire cosa succede alle frequenze intermedie.

Cominciamo dal comportamento alle basse frequenze, ossia per $\omega \rightarrow 0^+$: abbiamo visto in precedenza che $G(j\omega)$, per $\omega \rightarrow 0^+$, può essere approssimata trascurando (sia a numeratore sia a denominatore) i termini in $j\omega$. Nel nostro caso, quindi, $G(j\omega)$ può essere approssimata con

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 40$$

In base a questa espressione, deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo, parte dal punto (40,0) situato sull'asse reale. Inoltre, dato che $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 40 > 0$, deduciamo che il diagramma ha, in tale punto, fase nulla.

Per capire se il diagramma parte con fase positiva o fase negativa, dobbiamo considerare l'espressione di $G(j\omega)$ per ω piccolo ma non piccolissimo, il che significa trascurare solo le potenze di ω uguali a superiori a 2: scriviamo dunque che

$$G(j\omega) = \frac{40}{(1+j\omega)(1+j4\omega)(1+j0.5\omega)} = \frac{40}{1+j5\omega-4\omega^2+j0.5\omega-2.5\omega^2-2j\omega^3} \cong \frac{40}{1+j5.5\omega}$$

E' immediato accorgersi che la fase di questa funzione è negativa per qualunque valore di ω (>0):

$$\arg G(j\omega) = \arg(40) - \arg(1+j5.5\omega) = 0 - \arctg(5.5\omega) \cong -5.5\omega < 0$$

Deduciamo perciò che il diagramma parte dall'asse reale con fase negativa, ossia "scorrendo" in senso antiorario.

Passiamo ora al comportamento di $G(j\omega)$ alle alte frequenze, ossia per $\omega \rightarrow +\infty$: dato che $m < n$ (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \varphi - (n - m) \frac{\pi}{2} = 0 - (3 - 0) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2}$$

dove $\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = 0$ è la fase di $G(j\omega)$ calcolata prima per $\omega \rightarrow 0^+$.

Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase $-3\pi/2$, ossia tangente all'asse verticale.

A questo punto, possiamo per esempio determinare eventuali intersezioni della $G(j\omega)$ con gli assi coordinati. A tal fine, conviene esprimere $G(j\omega)$ separando esplicitamente la parte reale e la parte immaginaria:

$$G(j\omega) = \frac{40}{(1+j\omega)(1+j4\omega)(1+j0.5\omega)} = \dots = \frac{40}{(1-6.5\omega^2) + j\omega(5.5-2\omega^2)}$$

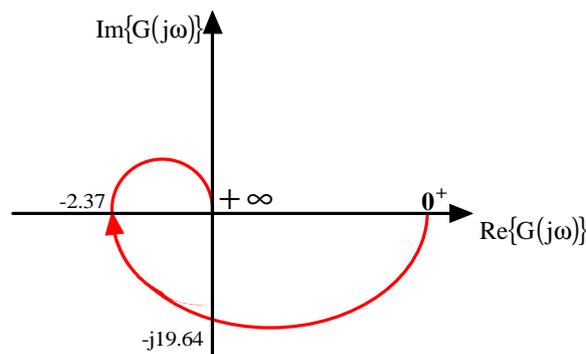
A questo punto, dobbiamo verificare se le due equazioni $\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0$ e $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$ ammettono una soluzione:

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0 \rightarrow 1 - 6.5\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{1/6.5} = 0.15 \rightarrow G(j\omega_1) = -j19.64$$

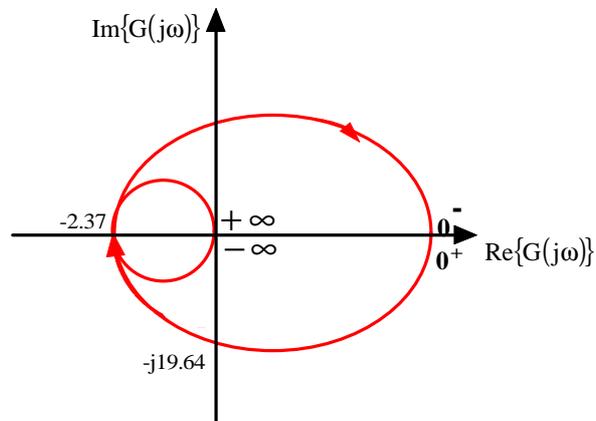
$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0 \rightarrow \omega(5.5 - 2\omega^2) = 0 \rightarrow 5.5 - 2\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{5.5/2} = 1.66 \rightarrow G(j\omega_2) = -2.37$$

Abbiamo dunque trovato che le intersezioni con gli assi coordinati sono nei punti $(0, -j19.64)$ e $(-2.37, 0)$.

Siamo allora in grado di tracciare il diagramma polare relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$:



Il diagramma relativo all'intervallo $\omega \in (-\infty, 0^-)$ si ottiene invece ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello appena ottenuto, per cui concludiamo che il diagramma polare (qualitativo) della funzione $G(j\omega)$ considerata è fatto nel modo seguente:



E' importante sottolineare che quello appena ricavato è il diagramma polare tipico di una funzione $G(j\omega)$ priva di zeri e con 3 poli reali negativi.

Esempio: sistema passa-basso di tipo 1

Vogliamo tracciare il diagramma polare della funzione di risposta armonica del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+0.2s)(1+0.05s)} \quad k > 0$$

Abbiamo a che fare con un sistema passa-basso di tipo 1 (cioè con 1 polo nell'origine) e di 3° ordine (cioè con 3 poli).

Dato che sono state già messe in evidenza le costanti di tempo, possiamo immediatamente porre $s=j\omega$ al fine di ottenere la funzione di risposta armonica:

$$G(s) = \frac{k}{j\omega} \frac{1}{(1+j0.2\omega)(1+j0.05\omega)}$$

Cominciamo dal comportamento alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0^+$). Essendo il sistema di tipo 1, sappiamo che è presente un asintoto verticale, il quale individua l'andamento del diagramma per $\omega \rightarrow 0^+$ (in quanto $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \infty$): l'ascissa di tale asintoto è data da

$$\sigma_a = \frac{k(b_1 a_\mu - a_1 b_0)}{a_\mu^2} = \dots = k \left(\sum_{i=1, \dots, m} z_i - \sum_{k=1, \dots, n} p_k \right) = -k \cdot 0.25$$

Per quanto riguarda, invece, la fase con cui il diagramma parte dall'infinito, sappiamo che essa è data dalla formula

$$\arg G(j\omega) = \varphi - \mu \frac{\pi}{2} = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Passiamo adesso al comportamento alle alte frequenze (per $\omega \rightarrow +\infty$): dato che $m=0 < n=3$ (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \varphi - (n - m) \frac{\pi}{2} = 0 - (3 - 0) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2}$$

dove abbiamo posto ancora una volta $\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = 0$.

Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase $-3\pi/2$, ossia tangente all'asse verticale.

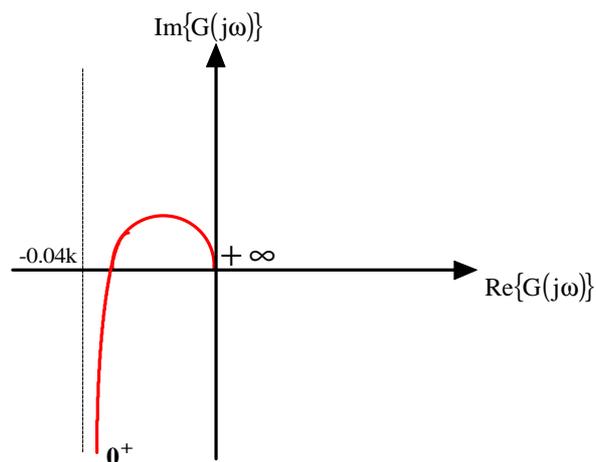
Determiniamo adesso eventuali intersezioni della $G(j\omega)$ con gli assi coordinati. Separando allora la parte reale e la parte immaginaria nell'espressione di $G(j\omega)$, abbiamo che

$$G(j\omega) = \frac{k}{-0.25\omega^2 + j\omega(1 - 0.01\omega^2)}$$

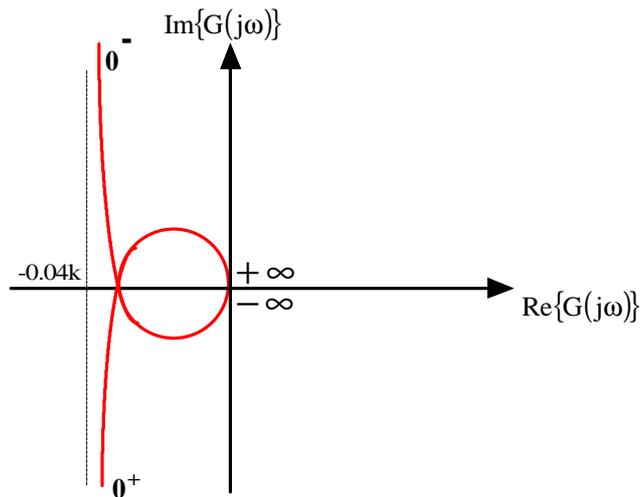
Da questa espressione deduciamo che la parte reale non si annulla mai, per cui non ci sono intersezioni con l'asse immaginario, mentre l'intersezione con l'asse reale si ottiene risolvendo l'equazione $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$:

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0 \rightarrow \omega(1 - 0.01\omega^2) = 0 \rightarrow 1 - 0.01\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_1 = 10 \rightarrow G(j\omega_1) = -0.04k$$

Siamo a questo punto in grado di tracciare il diagramma polare relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$:



Ribaltando questo diagramma, otteniamo il diagramma relativo anche all'intervallo $\omega \in (-\infty, 0^-)$:

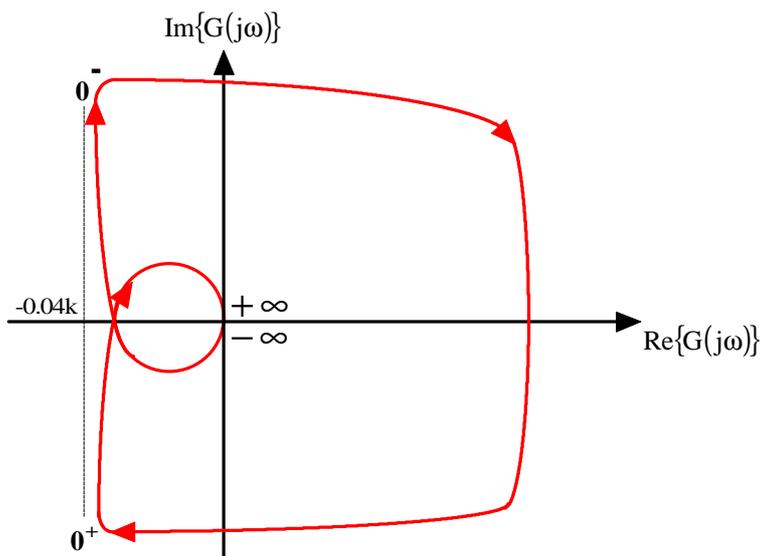


Rispetto all'esempio precedente, c'è una novità: infatti, non abbiamo ancora finito di tracciare il diagramma, in quanto resta da "chiudere" la curva, il che significa disegnare il diagramma relativo all'intervallo $(0^-, 0^+)$.

E' abbastanza intuitivo, ma può anche essere dimostrato analiticamente, che la **curva di chiusura** del diagramma sia una curva all'infinito. Tale curva di chiusura ha sempre verso di percorrenza orario e può essere facilmente dedotta seguendo una regola fondamentale: *partendo dal punto del diagramma polare corrispondente a 0^- , si devono compiere tanti mezzi giri (cioè tante rotazioni di \mathbf{p}), in senso orario e fino al punto corrispondente a 0^+ , quanti sono i poli nell'origine.*

Nel nostro caso, abbiamo 1 solo polo nell'origine e quindi la chiusura avviene mediante una curva (che può essere tranquillamente approssimata mediante una semicirconferenza) corrispondente ad 1 solo mezzo giro, in senso orario, da 0^- a 0^+ .

Possiamo dunque completare il diagramma polare dell'esempio nel modo seguente:



Esempio: sistema passa-basso di tipo 2

Come ultimo esempio, consideriamo un sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{k}{s^2(1+Ts)} \quad k>0, T>0$$

Abbiamo a che fare con un sistema passa-basso di tipo 2 (cioè con 2 poli nell'origine) e con ordine 3.

Dato che sono state già messe in evidenza le costanti di tempo, possiamo immediatamente porre $s=j\omega$ al fine di ottenere la funzione di risposta armonica:

$$G(s) = -\frac{k}{\omega^2} \frac{1}{(1+jT\omega)}$$

Cominciamo dal comportamento alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0^+$). Essendo il sistema di tipo 2, risulta che

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| &= \infty \\ \arg G(j\omega) &= \varphi - \mu \frac{\pi}{2} = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) - 2 \frac{\pi}{2} = 0 - \pi = -\pi \end{aligned}$$

per cui il diagramma tende all' ∞ con fase $-\infty$.

Passiamo adesso al comportamento alle alte frequenze ($\omega \rightarrow +\infty$): dato che $m < n$ (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) &= \varphi - (n-m) \frac{\pi}{2} = 0 - (3-0) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{dove } \varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = 0.$$

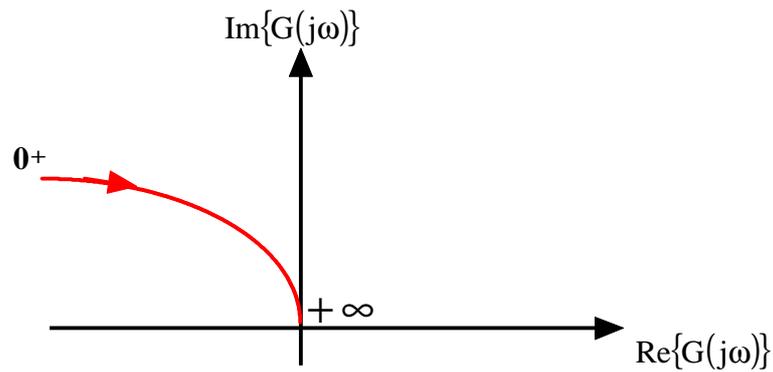
Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase $-3\pi/2$, ossia tangente all'asse verticale.

Determiniamo infine eventuali intersezioni della $G(j\omega)$ con gli assi coordinati. Separando la parte reale e la parte immaginaria nell'espressione di $G(j\omega)$, abbiamo che

$$G(s) = -\frac{k}{\omega^2 + jT\omega^3}$$

e da qui si osserva che non ci sono intersezioni.

Possiamo ora tracciare il diagramma polare qualitativo relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$:



Questo diagramma va completato tracciando prima l'andamento per $\omega \in (-\infty, 0^-)$, simmetrico rispetto all'asse reale, e poi la curva chiusura all'infinito: riguardo quest'ultima, essendoci due poli nell'origine, sarà fatta da una circonferenza (corrispondente a 2 mezzi giri, cioè a due rotazioni di π) che "va" in verso orario dal punto corrispondente a 0^- al punto corrispondente a 0^+ .

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>