

Appunti di "Controlli Automatici 1"

Le reti correttrici

Introduzione	1
Rete integratrice	1
Rete derivatrice	4
Rete ritardatrice ("phase lag")	7
Rete anticipatrice ("phase lead")	10
Rete ritardo-anticipo ("lead-lag")	13

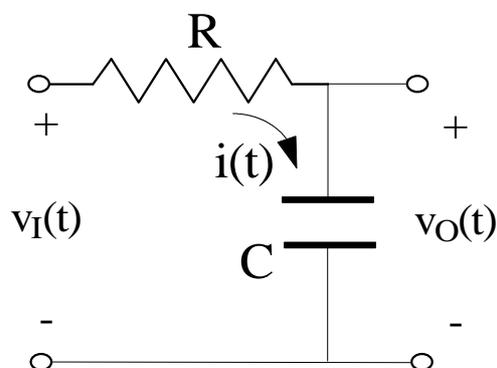
INTRODUZIONE

I procedimenti di analisi basati sull'analisi armonica (**diagrammi di Bode** e **diagrammi di Nyquist**, **criterio di stabilità di Nyquist**) e sul **luogo delle radici**, trovano la loro più frequente applicazione, nell'ambito dei controlli automatici, per la progettazione dei *dispositivi di correzione della risposta*. Questi dispositivi vengono comunemente chiamati **reti correttrici**, generalizzando una denominazione propria dei sistemi con amplificazione elettronica o elettromeccanica, in cui la correzione viene in effetti generalmente realizzata con speciali reti o circuiti elettronici.

Le reti correttrici più frequentemente impiegate nei sistemi di controllo con amplificazione elettronica sono a resistenze e capacità. Le stesse funzioni di trasferimento di tali reti si possono peraltro ottenere, in sistemi di controllo con amplificazione pneumatica o idraulica, con analoghi sistemi di strozzature e serbatoi o con sistemi meccanici (molle e ammortizzatori).

RETE INTEGRATRICE

Una **rete integratrice** è fatta nel modo seguente:



Per prima cosa, ricaviamo la funzione di trasferimento di questo sistema: cominciando la nostra analisi nel dominio del tempo, possiamo scrivere, applicando le leggi classiche dell'Elettrotecnica, che

$$v_o(t) = v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(T) dT = \frac{1}{C} \int_0^t i(T) dT$$

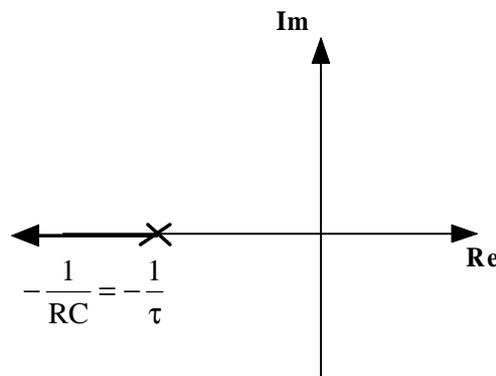
dove abbiamo ovviamente supposto nulle le condizioni iniziali (cioè la tensione iniziale sul condensatore). Considerando inoltre che $i(t) = \frac{v_I(t) - v_o(t)}{R}$, possiamo scrivere che

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_I(t) - v_o(t)}{R} dT$$

Se adesso passiamo al dominio di Laplace, abbiamo che

$$V_o(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s} \frac{V_I(s) - v_o(s)}{R} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V_o(s)}{V_I(s)} = \frac{1}{1 + sRC}}$$

La funzione di trasferimento della rete è dunque nella forma $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$, dove la costante di tempo è $\tau = RC$. Abbiamo dunque a che fare con un sistema del 1° ordine e di tipo 0, ossia senza poli nell'origine. Il luogo delle radici di questo sistema, nell'ipotesi di porlo in cascata ad un sistema (generalmente un *controllore*) caratterizzato da una funzione di trasferimento $G_C(s) = K$ e di chiudere il tutto in un anello di retroazione unitaria, è il seguente:



Ci chiediamo, per prima cosa, il motivo per cui questo circuito elettrico viene definito **rete integratrice**: è evidente che, se la caduta di tensione sul condensatore è trascurabile rispetto a quella sul resistore, si può scrivere che $v_I(t) \cong v_R(t) = Ri(t)$, da cui $i(t) \cong \frac{v_I(t)}{R}$ e quindi anche

$$v_o(t) \cong \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_I(t)}{R} dT = \frac{1}{RC} \int_0^t v_I(t) dT$$

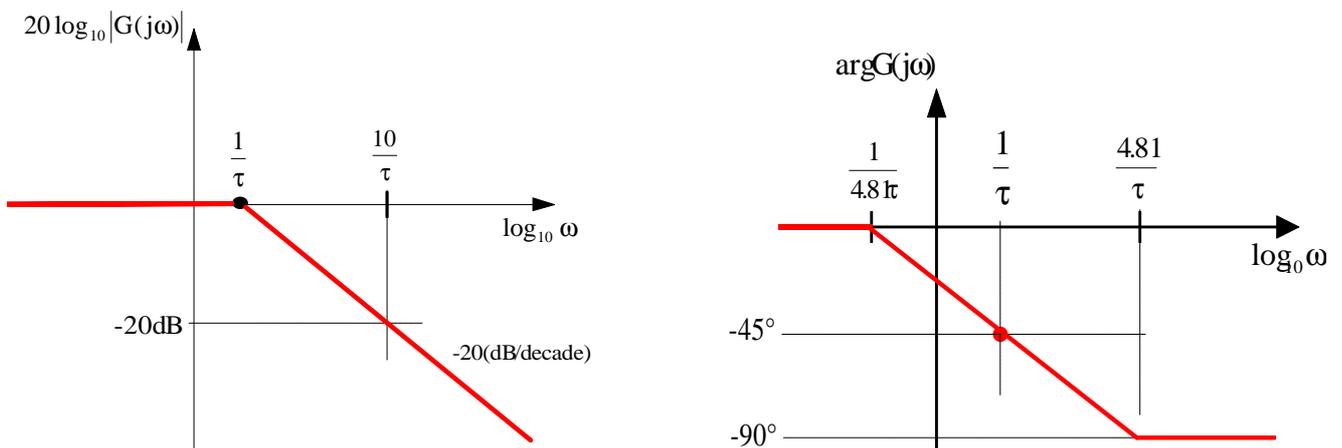
che nel dominio di Laplace diventa $\boxed{V_o(s) \cong \frac{1}{RC} \frac{1}{s} V_I(s)}$: abbiamo cioè un segnale di uscita (la tensione sul condensatore) pari all'integrale del segnale di ingresso, ossia abbiamo un **integratore ideale**.

Dobbiamo allora capire quando la caduta di tensione sul condensatore è trascurabile rispetto a quella sul resistore: con riferimento al dominio di Laplace, dato che $V_R(s) = RI(s)$ e $V_C(s) = \frac{1}{sC}I(s)$, è evidente che $V_R(s) \gg V_C(s)$ quando $R \gg \frac{1}{sC}$, ossia quando $s \gg \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$. In base a questa relazione, l'azione di integrazione è tanto migliore quanto più il valore di s è maggiore rispetto al reciproco della costante di tempo: tenendo conto che $s=j\omega$ e che $p_1=-1/\tau$ è il polo della $G(s)$, concludiamo che l'integrazione è tanto migliore quanto più è alta la frequenza di lavoro rispetto a quella ($\omega_{p1}=1/\tau$) del polo del sistema.

Possiamo facilmente tracciare il diagramma di Bode della funzione $G(s) = \frac{1}{1+s\tau}$: dato che il sistema è asintoticamente stabile, ci basta porre $s=j\omega$ per ottenere la sua funzione di risposta armonica, per cui

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$$

Il diagramma di Bode dei moduli e quello delle ampiezze (entrambi asintotici) sono immediati:



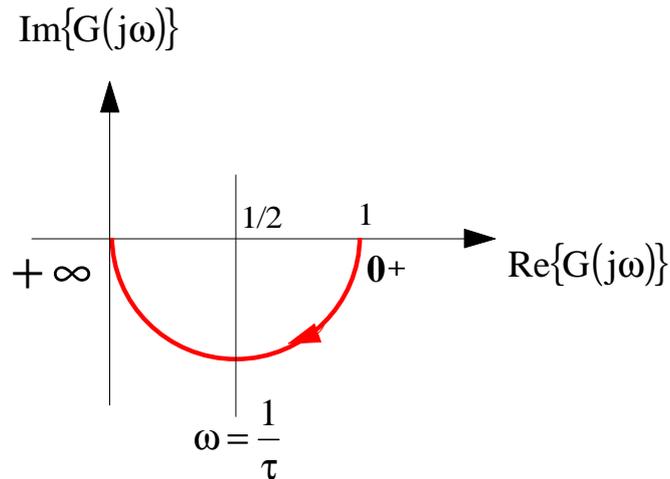
Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema non attenua né amplifica il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω inferiore a $1/\tau$; per pulsazioni maggiori di $1/\tau$, invece, c'è una attenuazione di 20dB per ogni decade di aumento di ω .

Dal diagramma delle fasi, invece, si osserva che il sistema non opera alcuno sfasamento sul segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω inferiore a $1/4.81\tau$, mentre, per pulsazioni maggiori, esso introduce uno sfasamento negativo (cioè introduce un ritardo di fase) il cui valore massimo (-90°) si ha per pulsazioni maggiori di $4.81/\tau$

Infine, possiamo tracciare anche il diagramma polare del sistema:

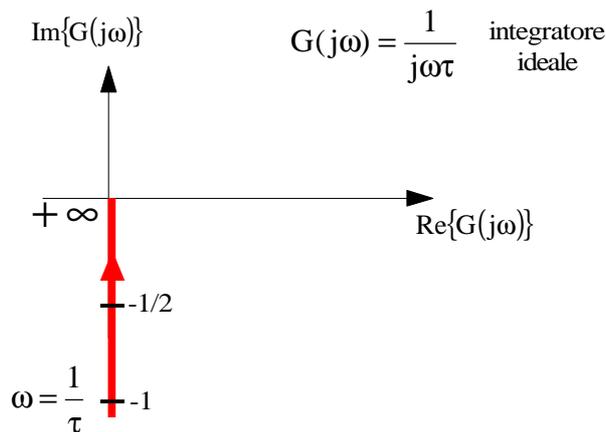
- a bassa frequenza ($\omega \rightarrow 0^+$), la funzione di risposta armonica vale approssimativamente +1 in quanto il termine $j\omega\tau$ a denominatore è trascurabile rispetto al termine additivo 1;
- ad alta frequenza ($\omega \rightarrow +\infty$), invece, è il termine additivo 1 che può essere trascurato rispetto a $j\omega\tau$, per cui la funzione di risposta armonica può essere approssimata con $G(j\omega) \cong \frac{1}{j\tau\omega}$ e quindi, per $\omega \rightarrow +\infty$, essa tende a zero;
- inoltre, non ci sono intersezioni con gli assi.

Il diagramma, relativamente all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$ è fatto nel modo seguente:



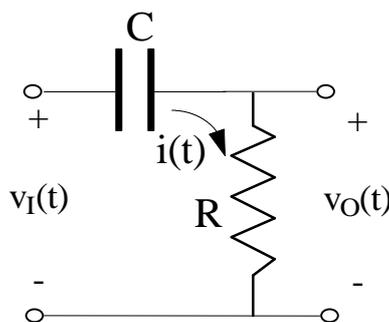
Effettuando un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, si ottiene il diagramma polare completo.

E' infine opportuno riportare il diagramma polare, sempre relativamente all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$, di un integratore ideale:



RETE DERIVATRICE

Una rete derivatrice è assolutamente identica ad una rete integratrice, con la differenza che la tensione di uscita è prelevata ai capi del resistore e non più del condensatore:



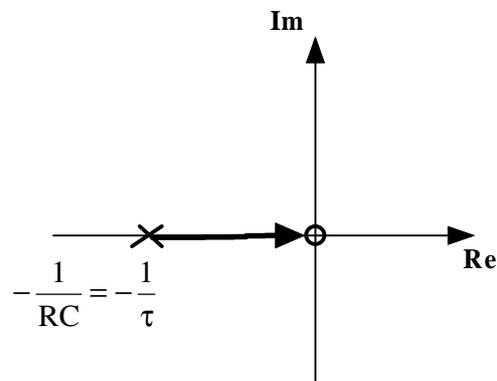
Per prima cosa, ricaviamo anche qui la funzione di trasferimento del sistema: ragionando nel dominio del tempo, possiamo scrivere, applicando le leggi classiche dell'Elettrotecnica, che

$$v_1(t) = v_c(t) + v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_o(T)}{R} dT + v_o(t)$$

Se adesso passiamo al dominio di Laplace, abbiamo che

$$V_1(s) = \left(\frac{1}{RCs} + 1 \right) V_o(s) \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{RCs}{1+RCs}}$$

La funzione di trasferimento della rete è dunque nella forma $G(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$, dove la costante di tempo è ancora una volta $\tau = RC$ così come nella rete integratrice. Abbiamo dunque a che fare con un sistema del 1° ordine, di tipo 0 e con uno zero nell'origine. Il luogo delle radici di questo sistema, nell'ipotesi di porlo in cascata ad un sistema caratterizzato da una funzione di trasferimento $G_C(s) = K$ e di chiudere il tutto in un anello di retroazione unitaria, è il seguente:



Cerchiamo ora di capire perchè questo circuito elettrico viene definito **rete derivatrice**: se la caduta di tensione sul resistore è trascurabile rispetto a quella sul condensatore, si può scrivere che

$$v_1(t) \cong v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_o(T)}{R} dT, \text{ che nel dominio di Laplace diventa}$$

$$V_1(s) = \frac{1}{RCs} V_o(s) \longrightarrow \boxed{V_o(s) = RCs V_1(s)}$$

Abbiamo cioè un segnale di uscita (la tensione sul resistore) pari alla derivata del segnale di ingresso, ossia abbiamo un derivatore ideale (a meno, ovviamente, della costante RC).

Dobbiamo allora capire quando la caduta di tensione sul resistore è trascurabile rispetto a quella sul condensatore: dato che $V_R(s) = RI(s)$ e $V_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$, è evidente che $V_R(s) \ll V_C(s)$ quando

$R \ll \frac{1}{sC}$, ossia quando $\boxed{s \ll \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}}$. In base a questa relazione, *l'azione di derivazione è tanto migliore quanto più è bassa la frequenza di lavoro rispetto a quella ($\omega_{p1} = 1/\tau$) del polo del sistema.*

Confrontando questa conclusione con quella ricavata per la rete integratrice, deduciamo che quest'ultima lavora bene ad alta frequenza, mentre la rete derivatrice lavora bene a bassa frequenza.

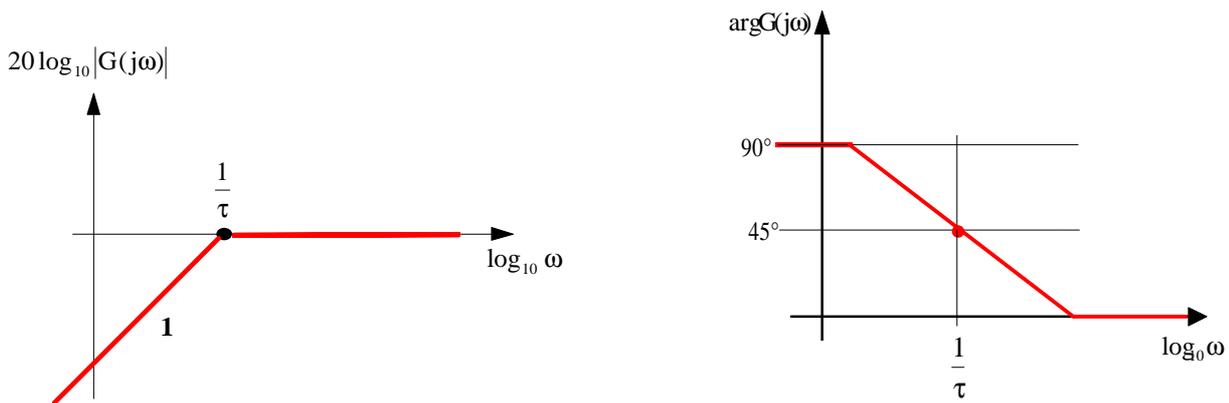
E' molto importante osservare che la rete derivatrice non può essere utilizzata semplicemente in cascata nell'anello di un sistema in retroazione, in quanto, come si vedrà tra un attimo mediante i

diagrammi di Bode, è un **filtro passa alto**, ossia un circuito che blocca la componente continua del segnale.

Passiamo all'analisi armonica del sistema: dato che anche questo sistema è asintoticamente stabile, basta porre $s=j\omega$ per ottenere la sua funzione di risposta armonica, per cui

$$G(j\omega) = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

I diagrammi di Bode di questa funzione di risposta armonica sono i seguenti:

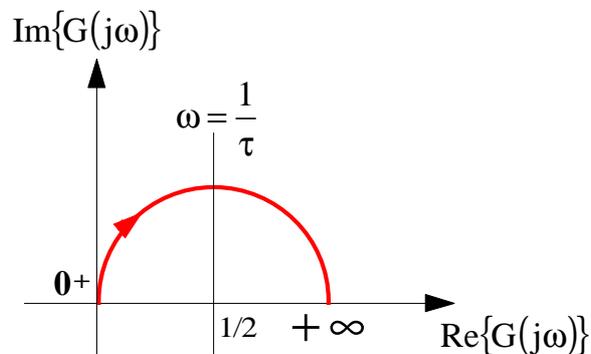


Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema non attenua né amplifica il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω maggiore di $1/\tau$; per pulsazioni inferiori di $1/\tau$, invece, c'è una attenuazione di 20dB per ogni decade di riduzione di ω : si tratta dunque, come detto prima, di un **filtro passa-alto**, ossia di un circuito che lascia inalterati, in modulo, i segnali ad alta frequenza, mentre attenua quelli a bassa frequenza.

Dal diagramma delle fasi, invece, si osserva che il sistema non opera alcuno sfasamento sul segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω sufficientemente superiore a $1/\tau$, mentre, per pulsazioni inferiori, esso introduce uno sfasamento positivo (ossia produce un anticipo di fase) con valore massimo di 90° .

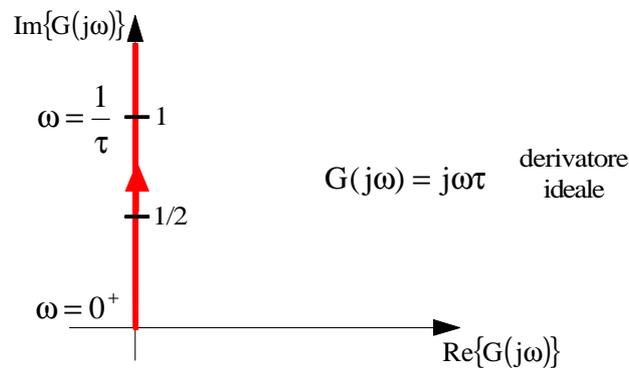
In definitiva, confrontando con i risultati ottenuti per la rete integratrice, possiamo riassumere dicendo che *le reti integratrice e derivatrice danno, rispettivamente, un ritardo ed un anticipo di fase per tutte le pulsazioni finite.*

Possiamo anche tracciare il diagramma polare di $G(j\omega)$ relativamente all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$, che è fatto nel modo seguente:



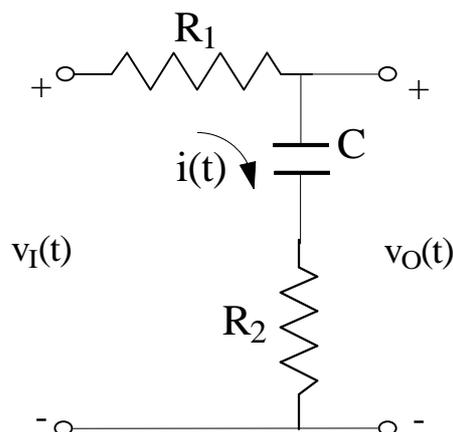
Effettuando un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, si ottiene il diagramma polare completo.

E' infine opportuno riportare il diagramma polare, sempre relativamente all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$, di un derivatore ideale:



RETE RITARDATRICE (“PHASE LAG”)

Una **rete ritardatrice** è fatta nel modo seguente:



Ricaviamo subito la funzione di trasferimento di questo sistema: ragionando sempre nel dominio del tempo, possiamo scrivere che

$$v_o(t) = v_c(t) + v_{R_2}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(T) dT + R_2 i(t)$$

dove abbiamo supposto nulle le condizioni iniziali (cioè la tensione iniziale sul condensatore).

Considerando inoltre che $i(t) = \frac{v_I(t) - v_O(t)}{R_1}$, possiamo scrivere che

$$v_o(t) = v_c(t) + v_{R_2}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_I(T) - v_O(T)}{R_1} dT + R_2 \frac{v_I(t) - v_O(t)}{R_1}$$

Se adesso passiamo al dominio di Laplace, abbiamo che

$$V_o(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s} \frac{V_I(s) - v_o(s)}{R_1} + R_2 \frac{V_I(s) - v_o(s)}{R_1}$$

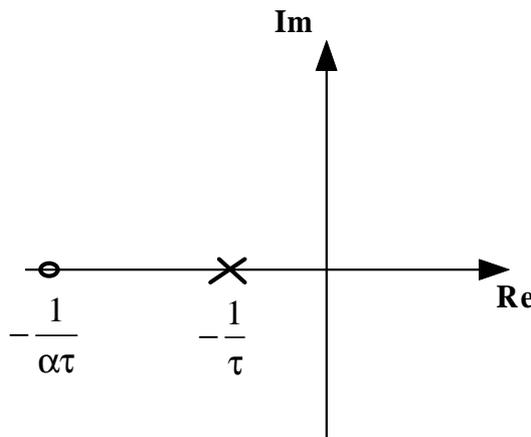
Calcolando allora il rapporto tra la tension di uscita e quella di ingresso e facendo qualche semplice passaggio algebrico, abbiamo quanto segue:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_I(s)} = \frac{\frac{1}{R_1 C s} + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{R_1 C s} + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1 + R_2 C s}{R_1 C s + R_2 C s + 1} = \frac{1 + R_2 C s}{(R_1 + R_2) C s + 1} = \frac{1 + R_2 \frac{(R_1 + R_2) C s}{R_1 + R_2}}{(R_1 + R_2) C s + 1}$$

Ponendo adesso $\tau = (R_1 + R_2)C$ e $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$, possiamo concludere che

$$G(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$

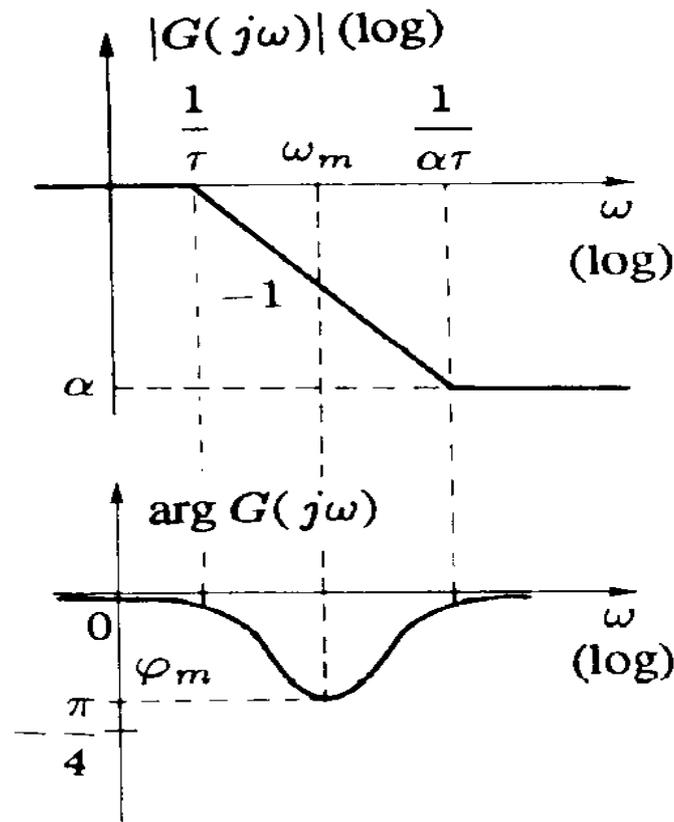
Abbiamo dunque a che fare con un sistema con un polo ed uno zero, ambedue distinti dall'origine:



Qual'è l'effetto di questo sistema sul segnale di ingresso? Per capirlo, dobbiamo determinare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica del sistema, ossia della funzione

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\alpha\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

I corrispondenti diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi è fatto nel modo seguente:



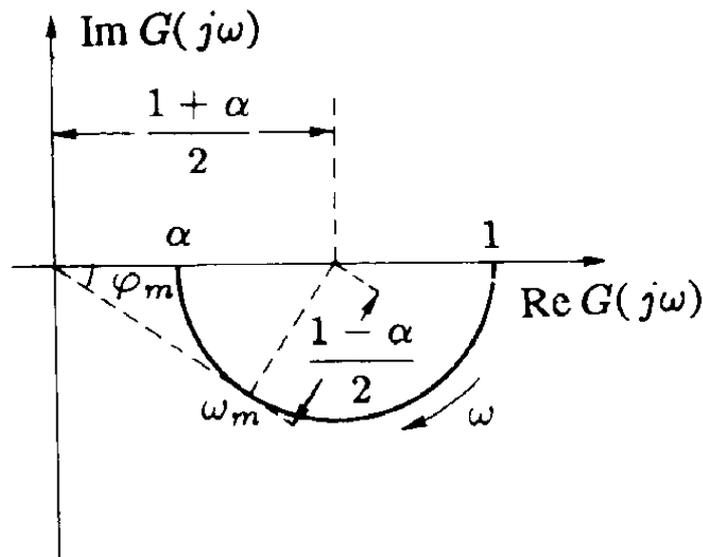
Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema non attenua né amplifica il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω inferiore a $1/\tau$; per pulsazioni superiori a $1/\tau$, invece, c'è una attenuazione di 20dB per ogni decade di aumento di ω , fino ad un valore massimo (di attenuazione) pari ad $20 \log_{10} \alpha$ per pulsazioni superiori a $1/\alpha\tau$. Si tratta, perciò, anche qui di un **filtro passa-basso**.

Dal diagramma delle fasi, invece, si osserva che il sistema non opera alcuno sfasamento sul segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω maggiore di $1/\alpha\tau$ e inferiore a $1/\tau$; per pulsazioni comprese nell'intervallo $\left[\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\alpha\tau} \right]$, il sistema introduce uno sfasamento negativo (cioè un ritardo di fase): tale sfasamento presenta un valore massimo, che vale

$$\phi_{\max} = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

in corrispondenza della pulsazione $\omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$. Questo valore della pulsazione si ottiene con il seguente ragionamento: nel diagramma di Bode delle fasi si osserva che ω_{\max} è una pulsazione intermedia ed equidistante dalle pulsazioni $1/\tau$ e $1/\alpha\tau$; data la natura logaritmica del diagramma, essa coincide pertanto con la media geometrica di tali pulsazioni.

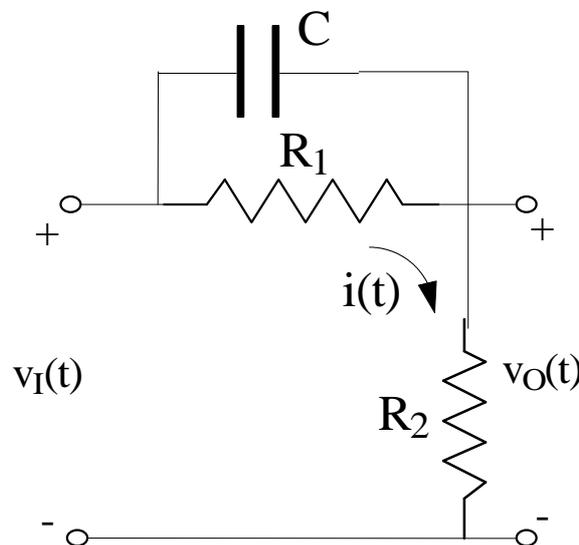
Il diagramma polare della rete ritardatrice è invece il seguente:



Dal diagramma si deduce immediatamente che il sistema introduce sempre un ritardo di fase: infatti, per pulsazioni ω positive (cioè per le pulsazioni fisiche), la $G(j\omega)$ assume sempre fase negativa.

RETE ANTICIPATRICE (“PHASE LEAD”)

La **rete anticipatrice** è senz’altro quella maggiormente impiegata per la stabilizzazione dei sistemi di controllo in retroazione. Essa è rappresentata nella figura seguente:



Per ricavare la sua funzione di trasferimento, cominciamo a ragionare sempre nel dominio del tempo: possiamo ad esempio scrivere che la tensione ai capi del condensatore vale

$$\begin{aligned}
 v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C(T) dT = \frac{1}{C} \int_0^t (i(T) - i_{R_1}(T)) dT = \frac{1}{C} \int_0^t i(T) dT - \frac{1}{C} \int_0^t i_{R_1}(T) dT = \\
 &= \frac{1}{R_2 C} \int_0^t v_O(T) dT - \frac{1}{R_1 C} \int_0^t v_C(T) dT
 \end{aligned}$$

Trasformando secondo Laplace, abbiamo dunque che

$$V_c(s) = \frac{1}{sR_2C} V_o(s) - \frac{1}{sR_1C} V_c(s) \longrightarrow V_c(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{sR_1C}} \frac{1}{sR_2C} V_o(s)$$

Applicando adesso la LKT, abbiamo che

$$V_o(s) = V_1(s) - V_c(s) = V_1(s) - \frac{1}{1 + \frac{1}{sR_1C}} \frac{1}{sR_2C} V_o(s) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{1 + sR_1C}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + sR_1C}}$$

Se poniamo $\tau = R_1C$ e $\alpha = \frac{R_1}{R_2} + 1$, possiamo concludere che la funzione di trasferimento della rete è dunque nella forma

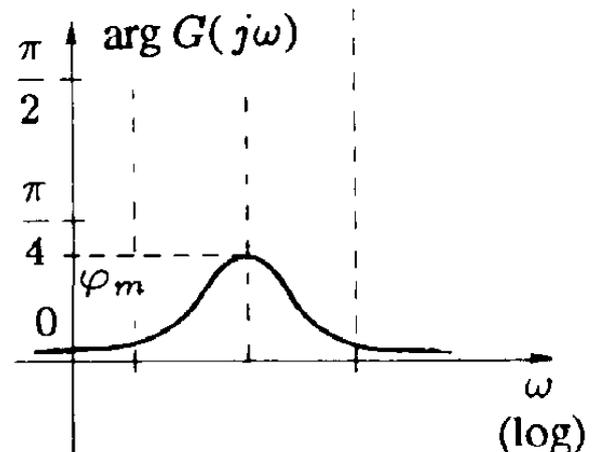
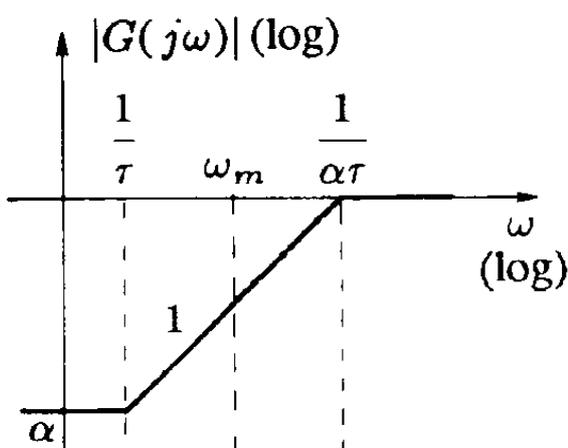
$$G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

Abbiamo perciò a che fare con un sistema con un polo (non nullo) ed uno zero (anch'esso non nullo). La cosa interessante è che, rispetto alla rete ritardatrice descritta nel paragrafo precedente, risultano scambiate le posizioni dello zero ($-1/\tau$) e del polo ($-1/\alpha\tau$).

Per comprendere quale sia l'effetto di questo sistema sul segnale di ingresso, dobbiamo determinare il diagramma di Bode della funzione di risposta armonica del sistema, ossia della funzione

$$G(j\omega) = \alpha \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}$$

I corrispondenti diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi è fatto nel modo seguente:



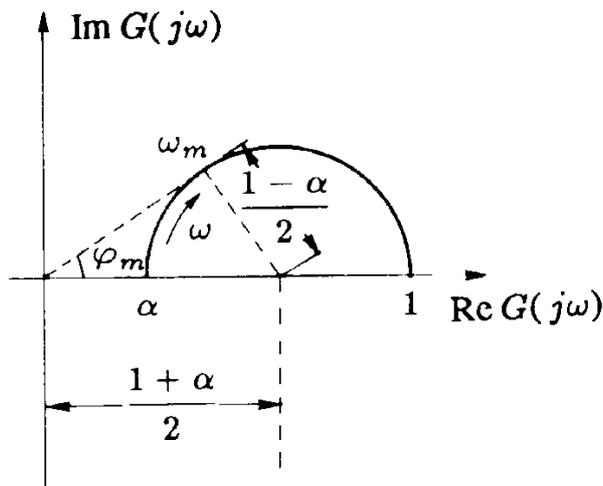
Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema non attenua né amplifica il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω superiore a $1/\alpha\tau$; per pulsazioni inferiori a $1/\alpha\tau$, invece, c'è una

attenuazione di 20dB per ogni decade di riduzione di ω , fino ad un valore massimo (di attenuazione) pari a $20 \log_{10} \alpha$ per pulsazioni inferiori a $1/\tau$. Si tratta, perciò, anche qui di un **filtro passa-alto**.

Per quanto riguarda, invece, il diagramma delle fasi, si osserva che coincide con quello della rete ritardatrice ribaltato però rispetto all'asse delle ascisse: il sistema, quindi, non opera alcuno sfasamento sul segnale in ingresso finchè esso ha pulsazione ω maggiore di $1/\alpha\tau$ e inferiore a $1/\tau$, mentre per pulsazioni comprese nell'intervallo $\left[\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\alpha\tau}\right]$, il sistema introduce uno sfasamento positivo (mentre per la rete ritardatrice era negativo), che presenta un valore massimo

$$\phi_{\max} = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \text{in corrispondenza della pulsazione} \quad \omega_{\max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.$$

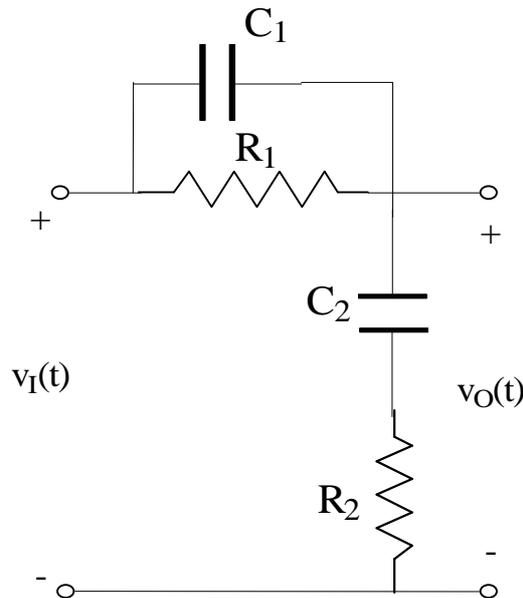
Infine, il diagramma polare di $G(j\omega)$ è il seguente:



Quando si progetta un regolatore in cui la correzione della risposta è operata da una rete anticipatrice, generalmente si ignora il fattore α presente nella funzione di trasferimento della rete: tale fattore, come visto, si traduce in una attenuazione alle basse frequenze facilmente compensabile con un corrispondente aumento del guadagno statico del regolatore. La funzione di trasferimento priva del fattore α si dice "della rete anticipatrice con ripresa del guadagno statico" ed è la reciproca di quella della rete ritardatrice.

RETE RITARDO-ANTICIPO (“LEAD-LAG”)

Una **rete ritardo-anticipo** è fatta nel modo seguente:



Con calcoli assolutamente analoghi a quelli fatti nei casi precedenti, si ottiene che

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\frac{R_1}{1 + sR_1C_1} + R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

Facendo allora qualche semplice manipolazione algebrica, si ottiene quanto segue:

$$G(s) = \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{(sR_2C_2 + 1)(sR_1C_1 + 1)}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_2C_2 + R_1C_1 + R_1C_2)s + 1}$$

Se poniamo allora $\tau_1 = R_1C_1$, $\tau_2 = R_2C_2$ e $\tau_{12} = R_1C_2$, possiamo concludere che la funzione di trasferimento della rete è dunque nella forma

$$G(s) = \frac{(s\tau_2 + 1)(s\tau_1 + 1)}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})s + 1}$$

Abbiamo perciò a che fare con un sistema con due poli (non nulli) e due zeri (anch'essi non nullo). Andiamo allora a valutare tali singolarità, al fine di capire, se possibile, la loro posizione nel piano di Gauss.

Per quanto riguarda gli zeri, si tratta evidentemente di $z_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ e $z_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ e sono entrambi a parte reale negativa, ossia situati nel semipiano sinistro.

Per quanto riguarda i poli, invece, dobbiamo risolvere l'equazione

$$\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})s + 1 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono le seguenti:

$$p_{1/2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})^2 - 4\tau_1 \tau_2}}{2\tau_1 \tau_2}$$

Per capire se i due poli sono reali o immaginari, ci basta determinare il segno della quantità sotto radice:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})^2 - 4\tau_1 \tau_2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_{12}^2 + 2\tau_1 \tau_2 + 2\tau_1 \tau_{12} + 2\tau_{12} \tau_2 - 4\tau_1 \tau_2 = \\ &= \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_{12}^2 + 2\tau_1 \tau_{12} + 2\tau_{12} \tau_2 - 4\tau_1 \tau_2 \end{aligned}$$

Questa la possiamo anche riscrivere nella forma seguente:

$$\Delta = (\tau_1 - \tau_2)^2 + \tau_{12}(\tau_{12} + 2\tau_1 + 2\tau_2)$$

Tutte le quantità presenti sono positive, per cui $\Delta > 0$, da cui deduciamo che i due poli sono reali.

Possiamo ricavare anche qualche altra informazione a proposito della posizione dei due poli: infatti, data una equazione di secondo grado nella forma $as^2 + bs + c = 0$, ci ricordiamo che il prodotto delle due radici dell'equazione è pari al rapporto c/a , per cui, nel nostro caso, deduciamo che

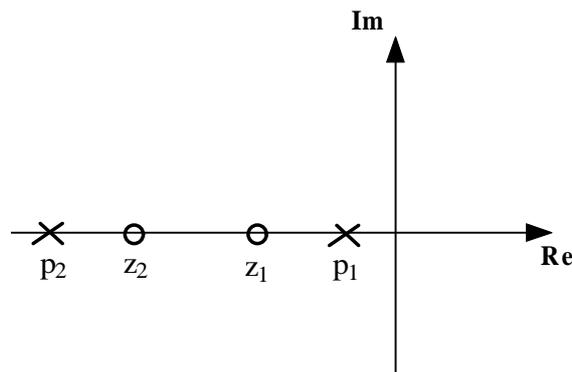
$$p_1 p_2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2}$$

Dato che le due costanti di tempo sono positive, anche il prodotto dei due poli è positivo, il che significa, trattandosi di quantità reali, che essi sono o entrambi positivi (semipiano destro) o entrambi negativi (semipiano sinistro).

Osserviamo che anche il prodotto tra gli zeri vale $1/\tau_1 \tau_2$, per cui

$$p_1 p_2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = z_1 z_2 \longrightarrow \boxed{\frac{p_1}{z_1} = \frac{z_2}{p_2}}$$

In base a questa relazione, una volta fissati i due zeri (che abbiamo visto essere reali) sul piano di Gauss, i due poli sono o interni o esterni al segmento congiungente gli stessi zeri:



In realtà, si dimostra che i due poli non possono essere interni, per cui la situazione è necessariamente quella indicata nella figura precedente. La mappa indicata in tale figura indica che la rete in esame non è altro che la cascata tra una rete anticipatrice ed una rete ritardatrice.

Sempre a proposito dei poli e degli zeri di $G(s)$, è possibile scrivere i polinomi a numeratore ed a denominatore in forma non fattorizzata: ponendo infatti

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \qquad \delta' = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1 \qquad \delta = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > \delta' > 1$$

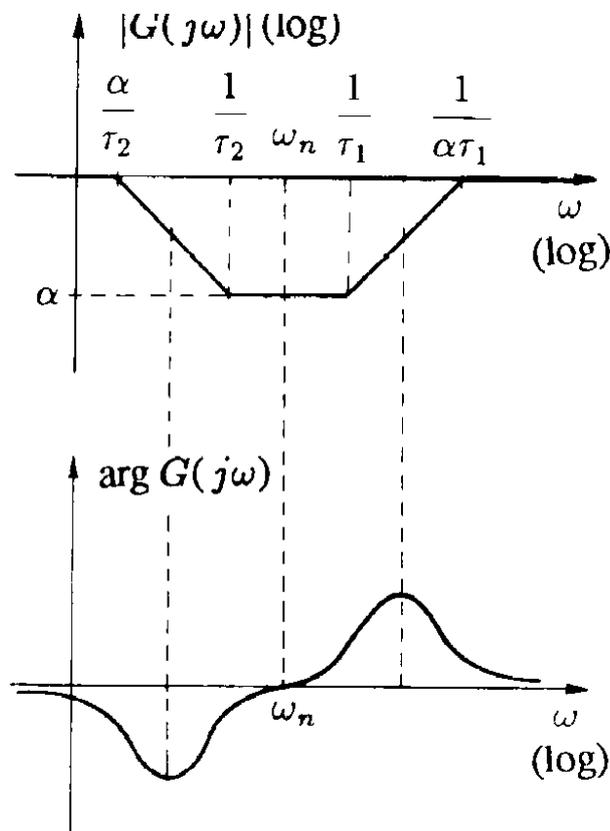
si ottiene la funzione di trasferimento nella forma seguente:

$$G(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\delta' \frac{s}{\omega_n} + 1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

Cerchiamo adesso di comprendere quale sia l'effetto di questo sistema sul segnale di ingresso. A tal fine, dobbiamo determinare il diagramma di Bode della funzione di risposta armonica del sistema:

$$G(j\omega) = \frac{(j\tau_2\omega + 1)(j\tau_1\omega + 1)}{(1 - \tau_1\tau_2\omega^2) + j(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})\omega}$$

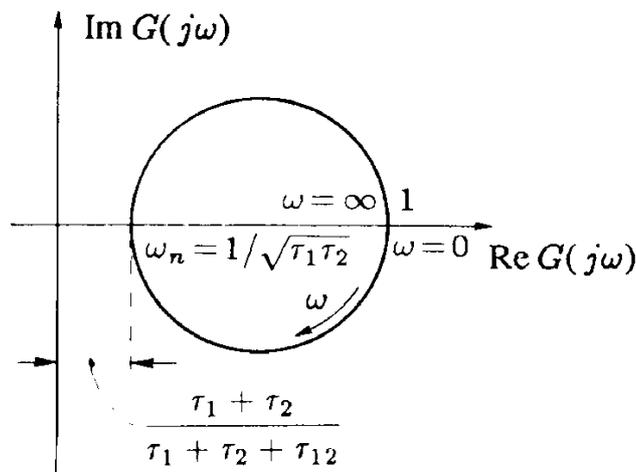
I corrispondenti diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi è fatto nel modo seguente:



Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema non attenua né amplifica il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω esterna all'intervallo $\left[\frac{\alpha}{\tau_2}, \frac{1}{\alpha\tau_1} \right]$; per comprese in tale intervallo, invece, c'è una attenuazione che raggiunge il valore massimo, pari ad α , per pulsazioni comprese nell'intervallo $\left[\frac{1}{\tau_2}, \frac{1}{\tau_1} \right]$.

Per quanto riguarda, invece, il diagramma delle fasi, si osserva che è abbastanza complesso: in generale, si osserva la rete introduce un ritardo di fase sui segnali con pulsazione ω inferiore alla pulsazione naturale ω_n , mentre introduce un anticipo di fase sui segnali con pulsazione superiore alla pulsazione naturale.

Infine, il diagramma polare di $G(j\omega)$ è fatto nel modo seguente:



Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>