Appunti di Antenne
Capitolo 5 - Ottica geometrica (I)

Introduzione

Raggi e tubi di flusso (individuati dai raggi) sono concetti utili per studiare la propagazione delle onde elettromagnetiche in **mezzi isotropi ma non omogenei** (cioè con caratteristiche elettriche variabili punto per punto) e per studiare inoltre l'irradiazione da parte delle antenne ad apertura costituite da **riflettori** o da **lenti alle microonde**.

L'**ottica geometrica** è una teoria approssimata, derivata dalle equazioni di Maxwell nel caso particolare di frequenze molto elevate (e quindi lunghezze d'onda molto basse) e di indice di rifrazione costante (o lentamente variabile) a grandi distanze dalla sorgente.

Lo studio, tramite l'ottica geometrica, del campo irradiato da una sorgente consente di affrontare, in maniera relativamente semplice, situazioni con geometria molto complessa: tale complessità deriva sia dal fatto che, nella realtà, esistono innumerevoli ostacoli alla propagazione sia dalla presenza di mezzi non sempre omogenei (anche se comunque isotropi) come ad esempio la stessa **atmosfera terrestre**.

L'utilizzo dell'ottica geometrica consiste sostanzialmente nel considerare un certo numero di percorsi che uniscono il trasmettitore (TX) al ricevitore (RX). In pratica, vengono quindi usati gli stessi concetti tipici della propagazione dei **raggi luminosi** ([1]).

[1] A tal proposito, ricordiamo che l' **ottica geometrica** è una metodologia del tutto generale, che diventa poi **ottica fisica** se si considerano specificamente *fenomeni luminosi*.

Premesse teoriche fondamentali

L'uso dell'ottica geometrica presuppone l'adozione di una ipotesi fondamentale, in base alla quale il campo elettrico ed il campo magnetico che si stanno propagando in spazio libero devono essere esprimibili tramite due **espansioni in serie** del tipo seguente:

$$\vec{E}(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m} e^{-jk_0 L(\vec{r})}$$

$$\vec{H}(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\vec{H}_m(P)}{\omega^m} e^{-jk_0 L(\vec{r})}$$

Questa espressione è valida per un **campo monocromatico**, ossia caratterizzato da una sola frequenza (o una sola lunghezza d'onda, dato che $\lambda=c/f$).

In questa espressione, P è il generico punto in cui stiamo valutando il campo (individuato dal raggio vettore $\vec{r}$ rispetto all'origine del sistema di riferimento in uso) e $\omega=2\pi f$ è la pulsazione angolare. La funzione indicata con $L(\vec{r})$ (detta **funzione iconale**) è evidentemente rappresentativa di un fronte d'onda, ossia di una superficie su cui il campo assume la stessa fase; in particolare:

se L è reale → equazione del fronte d'onda: $L(\vec{r}) = \text{cost}$

se L è complesso → equazione del fronte d'onda: $\text{Re}\{L(\vec{r})\} = \text{cost}$

Nel caso, ad esempio, di un'onda piana, $L(\vec{r})$ corrisponderà ad un piano ortogonale alla direzione di propagazione.

La cosa che risulta più evidente in quegli sviluppi in serie è che i singoli termini $\vec{E}_m(P)$ e $\vec{H}_m(P)$ sono "pesati" da un fattore $1/\omega^m$, che evidentemente diminuisce all'aumentare della frequenza considerata e del valore stesso di m. In altre parole, a parità di m, i termini $\vec{E}_m(P)$ e $\vec{H}_m(P)$ diminuiscono di importanza all'aumentare di ω e, analogamente, a parità di ω, i termini $\vec{E}_m(P)$ e $\vec{H}_m(P)$ sono sempre meno importanti all'aumentare di m.

Allora, risulta evidente che, se consideriamo onde elettromagnetiche ad alta frequenza ($\omega\to\infty$), gli unici termini dello sviluppo in serie che danno un contributo significativo sono quelli per m=0 (dato che $\omega^0=1$), per cui scriviamo, per tali frequenze, che

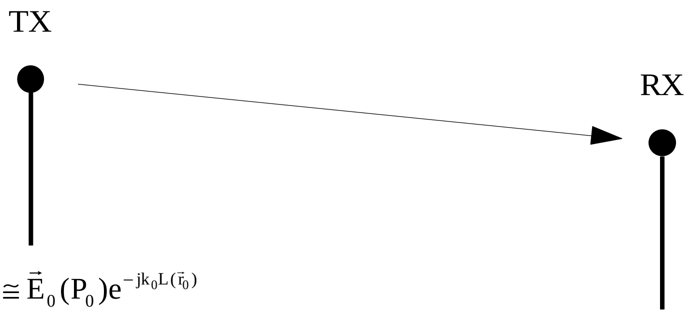
$$\vec{E}(P) \cong \vec{E}_0(P) e^{-jk_0 L(\vec{r})}$$

$$\vec{H}(P) \cong \vec{H}_0(P) e^{-jk_0 L(\vec{r})}$$

A $\vec{E}_0(P)$ e $\vec{H}_0(P)$ si da quindi il nome di **termini asintotici**. Essi sono gli unici realmente importanti in tutti quei casi in cui la lunghezza d'onda λ è molto minore delle dimensioni geometriche degli oggetti presenti. Essi corrispondono dunque ai nostri **raggi**, intendendo appunto con questo termine semplicemente *onde elettromagnetiche ad alta frequenza*.

Detto questo, si pone il seguente problema: supponiamo che la **sorgente** del campo elettromagnetico si trovi nel generico punto P_0, nel quale perciò scriveremo che

$$\text{sorgente} \longrightarrow \begin{cases} \vec{E}(P_0) \cong \vec{E}_0(P_0) e^{-jk_0 L(\vec{r}_0)} \\ \vec{H}(P_0) \cong \vec{H}_0(P_0) e^{-jk_0 L(\vec{r}_0)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{E}(P_0) \cong \vec{E}_0(P_0)e^{-jk_0L(\vec{r}_0)} \\ \vec{H}(P_0) \cong \vec{H}_0(P_0)e^{-jk_0L(\vec{r}_0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(P) \cong \vec{E}_0(P)e^{-jk_0L(\vec{r})} \\ \vec{H}(P) \cong \vec{H}_0(P)e^{-jk_0L(\vec{r})} \end{cases}$$

Allora, supponendo di conoscere $\vec{E}_0(P_0)$ e $\vec{H}_0(P_0)$, è evidente che la valutazione del campo in corrispondenza del generico punto P presuppone la determinazione sia di $\vec{E}_0(P)$ e $\vec{H}_0(P)$ sia della funzione $L(\vec{r})$. Tale determinazione passa per la risoluzione di due distinte equazioni:

- il calcolo di $L(\vec{r})$ si effettua risolvendo la cosiddetta **equazione iconale**;
- il calcolo di $\vec{E}_0(P)$ e $\vec{H}_0(P)$ si effettua risolvendo la cosiddetta **equazione del trasporto**.

Prima di proseguire, facciamo notare che i termini asintotici $\vec{E}_0(P)$ e $\vec{H}_0(P)$ non soddisfano le equazioni di Maxwell proprio perchè rappresentano solo una parte del campo totale. Essi soddisfano le equazioni di Maxwell solo con una certa approssimazione (tanto migliore quanto più alta è la frequenza di lavoro), dovuta appunto al fatto di trascurare tutti gli altri termini che danno contributo al campo totale.

Equazione iconale

Cominciamo a ricavare l'equazione iconale. Il punto di partenza sono le equazioni di Maxwell in una regione di spazio isotropo, non omogeneo e privo di sorgenti (nel senso che stiamo ipotizzando che tali sorgenti siano concentrate nella regione del trasmettitore, mentre invece noi stiamo considerando un generico punto nella regione del ricevitore): abbiamo perciò (in regime sinusoidale) che

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \\ &\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} \\ &\nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ &\nabla \bullet \vec{D} = 0 \\ &\vec{D} = \varepsilon(r)\vec{E} \\ &\vec{B} = \mu(r)\vec{H} \end{aligned}$$

In queste espressioni facciamo notare che la dipendenza di ε e μ da r, cioè sostanzialmente dalle coordinate spaziali, dipende proprio dal fatto che lo spazio è ritenuto **non omogeneo**.

Nelle prime due equazioni possiamo sostituire le espressioni dei campi elettrico e magnetico in termini di espansione in serie:

$$\nabla\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right]=-j\omega\mu(r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{H}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}$$

$$\nabla\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{H}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right]=j\omega\varepsilon(r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}$$

Data la perfetta *dualità* delle equazioni, possiamo sicuramente ragionare su una sola di esse, ad esempio la seconda. In questa equazione, possiamo cominciare dal primo membro portando il rotore all'interno della sommatoria:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\nabla\times\left[\frac{\vec{H}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right]=j\omega\varepsilon(r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}$$

Calcolando il rotore con i metodi ben noti, otteniamo

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\times\vec{H}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}+\frac{\nabla e^{-jk_0L(\vec{r})}\times\vec{H}_m(P)}{\omega^m}\right]=j\omega\varepsilon(r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}$$

Dato che $\nabla e^{-jk_0L(\vec{r})}=-jk_0\cdot\nabla L(\vec{r})\cdot e^{-jk_0L(\vec{r})}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-jk_0L(\vec{r})}}{\omega^m}\left[\nabla\times\vec{H}_m(P)-jk_0\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_m(P)\right)\right]=j\omega\varepsilon(r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}$$

A questo punto, possiamo evidentemente semplificare il termine $e^{-jk_0L(\vec{r})}$ comune ad entrambi i membri. Inoltre, data l'**ortogonalità** delle funzioni $1/\omega^m$, possiamo senz'altro affermare che l'uguaglianza dei due membri equivale all'uguaglianza tra i rispettivi termini delle due sommatorie (cioè l'uguaglianza dei termini, nelle due sommatorie, corrispondenti ad eguali potenze di ω). Nell'individuare le varie uguaglianze, dobbiamo ricordarci che a secondo membro compare un termine ω a numeratore, così come a primo membro compare il termine $k_0=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi f}{c}=\frac{\omega}{c}$. Conviene allora prima riscrivere l'equazione in base a queste osservazioni:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\nabla\times\vec{H}_m(P)}{\omega^m}-j\frac{1}{c\omega^{m-1}}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_m(P)\right)\right]=j\varepsilon(r)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^{m-1}}$$

Per m=0, otteniamo

$$\left[\nabla\times\vec{H}_0(P)-j\frac{\omega}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)\right)\right]=j\varepsilon(r)\cdot\omega\vec{E}_0(P)$$

il che significa che la prima uguaglianza da imporre è

$$-j\frac{\omega}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)\right)=j\varepsilon(r)\cdot\omega\vec{E}_0(P)$$

Per m=1, otteniamo invece

$$\frac{\nabla\times\vec{H}_1(P)}{\omega}-j\frac{1}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_1(P)\right)=j\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_1(P)$$

Tenendo conto che nell'uguaglianza per m=0 compariva il termine $\nabla\times\vec{H}_0(P)$, deduciamo che la seconda uguaglianza da imporre (quella cioè relativa a termini in cui non compare ω esplicitamente) è

$$\nabla\times\vec{H}_0(P)-j\frac{1}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_1(P)\right)=j\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_1(P)$$

A questo punto dovremmo procedere infinite altre volte. Al contrario, dato che ci interessa solo la <u>soluzione asintotica</u>, possiamo fermarci e considerare solo le prime due equazioni ottenute, vale a dire:

$$\text{dalla 1° equazione di Maxwell} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} -j\frac{\omega}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)\right)=j\omega\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P) \\ \nabla\times\vec{H}_0(P)-j\frac{1}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_1(P)\right)=j\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_1(P) \end{cases}$$

Ripetendo lo stesso identico ragionamento per l'altra equazione di Maxwell, si arriva ad un sistema di due equazioni perfettamente duali:

$$\text{dalla 2° equazione di Maxwell} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} -j\frac{\omega}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)\right)=-j\omega\mu(r)\cdot\vec{H}_0(P) \\ \nabla\times\vec{E}_0(P)-j\frac{1}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_1(P)\right)=-j\mu(r)\cdot\vec{H}_1(P) \end{cases}$$

Possiamo inoltre provare a fare qualche semplificazione. Ad esempio, ricordiamoci che, nelle ipotesi che stiamo facendo, risulta $\nabla\bullet\vec{D}=0$, dove $\vec{D}=\varepsilon(r)\vec{E}$: sostituendo ed esplicitando la divergenza, otteniamo

$$\varepsilon(r)\nabla\bullet\vec{E}+\vec{E}\bullet\nabla\varepsilon(r)=0$$

Possiamo adesso sostituire anche in questa equazione l'espressione del campo elettrico in termini di sviluppo in serie ad infiniti termini:

$$\varepsilon(r)\nabla\bullet\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right)+\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right)\bullet\nabla\varepsilon(r)=0$$

Portando la divergenza all'interno della prima sommatoria e calcolando tale divergenza, otteniamo

$$\varepsilon(r)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\nabla\bullet\vec{E}_m(P)-jk_0\vec{E}_m(P)\bullet\nabla L(\vec{r})}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right)+\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right)\bullet\nabla\varepsilon(r)=0$$

In questa espressione, possiamo ancora una volta eliminare il termine esponenziale comune ai due membri e possiamo inoltre sfruttare nuovamente l'ortogonalità per uguagliare i termini corrispondenti nelle due sommatorie:

$$\varepsilon(r)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\nabla\bullet\vec{E}_m(P)-jk_0\vec{E}_m(P)\bullet\nabla L(\vec{r})}{\omega^m}\right)+\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}\right)\bullet\nabla\varepsilon(r)=0$$

$$m=0\longrightarrow\varepsilon(r)\left[\nabla\bullet\vec{E}_0(P)-jk_0\vec{E}_0(P)\bullet\nabla L(\vec{r})\right]+\vec{E}_0(P)\bullet\nabla\varepsilon(r)=0$$

$$m=1\longrightarrow\varepsilon(r)\left(\frac{\nabla\bullet\vec{E}_1(P)-jk_0\vec{E}_1(P)\bullet\nabla L(\vec{r})}{\omega}\right)+\frac{\vec{E}_1(P)}{\omega}\bullet\nabla\varepsilon(r)=0$$

Deduciamo perciò, tenendo conto sempre che $k_0=\omega/c$, che le due uguaglianze da imporre sono

$$\begin{cases}-jk_0\vec{E}_0(P)\bullet\nabla L(\vec{r})=0\\[2ex]\varepsilon(r)\left[\nabla\bullet\vec{E}_0(P)-j\dfrac{k_0}{\omega}\vec{E}_1(P)\bullet\nabla L(\vec{r})\right]+\vec{E}_0(P)\bullet\nabla\varepsilon(r)=0\end{cases}$$

Procedendo in modo del tutto analogo sulla base del fatto che $\nabla\bullet\vec{B}=0$ e $\vec{B}=\mu(r)\vec{H}$, si ottengono (per dualità) le seguenti altre due equazioni:

$$\begin{cases}-jk_0\vec{H}_0(P)\bullet\nabla L(\vec{r})=0\\[2ex]\mu(r)\left[\nabla\bullet\vec{H}_0(P)-j\dfrac{k_0}{\omega}\vec{H}_1(P)\bullet\nabla L(\vec{r})\right]+\vec{H}_0(P)\bullet\nabla\mu(r)=0\end{cases}$$

Vediamo adesso di comprendere cosa ci dicono le varie uguaglianze ottenute. Ad esempio, le due condizioni $\vec{E}_0(P)\bullet\nabla L(\vec{r})=0$ e $\vec{H}_0(P)\bullet\nabla L(\vec{r})=0$ ci dicono evidentemente che il vettore $\nabla L(\vec{r})$ è ortogonale a $\vec{H}_0(P)$ e $\vec{E}_0(P)$. Unendo questa informazione a quella fornita dalle equazioni trovate prima, nelle quali compaiono le espressioni dei prodotti vettoriali $\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)$ e $\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)$, si deduce dunque che i vettori $\nabla L(\vec{r})$, $\vec{H}_0(P)$, $\vec{E}_0(P)$ formano una **terna ortogonale**.

Inoltre, se riprendiamo ad esempio l'equazione $-j\frac{\omega}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)\right)=-j\omega\mu(r)\cdot\vec{H}_0(P)$, prima ricavata partendo dalla seconda equazione di Maxwell, e moltiplichiamo vettorialmente ambo i membri per $\nabla L(\vec{r})$, otteniamo

$$-j\frac{\omega}{c}\nabla L(\vec{r})\times\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)\right)=-j\omega\mu(r)\cdot\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)$$

Il prodotto vettoriale così ottenuto a secondo membro si può esplicitare in base all'altra equazione $-j\frac{\omega}{c}\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)\right)=j\omega\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)$, ottenuta partendo dalla prima equazione di Maxwell: abbiamo perciò che

$$\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)=-c\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)\longrightarrow\qquad -j\frac{\omega}{c}\nabla L(\vec{r})\times\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)\right)=-j\omega\mu(r)\cdot\left(-c\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)\right)$$

Riarrangiando quest'ultima equazione, otteniamo

$$\nabla L(\vec{r})\times\left(\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)\right)=-c^2\mu(r)\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)$$

Adesso, a primo membro abbiamo un doppio prodotto vettoriale che possiamo esplicitare secondo la nota regola $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)\vec{C}$: nel nostro caso, abbiamo perciò che

$$\left(\nabla L(\vec{r})\bullet\vec{E}_0(P)\right)\nabla L(\vec{r})-\left(\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla L(\vec{r})\right)\vec{E}_0(P)=-c^2\mu(r)\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)$$

Del resto, la prima parentesi risulta nulla in quanto i vettori coinvolti nel prodotto scalare sono ortogonali; di conseguenza, resta l'uguaglianza

$$-\left(\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla L(\vec{r})\right)\vec{E}_0(P)=-c^2\mu(r)\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)$$

Qui è possibile semplificare il termine comune $\vec{E}_0(P)$ e quindi, tenendo conto anche che il quadrato della velocità della luce è $c^2=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$, possiamo concludere che

$$\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla L(\vec{r})=\frac{\mu(r)\varepsilon(r)}{\mu_0\varepsilon_0}$$

Il termine a secondo membro non è altro, per definizione, che il quadrato dell'**indice di rifrazione n(r)** del mezzo considerato, variabile con r essendo il mezzo non omogeneo: scriviamo perciò che

$$\boxed{\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla L(\vec{r})=n^2(r)}$$

Questa equazione, nella quale l'unica incognita è $L(\vec{r})$, è la cosiddetta **equazione iconale**. Noto l'andamento di μ ed ε nello spazio considerato, possiamo provare a risolvere questa equazione per trovare $L(\vec{r})$. Fatto questo, il passo successivo è quello di andare a risolvere l'**equazione del trasporto** (di cui ci occupiamo nel prossimo paragrafo), in modo da poter risalire al campo elettromagnetico (asintotico) nel generico punto di osservazione P a partire dalla conoscenza del campo nel generico punto sorgente P_0.

Equazione del trasporto

Ripartiamo nuovamente dalle prime due equazioni di Maxwell, che abbiamo visto essere nella forma

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu(r)\vec{H}$$
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon(r)\vec{E}$$

Calcoliamo il rotore di ambo i membri della prima equazione: otteniamo

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\nabla \times \left(\mu(r)\vec{H}\right)$$

Esplicitando il rotore di $\mu(r)\vec{H}$, abbiamo che

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\left(\mu(r)\nabla \times \vec{H} + \vec{H} \times \nabla\mu(r)\right)$$

Sostituendo ora il rotore del campo magnetico dato dalla seconda equazione di Maxwell e l'espressione del campo magnetico ottenibile dalla prima equazione di Maxwell, abbiamo che

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\left[\mu(r)\left(j\omega\varepsilon(r)\vec{E}\right) + \left(\frac{1}{-j\omega\mu(r)}\nabla \times \vec{E}\right) \times \nabla\mu(r)\right]$$

Riarrangiando questa equazione, otteniamo che

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2\mu(r)\varepsilon(r)\vec{E} + \frac{1}{\mu(r)}\left(\nabla \times \vec{E}\right) \times \nabla\mu(r)$$

Adesso, sostituiamo al posto del campo elettrico la sua espressione in termini di sviluppo in serie ad infiniti termini:

$$\nabla \times \nabla \times \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right) = \omega^2\mu(r)\varepsilon(r)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})} + \frac{1}{\mu(r)}\left[\nabla \times \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\vec{E}_m(P)}{\omega^m}e^{-jk_0L(\vec{r})}\right)\right] \times \nabla\mu(r)$$

Questa equazione necessita evidentemente di ulteriori passaggi analoghi a quelli fatti nel precedente paragrafo per giungere all'equazione iconale. Dopo tali passaggi si arriva, per quanto riguarda il campo elettrico, alla seguente espressione:

$$\boxed{\left(\nabla L(\vec{r}) \bullet \nabla\right) \cdot \vec{E}_0(P) + \frac{1}{2}\nabla^2 L(\vec{r}) \cdot \vec{E}_0(P) + \left(\vec{E}_0(P) \bullet \nabla \log n(r)\right) \cdot \nabla L(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\nabla L(\vec{r}) \bullet \nabla \log\mu(r)\right)\vec{E}_0(P)}$$

dove ricordiamo che l'indice di rifrazione è $n(r) = \sqrt{\frac{\mu(r)\varepsilon(r)}{\mu_0\varepsilon_0}}$ e che abbiamo usato la seguente simbologia:

$$\left(\vec{A} \bullet \nabla\right)\vec{B} = A_X\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + A_Y\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + A_Z\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}$$

Per il campo magnetico abbiamo una equazione evidentemente duale a quella appena riportata:

$$\boxed{(\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla)\cdot\vec{H}_0(P)+\frac{1}{2}\nabla^2 L(\vec{r})\cdot\vec{H}_0(P)+\left(\vec{H}_0(P)\bullet\nabla\log n(r)\right)\cdot\nabla L(\vec{r})=\frac{1}{2}(\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla\log\varepsilon(r))\vec{H}_0(P)}$$

Abbiamo dunque ottenuto l'**equazione del trasporto per il campo elettrico** e l'**equazione del trasporto per il campo magnetico**.

Considerazioni varie

Riprendiamo adesso l'equazione iconale:

$$\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla L(\vec{r})=n^2(r)$$

La **funzione iconale** $\nabla L(\vec{r})$ è un vettore e quindi avrà una sua direzione. Scegliamo allora di identificare questa direzione tramite un versore $\vec{s}$. In pratica, <u>$\vec{s}$ è la direzione del raggio in esame</u>. Possiamo allora esprimere l'equazione iconale nella forma

$$\boxed{\nabla L(\vec{r})=|n(r)|\cdot\vec{s}}$$

<u>Riguardo l'indice di rifrazione, nel caso più generale possibile si tratta di un numero complesso</u>: infatti, se consideriamo il mezzo in questione come affetto da **perdite**, possiamo scrivere che

$$\begin{cases}\mu(r)=\mu_r(r)+j\mu_i(r)\\ \varepsilon(r)=\varepsilon_r(r)+j\varepsilon_i(r)\end{cases}\longrightarrow n(r)=\sqrt{\frac{\mu(r)\varepsilon(r)}{\mu_0\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{(\mu_r(r)\varepsilon_r(r)-\mu_i(r)\varepsilon_i(r))+j(\mu_i(r)\varepsilon_r(r)+\mu_r(r)\varepsilon_i(r))}{\mu_0\varepsilon_0}}$$

e quindi

$$n^2(r)=\frac{\mu_r(r)\varepsilon_r(r)-\mu_i(r)\varepsilon_i(r)}{\mu_0\varepsilon_0}+j\frac{\mu_i(r)\varepsilon_r(r)+\mu_r(r)\varepsilon_i(r)}{\mu_0\varepsilon_0}$$

Allora, nell'equazione iconale nella forma $\nabla L(\vec{r})\bullet\nabla L(\vec{r})=n^2(r)$, è evidente che anche il primo membro deve risultare complesso, il che è possibile solo se anche il versore $\vec{s}$ è complesso, ossia ha espressione del tipo $\boxed{\vec{s}=\vec{s}_r+j\vec{s}_i}$. Essendo $\vec{s}$ la direzione del raggio in esame, l'avere una parte reale ed una parte immaginaria significa che c'è una direzione reale di propagazione ed una direzione immaginaria che tiene conto delle perdite.

Al contrario, in **assenza di perdite** (cioè $\mu_i=\varepsilon_i=0$), risulta semplicemente $n^2(r)=\frac{\mu_r(r)\varepsilon_r(r)}{\mu_0\varepsilon_0}$ e quindi anche $\vec{s}$ presenta solo la parte reale. In questo caso, l'equazione iconale si può scrivere semplicemente come

$$\nabla L(\vec{r})=n(r)\cdot\vec{s}$$

Passiamo adesso ad un discorso più spiccatamente energetico. Nel paragrafo in cui abbiamo ricavato l'equazione iconale, siamo anche pervenuti, partendo dalle prime due equazioni di Maxwell, alle seguenti due equazioni:

$$\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P) = -c\cdot\varepsilon(r)\cdot\vec{E}_0(P)$$
$$\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P) = c\cdot\mu(r)\cdot\vec{H}_0(P)$$

Da queste possiamo perciò esplicitare l'espressione di ciascun termine di campo asintotico in funzione del rotore dell'altro:

$$\vec{E}_0(P) = -\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\nabla L(\vec{r})\times\vec{H}_0(P)$$
$$\vec{H}_0(P) = \frac{1}{c\cdot\mu(r)}\nabla L(\vec{r})\times\vec{E}_0(P)$$

Possiamo allora sfruttare queste due espressioni per calcolare il vettore di Poynting nel generico punto P, ossia la densità di potenza (totale) disponibile in tale punto: applicando la classica definizione, abbiamo che

$$p(P) = \frac{1}{2}E_0(P)\times H_0^*(P) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\nabla L(r)\times H_0(P)\right)\times H_0^*(P) =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\left(\nabla L(r)\times H_0(P)\right)\ \ H^*(P)$$

Utilizzando ancora una volta la regola $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)\vec{C}$, otteniamo che

$$\vec{p}(P) = -\frac{1}{2}\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\left[-\left(\vec{H}_0^*(P)\bullet\vec{H}_0(P)\right)\nabla L(\vec{r}) + \left(\vec{H}_0^*(P)\bullet\nabla L(\vec{r})\right)\vec{H}_0(P)\right]$$

D'altra parte, sappiamo che il campo magnetico è ortogonale al vettore $\nabla L(\vec{r})$, per cui il secondo prodotto scalare scompare, mentre il primo si riduce semplicemente al prodotto ordinario tra lo stesso $\nabla L(\vec{r})$ ed il modulo quadro del campo magnetico:

$$\vec{p}(P) = \frac{1}{2}\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\cdot\left|\vec{H}_0(P)\right|^2\cdot\nabla L(\vec{r})$$

Adesso, utilizzando l'equazione iconale per esprimere $\nabla L(\vec{r})$, nel caso generico di un mezzo con perdite abbiamo che

$$\vec{p}(P) = \frac{1}{2}\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\cdot\left|\vec{H}_0(P)\right|^2\cdot\left|n(r)\right|\cdot\left(\vec{s}_r + j\vec{s}_i\right)$$

In base a questa espressione, il flusso di potenza presenta una **direzione reale**, rappresentativa della potenza attiva che si propaga nello spazio, ed una **direzione immaginaria**, rappresentativa della potenza che si dissipa durante la propagazione. Se invece supponiamo il mezzo privo di perdite, otteniamo

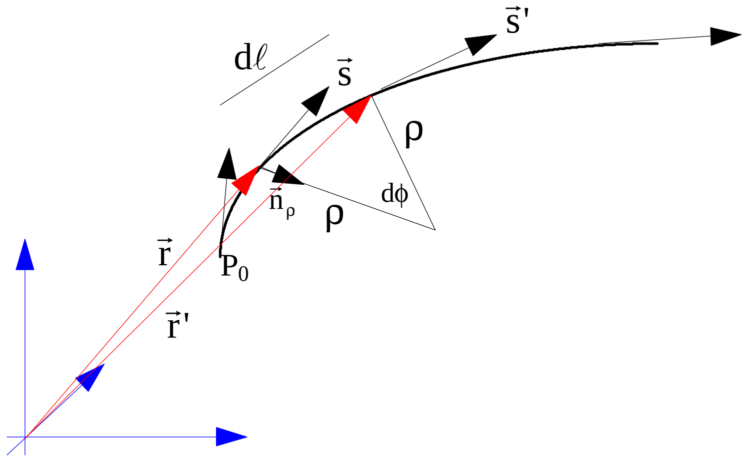
$$\vec{p}(P) = \frac{1}{2}\frac{1}{c\cdot\varepsilon(r)}\cdot\left|\vec{H}_0(P)\right|^2\cdot n(r)\cdot\vec{s}_r$$

dove ovviamente abbiamo adesso a che fare solo con una potenza attiva. In base a questa espressione, la direzione del flusso di potenza è, punto per punto, la stessa del raggio $\vec{s}_r$ ed è per questo che ogni flusso di potenza prende propriamente il nome di **raggio**.

Forme alternative dell'equazione iconale

In certe situazioni reali, l'equazione iconale $\nabla L(\vec{r}) = |n(r)|\cdot\vec{s}$ si può esprimere in alcune forme più convenienti, specifiche per il tipo di geometria in esame.

Consideriamo perciò un generico raggio del tipo riportato nella figura seguente:



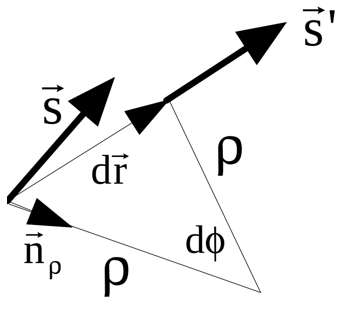
In ogni punto, a partire dal punto sorgente P_0, il versore $\vec{s}$ risulta tangente al raggio. In corrispondenza del generico spostamento $d\ell$ lungo il raggio, possiamo evidentemente scrivere che

$$\vec{s}' = \vec{s} + d\vec{s}$$

dove la variazione $d\vec{s}$ può essere espressa evidentemente come

$$d\vec{s} = d\phi\cdot 1\cdot\vec{n}_\rho$$

In questa espressione $\vec{n}_\rho$ è il versore della direzione ortogonale in ogni punti al versore $\vec{s}$, mentre invece $d\phi$ è l'angolo sotteso dallo spostamento $d\ell$ rispetto al raggio di curvatura ρ.



Dato che $d\ell = \rho d\phi$, abbiamo dunque che

$$d\vec{s} = \frac{d\ell}{\rho} \cdot \vec{n}_\rho \longrightarrow \frac{d\vec{s}}{d\ell} = \frac{\vec{n}_\rho}{\rho}$$

Questa è una prima espressione di nostro interesse, che useremo tra poco.

Se ora indichiamo con $\vec{r}$ il raggio vettore che individua il punto in cui $\vec{s}$ è tangente alla traiettoria e con $\vec{r}'$ il raggio vettore che individua il punto in cui $\vec{s}'$ è tangente alla traiettoria, possiamo evidentemente scrivere che

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \vec{s}d\ell \longrightarrow d\vec{r} = \vec{s}d\ell$$

Anche questa relazione ci servirà in seguito.

Adesso mettiamoci nell’ipotesi specifica di un **<u>mezzo senza perdite</u>**. Consideriamo un generico elemento infinitesimo di superficie la cui normale orientata coincida con $\vec{s}$. Allora, considerato un generico vettore $\vec{A}$, potremo scrivere che

$$\vec{A} = \vec{A}_t + \vec{s}A_\ell$$

dove abbiamo cioè indicato con $\vec{s}A_\ell$ la *componente longitudinale* di $\vec{A}$ e con $\vec{A}_t$ la *componente traversa*.

Per analogia con questa espressione, possiamo introdurre il seguente *operatore*:

$$\nabla = \nabla_t + \vec{s}\frac{\partial}{\partial \ell}$$

Questo operatore ci serve per il seguente ragionamento: considerato il termine $(\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B}$, con $\vec{A}$ e $\vec{B}$ vettori generici, possiamo scrivere che

$$(\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B} = (\vec{A}_t \bullet \nabla_t + \vec{A}_\ell \bullet \nabla_\ell)\vec{B}$$

Se ora supponiamo che $\vec{A}$ e $\vec{B}$ coincidano con $\vec{s}$, abbiamo che

$$(\vec{s} \bullet \nabla)\vec{s} = (\vec{s}_t \bullet \nabla_t + \vec{s}_\ell \bullet \nabla_\ell)\vec{s} = (\vec{s}_\ell \bullet \nabla_\ell)\vec{s}$$

D’altra parte, sappiamo che

$$(\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B} = A_X \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_Y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_Z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$$

da cui quindi deduciamo che

$$(\vec{s} \bullet \nabla)\vec{s} = \frac{d\vec{s}}{d\ell}$$

La derivata a secondo membro di questa equazione è stata trovata prima pari a $\frac{d\vec{s}}{d\ell} = \frac{\vec{n}_\rho}{\rho}$, per cui possiamo scrivere che

$$(\vec{s}\bullet\nabla)\vec{s}=\frac{\vec{n}_\rho}{\rho}$$

Proseguendo, possiamo facilmente trovare una ulteriore espressione del termine $(\vec{s}\bullet\nabla)\vec{s}$. Infatti, ricordiamoci della regola vettoriale per cui $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\bullet\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$, possiamo scrivere che

$$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{C})=(\vec{A}\bullet\vec{C})\nabla-(\vec{A}\bullet\nabla)\vec{C}$$

Applicandola al nostro caso, abbiamo perciò che

$$\vec{s}\times(\nabla\times\vec{s})=(\vec{s}\bullet\vec{s})\nabla-(\vec{s}\bullet\nabla)\vec{s}=-(\vec{s}\bullet\nabla)\vec{s}\longrightarrow(\vec{s}\bullet\nabla)\vec{s}=-\vec{s}\times(\nabla\times\vec{s})$$

Sostituendo quindi nell'equazione trovata prima, abbiamo che

$$-\vec{s}\times(\nabla\times\vec{s})=\frac{\vec{n}_\rho}{\rho}$$

Non solo, ma, avendo ipotizzato il mezzo senza perdite, sappiamo che l'equazione iconale si può scrivere come $\nabla L(\vec{r})=n(r)\cdot\vec{s}$, da cui quindi $\vec{s}=\frac{\nabla L(\vec{r})}{n(r)}$. Sostituendo questa espressione all'interno delle parentesi tonde della precedente relazione, otteniamo perciò

$$-\vec{s}\times\left(\nabla\times\frac{\nabla L(\vec{r})}{n(r)}\right)=\frac{\vec{n}_\rho}{\rho}$$

Andiamo allora ad esplicitare quel prodotto vettoriale:

$$\frac{\vec{n}_\rho}{\rho}=-\vec{s}\times\left(\nabla\times\frac{\nabla L(\vec{r})}{n(r)}\right)=\vec{s}\times\left(\frac{1}{n(r)}\nabla\times\nabla L(\vec{r})+\nabla L(\vec{r})\times\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\right)=\vec{s}\times\left(\nabla L(\vec{r})\times\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\right)$$

dove abbiamo tenuto conto che il rotore di un gradiente è sempre nullo.

Possiamo ora applicare la "solita" regola $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\bullet\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C}$, in modo da ottenere che

$$\frac{\vec{n}_\rho}{\rho}=\left(\vec{s}\bullet\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\right)\nabla L(\vec{r})-(\vec{s}\bullet\nabla L(\vec{r}))\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)$$

Adesso moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per $\vec{n}_\rho$:

$$\frac{1}{\rho}=\left[\left(\vec{s}\bullet\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\right)\nabla L(\vec{r})-(\vec{s}\bullet\nabla L(\vec{r}))\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\right]\bullet\vec{n}_\rho$$

Portando il termine $\bullet\vec{n}_\rho$ all'interno delle parentesi quadre, otteniamo

$$\frac{1}{\rho}=\left(\vec{s}\bullet\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\right)\left(\nabla L(\vec{r})\bullet\vec{n}_\rho\right)-(\vec{s}\bullet\nabla L(\vec{r}))\left(\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right)\bullet\vec{n}_\rho\right)$$

Il prodotto scalare $\left(\nabla L(\vec{r}) \bullet \vec{n}_\rho\right)$ è nullo in base alle considerazioni fatte in precedenza, per cui resta l’uguaglianza

$$\frac{1}{\rho} = -\left(\vec{s} \bullet \nabla L(\vec{r})\right)\left(\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right) \bullet \vec{n}_\rho \right)$$

Ponendo adesso nuovamente $\nabla L(\vec{r}) = n(r) \cdot \vec{s}$, otteniamo

$$\frac{1}{\rho} = -\left(\vec{s} \bullet \vec{s}\right) \cdot n(r) \cdot \left(\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right) \bullet \vec{n}_\rho \right) = -n(r) \cdot \left(\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right) \bullet \vec{n}_\rho \right)$$

Tenendo conto che $\nabla\left(\frac{1}{n(r)}\right) = -\frac{1}{n^2(r)} \nabla n(r)$, concludiamo che una forma alternativa dell’equazione iconale è la seguente:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n(r)}\left(\nabla n(r) \bullet \vec{n}_\rho\right)}$$

Questa espressione suggerisce una considerazione immediata: se il mezzo in questione fosse omogeneo, avremmo n(r)=cost in ogni punto, per cui ∇n=0 e quindi 1/ρ=∞: un raggio di curvatura infinito equivale ad una **traiettoria rettilinea**. Quindi, i raggi si propagano secondo linee rette nei mezzi omogenei (ed isotropi) senza perdite.

Esiste una ulteriore forma alternativa dell’equazione iconale. Consideriamo infatti il termine $(\vec{s} \bullet \nabla)\vec{A}$, con $\vec{A}$ vettore per il momento generico. In base a quanto visto in precedenza, risulta

$$\vec{s} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \left(\vec{s} \bullet \vec{A}\right)\nabla - (\vec{s} \bullet \nabla)\vec{A}$$

Se invece supponiamo che sia $\vec{A} = \nabla L(\vec{r})$, allora risulta

$$\vec{s} \times (\nabla \times \nabla L(\vec{r})) = (\vec{s} \bullet \nabla L(\vec{r}))\nabla - (\vec{s} \bullet \nabla)\nabla L(\vec{r})$$

D’altra parte, risulta $\nabla \times \nabla L(\vec{r}) = 0$ (*rot grad = 0*), per cui quest’ultima equazione si riduce a

$$(\vec{s} \bullet \nabla L(\vec{r}))\nabla = (\vec{s} \bullet \nabla)\nabla L(\vec{r})$$

Abbiamo inoltre visto in precedenza che $(\vec{s} \bullet \nabla)\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{d\ell}$: ponendo allora $\vec{A} = \nabla L(\vec{r})$, l’ultima equazione ci dice che

$$\frac{d}{d\ell}\nabla L(\vec{r}) = (\vec{s} \bullet \nabla L(\vec{r}))\nabla$$

Per quanto riguarda il secondo membro di questa equazione, possiamo sfruttare la commutatività e portare ∇ a sinistra della parentesi; ponendo inoltre $\nabla L(\vec{r}) = n(r) \cdot \vec{s}$, otteniamo

$$\frac{d}{d\ell}\left(\vec{s} n(r)\right) = \nabla\left(\vec{s} \bullet \vec{s} n(r)\right) = \nabla(\vec{s} \bullet \vec{s})n(r) = \nabla n(r)$$

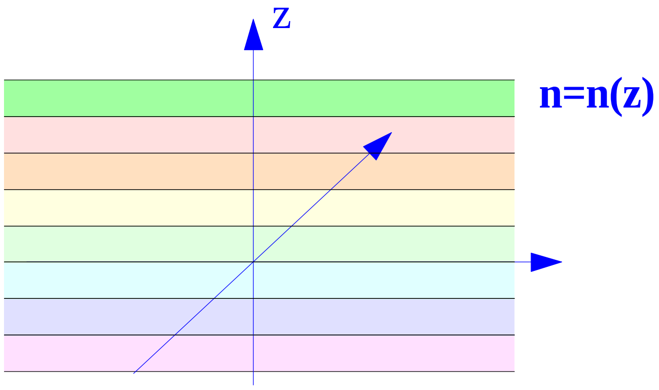
Avendo visto in precedenza che $d\vec{r} = \vec{s}d\ell$, ossia anche che $\frac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{s}$, abbiamo che

$$\boxed{\frac{d}{d\ell}\left(n(r)\frac{d\vec{r}}{d\ell}\right) = \nabla n(r)}$$

Questa è una ulteriore forma dell'equazione iconale che potrebbe esserci di aiuto.

Mezzo a stratificazione piana: legge di Snell

Cominciamo adesso a considerare alcuni casi concreti di propagazione di raggi (cioè onde elettromagnetiche ad alta frequenza) in mezzi non omogenei (ma comunque isotropi). Il primo esempio che consideriamo è quello di un mezzo cosiddetto **a stratificazione piana**, nel quale cioè l'indice di rifrazione, con riferimento alla figura seguente, è nella forma **n=n(z)**:



In questo caso, quindi, possiamo cominciare a scrivere che il gradiente dell'indice di rifrazione vale

$$\nabla n = \frac{\partial n}{\partial x}\vec{a}_X + \frac{\partial n}{\partial y}\vec{a}_Y + \frac{\partial n}{\partial z}\vec{a}_Z = \frac{dn}{dz}\vec{a}_Z$$

Questo risultato ovviamente comporta che il prodotto vettoriale tra il versore $\vec{a}_Z$ e lo stesso gradiente ∇n sia nullo:

$$\vec{a}_Z \times \nabla n = 0$$

In questa equazione, possiamo sostituire l'espressione di ∇n fornita dall'equazione iconale: abbiamo perciò che

$$\vec{a}_Z \times \left(\frac{d}{d\ell}\left(n(z)\frac{d\vec{r}}{d\ell}\right)\right) = 0$$

La derivata rispetto alla coordinata curvilinea può anche essere portata fuori dal prodotto vettoriale (essendo quest'ultimo un operatore lineare), per cui abbiamo che

$$\frac{d}{d\ell}\left(\vec{a}_Z \times \left(n(r)\frac{d\vec{r}}{d\ell}\right)\right) = 0$$

Richiedere che la derivata di una funzione, rispetto ad una coordinata curvilinea, sia nulla equivale a richiedere che tale funzione sia costante rispetto alla suddetta coordinata: scriviamo perciò che

$$\vec{a}_Z \times \left(n(z) \frac{d\vec{r}}{d\ell} \right) = \vec{k}$$

dove appunto $\vec{k}$ è un vettore costante lungo il raggio.

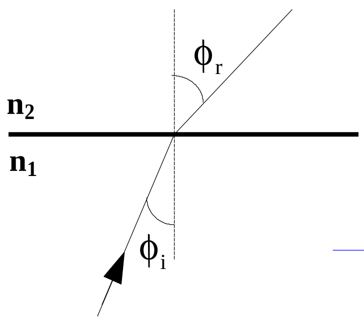
Ricordando inoltre che $\frac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{s}$, possiamo scrivere che

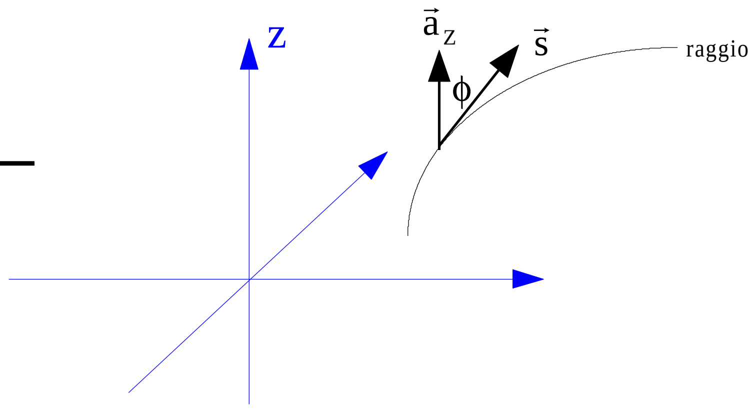
$$\boxed{n(z) \cdot (\vec{a}_Z \times \vec{s}) = \vec{k}}$$

In base alle proprietà del prodotto vettoriale, il vettore $\vec{s}$ si trova su un piano ortogonale alla direzione di $\vec{k}$. Dal punto di vista dei moduli, invece, è evidente che da quella relazione discende anche che

$$\boxed{n \sin\phi = \cos t}$$

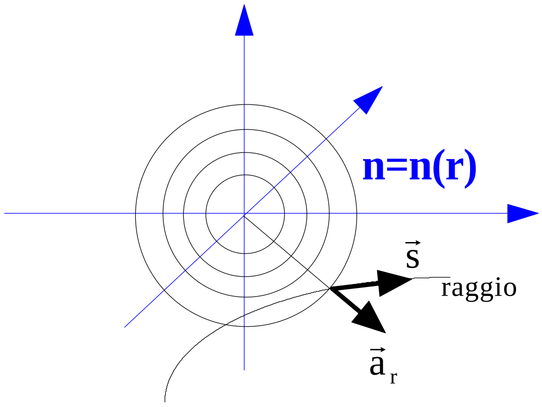
dove ϕ è l'angolo formato dai versori $\vec{s}$ e $\vec{a}_Z$. Quella ottenuta non è nient'altro che la nota **legge di Snell**, in base alla quale, in corrispondenza di una superficie piana di discontinuità tra due mezzi aventi diverso indice di rifrazione, la rifrazione di un eventuale raggio incidente è tale per cui il prodotto $n \cdot \sin\phi$ rimane costante nel passaggio dall'uno all'altro mezzo:





Mezzo a stratificazione sferica: legge di Snell generalizzata

Un altro mezzo non omogeneo di notevole importanza è quello cosiddetto **a stratificazione sferica**, in cui cioè esiste un punto (che immaginiamo coincida con l'origine del nostro sistema di riferimento) attorno al quale l'indice di rifrazione varia in modo radiale, per cui **n=n(r)=n·r**:



In questo caso, quindi, il gradiente dell'indice di rifrazione vale

$$\nabla n = \frac{\partial n(r)}{\partial r}\vec{a}_r = n \cdot \vec{a}_r$$

Questo risultato ovviamente comporta che il prodotto vettoriale tra il versore $\vec{a}_r$ e lo stesso gradiente ∇n sia nullo:

$$\vec{a}_r \times \nabla n = 0$$

Sostituendo in questa equazione l'espressione di ∇n fornita dall'equazione iconale, abbiamo che

$$\vec{a}_r \times \left(\frac{d}{d\ell}\left(n(r)\frac{d\vec{r}}{d\ell} \right) \right) = 0$$

Portando la derivata rispetto alla coordinata curvilinea fuori dal prodotto vettoriale, otteniamo

$$\frac{d}{d\ell}\left(\vec{a}_r \times \left(n(r)\frac{d\vec{r}}{d\ell} \right) \right) = 0$$

Da qui scaturisce che la funzione all'interno delle parentesi deve essere costante rispetto alla coordinata curvilinea:

$$\vec{a}_r \times \left(n(r)\frac{d\vec{r}}{d\ell} \right) = \vec{k}$$

dove appunto $\vec{k}$ è un vettore costante lungo il raggio.

Ricordando inoltre che $\frac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{s}$ e ponendo n(r)=n·r, possiamo concludere che

$$\boxed{n \cdot r \cdot (\vec{a}_r \times \vec{s}) = \vec{k}}$$

In termini di moduli, da qui scaturisce che

$$\boxed{n \cdot r \cdot \sin\phi = \cos t}$$

dove ϕ è l’angolo formato in questo caso dai versori $\vec{s}$ e $\vec{a}_r$. Questa è la cosiddetta **legge di Snell generalizzata**.

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1