Appunti di Comunicazioni Elettriche
Capitolo 1
Segnali e disturbi

Premessa *2*

Segnali analogici e segnali digitali *3*

I disturbi di trasmissione *3*

“Tipi” di distorsioni 6

Strumenti per l’analisi del rumore *8*

Teorema del limite centrale 10

Il rapporto segnale-rumore *11*

Il rumore termico *11*

Modello circuitale di un resistore rumoroso 12

Misure sperimentali sul rumore elettronico 13

Il rumore bianco additivo gaussiano 14

Potenza di rumore disponibile *14*

Banda equivalente di rumore *17*

Fattore di rumore *19*

Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita ad un sistema rumoroso *21*

Temperatura equivalente di rumore *22*

Attenuatore resistivo *25*

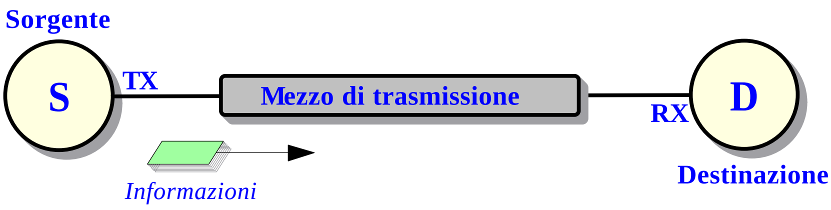
Sistemi rumorosi in cascata *26*

Esempio numerico 30

Composizione di più sorgenti di rumore *32*

Premessa

In questo corso ci occuperemo delle principali tecniche hardware e software utilizzate per la trasmissione a distanza delle **informazioni**. Nel seguito, faremo perciò tutta una serie di considerazioni relative ad un **sistema di trasmissione** del tipo seguente:



Le informazioni, qualunque sia la loro natura, vengono generate presso una **sorgente** (S) e, tramite un **trasmettitore** (TX), vengono inviate su di un **mezzo di trasmissione**. Quest'ultimo consente il trasporto di tali informazioni in base al noto concetto per cui, variando opportunamente una qualche *caratteristica fisica* del mezzo stesso, tale variazione si propaga, con una certa velocità, fino ad arrivare, dopo un certo tempo, all'altra estremità. Qui, essa viene rilevata dall'apposito **ricevitore** (RX) e consegnata alla **destinazione**, dove può essere opportunamente *interpretata* ed utilizzata ([1]).

Uno degli aspetti più importanti del sistema semplificato appena descritto riguarda proprio il *mezzo di trasmissione* utilizzato per collegare fisicamente la sorgente e la destinazione. A tal proposito, si distinguono fondamentalmente tre tipi di mezzi di trasmissione:

- **mezzi elettrici** *(cavi coassiali, doppini elettrici);*
- **mezzi wireless** *(onde radio);*
- **mezzi ottici** *(fibre ottiche).*

In tutti i tre casi, il fenomeno fisico utilizzato per la trasmissione è l'**onda elettromagnetica**, ossia una combinazione di campo elettrico e campo magnetico, variabili nel tempo, che si propagano dalla sorgente alla destinazione, in modi e con velocità diverse a seconda del mezzo considerato.

Ad esempio, nel caso dei *mezzi wireless*, l'onda si propaga più o meno liberamente nello spazio (si parla perciò di *propagazione libera*) e, quando raggiunge un dispositivo ricevente (*antenna*), induce in esso una corrente elettrica; nei *mezzi ottici*, la *frequenza* dell'onda elettromagnetica è talmente alta da rendere l'onda visibile e si parla perciò comunemente di **luce** che si propaga. Nei *mezzi elettrici*, infine, avviene lo stesso fenomeno dei mezzi wireless, con la differenza che la propagazione dell'onda è forzata all'interno di opportune strutture fisiche (dette perciò *strutture guidanti*).

[1] Ad esempio, se il mezzo in questione è un *cavo metallico*, si può variare la tensione applicata ad un'estremità, in modo che tale variazione si propaghi e si presenti all'altra estremità.

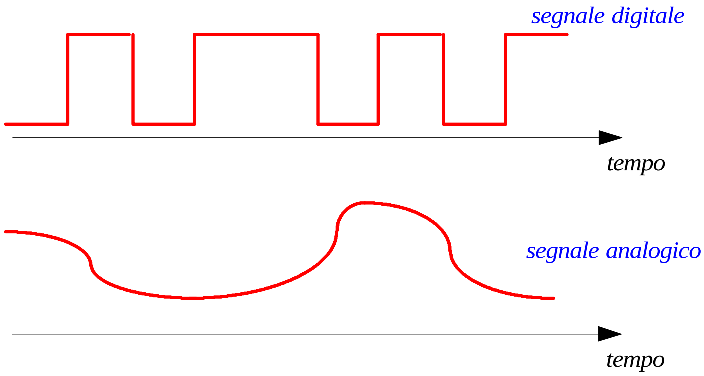
Segnali analogici e segnali digitali

In ogni caso, dunque, le informazioni vengono trasmesse, tra la sorgente e la destinazione, a prescindere da quale sia la "distanza" tra di esse, mediante **segnali**. In particolare, in questa sede ci occupiamo solo di **segnali di natura elettrica** (correnti e tensioni, prodotte da corrispondenti campi elettrici e magnetici).

I segnali, in generale, possono essere di due "tipi" fondamentali:

- un **segnale analogico** è una funzione (ad esempio una tensione o una corrente elettrica) che, nel tempo, può variare con continuità all'interno di un intervallo (limitato) costituito da infiniti possibili valori;
- un **segnale digitale** (o **segnale numerico**) può invece variare solamente passando bruscamente da un valore ad un altro all'interno di un insieme molto piccolo di possibilità (da due a qualche decina).

Un esempio di segnale analogico ed uno di segnale digitale sono riportati nella figura seguente:



Tra i segnali continui nel tempo e nelle ampiezze hanno grande rilevanza pratica i **segnali acustici** e i **segnali visivi**, dei quali si parlerà in seguito. Questi segnali, del resto, possono essere campionati e poi messi in forma numerica.

I disturbi di trasmissione

Poiché *lo scopo fondamentale delle comunicazioni elettriche è la trasmissione delle informazioni a distanza*, occorre non solo generare i segnali elettrici che devono trasportare tali informazioni, ma anche trasmetterli. Per la trasmissione occorrono appositi **mezzi trasmissivi** e apposite **apparecchiature di rice-trasmissione**.

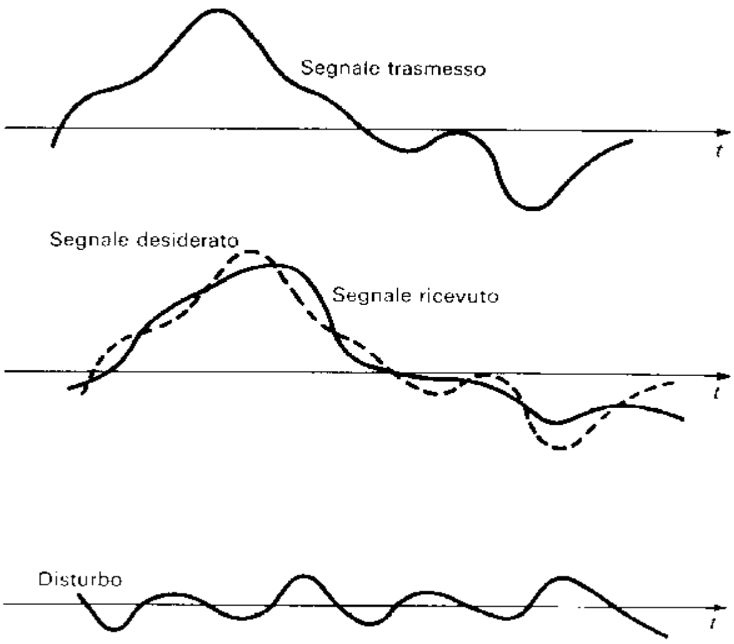
Le apparecchiature di trasmissione hanno il fondamentale compito di mantenere i segnali nella "forma" e nell'ampiezza più adatte alla trasmissione su ciascun particolare mezzo trasmissivo considerato. Viceversa, le apparecchiature di ricezione hanno il compito di estrapolare le informazioni utili dal mezzo trasmissivo usato per trasmetterle.

Entrano in gioco, in questo contesto, i **disturbi di trasmissione**. *Dire che i segnali vengono "disturbati", sia durante la trasmissione sia all'interno delle apparecchiature stesse per la rice-trasmissione, equivale a dire che essi vengono "deformati" rispetto a come erano inizialmente.* Possiamo allora definire genericamente il **disturbo** come un qualunque scostamento del segnale effettivamente ricevuto rispetto a quello iniziale generato.

La presenza dei disturbi fa sì che, *in un sistema di trasmissione, non sia importante il livello assoluto del segnale che arriva al ricevitore:* infatti, in assenza di qualunque disturbo, se gli amplificatori fossero in grado di amplificare un segnale senza sovrapporgli alcun rumore, il segnale ricevuto potrebbe anche raggiungere valori estremamente piccoli, visto che basterebbe una successiva amplificazione per riportarlo a valori accettabili.

Nella realtà, invece, bisogna fare sempre i conti con il **rumore** che immancabilmente si sovrappone al segnale utile: questo rumore viene in parte captato direttamente dai dispositivi riceventi (ad esempio le antenne dei ponti radio) ed in parte generato internamente ai dispositivi di ricezione.

La figura seguente riporta un esempio semplice di quanto appena detto:



Il diagramma più in alto riporta il *segnale trasmesso*, che in genere è costituito da una fedele replica del segnale originale, a meno di una eventuale amplificazione appositamente introdotta prima della trasmissione.

In ricezione, il *segnale desiderato* corrisponderebbe ad una replica del segnale trasmesso, a meno dell'inevitabile ritardo temporale dovuto proprio alla trasmissione. In realtà, a causa delle distorsioni varie introdotte nella catena di trasmissione, il *segnale ricevuto* risulta diverso da quello desiderato e la differenza tra i due è proprio rappresentata dal *disturbo*.

I **disturbi** che si generano nella trasmissione possono essere classificati fondamentalmente in due categorie:

- **disturbi additivi indipendenti dal segnale trasmesso**: sono tali il *rumore termico ed elettronico* (di cui ci occuperemo dettagliatamente nei prossimi paragrafi), le *interferenze* provocate da sistemi di trasmissione di tipo diverso rispetto a quello considerato, le interferenze provocate dal segnale che percorre un sistema di trasmissione identico a quello considerato e quindi progettato simultaneamente (sono tali, ad esempio, le interferenze tra due linee telefoniche adiacenti), i *disturbi* provocati da fenomeni e da apparecchiature estranei ai sistemi di comunicazione (rientrano in questa categoria anche i disturbi provenienti dall'alimentazione dei dispositivi elettronici);

- **disturbi dipendenti dal segnale che percorre il sistema di trasmissione considerato**: questi sono dovuti a fenomeni di *distorsione*, sia *spettrale* (distorsioni di ampiezza e di fase) sia *armonica* (dovuta alle non-linearità delle caratteristiche di trasferimento), ed a variazioni nel tempo delle caratteristiche del sistema stesso. Noi supporremo sempre che queste variazioni siano sufficientemente lente da poter assumere che la "risposta" del sistema sia *stazionaria*, ossia calcolabile tramite parametri il cui valore corrisponde a quello assunto dal sistema effettivo nel momento in cui viene percorso dal segnale.

Il disturbo complessivo, dovuto alle varie componenti considerate, deve essere sempre contenuto entro limiti tollerabili, che dipendono sia dal tipo di segnale (telegrafico, audio, video, ecc.) sia dalla qualità che si vuol garantire all'informazione dopo la trasmissione. Inoltre, a volte non è sufficiente fissare questi limiti per il disturbo complessivo, ma è necessario precisare limiti particolari per i vari tipi di disturbo menzionati, i quali possono avere effetti diversi sull'utilizzatore.

Le **cause fisiche** che giustificano la presenza del rumore nei processi di trasmissione dei segnali possono sommariamente essere raggruppate nelle seguenti categorie:

1) agitazione termica degli elettroni nei resistori: come vedremo ampiamente più avanti, l'effetto consiste nella presenza di una tensione ai capi del resistore anche in assenza di eccitazione. Questa tensione è un processo casuale e viene denominata **rumore termico**;
2) attraversamento, in istanti casuali, di una barriera di potenziale da parte di cariche elettriche (**shot noise**);
3) difetti reticolari nei semiconduttori dei dispositivi di rice-trasmissione (ad esempio, *trappole* che rilasciano gli elettroni "catturati" in modo casuale): si parla, in questo caso, di **flicker noise**;
4) imperfezioni dei wafer di silicio (**burst noise** , o anche *popcorn noise*);
5) effetto valanga nei diodi Zener (**avalanche noise**);
6) radiazioni elettromagnetiche emesse dalle stelle e captate dalle antenne in ricezione usate nei ponti radio o nelle trasmissioni via satellite: questo è il cosiddetto **rumore cosmico**;
7) scariche elettromagnetiche, originate dai lampi, che, propagandosi a distanza, vengono captate dalle antenne: si parla in questo caso di **rumore atmosferico**;
8) scariche elettromagnetiche generate dall'accensione di motorini, frigoriferi, cavi dell'alta tensione: si parla genericamente di **rumore di origine umana** ([2]);
9) restituzione, da parte dell'atmosfera, dell'energia assorbita a determinate frequenze: **rumore di assorbimento atmosferico** ([3]).

[2] Tale tipo di disturbo può assumere, a seconda dei casi, la caratteristica di disturbo casuale con *distribuzione gaussiana delle ampiezze* (come il rumore termico ed elettronico) oppure quella di *disturbo impulsivo* costituito da una sequenza casuale di impulsi con ampiezza a sua volta casuale.

[3] Ad esempio, è noto che il vapor d'acqua non lascia passare, ma assorbe, le radiazioni a 60 GHz; per questioni di equilibrio termodinamico, l'energia assorbita dal vapor d'acqua, viene rilasciata utilizzando tutte le frequenze dello spettro.

Altri disturbi da considerare sono quelli provenienti *dall'alimentazione dei dispositivi elettronici*, nel caso in cui questa sia ottenuta dalla rete mediante dispositivi raddrizzatori: tali disturbi cadono alla frequenza di rete ([4]) ed alle sue armoniche e si generano a causa del filtraggio imperfetto della corrente raddrizzata oppure per induzione magnetica e/o elettrica. Dalla rete comune di alimentazione possono inoltre provenire disturbi dovuti ad altre apparecchiature ad essa connessa, che comprendano ad esempio interruttori, oscillatori, ecc ([5]).

In questi primi paragrafi, ci occuperemo di richiamare i principali concetti relativi al **rumore termico**, concentrando in particolare la nostra attenzione su quello nei sistemi di trasmissione.

Possiamo allora anticipare, sin da ora, che *si definisce **rumore termico** (o anche **elettronico**) la fluttuazione casuale di correnti e/o di tensioni ai morsetti di un dispositivo o di un circuito*. Con il termine "*casuale*" si intende il fatto per cui le cause fisiche che generano questo rumore, pur essendo presenti, sfuggono in parte al nostro controllo, ossia non sono ben determinabili. L'esistenza di questo rumore è legata essenzialmente al fatto che la corrente elettrica non è una grandezza continua, ma è trasportata in quantità discrete uguali alla carica dell'elettrone: il rumore è allora associato proprio ai processi fondamentali di trasporto che avvengono all'interno dei dispositivi che vengono utilizzati per produrre e trattare i segnali.

"Tipi" di distorsioni

Si è detto in precedenza che la trasmissione di un segnale è perturbata non solo dalla presenza di *segnali spuri* che si aggiungono al segnale utile desiderato, ma anche dal fatto che i canali e circuiti di rice-trasmissione possono *distorcere* le forme d'onda in essi transitanti. Ci concentriamo allora proprio su quest'ultimo punto, rimandando a dopo le discussioni sul "rumore".

Per capire che tipo di distorsioni possono presentarsi sul generico segnale utile, cominciamo a vedere come idealmente dovrebbe essere caratterizzato un *canale di trasmissione* (intendendo, con ciò, la "catena" formata dal mezzo trasmissivo e dai dispositivi a monte e a valle di esso) affinché il segnale utile arrivi indistorto in ricezione.

Un canale di trasmissione si definisce **non distorcente** quando genera un ritardo e una attenuazione senza che venga alterata la forma dei segnali che vi transitano. Da un punto di vista analitico, è immediato constatare che la funzione di trasferimento H(f) di un siffatto canale non distorcente deve essere del tipo seguente:

$$H(f) = M \cdot e^{-j2\pi f \cdot T}$$

In questa espressione, M e T sono due costanti:

- M rappresenta il modulo della funzione di trasferimento e corrisponde perciò all'**attenuazione** (costante in frequenza) introdotta dal mezzo sul segnale;
- T è invece l'inevitabile **ritardo** introdotto sul segnale a causa del tempo finito di propagazione su di esso: tale ritardo compare evidentemente solo nella

[4] 50 Hz in Europa, 60 Hz negli USA
[5] Questo tipo di "disturbi" sono l'oggetto di studio della cosiddetta "compatibilità elettromagnetica".

caratteristica di fase della funzione di trasferimento, la quale caratteristica deve risultare lineare con la frequenza.

In definitiva, *solo se la caratteristica di ampiezza è costante, mentre quella di fase è lineare con la frequenza, il canale non introduce alcuna distorsione sul segnale*: infatti, sotto queste condizioni, si trova facilmente (sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier) che, se il segnale d'ingresso al canale è s(t), l'uscita corrispondente risulta essere M·s(t-T).

Mentre il concetto del "modulo costante in frequenza" è abbastanza intuitivo, conviene soffermarsi un attimo sulla caratteristica di fase della H(f). *La condizione di linearità della fase equivale infatti alla condizione di invarianza (con la frequenza) della derivata della fase , cioè del cosiddetto **ritardo di gruppo**, che in questo caso è pari a T.*

Date queste premesse, possiamo affermare che le **distorsioni** introdotte dal generico canale di trasmissione sui segnali che lo attraversano possono essere distinte in due tipi fondamentali:

- le **distorsioni spettrali** sono provocate dal fatto che *la funzione di trasferimento del canale non ha caratteristiche ideali*, ossia, come visto, non presenta attenuazione costante con la frequenza e fase direttamente proporzionale alla frequenza;
- le **distorsioni armoniche** sono invece dovute alla *presenza di fenomeni non lineari*, i quali generano componenti spettrali, nei segnali trasmessi, a frequenze diverse rispetto a quelle originarie: tali distorsioni deformano pertanto i segnali, provocando interferenze quando le nuove componenti spettrali, anziché essere contenute nella banda del segnale, cadono nella banda di altri segnali trasmessi a frequenze diverse.

Soffermiamoci sul secondo tipo di distorsioni. Dato il generico canale di trasmissione, se indichiamo con x l'ingresso e con y la corrispondente uscita, possiamo anche indicare con **y=g(x)** la funzione che lega l'uscita all'ingresso in ogni istante di tempo. Se il canale presenta fenomeni non lineari al suo interno, la funzione g è ovviamente non lineare. Un esempio tipico è dato dagli *amplificatori*: infatti, le caratteristiche ingresso/uscita in tensione di tali dispositivi possono essere considerate lineari solo entro certi limiti d'ampiezza per il segnale d'ingresso, mentre invece, al di là di questi limiti, diventano non lineari (tipicamente, a causa di fenomeni di saturazione dei transistor); in questi casi, la distorsione non lineare dell'ampiezza produce non solo una deformazione delle caratteristiche di ampiezza e fase dello spettro del segnale, ma anche l'apparizione di nuove armoniche a frequenze spurie, le quali allargano dello spettro del segnale e quindi ne alterano la forma d'onda rispetto all'originale.

Consideriamo, con esempio semplice, una nonlinearità corrispondente ad una *caratteristica quadratica*:

$$y = A \cdot x^2 + B \cdot x$$

In questo caso, il termine B·x rappresenta la desiderata relazione lineare tra ingresso ed uscita, mentre invece il termine quadratico $A \cdot x^2$ rappresenta l'effetto della non linearità.

Dato un sistema di questo tipo, è facile verificare che, se l'ingresso è costituito da una somma di sinusoidi a diverse frequenze, in uscita si trovano, oltre alle frequenze d'ingresso, anche componenti a frequenze date da somme e differenze delle frequenze d'ingresso. Facciamo qualche passaggio analitico per giustificare questa affermazione.

Siano X(f) lo spettro del segnale di ingresso e Y(f) lo spettro della corrispondente uscita. Supponendo che la relazione ingresso-uscita del sistema comprenda solo il termine quadratico, avremo che

$$y(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$$

Trasformando secondo Fourier questa relazione e ricordando che un prodotto nel dominio del tempo equivale ad una convoluzione nel dominio della frequenza, lo spettro dell'uscita sarà

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

L'esito della convoluzione di uno spettro X(f) con se stesso è diverso, ovviamente, a seconda del segnale considerato, ma, in ogni caso, essa produce uno spettro più largo di X(f), a testimonianza della distorsione introdotta. Alla componente di segnale x(t) si aggiungono dunque termini d'interferenza generati dall'interazione delle componenti spettrali di X(f) attraverso la non linearità (fenomeno della **intermodulazione**).

In generale, se la caratteristica non lineare y=g(x) può essere espressa o approssimata con uno sviluppo in serie del tipo

$$y(t) = A \cdot x(t) + B \cdot x^2(t) + C \cdot x^3(t) + \dots$$

lo spettro del segnale di uscita sarà nella forma

$$Y(f) = A \cdot X(f) + B \cdot X(f) * X(f) + C \cdot X(f) * X(f) * X(f) + \dots$$

Strumenti per l'analisi del rumore

Il fatto di non essere in grado di individuare con precisione le cause fisiche del rumore comporta che il rumore stesso non risulti mai qualcosa di deterministico. <u>Questa “casualità” del rumore comporta che esso venga analizzato con **metodi statistici** anziché *deterministici*</u>: detto in altre parole, il rumore va considerato e studiato come un classico **processo stocastico**.

Supponiamo dunque di trasmettere un segnale s(t) su un supporto fisico e di osservare ciò che si riceve; come già anticipato in precedenza, il segnale trasmesso subisce una “trasformazione” dovuta alla distorsione introdotta dal canale e, inoltre, a tale trasformazione si somma quella dovuta all'aggiunta del rumore. Il segnale ricevuto avrà perciò, in linea del tutto generale, la seguente espressione:

$$r(t) = F[s(t)] + n(t)$$

Il termine **F[s(t)]** rappresenta la trasformazione che subisce il segnale all'ingresso del canale, mentre **n(t)** rappresenta il processo aleatorio corrispondente appunto al rumore.

Con buona approssimazione, *possiamo ritenere che il **processo di rumore** sia un processo stocastico <u>stazionario</u>, ossia tale che le sue caratteristiche si mantengano invariate nel tempo.*

Cominciamo allora a vedere di quali strumenti ci possiamo servire per l'analisi statistica del processo di rumore.

Intanto, per indicare un processo stocastico si usa solitamente la notazione **X(t)**, la quale rappresenta, in pratica, una variabile aleatoria estratta dal processo al generico istante t. Il fatto che si ritenga il processo di rumore *stazionario* ci dice che quella variabile aleatoria ha le stesse caratteristiche statistiche (vale a dire densità di probabilità, media, varianza e così via) quale che sia l'istante t considerato.

Inoltre, abbiamo detto che il rumore consiste fondamentalmente nelle fluttuazioni casuali (rispetto ad un prefissato valore medio) della tensione o della corrente: di conseguenza, con X(t) possiamo indicare sia la **corrente di rumore**, nel caso in cui analizziamo le correnti, sia la **tensione di rumore**, nel caso in cui analizziamo le tensioni.

Uno dei parametri maggiormente utilizzati per lo studio di un processo stocastico è il **valore medio**, generalmente indicato con $E[X(t)]$ oppure anche con $\overline{X}(t)$: tuttavia, come vedremo in seguito, nel caso del processo di **rumore termico**, che è quello di nostro interesse, questo parametro non ci è di molto aiuto in quanto <u>*si verifica che il valore medio del rumore termico è nullo*</u>.

Si fa allora riferimento al cosiddetto **valore quadratico medio**, che indicheremo con $\overline{X}^2(t)$ oppure con $\overline{X^2(t)}$ o anche con $E\left[X^2(t)\right]$.

Legato al valore quadratico medio c'è un altro parametro, chiamato **valore efficace** del processo e definito dalla relazione seguente:

$$X_{eff} = \sqrt{\overline{X}^2(t)}$$

(bisogna stare attenti a non confondere il valore efficace con il valore medio).

<u>Sia il valore quadratico medio sia il valore efficace del processo di rumore risultano diversi da zero (ovviamente, sono entrambe quantità positive)</u>.

<u>Osservazione</u>

Circa il valore quadratico medio, citiamo subito un importante risultato del quale faremo uso in seguito: supponiamo di avere due diversi processi stocastici X(t) e Y(t) e consideriamo la loro sovrapposizione, ossia il nuovo processo stocastico Z(t)=X(t)+Y(t). Si può dimostrare facilmente che il valore quadratico medio di Z(t) è dato dalla seguente relazione:

$$\overline{Z}^2(t) = E\left[\left(\overline{X} + \overline{Y}\right)^2\right] = \overline{X}^2(t) + \overline{Y}^2(t) + 2\rho\overline{X}(t)\overline{Y}(t)$$

Oltre alla somma dei valori quadratici medi di X ed Y , il valore quadratico medio di Z(t) comprende dunque anche un termine che tiene conto della "correlazione" esistente tra X(t) e Y(t): si definisce infatti **coefficiente di correlazione** ρ di X(t) e Y(t) la quantità

$$\rho = \frac{\overline{XY} - \overline{X} * \overline{Y}}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Se i due processi sono tra loro **incorrelati** (ossia se ρ=0), come spesso ci capiterà di accertare, risulta evidentemente $\overline{Z}^2(t) = \overline{X}^2(t) + \overline{Y}^2(t)$, il che si

esprime dicendo che si verifica una **somma in potenza** dei due processi (tipicamente, è una espressione riferita ai processi di rumore).
Viceversa, quando i due processi sono correlati ($\rho \neq 0$), si dice che si verifica solo una **somma in ampiezza**.
Quanto appena detto ci serve per il motivo seguente: le cause fisiche del rumore elettronico sono diverse e non è detto che si presentino singolarmente; è possibile cioè che due o più di esse siano presenti contemporaneamente e si sovrappongano; allora, per analizzare il processo di rumore totale, per esempio nel caso di due sorgenti di rumore, dobbiamo sempre tener conto della correlazione ρ tra tali sorgenti. La valutazione di ρ, tuttavia, non è sempre agevole, ma spesso si può assumere che sia $\rho=0$, ossia che le sorgenti di rumore siano incorrelate, con le conseguenti facilitazioni prima descritte.

I parametri fino ad ora introdotti sono tutti relativi al *dominio del tempo*. Tuttavia, spesso è utile effettuare la propria analisi anche nel *dominio della frequenza* (o *dominio di Fourier* in quanto ricavato tramite la *trasformata di Fourier*), al fine di aggirare le difficoltà di calcolo presentate, ad esempio, dagli *integrali di convoluzione*.

Il parametro più utile, nel dominio della frequenza, è senz'altro la cosiddetta **densità spettrale di potenza** del processo aleatorio considerato: questa funzione, solitamente indicata con $\mathbf{S_X(f)}$, dove X(t) è il processo considerato, è una funzione della frequenza definita in modo tale che sia soddisfatta la relazione

$$\overline{X}^2(t) = \int_0^{\infty} S(f)df$$

ossia in modo tale che l'area da essa sottesa, nell'ambito delle frequenze positive in quanto consideriamo *trasformate di Fourier monolatere*, sia proprio pari al valore quadratico medio del processo stocastico considerato.

Teorema del limite centrale

Prima di esaminare in modo approfondito gli effetti del rumore, è opportuno introdurre un importante risultato del calcolo probabilistico applicato ai processi casuali, indispensabile per la completa trattazione del rumore termico.

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_N$ delle variabili aleatorie tra loro indipendenti e identicamente distribuite. Supponiamo che tali variabili abbiano tutte valor medio nullo e che inoltre risulti

$$E\left[x_i^2\right] = \sigma^2 \qquad i = 1,2,\ldots.,N$$

Consideriamo la variabile aleatoria y_N ottenuta dalla media delle x_i:

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Il **teorema del limite centrale** afferma che, *per N®¥, la variabile aleatoria y_N tende ad essere una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana, caratterizzata da media nulla e varianza s^2*.

Il rapporto segnale-rumore

Come già anticipato, *il rumore ha una sua importanza non in senso assoluto, ma sempre in rapporto al segnale utile cui si sovrappone:* è chiaro, infatti, che il rumore diventa importante quando la sua ampiezza è confrontabile con quella del segnale, mentre è più o meno trascurabile quando l'ampiezza del segnale è più o meno maggiore di quella del rumore. In questo senso, quindi, siamo prevalentemente interessati non al rumore in se stesso, bensì al cosiddetto **rapporto segnale-rumore**: in termini statistici, questo rapporto, solitamente indicato con la notazione **S/N** (dove "S" sta per "signal" e "N" per "noise" ossia appunto "rumore"), corrisponde al rapporto tra la potenza statistica del segnale utile e la potenza statistica del rumore ad esso sovrapposto ([6]).

Il rumore termico

L'unico tipo di rumore che considereremo da qui in avanti è il cosiddetto **rumore termico**: *se prendiamo un resistore fisico generico, mantenuto isolato da qualsiasi circuito (posto cioè in condizioni di circuito aperto), e colleghiamo i suoi morsetti a quelli di un oscilloscopio molto sensibile, osserviamo delle leggere fluttuazioni di tensione, che costituiscono appunto il rumore termico*. Se nel resistore transita una data corrente continua (corrispondente al segnale utile), a questa (che è il valor medio) risulta dunque sovrapposta una componente casuale dovuta alle fluttuazioni degli elettroni.

Da un punto di vista fisico, la causa del rumore termico è il continuo e disordinato moto di agitazione termica degli elettroni nel resistore.

Lo studio di questo rumore, condotto tramite l'applicazione di argomenti termodinamici e vari strumenti analitici (tra cui il teorema del limite centrale) , ha portato a concludere che si tratti di un <u>*processo stocastico (stazionario) avente distribuzione gaussiana delle ampiezze e valore medio nullo*</u> (come detto già in precedenza). Per una sua descrizione completa, basta allora conoscere lo spettro di potenza, ovvero la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione.

Indicata con R la resistenza del resistore, con T la temperatura alla quale esso si trova e con k la costante di Boltzmann (`1.38*10`$^{-23}$ `Joule/°Kelvin`), la **densità spettrale di potenza della tensione di rumore** (misurata in V^2/Hz) risulta avere la seguente espressione:

$$\boxed{G_V(f) = 4kTR}$$

Le principali caratteristiche di questa funzione sono la diretta proporzionalità con R e con T e, soprattutto, l'<u>indipendenza dalla frequenza</u>: tale rumore ha cioè componenti spettrali distribuite uniformemente lungo tutto l'asse delle frequenze, ed è per questo che lo si definisce **bianco** (per analogia con la luce bianca che contiene tutti i vari colori).

[6] Ricordiamo che per **potenza statistica** di un segnale aleatorio X(t) si intende il suo valore quadratico medio

Tuttavia, è importante precisare che *questa espressione vale rigorosamente solo per frequenze di lavoro non superiori a 100 GHz*, in quanto, per frequenze superiori, subentrano fenomeni di tipo quantistico che modificano l'andamento rispetto alla frequenza, riducendo l'entità del rumore.

Per risalire dalla densità spettrale di potenza della tensione di rumore al valore quadratico medio della stessa tensione, dobbiamo integrare $G_V(f)$ su tutte le frequenze (ovviamente positive, data sempre l'ipotesi di considerare le *trasformate di Fourier monolatere*). Anziché, però, effettuare l'integrazione tra 0 ed ∞, ci limitiamo ad un generico intervallo monolatero di frequenza [0,B], che supponiamo sia quello nel quale il resistore deve lavorare (oppure quello entro il quale viene effettuata la misura): il risultato della integrazione è allora

$$\overline{v^2}(t) = \int_0^B G_V(f)df = \int_0^B 4ktRdf = 4kTRB$$

Questa relazione indica, come è abbastanza ragionevole aspettarsi, che *il rumore termico è direttamente proporzionale alla temperatura*. Esso quindi tende a zero per T che tende a 0(°K).

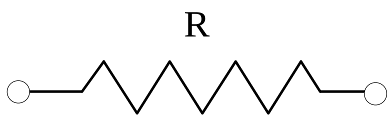
Calcolando la radice quadrata di $\overline{v^2}(t)$, si ottiene il valore efficace della tensione di rumore termico:

$$v_{eff} = \sqrt{\overline{v^2}(t)} = \sqrt{4kTRB} = 2\sqrt{kTRB}$$

Modello circuitale di un resistore rumoroso

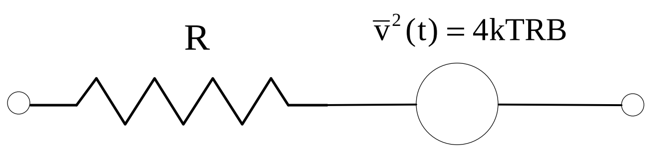
Vediamo adesso come sia possibile tenere conto della presenza del rumore termico nel modello circuitale di un resistore.

Se non consideriamo il rumore, ossia consideriamo il **resistore ideale**, sappiamo bene che il modello circuitale è semplicemente il seguente:



ossia un elemento caratterizzato dalla equazione **V=R·I**.

Viceversa, al fine di tenere conto del rumore, basta aggiungere un generatore di tensione di valore quadratico medio pari a $\overline{v^2}(t) = 4kTRB$, dove B è sempre la banda monolatera di nostro interesse (ad esempio quella del sistema di misura). Il modello circuitale diventa perciò il seguente:



Facciamo osservare che, <u>nel generatore di tensione, non sono stati indicati né il valore istantaneo né le polarità</u>: ciò deriva proprio dal fatto che non possiamo prevedere né l'una né l'altra cosa, per cui possiamo solo considerare il valore quadratico medio di quella tensione. Nel fare i calcoli, dobbiamo ovviamente considerare, come tensione di rumore, la quantità $v_{eff} = \sqrt{\bar{v}^2(t)}$.

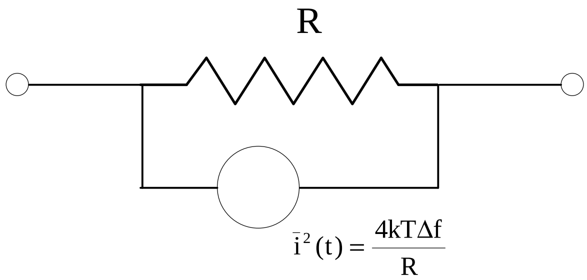
Quello è dunque il modello di un **resistore reale** ed è evidentemente il *modello di Thevenin*. Ne esiste anche un altro, detto *modello di Norton*, il quale tiene conto, anziché della tensione di rumore, della *corrente di rumore*, il cui valore quadratico medio risulta essere

$$\bar{i}^2(t) = \frac{4kTB}{R}$$

e deriva dalla funzione **densità spettrale di potenza della corrente di rumore** (misurata in A^2/Hz), che vale evidentemente

$$G_I(f) = \frac{2kT}{R}$$

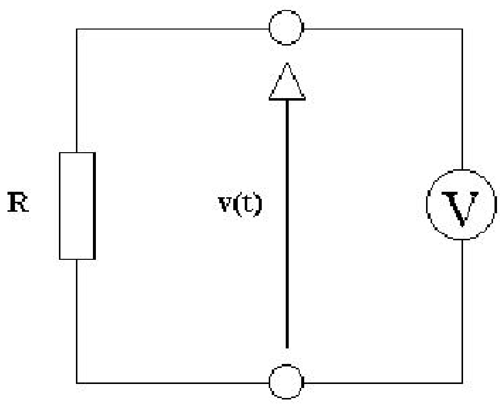
Il modello è il seguente:



Misure sperimentali sul rumore elettronico

E' possibile misurare lo spettro di potenza del rumore utilizzando strumenti di laboratorio.

Supponiamo, ad esempio, di collegare una resistenza R, "rumorosa" e non alimentata, ad un voltmetro di banda B, come nella figura seguente:



La misura effettuata dallo strumento fornisce la tensione efficace ai capi del resistore, dalla quale si può ricavare il valore quadratico medio e quindi anche la densità spettrale.

E’ bene comunque tener presente che il voltmetro filtra le componenti del segnale di frequenza superiore a B e quindi v(t) va più correttamente vista come la tensione ai capi del resistore filtrata con un filtro ideale di banda B.

In modo analogo, si può misurare con un amperometro il valore quadratico medio della corrente che attraversa il resistore.

Il rumore bianco additivo gaussiano

Abbiamo prima trovato che la densità spettrale di potenza della tensione di rumore termico è $G_V(f) = 4kTR$ e abbiamo sottolineato come si tratti di una funzione costante al variare della frequenza (tutte le armoniche di rumore alle diverse frequenze hanno la stessa ampiezza). Un rumore così fatto prende il nome di **rumore bianco**, in contrapposizione al “*rumore colorato*”, per il quale la $G_V(f)$ è variabile con f.

Abbiamo inoltre detto che questo rumore termico ha una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano (a media nulla) ed è questo il motivo per cui si parla di **rumore bianco additivo gaussiano** o, più brevemente, **AWGN**. Il termine “additivo”, come vedremo in seguito, indica che questo tipo di rumore si somma semplicemente al segnale utile.

Potenza di rumore disponibile

Fino ad ora abbiamo considerato le densità spettrali di potenza delle tensioni e correnti di rumore, ma, in realtà, nelle applicazioni interessa conoscere soprattutto lo **spettro di potenza del rumore**.

Per poter parlare di “potenza”, occorre chiudere una sorgente su un carico (in generale, una impedenza) e misurare la potenza assorbita da tale carico.

Supponiamo allora di avere un certo sistema elettronico (sia esso un singolo dispositivo o un circuito comunque complesso) in grado di trasferire potenza al carico collegato ai suoi morsetti: *si definisce **potenza disponibile** la massima potenza che il sistema può trasferire al carico.*

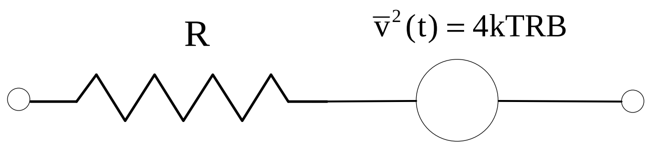
Dall’Elettrotecnica ci ricordiamo un fondamentale teorema circa la potenza trasferibile da un sistema ad un carico: si tratta del cosiddetto **teorema del massimo trasferimento di potenza**, secondo il quale *un sistema è in grado di trasferire su un carico, rappresentato da una certa impedenza $\dot{z}_L$, la massima potenza possibile solo quando*

$$\boxed{\dot{z}_L = \left(\dot{z}\right)^*}$$

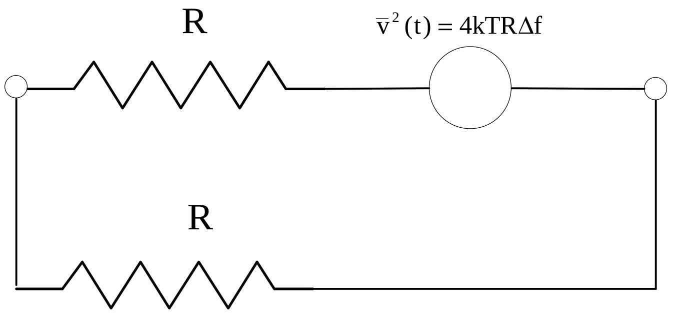
dove $\dot{z}$ è l’impedenza di uscita del sistema stesso, ossia l’impedenza vista dal carico.

Vediamo come ci può essere di aiuto questo nei discorsi che stiamo facendo.

Come *circuito monoporta* consideriamo il modello circuitale prima ricavato per un resistore di resistenza R affetto da rumore termico:



E' chiaro che la presenza di quel generatore di tensione (che poi è la tensione di rumore) conferisce a questo circuito la capacità di trasferire una certa potenza all'eventuale carico connesso ai morsetti. Se questo carico consiste in una certa impedenza $\dot{z}_L$, il teorema prima enunciato ci dice che il massimo trasferimento di potenza si ha quando tale carico è pari al complesso coniugato dell'impedenza del circuito di alimentazione; tale impedenza è reale e pari ad R, per cui il massimo trasferimento di potenza si avrà su un carico pari a sua volta ad R:



Quindi, *in questo circuito la potenza trasferita sul carico è pari esattamente a quella che abbiamo definito* ***potenza disponibile*** (che, ovviamente, in questo caso è una *potenza disponibile di rumore*). Vogliamo allora valutare quest'ultima.

La potenza istantanea assorbita dal carico adattato è

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

La corrispondente potenza media si calcola nel modo seguente:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} p(t)dt$$

Questo discorso vale, però, solo per *segnali deterministici*. Al contrario, nel nostro caso, dato che la tensione del generatore è per noi un *processo aleatorio*, del quale conosciamo solo il valore quadratico medio, il concetto di "media" deve necessariamente essere inteso come "media statistica". Possiamo perciò calcolare il **valore medio della potenza disponibile** nel modo seguente:

$$P = E[P(t)] = \overline{P(t)} = R\overline{i^2(t)}$$

Dobbiamo dunque calcolare $\overline{i^2(t)}$. Applicando la legge di Kirchoff delle tensioni a l'equazione di funzionamento del resistore, troviamo che $i(t) = \frac{v(t)}{2R}$, da cui si ricava che

$$\overline{i^2(t)} = \frac{\overline{v^2(t)}}{4R^2}$$

e quindi anche che

$$\overline{P(t)} = \frac{\overline{v^2(t)}}{4R}$$

Sapendo adesso che $\overline{v^2(t)} = 4kTRB$, dove ricordiamo che B è la banda di frequenza di interesse (quella in cui lavora il circuito preso in esame), possiamo concludere che

$$\boxed{\overline{P(t)} = kTB}$$

Abbiamo dunque trovato, con questo discorso, che *il valor medio della potenza di rumore disponibile generata da un resistore è* $\overline{P(t)} = kTB$.

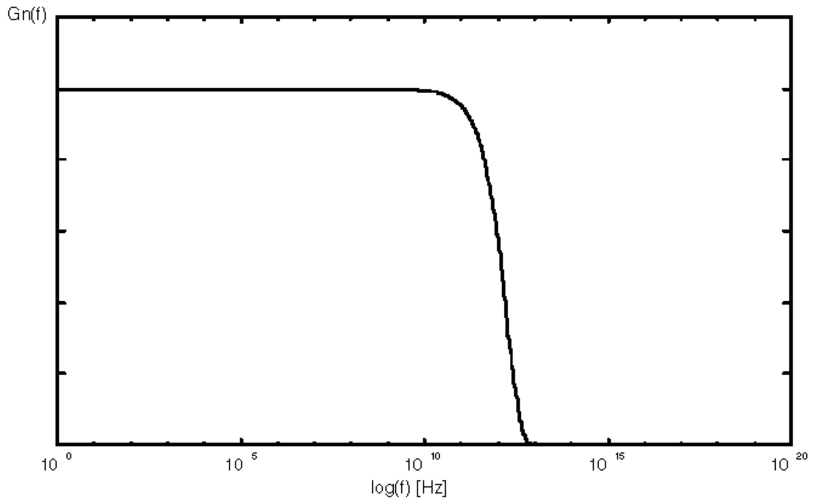
La cosa interessante è che questo valore medio non dipende dalla resistenza R, ma dipende SOLO dalla temperatura e dalla banda di interesse.

Da questo valore medio possiamo inoltre ricavare la **densità spettrale di potenza disponibile**, che nel seguito indicheremo con **$G_a(f)$**: restringendo l'analisi solo alle frequenze positive, si ha che

$$\boxed{G_a(f) = kT}$$

Questa quantità si misura in W/Hz ed è spesso espressa in dB.

Nella figura seguente viene riportato l'andamento dello spettro di potenza $G_a(f)$ del rumore elettronico rispetto alla frequenza (in scala logaritmica):

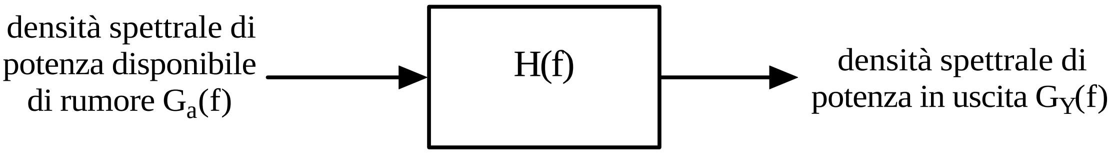


Si noti come fino a 100 GHz lo spettro sia pressoché piatto e di valore kT: quindi, per i normali sistemi di comunicazione che non lavorano a frequenze superiori a 100 GHz ([7]), l'approssimazione $G_a(f)=kT$ per qualsiasi frequenza è senz'altro lecita.

[7] Non rientrano in questa categoria i sistemi basati su fibre ottiche.

Banda equivalente di rumore

Consideriamo un generico sistema avente funzione di trasferimento **H(f)**. In accordo a quanto abbiamo visto nei precedenti paragrafi, possiamo considerare, come ingresso al sistema, una generica fonte di rumore termico:



Supponiamo che il sistema sia tale che la potenza di rumore trasferita in uscita sia quella massima possibile: si tratta perciò di quella che abbiamo definito "*potenza disponibile di rumore*". Indicata con $G_a(f)$ la densità spettrale di potenza disponibile di rumore in ingresso, possiamo dunque scrivere, detta $G_Y(f)$ la densità spettrale di potenza in uscita al sistema, che

$$G_Y(f) = G_a(f)\left|H(f)\right|^2$$

La funzione $\left|H(f)\right|^2$, essendo il rapporto tra lo spettro di potenza disponibile all'uscita e lo spettro di potenza disponibile in ingresso, è chiamata spesso **guadagno disponibile** del sistema e indicata con $\mathbf{g_d(f)}$ ([8]):

$$G_Y(f) = G_a(f)\left|H(f)\right|^2 = G_a(f)\cdot g_d(f)$$

Si definisce inoltre **potenza di rumore in uscita**, indicata generalmente con **N**, la seguente quantità:

$$\boxed{N = \int_0^{+\infty} G_Y(f)df = \int_0^{+\infty} G_a(f)\left|H(f)\right|^2 df}$$

Si tratta cioè di integrare, in frequenza, la densità spettrale di potenza in uscita.

Nel caso in cui il rumore termico in ingresso sia quello generato da un singolo resistore, abbiamo in precedenza trovato che $G_a(f) = kT$: sostituendo nell'espressione di N, abbiamo perciò che

$$N = kT\int_0^{+\infty}\left|H(f)\right|^2 df$$

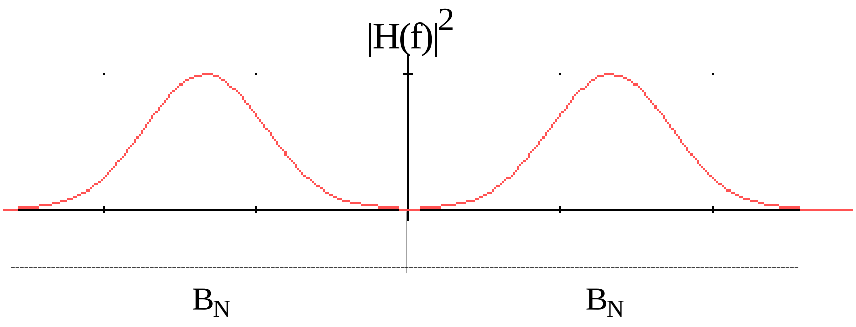
In base a questa formula, il calcolo della potenza di rumore in uscita (nell'ipotesi che tale rumore provenga da un solo resistore) si può fare solo a patto di conoscere la funzione di trasferimento del sistema e a patto di poter calcolare quell'integrale.

[8] Questo guadagno $g_d(f)$ è una grandezza tipica del sistema, usata ad esempio anche per i doppi bipoli in Elettrotecnica e non legata al rumore.

Spesso, la funzione di trasferimento ha una espressione complessa, per cui il calcolo di quell’integrale non è tanto agevole. Si preferisce allora utilizzare, come risultato di quell’integrale, un valore approssimato. Vediamo di che si tratta.

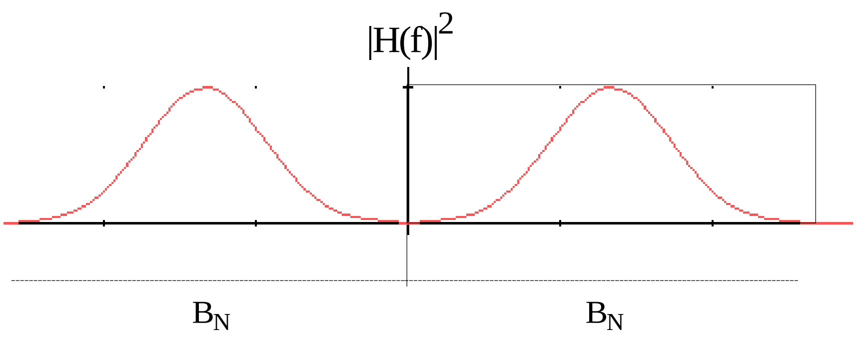
La funzione bilatera $|H(f)|^2$ gode evidentemente di due proprietà: in primo luogo, essa a valori non negativi; in secondo luogo, si tratta di una funzione pari, il che significa che essa è perfettamente simmetrica rispetto alla frequenza nulla.

Un esempio potrebbe essere la seguente funzione:



Come indicato anche in questa figura, è chiaro che la funzione $|H(f)|^2$, sia nel campo delle frequenze negative sia in quello delle frequenze positive, sarà non nulla entro un certo intervallo di frequenza, di ampiezza $\mathbf{B_N}$, mentre sarà nulla al di fuori di tale intervallo.

Allora, calcolare l’integrale (monolatero) di $|H(f)|^2$ equivale a calcolare l’area sottesa da una qualsiasi delle due “parti” della funzione $|H(f)|^2$. Quest’area non sarà superiore al rettangolo nel quale la curva è contenuta:



L’area di quel rettangolo è il prodotto del valore massimo della funzione $|H(f)|^2$ per l’ampiezza B_N dell’intervallo: posto allora $g_d = \left(|H(f)|^2\right)_{MAX}$ (è il massimo guadagno disponibile di potenza del sistema), l’approssimazione da fare consiste nel porre

$$\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df \cong B_N g_d$$

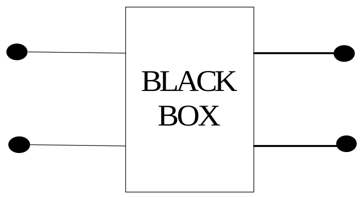
per cui l’espressione utilizzata per la potenza di rumore risulta essere

$$\boxed{N = kTg_d B_N}$$

All'ampiezza B_N si dà il nome di **banda equivalente di rumore** ed è il valore usato sempre nei calcoli della potenza di rumore.

Fattore di rumore

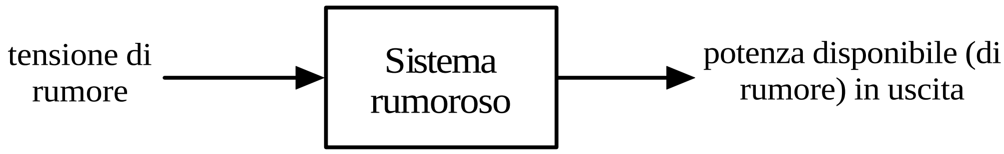
Consideriamo un sistema che rappresentiamo mediante un doppio-bipolo:



Supponiamo che questo sistema sia "rumoroso", ossia che esso produca internamente, quando riceve un segnale in ingresso, un "rumore" (che può essere tensione di rumore termico o corrente di rumore termico) dovuto alla natura fisica degli elementi da cui è costituito. Tale rumore si somma al segnale in ingresso e quindi produce, in uscita, un segnale distorto rispetto a quello desiderato.

Supponiamo ora che il sistema in esame venga alimentato da un generatore che applica una certa tensione ai morsetti di ingresso: questo generatore presenta una propria resistenza e questo implica che esso generi, oltre al segnale utile, anche un certo rumore termico, ossia una tensione di rumore che si sovrappone a quella costituita dal segnale utile. In ingresso, quindi, al nostro sistema "rumoroso" abbiamo due segnali sovrapposti: il segnale utile ed il rumore prodotto dalla resistenza del generare.

Dato che vogliamo studiare il comportamento del sistema dal punto di vista del rumore, <u>supponiamo che il segnale utile sia assente e che quindi il sistema riceva in ingresso solo il segnale di rumore</u>:



Così come in ingresso, in uscita avremo una certa tensione frutto delle azioni che il sistema effettua sull'ingresso. In particolare, *avendo supposto il circuito rumoroso, ci aspettiamo in uscita un contributo dovuto al rumore in ingresso, più un contributo dovuto al rumore introdotto dal circuito stesso.*

Vediamo allora di quantificare, a livello analitico, tutte queste considerazioni.

Indichiamo con $\mathbf{N_{dU}}$ la **potenza di rumore disponibile in uscita**, ossia la potenza totale di rumore in uscita al circuito, dove usiamo l'aggettivo "*disponibile*" in quanto abbiamo supposto verificata la condizione di adattamento. Questa potenza di uscita, come detto, sarà la somma del <u>contributo dovuto al rumore in ingresso</u>, che indichiamo genericamente con $\mathbf{N_{dI}}$, e del <u>contributo intrinsecamente introdotto dal sistema</u>, che indichiamo con $\mathbf{N_d}$: quindi

$$N_{dU} = N_{dI} + N_d$$

Si definisce allora **fattore di rumore** il termine

$$\boxed{F = \frac{N_{dU}}{N_{dI}} = 1 + \frac{N_d}{N_{dI}}}$$

ossia il rapporto tra la potenza disponibile di rumore in uscita e la frazione di tale potenza dovuta solo all'ingresso di rumore (indipendente quindi dal rumore introdotto dal sistema). In altre parole, il fattore di rumore, detto anche *cifra di rumore*, è il *rapporto tra la potenza di rumore trasferita dal sistema reale al carico e la potenza di rumore trasferita dal sistema ideale (cioè non rumoroso) allo stesso carico e in presenza dello stesso ingresso*.

Da questa definizione risulta evidente che

$$N_{dU} = F \cdot N_{dI}$$

ossia che <u>la potenza disponibile di rumore in uscita è pari alla potenza disponibile di rumore in ingresso moltiplicata per il fattore di rumore</u>. *A parità di guadagno e di rumore in ingresso, sarà migliore, perciò, tra due sistemi, quello che presenta <u>il fattore di rumore inferiore</u>*. Il limite inferiore per F è ovviamente 1 e si ottiene solo per **sistemi non rumorosi** (**N_d=0**, ossia $N_{dU}=N_{dI}$)

Possiamo anche quantificare meglio il termine N_{dI}: infatti, avendo detto che esso corrisponde al contributo proveniente dalla potenza di rumore che alimenta il circuito, possiamo scrivere che

$$N_{dI} = kTg_d B_N$$

Vediamo come si giustifica questa relazione: intanto, il prodotto kT è la densità di potenza disponibile di rumore erogata dal generatore in ingresso; B_N è la banda equivalente di rumore definita nel paragrafo precedente; g_d è il massimo guadagno di potenza del circuito. Allora, se in ingresso abbiamo una potenza di rumore $kT \cdot B_N$, questa potenza, entrando nel circuito, viene da esso amplificata secondo un guadagno g_d (in quanto il circuito non può distinguere un segnale utile dal rumore, per cui effettua su entrambi la stessa azione), per cui in uscita essa diventa $N_{dI} = kTg_d B_N$.

Sulla base di ciò, avendo detto che $F = 1 + \frac{N_d}{N_{dI}}$, possiamo scrivere che

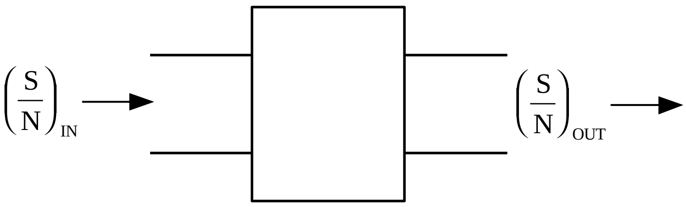
$$\boxed{F = 1 + \frac{N_d}{kTg_d B_N}}$$

Da questa relazione si deduce che <u>il fattore di rumore è funzione della temperatura</u>, per cui assume in teoria un valore diverso per ogni valore di T. Nella pratica, però, <u>si prende come valore di F per un dispositivo (o circuito) il valore misurato alla temperatura T=293°K</u>.

Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita ad un sistema rumoroso

Abbiamo prima definito il fattore di rumore di un circuito secondo la relazione $\mathbf{F=N_{dU}/N_{dI}}$, ossia quindi come rapporto tra la potenza totale di rumore in uscita e la quota parte, di tale potenza, dovuta solo al rumore in ingresso al circuito stesso. E' possibile quantificare anche in altro modo la rumorosità del circuito o dispositivo in esame, facendo riferimento questa volta del **rapporto segnale-rumore**.

Dato un generico biporta, indichiamo con $\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}$ il rapporto segnale-rumore in ingresso e con $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$ il rapporto segnale-rumore in uscita (cioè sul carico):



Una misura quantitativa della rumorosità introdotta dal sistema è data dal rapporto tra il rapporto S/N in ingresso e il rapporto S/N in uscita:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}}$$

Quanto più questo rapporto cresce rispetto all'unità, tanto peggiore è la "qualità" del sistema considerato nei confronti del rumore. Viceversa, valori inferiori all'unità sono più che graditi, in quanto indicano un miglioramento del rapporto S/N dall'ingresso all'uscita.

E' importante non confondere questo rapporto con il fattore di rumore, perché si tratta di due quantità distinte. A tal proposito, conviene compiere qualche manipolazione algebrica su quella definizione un po' astratta.

Per esempio, utilizzando la stessa notazione del precedente paragrafo, indichiamo con N_{dI} la potenza del rumore in ingresso (da porre nel rapporto S/N a numeratore) e con N_{dU} la potenza del rumore in uscita (da porre nel rapporto S/N a denominatore). Supponiamo inoltre che l'effetto del sistema considerato sia quello di amplificare (in potenza) tutto ciò che riceve in ingresso (senza filtraggio alcuno) di una quantità g_d. Possiamo allora scrivere che

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{S_{IN}}{N_{dI}}}{\frac{S_{OUT}}{N_{dU}}} = \frac{\frac{S_{IN}}{N_{dI}}}{\frac{g_d \cdot S_{IN}}{N_{dU}}} = \frac{1}{g_d}\frac{N_{dU}}{N_{dI}}$$

Del resto, si è detto che il fattore di rumore è $F=N_{dU}/N_{dI}$, per cui deduciamo che

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}=\frac{F}{g_d}$$

Sostituendo la definizione del fattore di rumore trovata in precedenza, concludiamo che

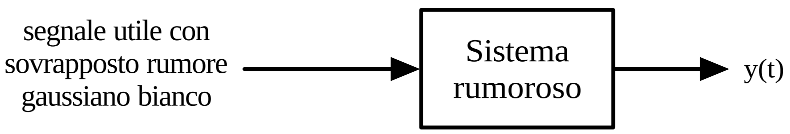
$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}=\frac{1+\frac{N_d}{kTg_dB_N}}{g_d}=\frac{1}{g_d}+\frac{N_d}{kTg_d^2B_N}$$

Ovviamente, quello appena condotto è un ragionamento molto approssimato, ma rende però già significativa la differenza tra il fattore di rumore ed il rapporto tra le quantità S/N in ingresso ed in uscita.

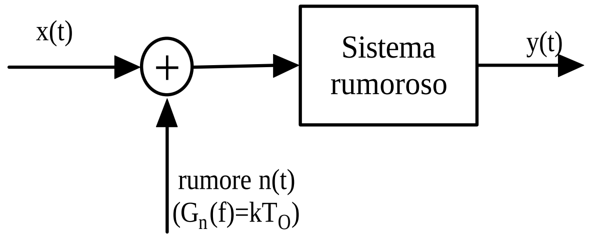
Inoltre, si nota l'effetto del rumore introdotto internamente dal sistema: infatti, solo in assenza di tale rumore ($N_d=0$), il rapporto S/N in uscita risulta essere g_d volte l'ingresso.

Temperatura equivalente di rumore

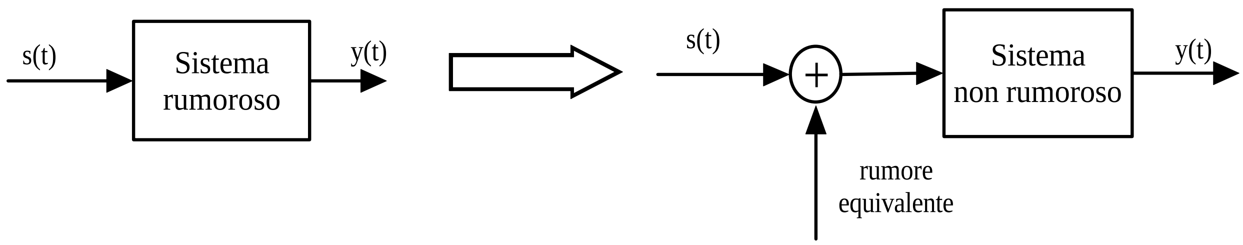
Supponiamo di avere un generico sistema, in ingresso al quale giunga un segnale x(t) con sovrapposto del rumore n(t), che supponiamo sempre essere un *rumore gaussiano bianco*:



Tale rumore (che, per esempio, può essere il rumore che una *antenna* capta oltre al segnale utile oppure il rumore prodotto dalla resistenza interna di un generatore che alimenta il sistema) si può evidenziare mediante un **generatore equivalente di rumore**, la cui densità spettrale di potenza disponibile sarà kT_O (dove T_O è la temperatura ambiente):



Il sistema in questione è del resto reale, ossia *rumoroso*: esso aggiunge cioè dell'altro rumore a quello già presente in ingresso (basti pensare ad un amplificatore che, essendo realizzato mediante dispositivi attivi, comprende svariate cause di rumore). Al fine di includere questo nuovo contributo di rumore nel nostro modello, così come fatto nel caso del singolo resistore rumoroso, è molto comodo rappresentare il sistema come ideale (cioè non rumoroso) e considerare un ulteriore ingresso di rumore, opportunamente quantificato:



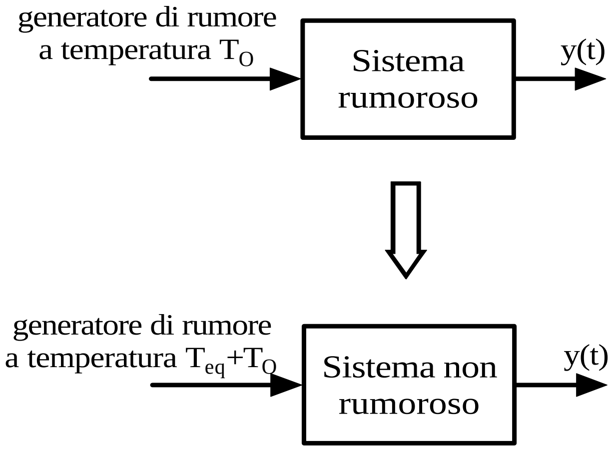
Per semplicità, con s(t) abbiamo indicato il segnale, affetto da rumore, in ingresso al sistema rumoroso:

$$s(t) = x(t) + n(t)$$

La corrispondente uscita y(t) è la stessa che si ottiene dallo stesso sistema, ritenuto però non rumoroso, quando l'ingresso è rappresentato dalla somma di s(t) e di un *rumore equivalente*. Dobbiamo allora capire come quantificare questo *rumore equivalente*: si usa il concetto di *temperatura equivalente di rumore* del sistema considerato.

Per il discorso che dobbiamo fare, non ci interessa la presenza del segnale utile x(t), per cui la trascuriamo.

Supponiamo che il rumore n(t) in ingresso al sistema reale sia prodotto da un generatore a temperatura T_O (per esempio da un resistore reale a tale temperatura); sia y(t) l'uscita corrispondente; se adesso supponiamo il sistema ideale, ci chiediamo di quanto dobbiamo aumentare la temperatura T_O di funzionamento del generatore per ottenere da tale sistema la stessa uscita y(t) di prima. La schematizzazione è cioè la seguente:



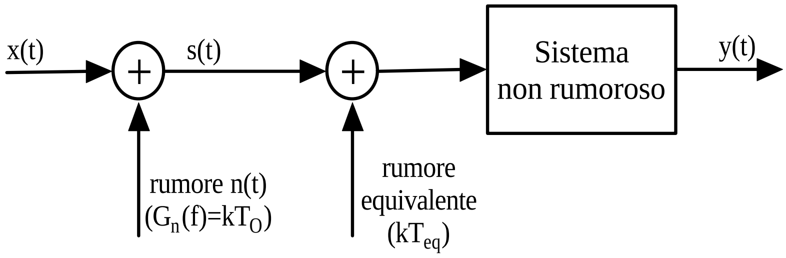
Il suddetto aumento di temperatura è la cosiddetta **temperatura equivalente di rumore**. Questo modo di procedere è utile per la determinazione di $\mathbf{T_{eq}}$ sulla base delle formule esaminate nei paragrafi precedenti: infatti, abbiamo trovato nel paragrafo precedente che la potenza disponibile di rumore in uscita è data da

$$N_{dU} = kT_0 g_d B_N + N_d$$

dove il primo termine rappresenta il contributo dovuto al generatore in ingresso, che funziona alla temperatura T_0, mentre il secondo termine rappresenta il contributo del rumore interno al sistema.

Nell'ipotesi che il sistema sia ideale, per cui $N_d=0$, e che il generatore in ingresso venga portato alla temperatura di lavoro T_0+T_{eq}, il contributo dovuto al rumore in ingresso diventa $k(T_0+T_{eq})g_d B_N$ e quindi la potenza disponibile di rumore in uscita risulta essere proprio

$$N_{dU} = k(T_0+T_{eq})g_d B_N$$



Uguagliando le due espressioni ottenute per N_{du}, si ottiene facilmente che

$$\boxed{T_{eq} = \frac{N_d}{k g_d B_N}}$$

Quindi, la temperatura equivalente di rumore è un parametro che ci consente di simulare il comportamento del sistema, dal punto di vista del rumore, assumendo il sistema stesso ideale e facendo risalire il rumore interamente a quello che arriva in ingresso. Detto anche in altre parole, il sistema diventa ideale e <u>tutte le cause di rumore vengono poste a monte di esso</u>.

E' facile trovare il legame esistente tra la temperatura di rumore appena definita ed il fattore di rumore, che ricordiamo avere, per una temperatura di funzionamento $T=T_0$, l'espressione

$$F = 1+\frac{N_d}{kT_0 g_d B_N}$$

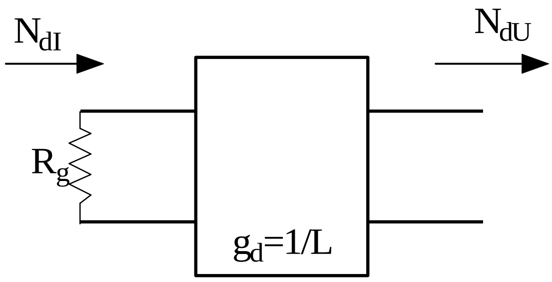
Confrontando questa relazione con l'espressione di T_{eq}, si deduce facilmente che

$$\boxed{F = 1+\frac{T_{eq}}{T_0}}$$

C'è una fondamentale differenza tra il modello che si ottiene usando la temperatura equivalente di rumore e quello che si ottiene usando il fattore di rumore: *la temperatura equivalente di rumore esprime infatti il rumore introdotto dal sistema mediante un termine additivo, mentre invece, come visto in precedenza, il fattore di rumore rappresenta tale rumore con un fattore moltiplicativo che, applicato alla densità spettrale del rumore presente in ingresso, fornisce la densità spettrale del rumore totale.*

Attenuatore resistivo

Consideriamo un circuito biporta che supponiamo costituito semplicemente da elementi resistivi. Si tratta quindi, per definizione, di un **attenuatore**:



Se ci sono solo resistori, il circuito, anziché comportarsi da amplificatore, ossia anziché fornire in uscita il segnale in ingresso amplificato secondo un certo guadagno g_d (si intende *guadagno di potenza*), si comporta chiaramente come *attenuatore*, ossia introduce sul segnale in ingresso una **attenuazione** secondo un coefficiente che indichiamo con **L** (pari ovviamente al reciproco di g_d). Con buona approssimazione, ritenendo assente qualunque effetto di tipo induttivo o capacitivo, questo coefficiente L è costante su tutte le frequenze: possiamo allora esprimerci analiticamente dicendo che il guadagno del sistema è $g_d = \frac{1}{L}$, con L>1 (per cui $g_d<1$)

Vogliamo studiare questo circuito dal punto di vista del rumore, per cui immaginiamo di chiudere i morsetti di ingresso su un resistore fisico di resistenza R_g: ciò significa che l'ingresso al circuito è costituito da una tensione di rumore termico di valore quadratico medio $\overline{v^2(t)} = 4kTR_gB$.

In uscita al circuito, in modo analogo a quanto fatto in precedenza, avremo una potenza di rumore data da

$$N_{dU} = N_{dI} + N_d$$

dove N_{dI} è il contributo derivante dalla potenza di rumore in ingresso, mentre N_d è il contributo di rumore prodotto dal circuito a causa dei dispositivi fisici che lo compongono.

Per quanto riguarda N_{dI} possiamo scrivere, sempre in analogia a quanto fatto in precedenza, che

$$N_{dI} = kTB_N g_d = \frac{kTB_N}{L}$$

La potenza di rumore in uscita è dunque

$$N_{dU} = \frac{kTB_N}{L} + N_d$$

A questo punto, dato che supponiamo sempre valida la condizione di *adattamento del carico*, è chiaro che il circuito fornisce in uscita la massima potenza di rumore, ossia quella che abbiamo chiamato "potenza di rumore disponibile": supponiamo allora che sia $N_{dU} = kTB$, per cui

$$N_d = kTB - \frac{kTB_N}{L}$$

Nell'ipotesi che sia anche $B=B_N$, possiamo dunque scrivere che

$$N_d = kTB - \frac{kTB}{L} = kTB\frac{L-1}{L}$$

Andiamo adesso a calcolarci la temperatura equivalente di rumore del circuito e il fattore di rumore.

Per la temperatura di rumore, definita come $T_E = \frac{N_d}{kg_d B_N}$, troviamo facilmente che

$$\boxed{T_E = T(L-1)}$$

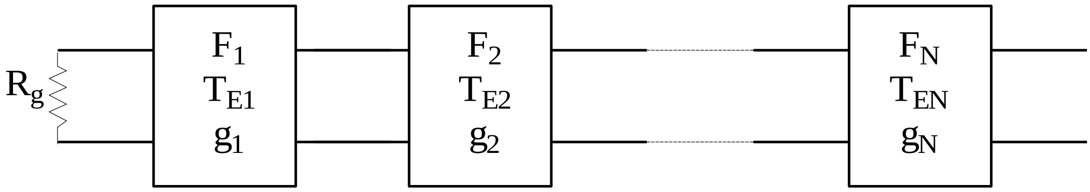
Da qui ricaviamo il fattore di rumore utilizzando la relazione $F = 1 + \frac{T_E}{T_0}$, dove ricordiamo che T_0 è la temperatura ambiente (da distinguere dalla temperatura di lavoro T). Abbiamo dunque che

$$\boxed{F = 1 + \frac{T(L-1)}{T_0}}$$

Appare ovvio, dunque, che, *nell'ipotesi per cui la temperatura di lavoro sia proprio quella ambiente, ossia $T=T_0$, il fattore di rumore risulta numericamente uguale al coefficiente di attenuazione*. Nel seguito, faremo quasi sempre questa ipotesi, per cui diremo che un attenuatore con attenuazione L ha un fattore di rumore pari proprio ad L.

Sistemi rumorosi in cascata

Supponiamo di avere un certo numero N di sistemi, ciascuno caratterizzato da un proprio fattore di rumore, da una propria temperatura di rumore e da un proprio guadagno (maggiore o minore dell'unità a seconda che si tratti di un amplificatore o di un attenuatore), collegati in cascata come nella figura seguente:



Supponiamo che questi sistemi siano tutti in condizione di adattamento, per cui ricevono ed erogano tutti la massima potenza possibile: sotto questa ipotesi, si può dimostrare che *il guadagno di potenza del sistema complessivo è dato semplicemente dal prodotto dei singoli guadagni di potenza,* ossia

$$g_{TOT} = \prod_{k=1}^{N} g_k$$

Supponiamo adesso di chiudere l'ingresso del primo sistema su un resistore fisico, il quale quindi produce, come ingresso al sistema complessivo, una tensione di rumore di valore quadratico medio $\overline{v^2(t)} = 4ktR_g B$. Vogliamo conoscere il fattore di rumore e la temperatura equivalente di rumore del sistema complessivo formato dagli N sistemi in cascata.

Così come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti, possiamo intanto scrivere che la potenza di rumore in uscita al sistema complessivo è

$$N_{dU} = N_{dI} + \underbrace{\left(N_{d1} + N_{d2} + \ldots + N_{dN}\right)}_{N_d}$$

dove il primo termine è dovuto al rumore in ingresso, mentre il secondo è dovuto al rumore introdotto dai singoli dispositivi.

Sempre in analogia a quanto fatto in precedenza, poiché il termine N_{dI} è legato solo al rumore che entra in ingresso al sistema complessivo ed al guadagno g_{TOT} del sistema stesso, possiamo scrivere che

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + \underbrace{\left(N_{d1} + N_{d2} + \ldots + N_{dN}\right)}_{N_d}$$

dove abbiamo supposto di lavorare a temperatura ambiente $T=T_0$ e che la banda dell'eventuale segnale utile sia pari alla banda equivalente di rumore ($B=B_N$).

Consideriamo adesso il termine N_{d1}, che rappresenta il contributo di potenza di rumore introdotto dal sistema numero 1: quando abbiamo definito la temperatura equivalente di rumore per il generico sistema, abbiamo trovato la relazione $T_E = \frac{N_d}{kg_d B_N}$, dalla quale si ricava che $N_d = T_E k g_d B_N$. Aggiungendo un pedice 1, abbiamo dunque che

$$N_{d1} = T_{E1} k g_1 B_N$$

Questo è dunque il contributo di potenza di rumore fornito dal primo sistema. Tuttavia, questa potenza entra in ingresso ai dispositivi successivi e viene quindi amplificata (o attenuata) secondo i rispettivi guadagni: dobbiamo perciò scrivere più correttamente che il contributo del primo sistema alla potenza complessiva di uscita vale

$$N_{d1} = T_{E1} k g_1 B_N \cdot \left(g_2 \ldots g_N\right) = T_{E1} k B_N \cdot g_{TOT}$$

Quindi abbiamo che

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + \left(T_{E1} k g_{TOT} B_N + N_{d2} + \ldots + N_{dN}\right)$$

Il discorso è analogo per il secondo sistema: la potenza di rumore in uscita a tale sistema, dovuta al rumore introdotto dal sistema stesso, è $T_{E2} k g_2 B_N$; questa potenza viene amplificata dai sistemi successivi, per cui il contributo alla potenza complessiva è

$$N_{d2} = T_{E2} k g_2 B_N \cdot (g_3 g_4 \ldots g_N) = T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N$$

Quindi possiamo ulteriormente scrivere che

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + \left(T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \ldots + N_{dN}\right)$$

Il discorso prosegue identico per gli altri sistemi: arrivati all'ultimo, avremo evidentemente un contributo

$$N_{dN} = T_{EN} k \frac{g_{TOT}}{g_1 g_2 \ldots g_{N-1}} B_N$$

per cui possiamo concludere che

$$\begin{aligned} N_{dU} &= kT_0 B_N g_{TOT} + \left(T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \ldots + T_{EN} k \frac{g_{TOT}}{g_1 g_2 \ldots g_{N-1}} B_N\right) = \\ &= kT_0 B_N g_{TOT} + \left(T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \ldots + T_{EN} k g_N B_N\right) \end{aligned}$$

A partire da questa relazione, andiamo a calcolarci il fattore di rumore, il quale, per definizione, è dato da $F = \frac{N_{dU}}{N_{dI}}$. Sostituendo le rispettive espressioni dei termini che compaiono a secondo membro e facendo gli opportuni passaggi, si ottiene quanto segue:

$$F = \frac{kT_0 B_N g_{TOT} + \left(T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \ldots + T_{EN} k g_N B_N\right)}{kT_0 B_N g_{TOT}} =$$

$$= 1 + \frac{T_{E1} g_{TOT} + T_{E2} \frac{g_{TOT}}{g_1} + \ldots + T_{EN} g_N}{T_0 g_{TOT}} = 1 + \frac{T_{E1}}{T_0} + \frac{T_{E2}}{T_0 g_1} + \frac{T_{E3}}{T_0 g_1 g_2} + \ldots \frac{T_{EN}}{T_0 g_1 g_2 \ldots g_{N-1}}$$

Adesso, ricordando che la temperatura equivalente di rumore del generico sistema è legata al fattore di rumore dalla relazione $T_E = T_0 (F-1)$, abbiamo che

$$F = 1 + \frac{T_0(F_1-1)}{T_0} + \frac{T_0(F_2-1)}{T_0 g_1} + \frac{T_0(F_3-1)}{T_0 g_1 g_2} + \ldots + \frac{T_0(F_N-1)}{T_0 g_1 g_2 \cdots g_{N-1}}$$

e quindi possiamo concludere che il fattore di rumore del sistema complessivo è il seguente:

$$\boxed{F = F_1 + \frac{F_2-1}{g_1} + \frac{F_3-1}{g_1 g_2} + \ldots + \frac{F_N-1}{g_1 g_2 \cdots g_{N-1}}}$$

Da questa formula si deduce che F è particolarmente condizionato dal primo sistema e molto meno da tutti gli altri, per cui, *dovendo progettare un sistema in cui più dispositivi sono collegati in cascata, è consigliabile porre come primo dispositivo uno con caratteristiche particolarmente buone, ponendo invece dopo dispositivi con caratteristiche anche meno pregiate.*

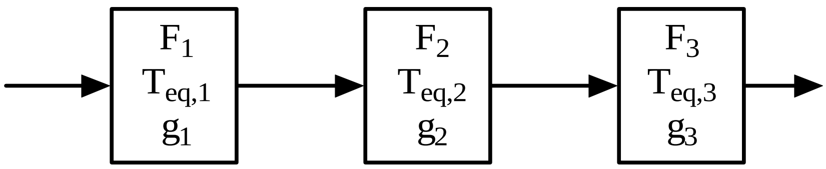
Ovviamente, questo discorso è valido quando tutti i sistemi presentano un guadagno maggiore di 1, ossia sono degli amplificatori: in questo caso, infatti, i denominatori delle varie frazioni vanno sempre crescendo e quindi la rilevanza degli ultimi dispositivi diventa sempre minore. Al contrario, invece, se ci sono degli attenuatori, ossia dispositivi con guadagno minore di 1, quel discorso può anche non risultare più valido.

A partire dal fattore di rumore, usando ancora una volta la relazione $T_{eq} = T_0(F-1)$, è immediato calcolarsi la temperatura equivalente di rumore del sistema complessivo:

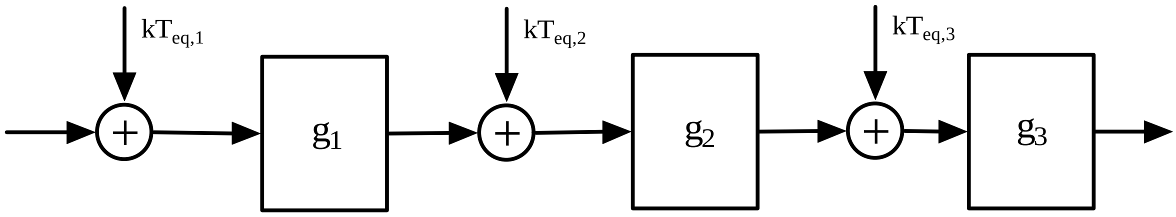
$$\boxed{T_{eq} = T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{g_1} + \frac{T_{eq,3}}{g_1 g_2} + \ldots + \frac{T_{eq,N}}{g_1 g_2 \ldots g_{N-1}}}$$

A questo stesso risultato si può arrivare anche con un altro ragionamento, che andiamo ad esaminare.

Per semplicità, consideriamo una cascata di tre soli sistemi reali, caratterizzati ciascuno da un proprio guadagno g e da una propria temperatura equivalente di rumore T_E:

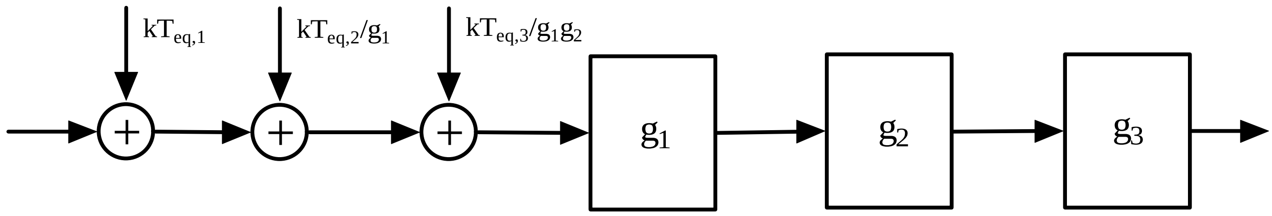


In base a quanto visto in precedenza, è spesso opportuno evidenziare la rumorosità di un sistema mediante un *rumore equivalente* che si somma all'ingresso del sistema, ritenuto adesso ideale; ricordando il significato della temperatura equivalente di rumore T_{eq}, ciò equivale a schematizzare la cascata dei tre stadi nel modo seguente:

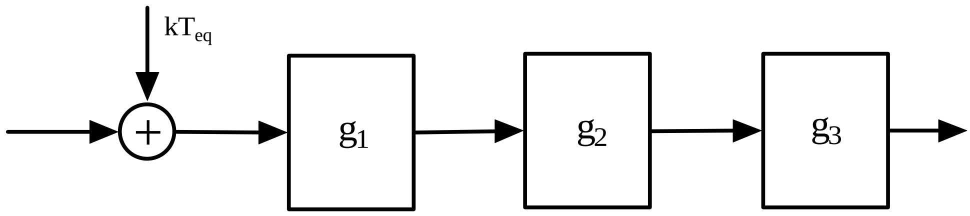


Come detto, ciascun "blocco" è ora da ritenersi completamente ideale, ossia "non rumoroso".

Proseguendo nella semplificazione, possiamo portare anche i due segnali di rumore $kT_{eq,2}$ e $kT_{eq,3}$ a monte del primo stadio. Applicando le note regole di semplificazione degli schemi a blocchi, otteniamo quanto segue:



A questo punto, i tre *nodi sommatori* possono essere sostituiti con uno solo a patto di porre $T_{eq} = T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{g_1} + \frac{T_{eq,3}}{g_1 g_2}$, per cui lo schema diventa il seguente:



Abbiamo in questo modo definito la temperatura equivalente di rumore della cascata dei tre sistemi, ossia quella temperatura che, moltiplicata per k, dà la densità spettrale di potenza disponibile di rumore da sommare all'ingresso dei sistemi, considerati non rumorosi, per ottenere la stessa uscita che si ottiene con i sistemi rumorosi.

Esempio numerico

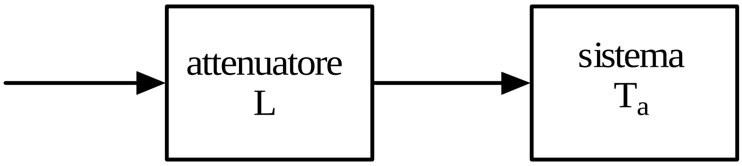
Consideriamo un semplice apparato di ricezione costituito da una antenna collegata, mediante un tratto di cavo o di guida d'onda, al ricevitore vero e proprio:

E' chiaro che il tratto di cavo o di guida d'onda costituisce, in prima approssimazione, un esempio di *attenuatore passivo* (dove l'approssimazione deriva dal trascurare i ritardi inevitabilmente introdotti) e tale attenuatore concorre evidentemente a peggiorare le prestazioni dell'apparato in termini proprio di rumorosità complessiva. Facciamo allora qualche conto numerico su una situazione di questo tipo.

Supponiamo che il rumore (sempre bianco gaussiano) captato dall'antenna sia caratterizzato da una temperatura equivalente di rumore T_g=100°K e supponiamo anche che il ricevitore abbia una temperatura equivalente di rumore T_a=250°K.

Se non ci fosse l'attenuatore, potremmo caratterizzare l'intero sistema semplicemente mediante una temperatura equivalente di rumore $T_{tot} = T_g + T_a = 350°K$. Viceversa, in presenza dell'attenuatore le prestazioni peggiorano, nel senso che ci sarà un aumento di T_{tot}. L'aumento dipende ovviamente dall'entità della attenuazione.

Supponiamo, per esempio, che l'attenuazione sia L=1dB, che in scala lineare corrisponde ad $\alpha = 10^{\frac{L}{10}} = 10^{\frac{1}{10}} = 1.26$. Per calcolare la nuova temperatura equivalente di rumore, ci basta far riferimento al seguente schema:



La formula da applicare è quella vista nel paragrafo precedente, ossia $T_{eq} = T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{g_1}$, dove il sistema 1 è l'attenuatore ed il sistema 2 è il ricevitore: ricordando che la temperatura equivalente di un attenuatore è $T_{att} = T_O(L-1)$, dove T_O=293°K è la temperatura ambiente, abbiamo dunque che

$$T_{eq} = T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{g_1} = T_{att} + \frac{T_a}{1/L} = T_O(L-1) + LT_a = 293\cdot(1.26-1) + 1.26\cdot 150 = 265°K$$

Sommando dunque la temperatura T_g, otteniamo una temperatura equivalente complessiva T_{tot}=365°K, che, come previsto, è maggiore di quella trovata prima.

Se l'attenuazione del tratto di cavo fosse di 2dB (corrispondente a 1.58 in scala lineare), si otterrebbe T_{tot}=507°K, di gran lunga maggiore rispetto alla precedente: quindi, un aumento di appena 1dB dell'attenuazione produce un notevole peggioramento delle prestazioni del sistema in termini di rumore.

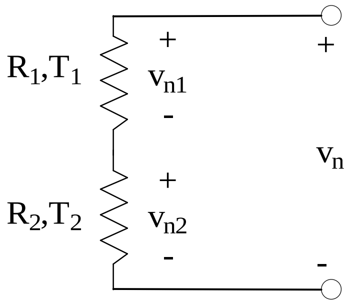
Oltre alla temperatura equivalente di rumore possiamo anche calcolare il fattore di rumore complessivo: applicando la formula trovata nel paragrafo precedente, abbiamo che

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} = F_{att} + \frac{F_{sist} - 1}{1/L} = F_{att} + L(F_{sist} - 1) = L + L(F_{sist} - 1) = F_{sist}L = \left(1 + \frac{T_a}{T_O}\right)L = 1.9$$

dove ovviamente abbiamo tenuto conto del fatto che, se l'attenuatore lavora a temperatura ambiente T_0, il suo fattore di rumore diventa pari al coefficiente di attenuazione L=1.26.

Composizione di più sorgenti di rumore

Supponiamo di avere due distinte sorgenti di rumore collegate tra di loro, come ad esempio i due resistori rumorosi, posti in serie, della figura seguente:



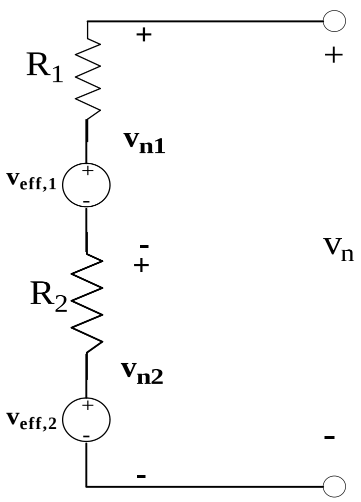
Così come abbiamo fatto per il resistore singolo, ci chiediamo quale sia la potenza di rumore disponibile alla porta del circuito appena raffigurato.

Per risolvere simili problemi di **composizione di più termini di rumore** è fondamentale decidere se tali termini sono *incorrelati* o, in tutto o in parte, *correlati*.

Come si vedrà, il caso più semplice è quello in cui essi sono **incorrelati**, in quanto, se questo accade, le rispettive potenze vanno sommate. I casi in cui due termini di rumore sono tra loro incorrelati si verificano quando tali termini sono il risultato di due realizzazioni distinte, anche di uno stesso processo.

Consideriamo dunque il caso delle due resistenze in serie. Supponiamo che tali resistenze abbiano valori R_1 ed R_2 diversi e si trovino anche a temperature diverse, rispettivamente di valore T_1 e T_2.

Possiamo modellare ciascun resistore reale come la serie tra un resistore ideale di pari valore ed un generatore di tensione di rumore di valore quadratico medio $\overline{v}^2(t) = 4kTRB$ o, meglio, di valore efficace $v_{eff} = \sqrt{4kTRB}$:



Indicate dunque con v_{n1} e v_{n2} le tensioni (ovviamente di rumore, visto che non ci sono altri ingressi oltre i generatori di rumore) ai capi dei due resistori reali, la tensione totale (sempre di rumore) alla porta del circuito è la loro somma, per cui

$$v_n(t) = v_{n1}(t) + v_{n2}(t)$$

Essendo una tensione di rumore, dobbiamo riferirci al suo valore quadratico medio, ossia alla potenza di rumore:

$$E\left[v_n^2\right] = E\left[(v_{n1} + v_{n2})^2\right] = E\left[v_1^2\right] + E\left[v_2^2\right] + 2E\left[v_1 v_2\right]$$

A questo punto, come anticipato in precedenza, si pone il problema di stabilire se le due sorgenti di rumore sono statisticamente indipendenti o meno: questo è sicuramente un caso in cui è vera l'indipendenza statistica, il che si traduce, in termini concreti, nel dire che $\boxed{\rho = E\left[v_1 v_2\right] = 0}$, in modo quindi da scrivere che

$$E\left[v_n^2\right] = E\left[v_1^2\right] + E\left[v_2^2\right]$$

Abbiamo cioè trovato che il valore quadratico medio della somma delle due tensioni rumore è pari alla somma dei rispettivi valori quadratici medi: in altre parole, *i due termini di rumore vengono sommati in potenza così come si sommano i rispettivi valori istantanei e/o i rispettivi valori quadratici medi* ([9]).

Noto dunque il valore quadratico medio della tensione di rumore alla porta del circuito, possiamo calcolare la corrispondente densità spettrale di potenza:

$$G_{vn}(f) = G_{vn1}(f) + G_{vn2}(f) = 4kR_1T_1 + 4kR_2T_2 = 4k(R_1T_1 + R_2T_2)$$

A questo punto, vogliamo vedere se possiamo modellare questa densità spettrale di potenza come quella proveniente da un unico resistore reale, di resistenza e temperatura opportuni: considerando che la serie di due resistori reali R_1 ed R_2 è pari ad un unico resistore reale di resistenza R_1+R_2, possiamo scrivere che

$$G_{vn}(f) = 4k(R_1T_1 + R_2T_2)\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} = 4k(R_1 + R_2)\frac{R_1T_1 + R_2T_2}{R_1 + R_2} = 4kR_{eq}T_{eq}$$

Da qui concludiamo che la serie di due resistori reali può essere sostituita da un unico resistore reale caratterizzato dai seguenti parametri:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$
$$T_{eq} = \frac{R_1T_1 + R_2T_2}{R_1 + R_2}$$

Possiamo dunque caratterizzare tale resistore mediante una temperatura equivalente T_{eq}, che risulta essere evidentemente una *media pesata* delle temperature dei due singoli resistori: nel caso particolare in cui i due resistori sono alla stessa temperatura, è evidente che $\boxed{T_{eq} = T_1 = T_2}$.

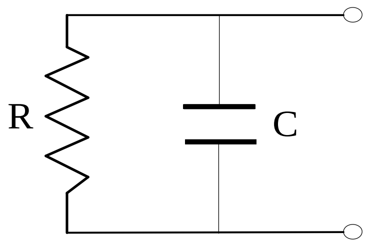
In effetti, questo discorso può essere generalizzato mediante il seguente teorema:

[9] Quando si compongono due termini di rumore che non sono statisticamente indipendenti, non si parla più di somma di potenze, ma semplicemente di somma di tensioni di rumore, proprio per indicare che i due termini si compongono nel tempo, ma non in potenza.

Teorema - *Data una rete passiva reciproca, se tutti gli elementi passivi sono alla stessa temperatura T, la tensione di rumore ad una qualsiasi coppia di morsetti della rete si può calcolare tenendo in conto la parte reale dell’impedenza presentata dalla rete a quegli stessi morsetti.*

In questo enunciato si fa riferimento alla parte reale della impedenza e non direttamente alla resistenza vista dalla coppia di morsetti prescelta: il motivo è che il circuito può comprendere anche elementi reattivi (i quali, però, come tali, non sono sede di generazione di rumore, a meno di non avere fenomeni dissipativi indesiderati) oltre quelli puramente resistivi. Ovviamente, capita spesso che anche la parte reale di una impedenza sia funzione della frequenza, per cui, in generale, il risultato del procedimento appena descritto è a sua volta funzione della frequenza.

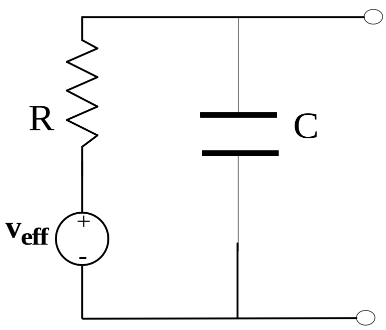
Detto questo, vediamo con maggiore dettaglio cosa succede quando nel circuito considerato è presente, oltre ad un elemento resistivo (e quindi generatore di rumore), un elemento reattivo. Facciamo ad esempio riferimento al circuito RC parallelo della figura seguente:



Se il resistore R è un resistore reale, esso è affetto da rumore, mentre il condensatore, essendo un elemento puramente reattivo, è ideale da questo punto di vista, ossia non è affetto di rumore.

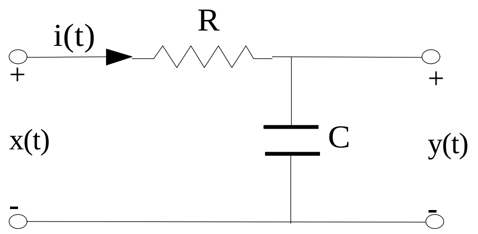
Vogliamo conoscere la tensione y(t) alla porta del circuito e la corrispondente potenza: ovviamente, si tratterà di una tensione di rumore e di una potenza di rumore, dato che l’unico ingresso presente è il <u>rumore termico generato dal resistore reale</u>.

Al fine di visualizzare meglio questo ingresso, possiamo sostituire il resistore mediante il suo modello circuitale contenente il generatore di rumore:



dove naturalmente $v_{eff} = \sqrt{4kTRB}$.

Al fine di visualizzare ancora meglio l’ingresso e l’uscita del circuito, possiamo ridisegnare quest’ultimo nel modo seguente:



L'ingresso è dunque costituito da una **tensione di rumore** x(t) avente, come detto in precedenza, valore medio nullo, valore quadratico medio $\overline{x^2(t)} = 4kTRB$, valore efficace $v_{eff} = \sqrt{4kTRB}$ e densità spettrale di potenza $G_V(f) = 4kTR$. Vogliamo ricavare la densità spettrale di potenza $G_Y(t)$ della tensione in uscita ed quindi il valore quadratico di tale tensione.

Il sistema considerato (che è un normale filtro passa-basso) è lineare tempo-invariante: per sistemi lineari tempo-invarianti, sappiamo che la densità spettrale di potenza del segnale in uscita è legata a quella del segnale in ingresso dalla relazione

$$G_Y(f) = G_V(f)|H(f)|^2$$

dove H(f) è chiaramente la funzione di trasferimento del sistema stesso e quindi $|H(f)|^2$ è la funzione di trasferimento in potenza: in questo caso, usando un semplice partitore di tensione, è immediato ricavare che la funzione di trasferimento ha espressione

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

Calcolando il modulo quadro di questa funzione e moltiplicando per $G_V(f)$ otteniamo dunque la densità spettrale di potenza in uscita:

$$G_Y(f) = \frac{4kTR}{1 + (2\pi RCf)^2}$$

A partire da $G_Y(f)$, siamo in grado di calcolarci quanto vale il valore quadratico medio della tensione in uscita, in quanto basta ricordarsi due importanti risultati:

- in primo luogo, la funzione $G_Y(f)$ è per definizione la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di y(t), definita dalla relazione $R_Y(\tau) = E[y(t)y(y+\tau)]$;
- in secondo luogo, è evidente che

$$E[y^2(t)] = E[y(t)y(t)] = R_Y(\tau = 0)$$

Di conseguenza, dobbiamo determinare l'antitrasformata di $G_Y(f)$ e poi calcolarla per $\tau=0$. Si trova allora che la funzione di autocorrelazione di y(t), ossia appunto l'antitrasformata della funzione $G_Y(f)$, ha espressione

$$R_Y(\tau) = \frac{kT}{C} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

Calcolandola per τ=0, otteniamo che

$$E\left[y^2(t)\right] = R_Y(\tau = 0) = \frac{kT}{C}$$

Abbiamo dunque trovato il seguente risultato: *dato un filtro RC passa-basso, la tensione di rumore da esso prodotta in uscita a causa della presenza del resistore reale (e in presenza di un condensatore supposto ideale) ha valore quadratico medio pari a kT/C*. Facendo la radice di kT/C, si ottiene ovviamente il valore efficace di tale tensione.

<u>E' interessante notare come questa tensione di rumore non dipenda da R, mentre dipende da C e ancora una volta, in modo direttamente proporzionale, dalla temperatura</u>.

Tanto per avere una idea quantitativa, supponiamo che il filtro lavori alla temperatura T=290°K e utilizzi una capacità C=0.1μF: in tal modo, il valore quadratico medio della tensione di rumore risulta essere di $E\left[y^2(t)\right] = 4*10^{-14}$ e ad esso corrisponde un valore efficace $y_{eff} = 2*10^{-7}(\text{volt})$.

Questi valori ci aiutano a ribadire un concetto importante già espresso in precedenza: il valore efficace della tensione di rumore risulta evidentemente piuttosto basso, per cui si è portati a ritenerlo trascurabile; questo è lecito solo quando il valore della tensione del segnale effettivamente applicato al filtro (o al generico dispositivo) è molto maggiore (almeno due ordini di grandezza) rispetto ad esso; al contrario, ci sono delle applicazioni in cui il segnale applicato e il rumore risultano del tutto confrontabili ed è in questi casi che il rumore diventa importante e va perciò studiato.

Un modo di procedere alternativo a quello appena descritto è quello di rappresentare il *resistore reale* mediante il suo modello di Norton con generatore di corrente di rumore in parallelo al resistore ideale, di calcolare quindi la densità spettrale di potenza della tensione di uscita e, integrando, di calcolare il corrispondente valore efficace.

Un terzo modo di procedere è infine quello indicato dal teorema precedentemente enunciato: si determina l'impedenza $\frac{1}{R + j\omega RC}$ (dove ω=2πf) vista dalla coppia di morsetti di interesse, se ne considera solo la parte reale (in modo da ricavare la densità spettrale di potenza come $4kTR_{eq}$) e se ne calcola l'integrale (tra 0 e +∞) per ricavare il valore quadratico medio:

$$G_Y(f) = 4kT \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{R + j\omega RC}\right\} = 4kT \cdot \frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2} \longrightarrow \overline{y^2(t)} = \int_0^{+\infty} G_Y(f)df = \frac{kT}{C}$$

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry