

Appunti di Comunicazioni Elettriche

Capitolo 2 – parte I

Modulazione d'ampiezza (DSB-SC)

<i>Introduzione</i>	2
“Tipi” di modulazione analogica	2
Il processo di demodulazione	3
<i>La modulazione analogica di ampiezza</i>	3
<i>Modulazione di ampiezza DSB-SC</i>	3
Apparato modulatore	5
Apparato demodulatore.....	7
<i>DSB-SC in presenza di sfasamenti</i>	10
<i>Metodo dei vettori rotanti</i>	12
<i>Analisi nel dominio del tempo</i>	14
<i>Rumore nella tecnica di modulazione DSB-SC</i>	26
<i>Osservazione: pre-filtraggio nel modulatore</i>	31
<i>Esempio numerico</i>	34
<i>Riferimento di fase e di frequenza nel segnale modulato</i>	36

Introduzione

Supponiamo di avere un generico **segnale $s(t)$** da trasmettere mediante un definito **mezzo trasmissivo**. Supponiamo che questo segnale abbia uno spettro limitato, ossia definito su un certo intervallo di frequenze e con valori identicamente nulli al di fuori di tale intervallo. Trasmettere $s(t)$ significa, dunque, nel dominio della frequenza, fare in modo che tutte le componenti armoniche di tale spettro giungano a destinazione. Tuttavia, è possibile che il mezzo trasmissivo utilizzato non sia in grado di trasmettere tutte queste frequenze, oppure, in corrispondenza di alcune di esse, non sia in grado di trasmettere ampiezze superiori ad un certo valore limite. Questo implica che, *prima della trasmissione, sia necessario “manipolare” il segnale in modo da “adattarlo” al mezzo trasmissivo, ossia in modo che esso arrivi al ricevitore senza distorsioni apprezzabili dovute appunto alle limitazioni imposte dal mezzo stesso.*

Questa manipolazione delle componenti di frequenza del segnale da trasmettere prende il nome di **modulazione** del segnale stesso: si tratta di “spostare” il segnale dalla sua **banda base** all’interno della **banda passante** del mezzo di trasmissione. La modulazione è dunque una operazione compiuta sul segnale prima della sua trasmissione.

A seconda del “tipo” di segnale da trasmettere, analogico o digitale, avremo una **modulazione analogica** oppure una **modulazione digitale**.

A loro volta, sia la modulazione analogica sia quella digitale possono essere suddivise in varie categorie, ma, per introdurle, è necessario premettere alcuni concetti fondamentali alla base del concetto di “modulazione”.

Abbiamo detto che il nostro scopo è trasmettere il segnale $s(t)$ dalla sorgente al ricevitore; per effettuare la traslazione in frequenza di cui si diceva prima, dalla banda base del segnale alla banda passante del mezzo trasmissivo, si utilizza un altro segnale **$c(t)$** , che prende il nome di **portante**. Solitamente, questa “portante” non è altro che un segnale sinusoidale del tipo

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Questa portante presenta evidentemente una propria ampiezza A_c , una propria fase φ e una propria frequenza f_c , tutte costanti nel tempo. Allora, si parla di “*modulazione*” quando viene trasmessa questa portante $c(t)$ con una “caratteristica aggiuntiva”: infatti, al fine di trasmettere anche $s(t)$, viene fatto variare uno dei parametri (ampiezza, frequenza o fase) che caratterizza $c(t)$ e la variazione utilizzata è proporzionale proprio ai valori che $s(t)$ assume nel tempo.

In questo senso, il segnale $s(t)$ prende il nome di **segnale modulante**, mentre il segnale trasmesso prende il nome di **segnale modulato**. La portante è invece il segnale da modulare.

“Tipi” di modulazione analogica

In questo capitolo siamo interessati solo a sistemi di **modulazione analogica**, nei quali cioè il segnale modulante è un qualunque segnale di tipo analogico.

La modulazione analogica si divide in tre differenti categorie, a seconda di quale parametro della portante venga fatto variare per la trasmissione:

- si parla di **modulazione AM** (dove AM sta per Amplitude Modulation) quando viene fatta variare l’ampiezza di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$;

- si parla di **modulazione PM** (dove PM sta per Phase Modulation) quando viene fatta variare la fase di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$;
- si parla infine di **modulazione FM** (dove FM sta per Frequency Modulation) quando viene fatta variare la frequenza di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$.

Le stesse possibilità, ma nomi diversi, si hanno anche per la *modulazione digitale*, della quale però non ci occuperemo in questa sede.

Il processo di demodulazione

Appare ovvio un fatto: se manipoliamo in qualche modo il nostro segnale $s(t)$ prima della trasmissione, perché poi esso arrivi al ricevitore così come è stato emesso dalla sorgente, è necessario che esso subisca delle manipolazioni in qualche modo “inverse” a quelle iniziali, ossia venga ricostruito nella sua forma originale. Di conseguenza, così come viene effettuata una “modulazione” prima della trasmissione, dovremo necessariamente prevedere un processo di **demodulazione** dopo la trasmissione.

In base a queste considerazioni, possiamo tracciare il seguente schema semplificato descrittivo di un generico sistema che utilizza il **processo di modulazione/demodulazione**:



La modulazione analogica di ampiezza

Come già anticipato in precedenza, si parla di **modulazione analogica di ampiezza** quando il segnale modulato (cioè il segnale trasmesso sul mezzo trasmissivo) consiste nella portante $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$ modificata in modo tale che la sua ampiezza venga fatta variare, nel tempo, in modo proporzionale al segnale modulante $s(t)$.

Esistono varie metodologie di modulazione di ampiezza e le elenchiamo di seguito, riservando a dopo le singole descrizioni:

- **DSB-SC** : doppia banda laterale con portante soppressa
- **SSB** : singola banda laterale
- **VSB** : banda vestigiale laterale
- **AM-Standard** (oppure AM con portante trasmessa)
- **DSB-SC** con 2 portanti in quadratura

Modulazione di ampiezza DSB-SC

L'acronimo **DSB-SC** sta per *Doppia Banda Laterale con Portante Soppressa*: si tratta di un tipo di modulazione di ampiezza estremamente importante in quanto è

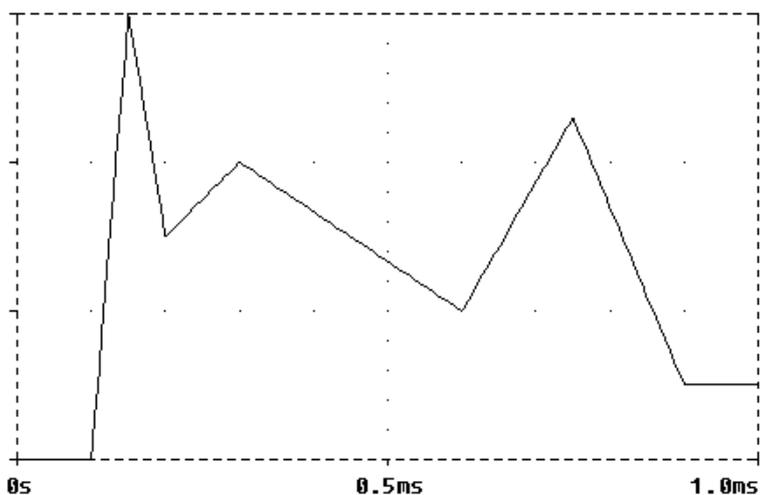
alla base (con accorgimenti ovviamente diversi) anche delle altre tecniche che saranno esposte in seguito.

In questo tipo di modulazione di ampiezza, il segnale modulato è dato semplicemente dal prodotto tra la portante ed il segnale modulante:

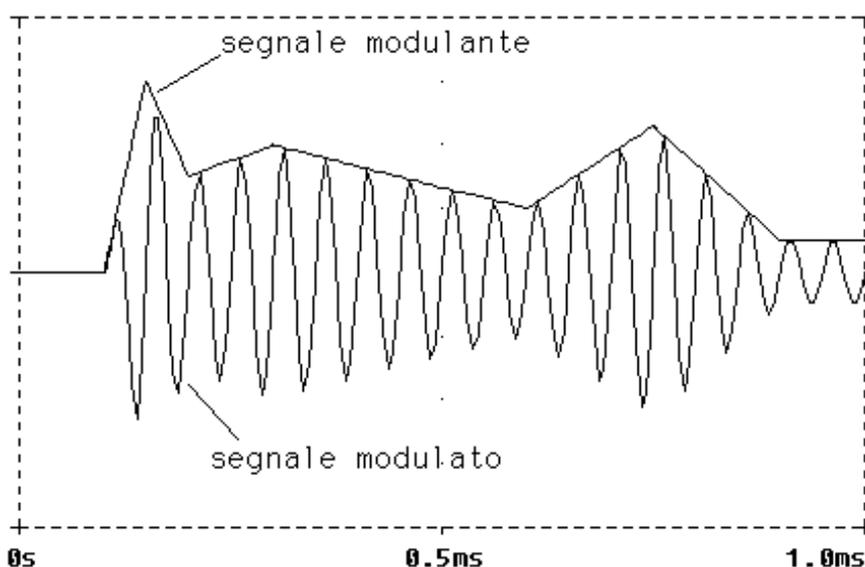
$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

E' evidente come tale segnale corrisponda dunque proprio alla portante in cui, però, l'ampiezza A_c risulta moltiplicata, ad ogni istante, per il valore che assume in quell'istante il segnale modulante $s(t)$.

Facciamo subito un esempio concreto. Supponiamo di voler trasmettere un segnale $s(t)$ avente la seguente forma d'onda:



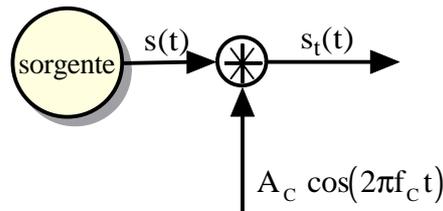
Usando la tecnica di modulazione d'ampiezza DSB-SC, questo segnale $s(t)$ va a moltiplicare una portante sinusoidale $c(t)$: supponendo che tale portante abbia ampiezza unitaria (ad esempio una tensione sinusoidale da 1V) e frequenza 20kHz, il segnale modulato $s(t) \cdot c(t)$ risulta avere il seguente andamento temporale:



Si tratta evidentemente di una oscillazione isofrequenziale ed in fase con la portante, ma di ampiezza variabile in accordo alle variazioni di $s(t)$ nel tempo ⁽¹⁾.

Apparato modulatore

Il compito del cosiddetto **apparato modulatore**, posto a monte del mezzo di trasmissione, è quello di effettuare la moltiplicazione di $s(t)$ per la portante, per cui lo possiamo schematizzare nel modo seguente:



Il segnale modulato $s_t(t)$ viene dunque inviato al canale di trasmissione, il quale, nell'ipotesi di assenza di perdite, distorsioni e disturbi vari, lo porta in ingresso all'apparato demodulatore; il compito di quest'ultimo è quello di riuscire a tirare fuori da esso il segnale modulante $s(t)$ da inviare al ricevitore.

Occupiamoci, per il momento, solo di quello che accade in seno al modulatore.

Cominciamo il nostro ragionamento nel dominio delle frequenze (considerando sia quelle positive sia quelle negative, per quanto prive di significato fisico): in base ad una nota proprietà della trasformata di Fourier, lo spettro del segnale modulato $s_t(t)$ è dato dal prodotto di convoluzione tra gli spettri del segnale modulante e della portante, per cui ha espressione analitica

$$S_t(f) = A_c S(f) * \text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t + \varphi)]$$

Per comodità di ragionamento, poniamo per il momento $\varphi=0$, per cui

$$S_t(f) = A_c S(f) * \text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t)]$$

La trasformata di Fourier della funzione Coseno è la somma di due impulsi traslati (entrambi positivi): in particolare, in questo caso abbiamo che

$$S_t(f) = A_c S(f) * \left[\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right]$$

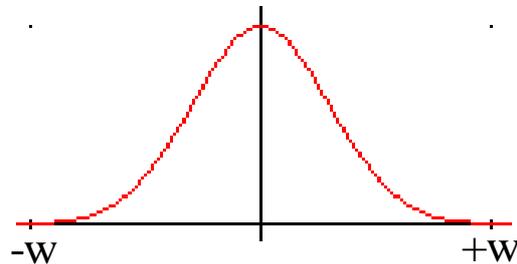
La convoluzione di una funzione per un impulso è pari alla funzione stessa traslata nel punto di applicazione dell'impulso: abbiamo perciò che

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

¹ Segnaliamo sin da ora che, generalmente, la frequenza della portante è molto maggiore della massima frequenza del segnale modulante

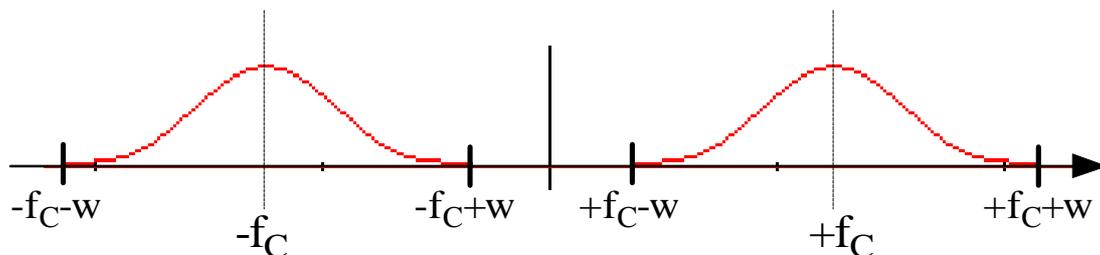
Questa relazione dice dunque che lo spettro del segnale modulato è composto da due repliche traslate, a meno del fattore $A_C/2$, dello spettro del segnale $s(t)$.

Tanto per fissare le idee, supponiamo che lo spettro del segnale $s(t)$ sia del tipo seguente:



Si tratta evidentemente di un segnale passa-basso di banda monolaterale w .

Lo spettro del segnale modulato si ottiene generando due repliche identiche di questo spettro (a meno del fattore $A_C/2$) e posizionandole a cavallo delle frequenze $+f_C$ e $-f_C$. Si ottiene dunque qualcosa del tipo seguente:



In definitiva, quindi, ragionando solo sulle frequenze fisiche, possiamo affermare che *la modulazione di ampiezza DSB-SC consiste fundamentalmente nell'operare una "traslazione" in frequenza del segnale $s(t)$ modulante*: la traslazione è tale da posizionare lo spettro del segnale modulante sulla frequenza della portante.

E' evidente che il segnale modulato risultante ha banda monolaterale doppia ($=2w$) rispetto al segnale modulante ⁽²⁾.

Per capire ancora meglio l'azione del modulatore, consideriamo il fatto che il segnale modulante $s(t)$ può essere scomposto in un certo numero di armoniche, la generica delle quali avrà ampiezza A_k e frequenza f_k . Data la linearità del sistema, analizzare l'effetto del modulatore su $s(t)$ equivale ad analizzare l'effetto su ciascuna di tali componenti, ossia in definitiva analizzare quello che succede quando il segnale modulante è del tipo $A_k \cos(2\pi f_k t)$.

Allora, moltiplicando questo segnale per la portante (supposta, per semplicità, di ampiezza unitaria), si ottiene il segnale modulato

$$s_{t,k}(t) = A_k \cos(2\pi f_k t) \cos(2\pi f_C t)$$

Possiamo sviluppare il prodotto tra i due coseni usando la nota formula trigonometrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

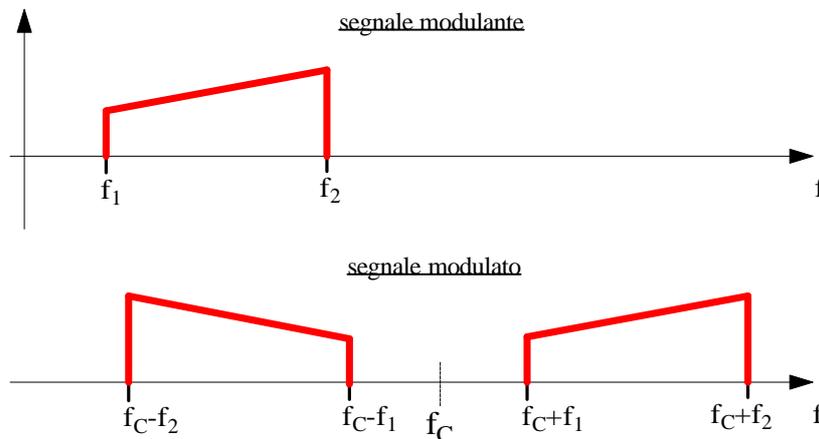
² In questo caso, per banda intendiamo solo l'intervallo di frequenze sui cui è esteso lo spettro del segnale.

Abbiamo che

$$s_{t,k}(t) = \frac{A_k}{2} \cos(2\pi(f_c - f_k)t) + \frac{A_k}{2} \cos(2\pi(f_c + f_k)t)$$

Questa espressione chiarisce perfettamente l'azione del modulatore: per ogni componente f_k del segnale, il modulatore genera due copie, di ampiezza dimezzata, a frequenza f_k+f_c (frequenza somma con quella della portante) e a frequenza f_c-f_k (frequenza differenza con quella della portante).

Anziché considerare un segnale modulante di tipo passa-basso come visto prima, possiamo anche considerare un segnale passa-banda con spettro limitato nell'intervallo $[f_1, f_2]$. In questo caso, la situazione sarebbe la seguente ⁽³⁾:



La figura in alto riporta lo spettro del segnale modulante, mentre quella in basso riporta, a meno del fattore di scala $\frac{1}{2}$ lo spettro del segnale modulato, considerando solo quello che accade alle frequenze positive.

Apparato demodulatore

Una volta noto il segnale modulato inviato sul mezzo trasmissivo, passiamo a considerare il comportamento del demodulatore nell'ipotesi che lo stesso segnale modulato arrivi non distorto in ricezione. Questo significa, dunque, che il segnale in ingresso al demodulatore è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Per prima cosa, il demodulatore moltiplica questo segnale per un segnale identico alla portante, tranne per il fatto che la sua ampiezza vale adesso $2/A_c$: l'effetto di questa moltiplicazione, nel dominio del tempo, è dunque il segnale

$$x(t) = s_t(t) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t) = 2s(t) \cos^2(2\pi f_c t)$$

³ Si sottintende che la disposizione degli spettri è speculare per quanto riguarda le frequenze negative

In base a quanto detto prima, ragionando nel dominio della frequenza, abbiamo ancora una volta una traslazione in frequenza, che in questo caso coinvolge lo spettro di $s_c(t)$. Indaghiamo allora su tale traslazione.

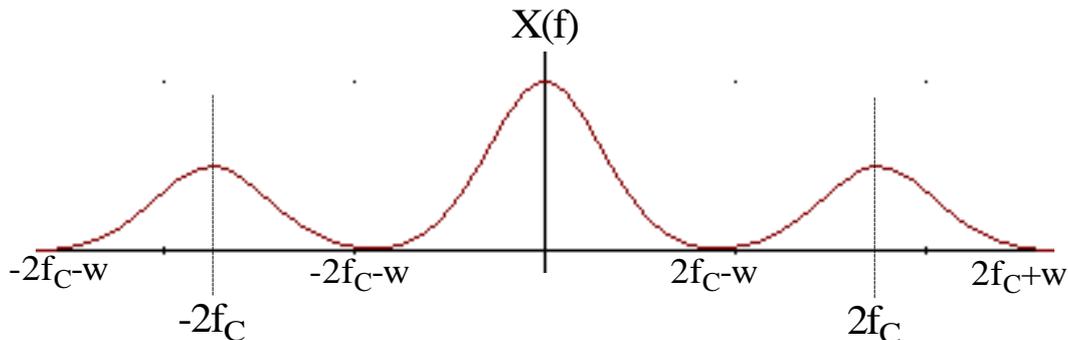
Usando la nota formula trigonometrica $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$, possiamo esprimere $x(t)$ nella forma

$$x(t) = 2s(t) \left[\frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t) + \frac{1}{2} \right] = s(t) \cos(4\pi f_c t) + s(t) = s(t) \cos(4\pi f_c t) + s(t)$$

Lo spettro di questo segnale è il seguente:

$$X(f) = S(f) * \text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t)] + S(f) = \frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} S(f + 2f_c) + S(f)$$

Si tratta cioè di tre diverse repliche di $S(f)$, di cui una coincidente proprio con $S(f)$ e le altre due traslate, una in $-2f_c$ e l'altra in $+2f_c$, e modulate del fattore $1/2$:

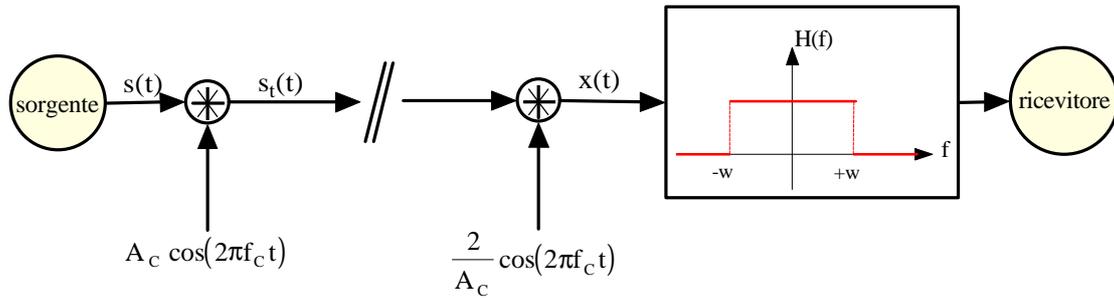


Allora, è evidentemente possibile isolare $S(f)$, a partire da $X(f)$, solo a patto che non ci sia sovrapposizione tra le tre repliche: questo accade se $w \leq f_c$ (nel grafico è stato preso il caso particolare in cui $w=f_c$).

Sotto tale vincolo sulla frequenza della portante (che va imposta ovviamente in sede di dimensionamento dell'impianto), $S(f)$ viene isolato da $X(f)$ utilizzando un normale filtro passa-basso, con banda pari proprio alla banda w del segnale $s(t)$: il segnale in uscita dal filtro è dunque

$$U(f) = X(f) \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) = S(f)$$

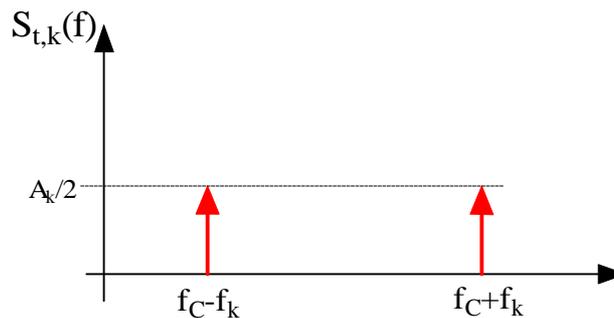
Possiamo quindi riassumere lo schema di un apparato di modulazione-demodulazione AM con la tecnica DSB-SC nel modo seguente:



Per capire ancora meglio il funzionamento del demodulatore, consideriamo nuovamente il segnale modulante $s(t)$ in termini di somma di armoniche, la generica delle quali è $A_k \cos(2\pi f_k t)$. Abbiamo visto che il segnale modulato (nell'ipotesi di portante di ampiezza unitaria) assume l'espressione

$$s_{t,k}(t) = \frac{A_k}{2} \cos(2\pi(f_C - f_k)t) + \frac{A_k}{2} \cos(2\pi(f_C + f_k)t)$$

In frequenza, abbiamo dunque quanto segue:



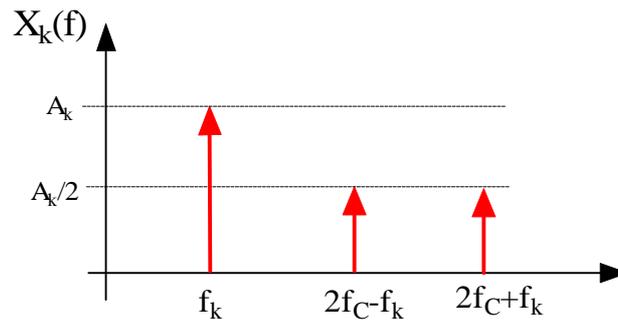
Questo segnale, entrando nel modulatore, viene moltiplicato per $2\cos(2\pi f_C t)$, dando così il segnale

$$x_k(t) = A_k \cos(2\pi(f_C - f_k)t) \cos(2\pi f_C t) + A_k \cos(2\pi(f_C + f_k)t) \cos(2\pi f_C t)$$

Sviluppando nuovamente i Coseni, abbiamo che

$$\begin{aligned} x_k(t) &= A_k \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_C - f_k)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(-f_k)t) \right] + A_k \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_C + f_k)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_k t) \right] = \\ &= A_k \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_C - f_k)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_k t) \right] + A_k \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_C + f_k)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_k t) \right] = \\ &= \frac{A_k}{2} \cos(2\pi(2f_C - f_k)t) + \frac{A_k}{2} \cos(2\pi(2f_C + f_k)t) + A_k \cos(2\pi f_k t) \end{aligned}$$

Come si deduce da questi passaggi, la moltiplicazione genera quattro componenti, di cui però due alla stessa frequenza f_k (che quindi vengono sommate):



Il successivo filtraggio passa-basso conserva solo la componente alla frequenza f_k .

L'azione di demodulazione complessiva è dunque evidente: dato il segnale $s_t(t)$ in ingresso, i due impulsi vengono sommati (in modo da ripristinare l'ampiezza iniziale) e poi traslati in f_k (cioè riportati in banda base).

Ripetendo il discorso per tutte le componenti spettrali del segnale ricevuto, si ottiene in uscita dal demodulatore proprio $s(t)$.

DSB-SC in presenza di sfasamenti

L'apparato di ricezione utilizzato nella tecnica DSB-SC prende il nome di **demodulatore coerente**: l'aggettivo "coerente" deriva dal fatto che il segnale $\frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t)$, per il quale viene moltiplicato $s_t(t)$, ha la stessa fase e la stessa frequenza della portante.

Vediamo invece cosa succede quando la demodulazione non è più coerente in fase, nel senso che le due oscillazioni presentano uno sfasamento non nullo: ad esempio, supponiamo che il segnale per cui moltiplichiamo il segnale modulato abbia una fase diversa da zero.

Partiamo da un segnale modulato nella forma

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Moltiplichiamo questo segnale per il segnale $\frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi)$ (la cosiddetta **oscillazione locale**), il quale ha evidentemente uno sfasamento φ non nullo con $s_t(t)$:

$$x(t) = 2s(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Sviluppando ancora una volta il prodotto dei due Coseni, possiamo riscrivere $x(t)$ nella forma

$$x(t) = s(t) [\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

Lo spettro di questo segnale è il seguente:

$$\begin{aligned} X(f) &= S(f) * [\text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)] + \cos(\varphi)] = \\ &= S(f) * \text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)] + \cos(\varphi)S(f) \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la quantità $\text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)]$ applicando la semplice definizione di trasformata di Fourier bilatera:

$$\begin{aligned} \text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4\pi f_c t + \varphi) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j(4\pi f_c t + \varphi)} + e^{-j(4\pi f_c t + \varphi)}) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j4\pi f_c t} e^{j\varphi} + e^{-j4\pi f_c t} e^{-j\varphi}) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j4\pi f_c t} e^{j\varphi} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j4\pi f_c t} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(2f_c - f)t} dt + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f_c + f)t} dt = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f - 2f_c)t} dt + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(2f_c + f)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} X(f) &= S(f) * \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + \cos(\varphi) S(f) = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) + \cos(\varphi) S(f) \end{aligned}$$

Ancora una volta, troviamo lo spettro $X(f)$ composto tra 3 repliche, a meno di fattori di scala, dello spettro $S(f)$ del segnale di partenza:

- la prima replica $\frac{1}{2} e^{j\varphi} S(f - 2f_c)$ è centrata in $+2f_c$, per cui essa può essere eliminata mediante il filtraggio;
- la seconda replica $\frac{1}{2} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c)$ è centrata in $-2f_c$, per cui anch'essa può essere eliminata mediante il filtraggio;
- la replica centrale $\cos(\varphi) S(f)$, che è quella che ci interessa, risulta moltiplicata per un fattore di scala $\cos(\varphi)$, che fornisce sicuramente una attenuazione essendo la funzione Coseno limitata tra 1 e -1; il problema viene proprio da questo fattore di scala, in quanto lo sfasamento φ non è sotto il nostro controllo, nel senso che si tratta di un qualcosa che è stato introdotto a causa dei limiti fisici dei dispositivi utilizzati sia in trasmissione sia in ricezione (se ne parlerà più avanti). Di conseguenza, la ricostruzione del segnale $s(t)$ avrà successo solo se φ è piccolo, in quanto solo in questo caso risulta $\cos\varphi \approx 1$. Se invece lo sfasamento è grande, allora il termine $\cos\varphi$ influisce pesantemente sul segnale, attenuandolo in ampiezza. Generalmente, il valore di φ non supera i 3÷5 gradi, per cui deduciamo che l'errore dovuto ad uno sfasamento tra portante modulata e oscillazione locale è comunque abbastanza ridotto (4).

⁴ Un discorso abbastanza simile si può fare nel caso in cui il segnale che noi usiamo per moltiplicare $s_c(t)$, anziché avere fase diversa da quella della portante, presenta una frequenza diversa. Anche in questo caso si trova che quanto maggiore è la differenza tra le due frequenze, tanto meno fedele è la ricostruzione del segnale di partenza

Metodo dei vettori rotanti

L'effetto dello sfasamento φ tra le oscillazioni locali usate in trasmissione ed in ricezione risulta ancora più evidente se ci riferiamo al caso particolare in cui il segnale modulante $s(t)$ è sinusoidale.

Supponiamo dunque che tale segnale sia del tipo $A\cos(2\pi f_s t)$ (può trattarsi semplicemente di una delle armoniche di $s(t)$, in modo analogo a quanto già fatto in precedenza), per cui il segnale modulato assume l'espressione seguente:

$$s_t(t) = A \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi f_c t) = \frac{A}{2} \cos(2\pi(f_c - f_s)t) + \frac{A}{2} \cos(2\pi(f_c + f_s)t)$$

Nell'ipotesi sempre di canale ideale, questo segnale giunge al demodulatore, il quale lo moltiplica per una oscillazione locale $2\cos(2\pi f_c t + \varphi)$, dando come risultato il segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi(f_c - f_s)t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) + A \cos(2\pi(f_c + f_s)t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

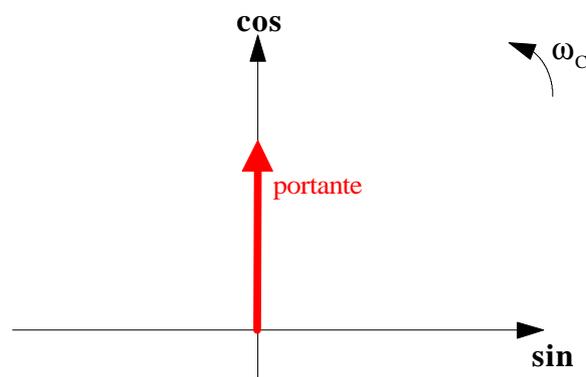
Questo segnale viene filtrato nella banda base del segnale modulante, per cui l'uscita del demodulatore risulta essere

$$u(t) = A \cos(2\pi f_s t) \cos(\varphi)$$

Sviluppando il prodotto dei due Coseni, abbiamo che

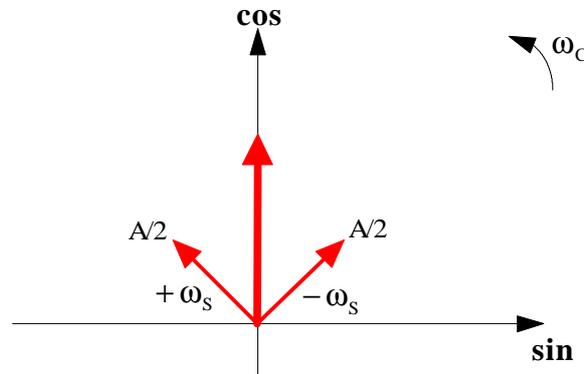
$$u(t) = \frac{A}{2} \cos(2\pi f_s t - \varphi) + \frac{A}{2} \cos(2\pi f_s t + \varphi)$$

Questa relazione si presta ad alcune interessanti considerazioni se decidiamo di rappresentare le quantità sinusoidali come **vettori rotanti**. Cominciamo dalla portante $c(t)$, che può essere rappresentata come un vettore, di ampiezza unitaria, in un piano cartesiano che ruota con velocità angolare $\omega_c = 2\pi f_c$:



Noi "vediamo" questo piano fermo in quanto supponiamo di essere solidali con esso nella rotazione (il piano, a sua volta, è solidale con la portante, che quindi è ferma su di esso e allineata con l'asse verticale).

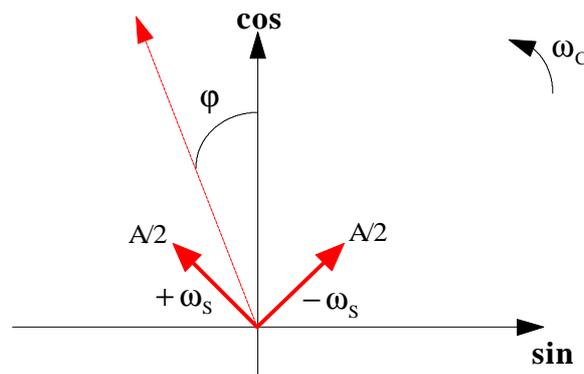
Consideriamo adesso il segnale modulato $s_t(t)$, dato dalla somma di due sinusoidi, di ampiezza $A/2$ e frequenza f_c+f_s e f_c-f_s . Nel piano appena riportato, la "rappresentazione" di tali vettori sarà la seguente:



Il vettore corrispondente all'oscillazione a frequenza f_c+f_s ruota in senso antiorario (lo stesso del piano e della portante) con velocità angolare ω_s , mentre il vettore corrispondente all'oscillazione a frequenza f_c-f_s ruota in senso orario con velocità angolare ω_s ed è posizionato simmetricamente all'altro rispetto all'asse verticale. Data proprio questa simmetria, la risultante di tali vettori, cioè appunto il segnale modulato, si trova sull'asse del coseno ed ha ampiezza pari ad A .

Se l'oscillazione locale è in fase con la portante, cioè si trova a sua volta sull'asse del coseno, il prodotto con il segnale modulato fornisce con precisione il segnale modulante.

Supponiamo invece adesso che l'oscillazione locale abbia uno sfasamento φ positivo rispetto alla portante, per cui essa è rappresentata dal vettore inclinato e tratteggiato indicato nella figura seguente (ricordiamo che la sua ampiezza è doppia rispetto alla portante):



Allora, in questo caso, l'azione del demodulatore è quella di "prendere" le componenti dei vettori, che rappresentano lo spettro del segnale modulato, non più sull'asse verticale, ma sull'asse che rappresenta l'oscillazione locale:

$$u(t) = \frac{A}{2} \cos(2\pi f_s t - \varphi) + \frac{A}{2} \cos(2\pi f_s t + \varphi)$$

Di conseguenza, il risultato della demodulazione sarà un segnale uguale al segnale modulante $s(t)$, ma ridotto in ampiezza.

In generale, possiamo dunque affermare che il **demodulatore coerente** è un dispositivo che somma la proiezione delle due bande laterali sull'asse che rappresenta l'oscillazione locale generata in ricezione: se quest'asse coincide con quella della portante usata in trasmissione, non si hanno problemi; in caso contrario, si ottiene invece la citata attenuazione del segnale di un fattore $\cos\phi$.

Analisi nel dominio del tempo

Nei paragrafi precedenti abbiamo descritto le procedure di modulazione e demodulazione facendo essenzialmente riferimento alle trasformate di Fourier dei vari segnali coinvolti. Vediamo ora, a livello essenzialmente qualitativo, quale sia l'andamento nel tempo di tali segnali.

Come segnale da trasmettere scegliamo, per semplicità, una tensione sinusoidale da 3V con frequenza 1 kHz, del tipo seguente:

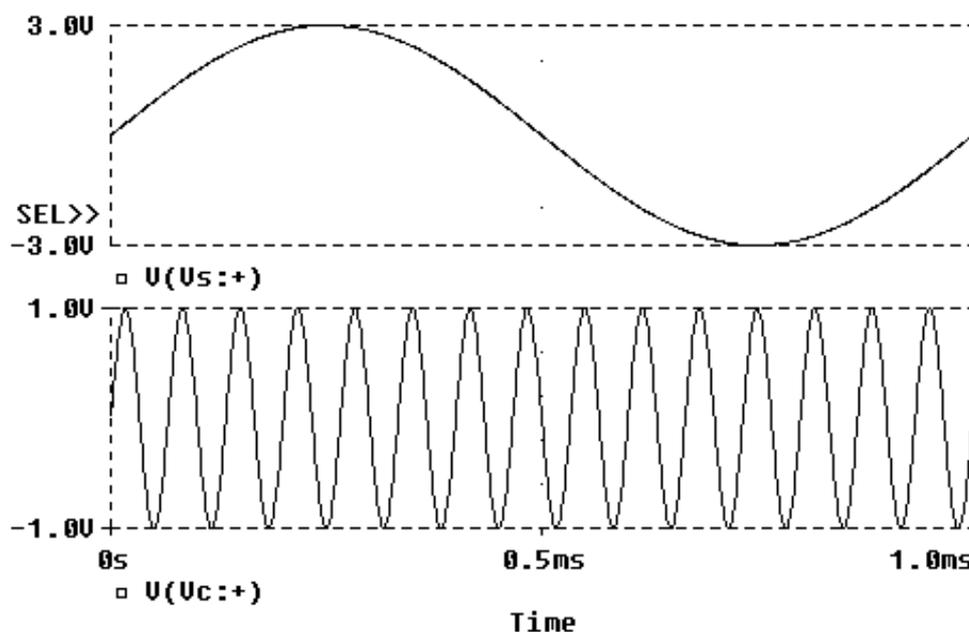
$$s(t) = 3 \cos(2\pi(10^3)t)$$

Supponiamo nulla la fase, il che equivale, in pratica, a prendere la fase di questo segnale come riferimento per le fasi di eventuali altri segnali sinusoidali.

Per quanto riguarda, invece, la portante, consideriamo una tensione sinusoidale da 1V con frequenza 15 kHz:

$$c(t) = \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t)$$

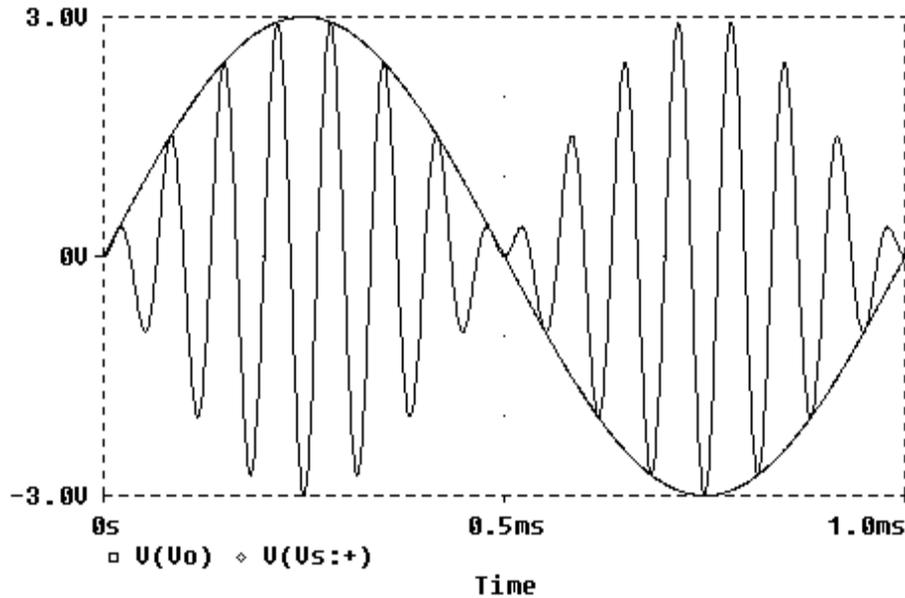
Gli andamenti temporali dei due segnali $s(t)$ e $c(t)$ sono rappresentati nella figura seguente, rispetto alla stessa asse dei tempi:



Il compito dell'apparato modulatore è semplicemente quello di moltiplicare tra loro questi segnali, dando come risultato il segnale modulato $s_t(t)$ che va trasmesso sul canale:

$$s_t(t) = 3 \cos(2\pi(10^3)t) \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) = \frac{3}{2} \cos(2\pi(16 \cdot 10^3)t) + \frac{3}{2} \cos(2\pi(14 \cdot 10^3)t)$$

L'andamento temporale di questo segnale è descritto nella figura seguente:



Ai fini di una migliore comprensione, nella figura è stato anche riportato il segnale modulante $s(t)$, in modo da evidenziare come esso costituisca l'**involuppo** del segnale modulato $s_t(t)$.

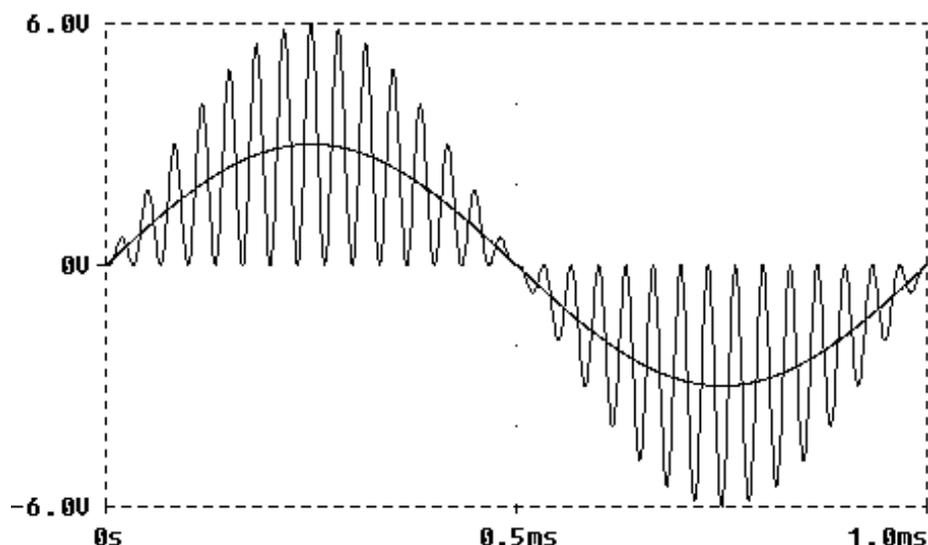
Questo segnale modulato, nell'ipotesi di canale ideale, arriva indistorto all'ingresso del demodulatore, il quale lo moltiplica per un segnale identico (almeno idealmente) alla portante, ma di ampiezza doppia rispetto ad essa: si tratta perciò del segnale

$$m(t) = 2 \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t)$$

Il risultato del prodotto è dunque il segnale

$$\begin{aligned} x(t) &= s_t(t) \cdot m(t) = \left[\frac{3}{2} \cos(2\pi(16 \cdot 10^3)t) + \frac{3}{2} \cos(2\pi(14 \cdot 10^3)t) \right] 2 \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) = \\ &= 3 \left[\frac{1}{2} [\cos(2\pi(31 \cdot 10^3)t) + \cos(2\pi(10^3)t)] + \frac{1}{2} [\cos(2\pi(29 \cdot 10^3)t) + \cos(2\pi(10^3)t)] \right] = \\ &= \frac{3}{2} [\cos(2\pi(31 \cdot 10^3)t) + \cos(2\pi(29 \cdot 10^3)t) + \cos(2\pi(10^3)t)] \end{aligned}$$

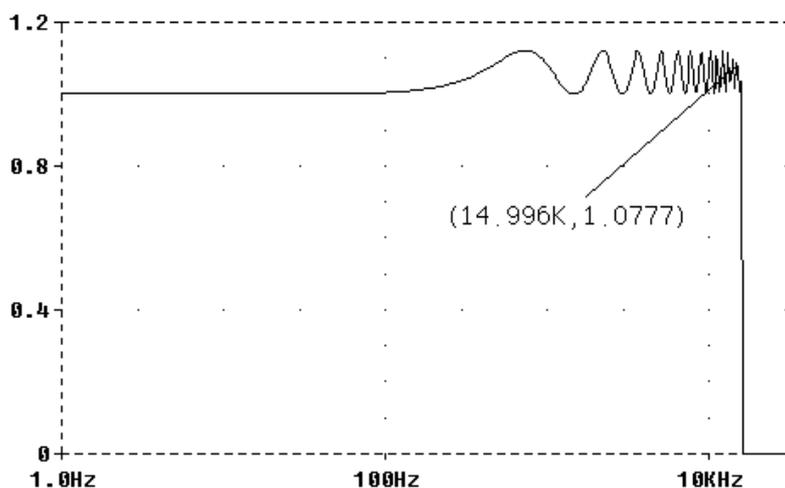
il cui andamento temporale è rappresentato nella figura seguente:



Questo segnale, in base ai passaggi analitici fatti poco fa ed alle considerazioni teoriche dei paragrafi precedenti, comprende il segnale modulante $s(t)$ di partenza, nonché altre due componenti sinusoidali alle frequenze 29kHz e 31kHz.

Facendo riferimento all'andamento temporale appena riportato e, in particolare, facendo il confronto con il segnale modulante $s(t)$ che ci serve ricostruire, si nota come $s(t)$ rappresenti una specie di "media" del segnale $x(t)$ e, in effetti, l'operazione di filtraggio equivale proprio a calcolare una opportuna *media temporale* di $x(t)$ ⁽⁵⁾.

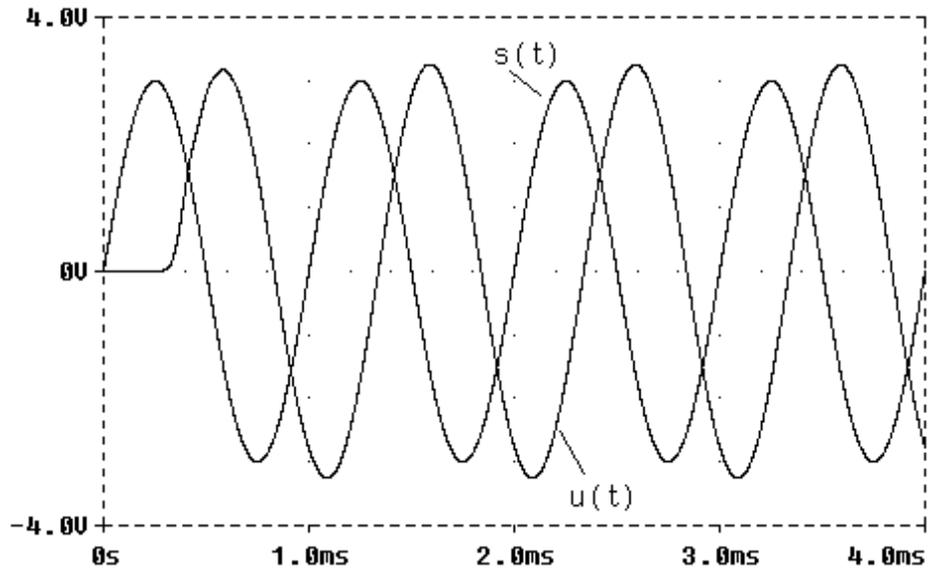
Ad esempio, usiamo un filtro la cui funzione di risposta armonica (in modulo) è riportata nel seguente diagramma (con ascisse in scala logaritmica):



Come si nota dalla figura, il modulo del guadagno del filtro vale poco più di 1 in corrispondenza della frequenza di 15kHz e vale 0 per frequenze superiori, per cui fa perfettamente al caso nostro (i picchi in corrispondenza della frequenza di taglio derivano dalla realizzazione fisica del filtro e non ci interessano certo in questa sede).

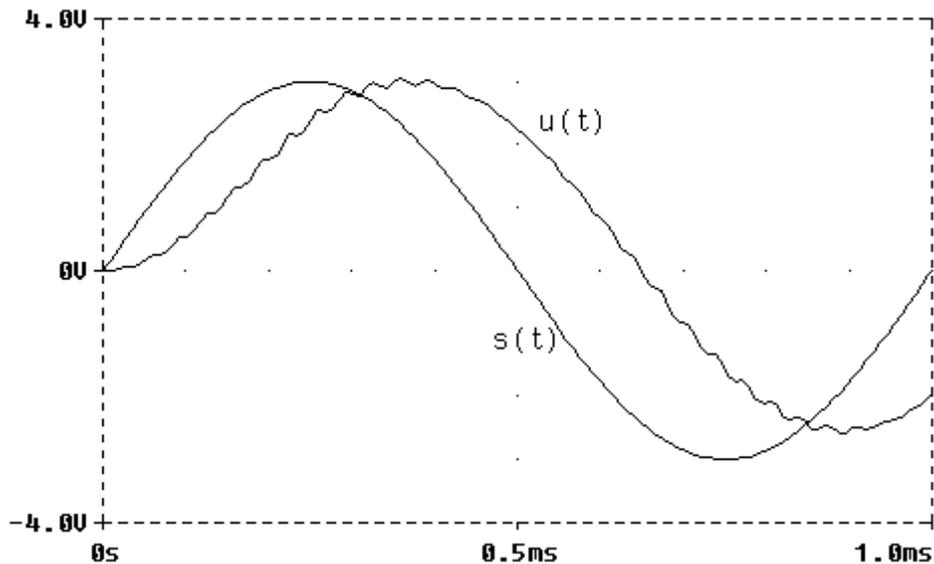
⁵ Una operazione di filtraggio passa-basso su un segnale ha l'effetto di eliminare le componenti armoniche del segnale oltre una certa frequenza, che è appunto la frequenza di taglio del filtro. Eliminare le alte frequenze significa eliminare le transizioni veloci del segnale nel dominio del tempo, ossia appunto considerare l'*andamento medio* del segnale stesso nel tempo. Da qui l'equivalenza tra filtraggio passa-basso e media temporale.

Mandando dunque in ingresso a questo filtro il segnale $x(t)$ prima riportato, si ottiene in uscita il seguente segnale $u(t)$:



A parte l'inevitabile sfasamento introdotto dal filtro e la lieve differenza di ampiezza (dovuta al fatto che il guadagno del filtro è 1.077 anziché 1), si osserva come $u(t)$ sia praticamente identico ad $s(t)$, a conferma dell'efficacia del procedimento.

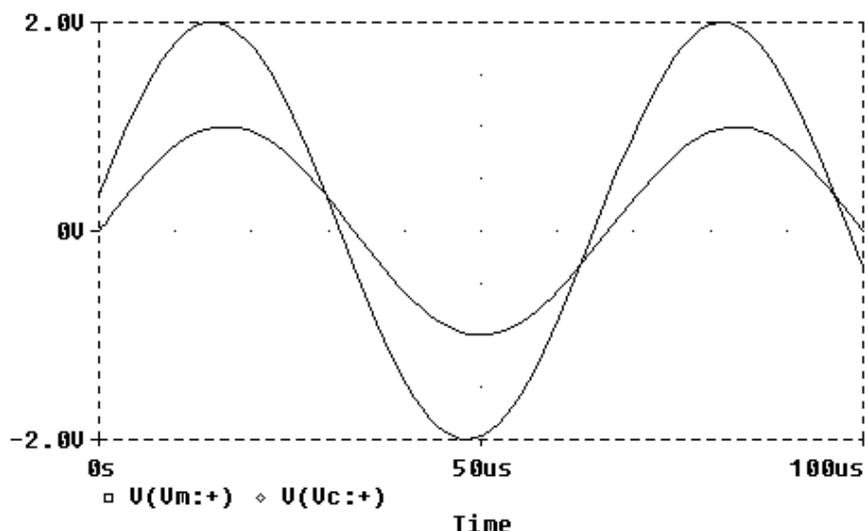
E' interessante osservare cosa si ottiene filtrando $x(t)$ con un filtro molto meno sofisticato, come ad esempio un semplice filtro RC opportunamente dimensionato:



La distorsione del segnale è dovuta al fatto che il filtro non riesce ad eliminare del tutto le componenti spettrali posizionate sui 29kHz e 31kHz, le quali danno quindi origine a quelle fluttuazioni, sporcando la sinusoidale a 1 kHz.

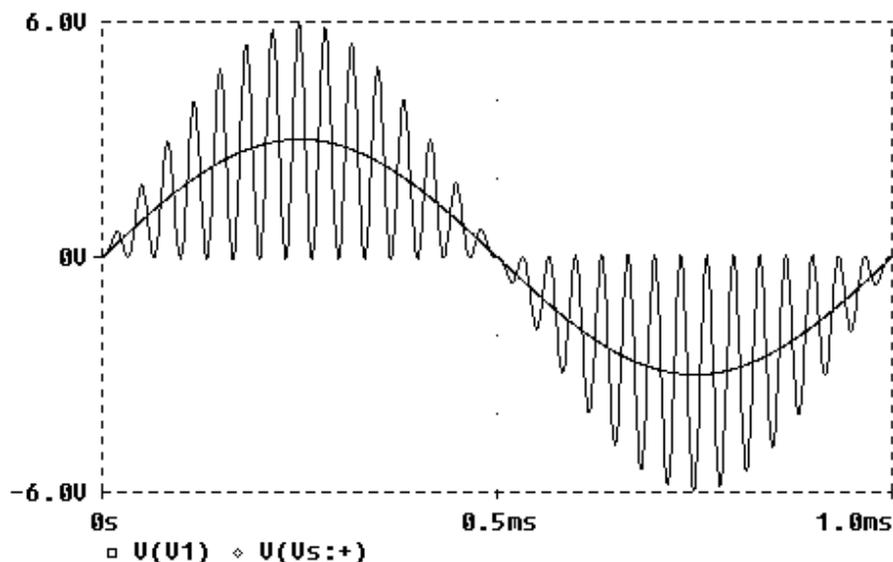
Adesso consideriamo il caso in cui il modulatore proceda a moltiplicare il segnale modulato $s_t(t)$ con un tono sinusoidale che abbia uno sfasamento φ non nullo rispetto alla portante: per esempio, supponendo che tale sfasamento sia $\varphi=10^\circ$ (corrispondente a 0.174 rad/sec), risulta $m(t) = 2 \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t + 0.174)$.

L'andamento temporale di questo segnale $m(t)$ rispetto alla portante è rappresentato nella figura seguente:



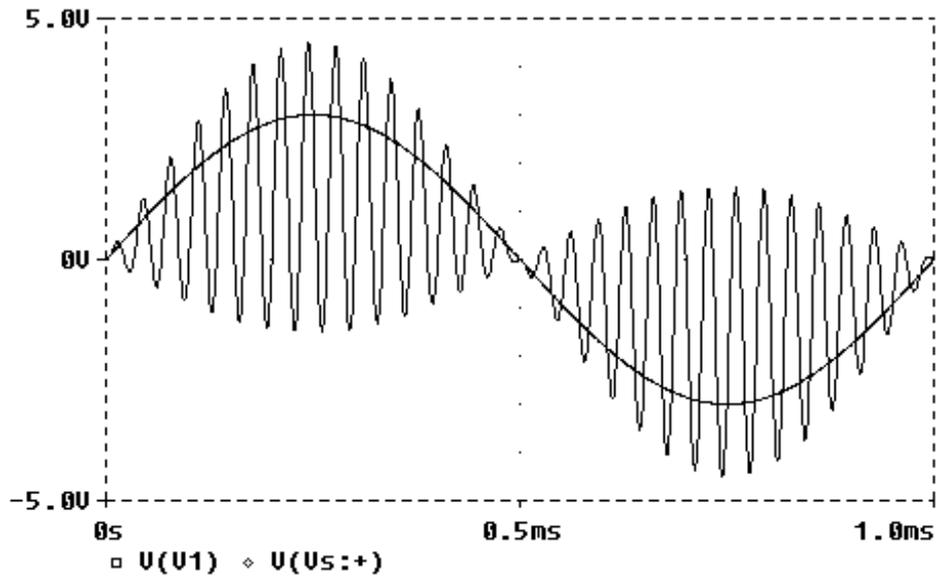
(la portante ha chiaramente una ampiezza pari alla metà di $m(t)$).

L'esito della moltiplicazione effettuata dal demodulatore è un segnale $x(t) = s_c(t) \cdot m(t)$ avente il seguente andamento temporale:

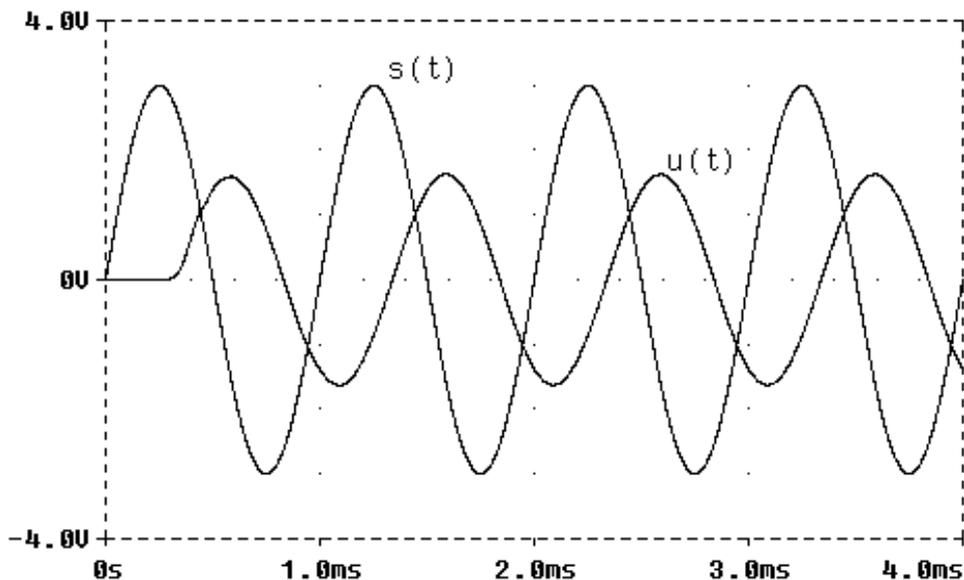


Come previsto, essendo $\varphi=10^\circ$ abbastanza piccolo ($\cos\varphi=0.985$), la differenza con il caso precedente in cui $\varphi=0$ è minima.

Se invece consideriamo $\varphi=60^\circ$ (cui corrisponde 1.05rad/sec ed anche $\cos\varphi=0.5$), l'andamento di $x(t)$ risulta essere il seguente:



Rispetto ai casi precedenti, la situazione è di gran lunga peggiorata: effettuando il filtraggio passa-basso, ossia la media temporale, si trova un segnale di livello più basso rispetto ad $s(t)$. In particolare, usando lo stesso filtro usato nell'esempio precedente, si ricava il seguente segnale finale $u(t)$:



Rispetto al segnale $u(t)$ ottenuto per $\varphi=0$, è evidente l'aumento notevole della attenuazione.

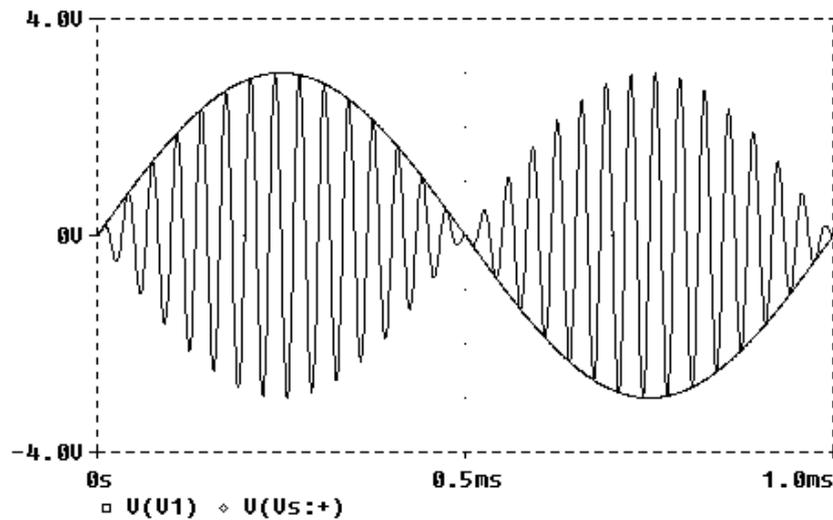
Il caso critico è ovviamente quando $\varphi=90^\circ$, ossia quando l'oscillazione locale $m(t)$ è in quadratura di fase con la portante:

$$m(t) = 2 \cos\left(2\pi(15 \cdot 10^3)t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin(2\pi(15 \cdot 10^3)t)$$

Il risultato del prodotto tra $m(t)$ ed il segnale modulato è dunque

$$x(t) = s_c(t) \cdot m(t) = 3 \cos(2\pi(10^3)t) \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) \cdot 2 \sin(2\pi(15 \cdot 10^3)t) = 3 \cos(2\pi(10^3)t) \sin(2\pi(30 \cdot 10^3)t)$$

ed il suo andamento temporale è rappresentato nella figura seguente:

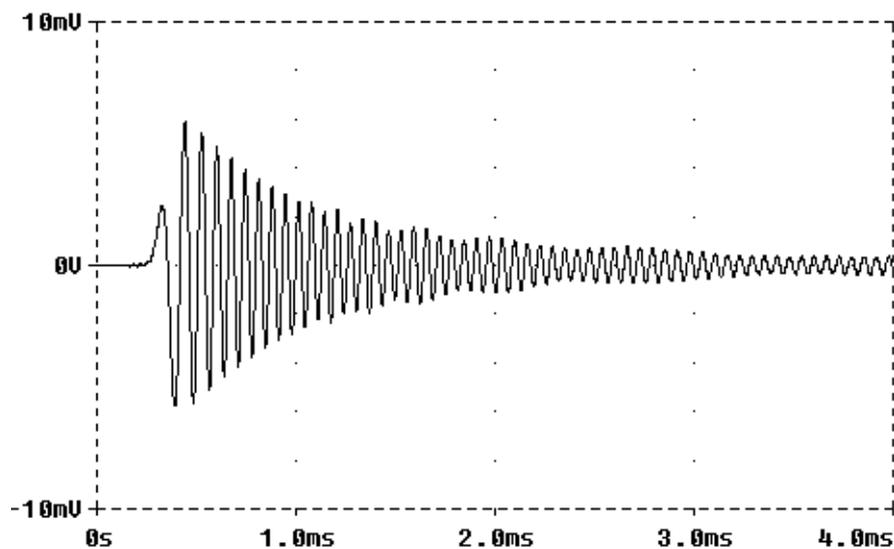


In questo caso, come visto nel paragrafo precedente, lo spettro del segnale $x(t)$ è

$$X(f) = \frac{1}{4} e^{j\phi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{4} e^{-j\phi} S(f + 2f_c)$$

Esso non comprende dunque $S(f)$, ma solo due sue repliche traslate, per cui l'esito del successivo filtraggio passa-basso è un segnale identicamente nullo in ogni istante. Lo si deduce anche dall'andamento temporale appena riportato, osservando che il segnale $x(t)$ è chiaramente a media temporale nulla, per cui il filtro, che in pratica fornisce il valore di tale media nel tempo, fornisce in uscita $u(t)=0$.

A conferma di ciò, usando ancora una volta il filtro considerato nei casi precedenti, si ottiene quanto segue:



Come previsto, il segnale $u(t)$ in uscita dal filtro è praticamente nullo.

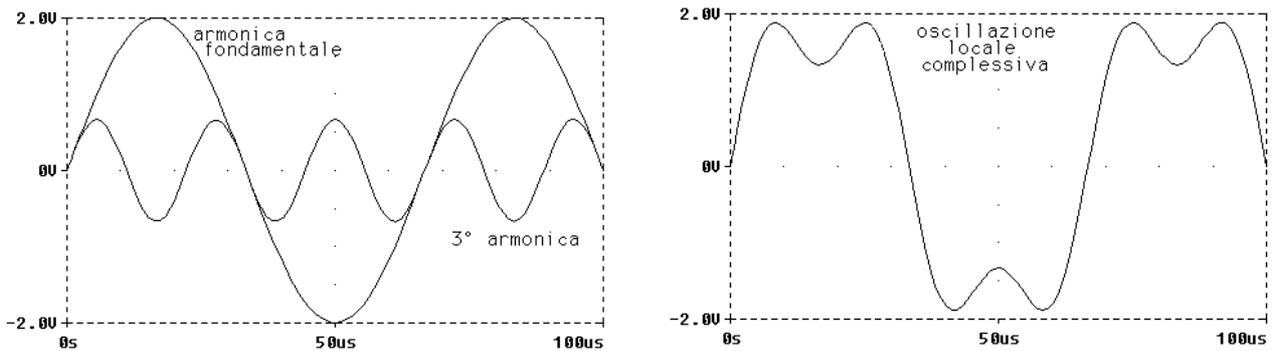
Un problema spesso presente in un apparato di modulazione/demodulazione di ampiezza è che, mentre è possibile generare una portante che sia effettivamente sinusoidale (cioè priva di ulteriori armoniche oltre quella fondamentale),

generalmente non si riesce a realizzare una altrettanto buona oscillazione locale in sede di demodulazione: il motivo è che, mentre il trasmettitore, e quindi il modulatore, è uno solo e può perciò essere costruito nel modo più sofisticato e preciso possibile, non altrettanto vale per il ricevitore (si pensi all'apparato radio di un impianto stereo domestico). La situazione è dunque quella per cui l'oscillazione locale usata per la demodulazione comprende in realtà diverse armoniche oltre quella fondamentale, il che complica ovviamente la ricostruzione.

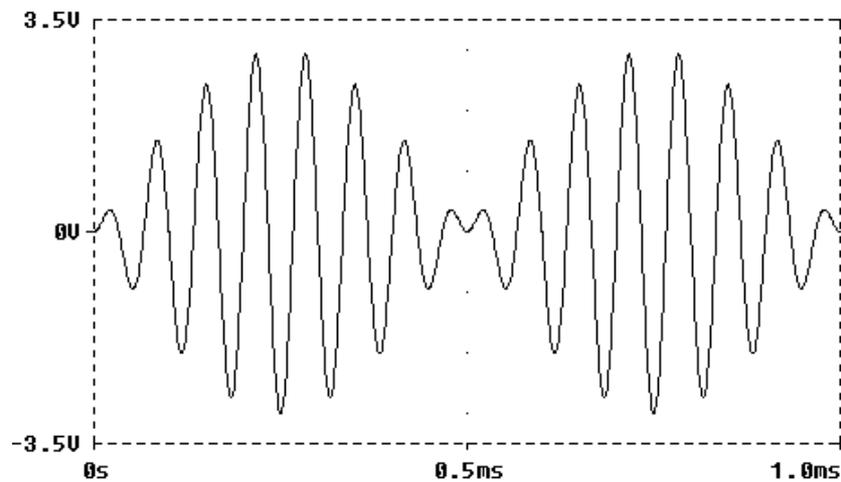
Per avere una idea di come cambiano le cose, consideriamo un caso semplice in cui l'oscillazione locale per la demodulazione, anziché presentare solo la componente alla frequenza della portante, presenti anche un'altra armonica: avendo preso la portante di 15kHz, l'oscillazione locale avrà una componente a 15kHz e, per esempio, una componente a 45kHz (3° armonica, di frequenza pari a 3 volte quella della portante e di ampiezza pari ad 1/3 di quella della portante):

$$m(t) = 2 \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) + \frac{2}{3} \cos(2\pi(45 \cdot 10^3)t)$$

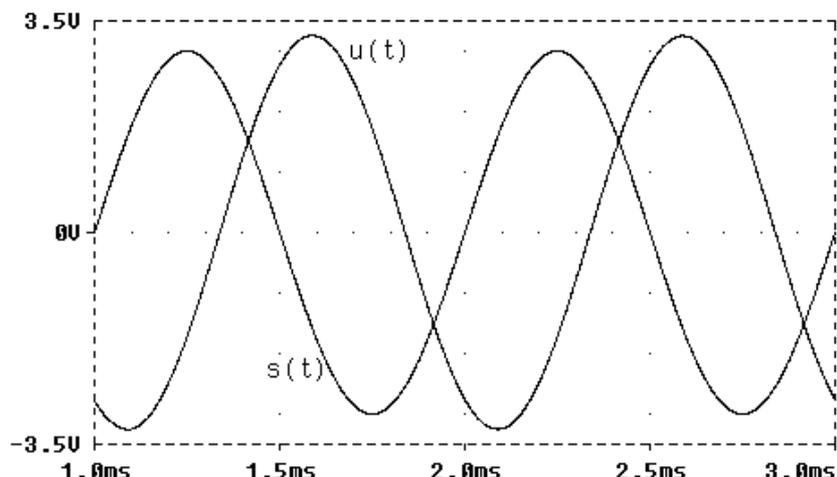
L'andamento di queste due componenti è rappresentato nelle figure seguenti, dove è anche rappresentata la loro somma, cioè l'oscillazione locale nel suo complesso:



Il prodotto tra l'oscillazione locale e il segnale modulato $s_t(t)$ proveniente dal canale risulta avere il seguente andamento temporale:

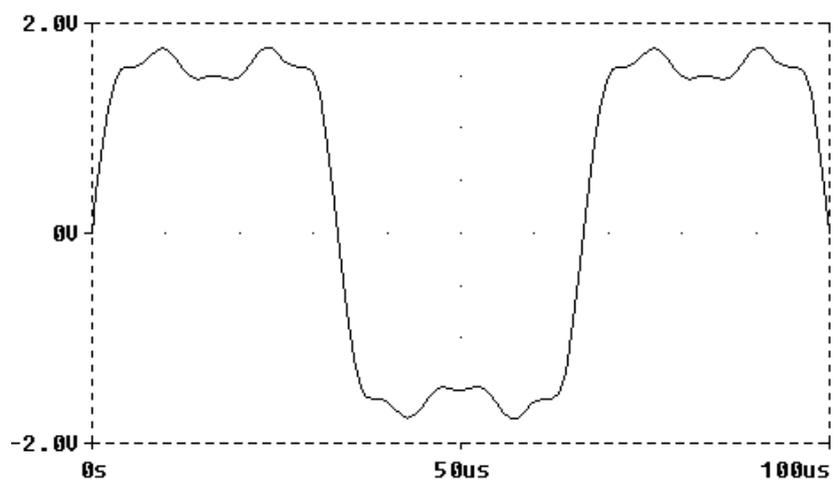


Questo segnale è estremamente simile a quello che si otterrebbe in presenza della sola armonica fondamentale ed infatti, mandandolo in ingresso al filtro passa-basso, si ottiene il seguente segnale di uscita:

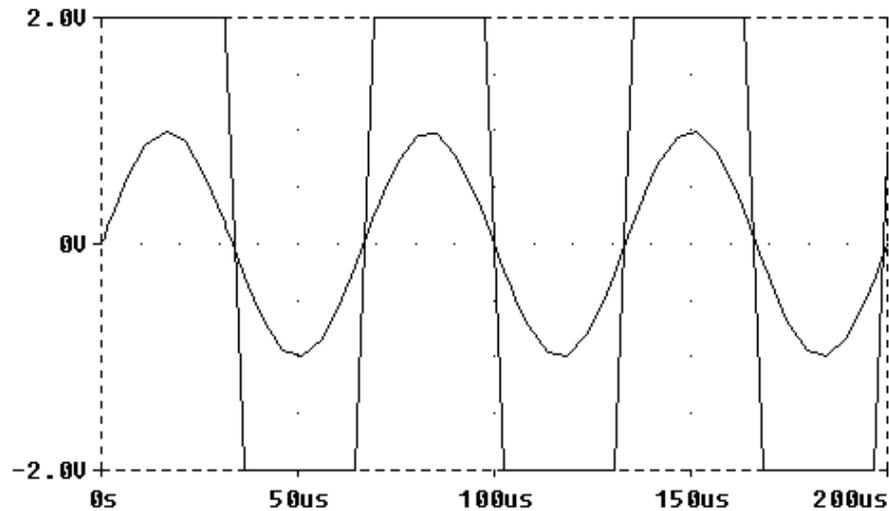


Come previsto la ricostruzione è abbastanza fedele. Vedremo in seguito che i problemi legati alla presenza delle armoniche diverse dalla fondamentale sono legati al rumore.

Potremmo a questo punto vedere come cambiano le cose se aggiungiamo una ulteriore armonica (sarebbe la 5°) all'oscillazione locale. Tuttavia, è facile rendersi conto che quante più armoniche noi aggiungiamo, tanto più l'oscillazione locale si approssima ad una onda quadra. Ad esempio, se aggiungiamo anche la 5°, la 7° e la 9° armonica, l'oscillazione locale risulta essere la seguente:

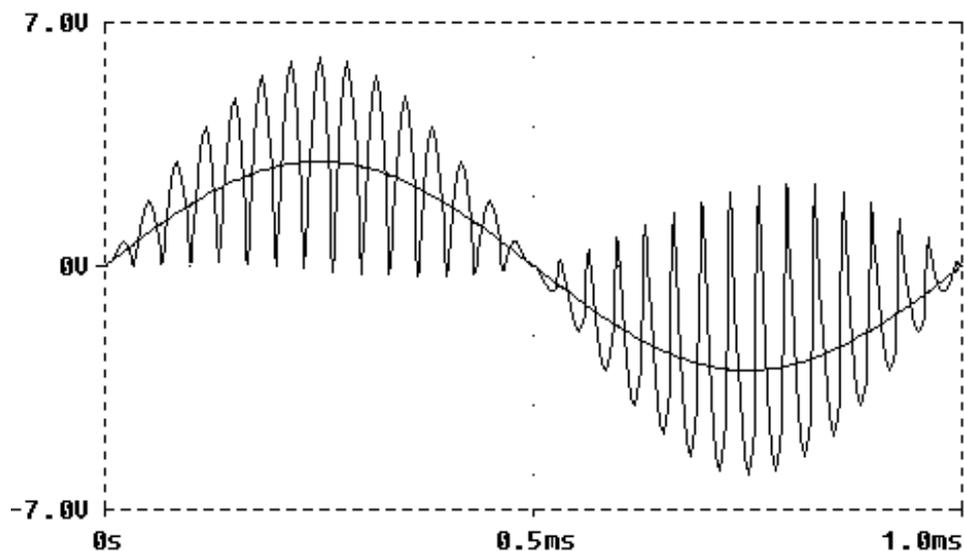


Allora, consideriamo il caso estremo in cui l'oscillazione locale sia proprio un'onda quadra caratterizzata dai seguenti parametri: valore alto +2, valore basso -2, periodo 66 μ s. Il confronto tra questa onda quadra e la portante $c(t)$ è indicato nella figura seguente:

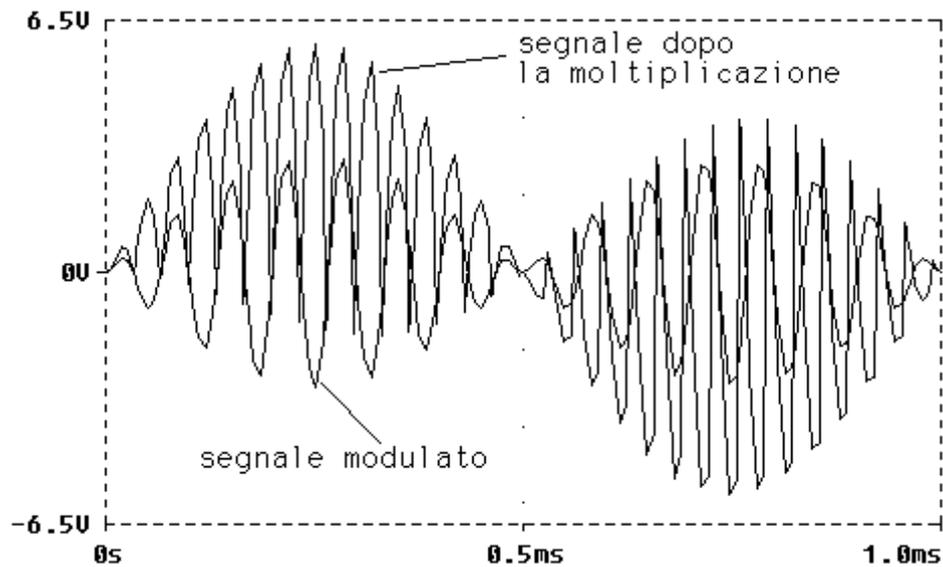


I parametri dell'onda quadra sono stati scelti in modo che essa presenti gli attraversamenti dello zero in corrispondenza degli stessi istanti in cui la portante (e quindi anche la teorica oscillazione locale puramente sinusoidale) attraversa lo zero.

Il prodotto tra questa onda quadra e il segnale modulato $s_t(t)$ proveniente dal canale risulta avere il seguente andamento temporale:

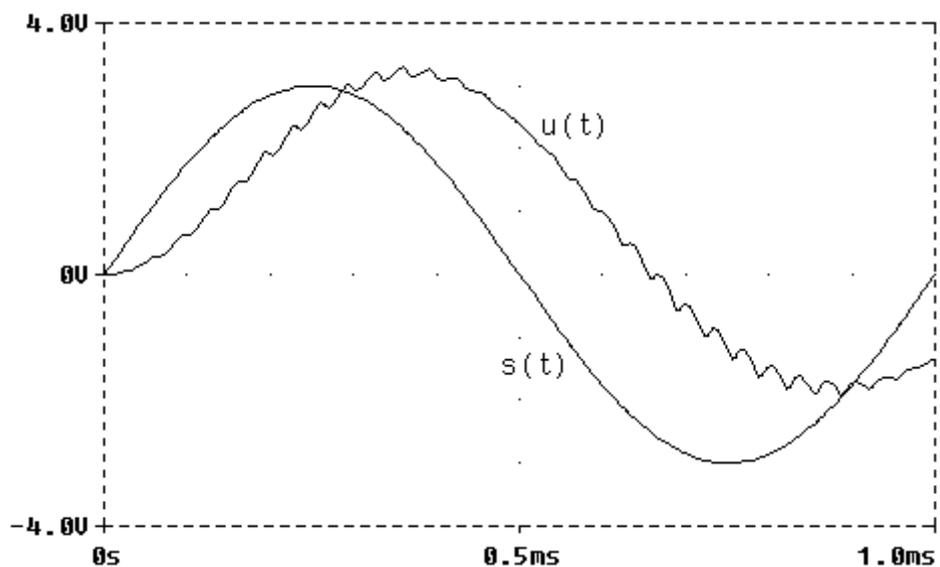


Si osserva che l'effetto della moltiplicazione dell'onda quadra con $s_t(t)$ è praticamente quello di un raddrizzatore a doppia semionda (semiperiodo per semiperiodo) per il segnale $s_t(t)$. Questo fatto è evidenziato nella figura seguente, dove i due segnali $x(t)$ e $s_t(t)$ vengono sovrapposti uno all'altro:



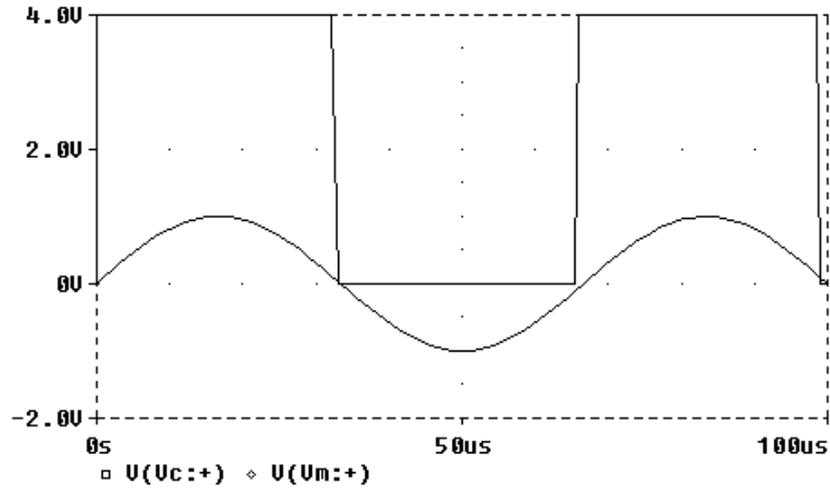
Come si nota, la moltiplicazione produce un segnale raddrizzato e di ampiezza doppia rispetto al segnale modulato.

A questo punto, il segnale raddrizzato $x(t)$ va in ingresso al filtro (che supponiamo essere il solito RC dei casi precedenti), all'uscita del quale si ottiene il seguente segnale $u(t)$:

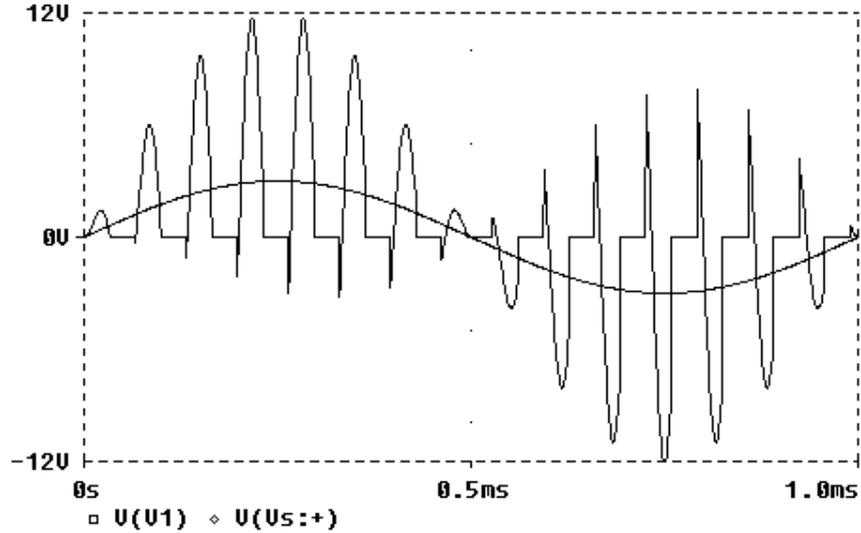


Facendo un confronto con il segnale ottenuto in presenza di una oscillazione locale perfettamente sinusoidale, si nota un peggioramento estremamente contenuto della fedeltà: il motivo è che il segnale raddrizzato dalla moltiplicazione con l'oscillazione locale conserva comunque la stessa media che aveva prima della moltiplicazione, per cui consente comunque una buona ricostruzione di $s(t)$.

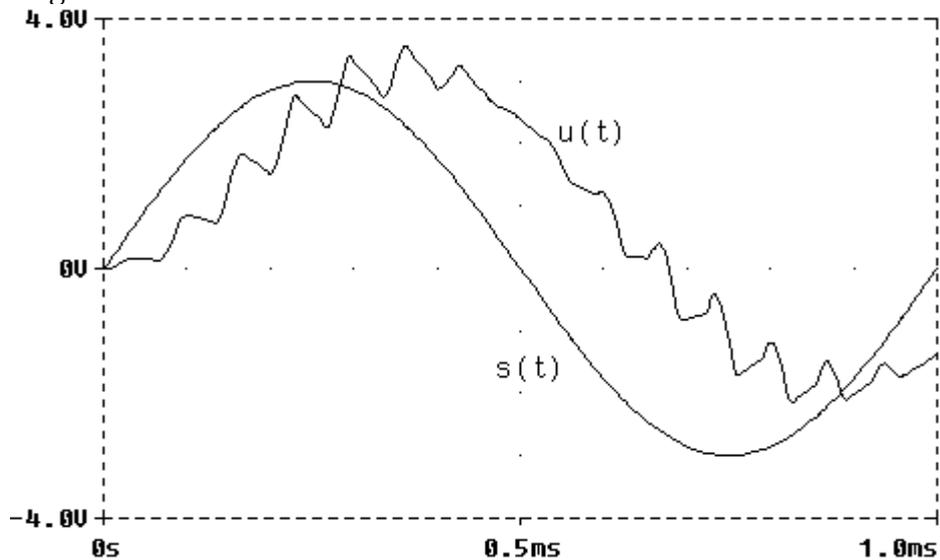
E' anche possibile che l'onda quadra, anziché avere valore medio nullo, abbia valore medio 2, come quella indicata nella figura seguente (confrontata sempre con la portante):



In questo caso, il prodotto dell'onda quadra con il segnale modulante risulta essere il seguente:



L'onda quadra fa sì che la moltiplicazione si comporti come una specie di raddrizzatore a singola semionda di $s_c(t)$. La successiva ricostruzione operata dal filtro porta al seguente risultato:



Le prestazioni sono di gran lunga peggiori rispetto ai casi precedenti.

Rumore nella tecnica di modulazione DSB-SC

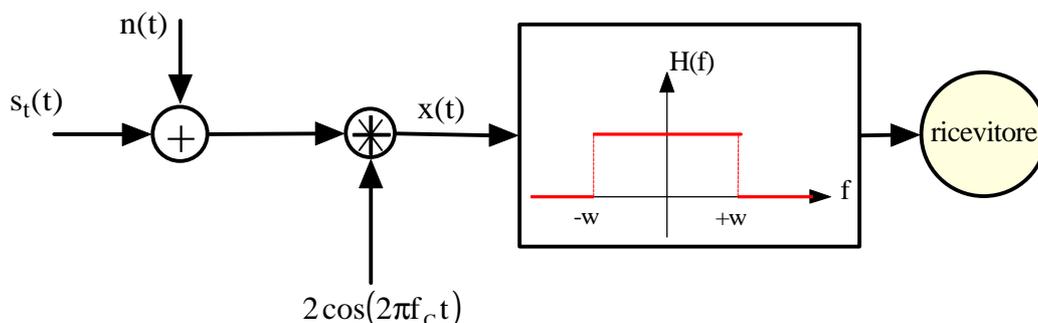
Nella descrizione fatta nei paragrafi precedenti circa la modulazione/demodulazione d'ampiezza con la tecnica DSB-SC, abbiamo tralasciato due cose importanti:

- in primo luogo, il ritardo e l'attenuazione dovuti al mezzo trasmissivo, che è stato sempre ritenuto ideale ma tale non è;
- in secondo luogo, il rumore introdotto, sul segnale utile, sia dagli apparati di trasmissione sia soprattutto da quelli di ricezione.

Ha poca importanza, invece, il rumore introdotto dagli apparati di "emissione", ossia in definitiva dal modulatore, in quanto, in quella fase, la potenza del segnale utile è talmente alta da non risultare assolutamente influenzata dalla potenza di rumore. La potenza del segnale utile, invece, si abbassa notevolmente durante la trasmissione e in fase di ricezione ed è perciò in quelle fasi che è opportuno studiare il rumore.

Ad ogni modo, continuiamo a ritenere il mezzo trasmissivo ideale, mentre ci concentriamo sul rumore introdotto in fase di demodulazione.

Dato che consideriamo solo il **rumore termico additivo** (gaussiano bianco), possiamo condurre il nostro studio continuando a supporre tutti gli apparati ideali, ossia non affetti da rumore, ma, contemporaneamente, supponendo che il segnale modulato $s_t(t)$ in uscita dal canale di trasmissione, ancora non affetto da rumore, venga sommato, prima di passare all'apparato di demodulazione, ad un rumore $n(t)$. In tal modo, lo schema del demodulatore diviene il seguente:



(per semplicità, stiamo supponendo unitaria l'ampiezza A_c della portante).

Per caratterizzare questo rumore, sapendo che è un rumore additivo bianco gaussiano, possiamo utilizzare la sua *densità spettrale di potenza disponibile*, che sappiamo valere

$$G_a(f) = kT_0$$

(dove T_0 è la temperatura ambiente).

Possiamo inoltre sfruttare il concetto di *temperatura equivalente di rumore*: sappiamo, infatti, che, dato un sistema rumoroso avente una temperatura equivalente di rumore T_{eq} , è possibile considerare il sistema non rumoroso (cioè

ideale), a patto di sommare, al segnale di ingresso, un rumore avente densità spettrale di potenza disponibile pari a

$$h_n(f) = kT = k(T_0 + T_{eq})$$

(costante con la frequenza).

Quindi, possiamo supporre il demodulatore ideale (non rumoroso) e mandargli in ingresso un rumore bianco con densità spettrale di potenza $kT = k(T_0 + T_{eq})$ che tenga conto sia del rumore che il segnale si porta dietro (kT_0) sia del rumore intrinsecamente generato dal dispositivo (kT_{eq}).

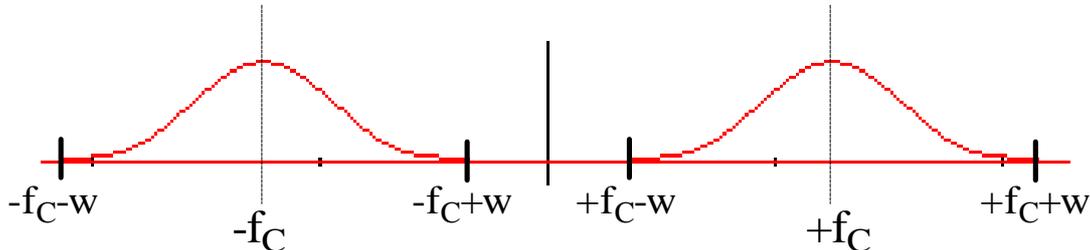
Analizziamo allora quale influenza abbia questo rumore e come si può fare per ridurla.

Sia $s(t)$ il segnale modulante, con spettro $S(f)$ di banda w (il che significa che $S(f)$ si estende nell'intervallo $[-w, +w]$).

Se $s_t(t)$ è il segnale modulato, abbiamo prima visto che esso si estende nell'intervallo $[-w - f_c, +f_c + w]$: anzi, in particolare, abbiamo visto che $S_t(f)$ ha espressione

$$S_t(f) = \frac{1}{2}S(f - f_c) + \frac{1}{2}S(f + f_c)$$

ossia, a meno delle costanti, consta di due repliche di $S(f)$: una replica è posizionata in f_c ed è quindi estesa nell'intervallo $[f_c - w, f_c + w]$; l'altra replica è posizionata in $-f_c$ ed estesa perciò nell'intervallo $[-w - f_c, -f_c + w]$:



In fase di ricezione, a questo segnale si somma un rumore $n(t)$ avente uno spettro di potenza (o, ciò che è lo stesso, una densità spettrale di potenza) costante per tutte le frequenze sul valore kT . Il segnale che entra di fatto nell'apparato demodulatore è dunque

$$z(t) = s_t(t) + n(t)$$

Questo segnale viene moltiplicato per $2\cos(2\pi f_c t)$, il quale ha il compito di riportare lo spettro di $s(t)$ nella sua banda base: il segnale che viene fuori dal moltiplicatore è

$$x(t) = s(t) \cdot 2\cos^2(2\pi f_c t) + 2n(t)\cos(2\pi f_c t)$$

ed è quindi la somma di un termine legato solo al segnale e di un termine legato solo al rumore.

Questo segnale va in ingresso al filtro passa-basso, il quale elimina tutte le componenti armoniche, siano esse di segnale o di rumore, esterne all'intervallo

$[-w, w]$: per quanto riguarda il segnale utile in uscita dal filtro, sappiamo ormai bene che si tratta proprio di $s(t)$, cui ovviamente si sommerà un certo rumore che indichiamo con $n_U(t)$ (**rumore filtrato**).

L'uscita del filtro (e quindi del demodulatore) è dunque

$$s_u(t) = s(t) + n_U(t)$$

dove $n_U(t)$ è il rumore in uscita dal demodulatore.

Andiamo allora a calcolarci il rapporto segnale-rumore S/N in uscita dal demodulatore.

Per fare questo calcolo, un passo fondamentale è quello di scegliere come caratterizzare la potenza del segnale e come caratterizzare la potenza del rumore. Tale scelta dipende ovviamente dal tipo di segnali con cui abbiamo a che fare: vedremo che la scelta per quanto riguarda il segnale determina il risultato finale, mentre quella per quanto riguarda il rumore non influisce su tale risultato.

Cominciamo dal segnale, per il quale possiamo considerare sia la *potenza media* (ossia la media della potenza istantanea) sia la *potenza di picco* (ossia il massimo valore della potenza istantanea). Consideriamo, ad esempio, la potenza media del segnale, ossia, in questo caso, la potenza media di $s(t)$.

In modo analogo, per il rumore possiamo considerare sia la potenza media sia la potenza di picco: consideriamo ad esempio la potenza media di rumore, che in questo caso è quella del segnale $n_U(t)$: quindi

$$\frac{S}{N} = \frac{E[s(t)^2]}{E[n_U(t)^2]}$$

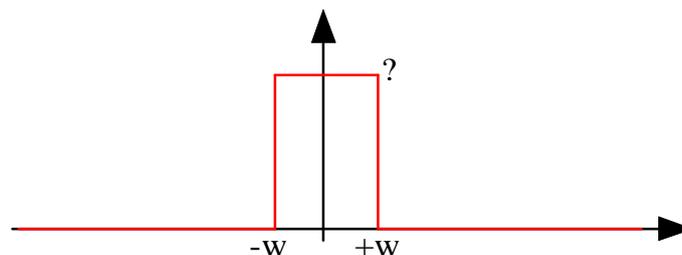
dove ricordiamo che supponiamo di avere a che fare sempre con processi ergodici, ipotesi che rende lecita l'espressione appena riportata.

Indicata in generale con $P_s = E[s^2(t)]$ la potenza media del segnale modulante $s(t)$, abbiamo dunque che

$$\frac{S}{N} = \frac{P_s}{E[n_U(t)^2]}$$

Per quanto riguarda, invece, il termine $E[n_U(t)^2]$, sappiamo che si tratta dell'area sottesa dallo spettro di potenza di $n_U(t)$: come è fatto questo spettro?

In primo luogo, dato che il rumore $n(t)$ originario aveva spettro di potenza costante su tutte le frequenze, lo stesso varrà per $n_U(t)$, ovviamente, però, solo nella banda w del segnale $s(t)$, in quanto il filtro passa-basso ha provveduto ad eliminare tutto ciò che è esterno a tale banda. Lo spettro di potenza di tale rumore sarà dunque del tipo seguente:



Tutto sta a capire quale sia il valore indicato in figura con “?”. Si capisce facilmente che l'effetto della moltiplicazione di $n(t)$ per l'oscillazione locale $2\cos(2\pi f_c t)$ è semplicemente quello di sommare e portare in banda base le componenti di rumore intorno alla frequenza della portante (così come accade per le componenti del segnale).

Da qui deduciamo che l'altezza di quel rettangolo è $2kT$, per cui la sua area, con riferimento alle sole frequenze positive in quanto ricordiamo che kT è la densità spettrale di potenza monolaterale, è $E[n_U^2(t)] = 2kT_w$.

Possiamo allora concludere che il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore, nella tecnica di modulazione DSB-SC, vale

$$\boxed{\frac{S}{N} = \frac{P_s}{2kT_w}}$$

Andiamo adesso a calcolare la quantità

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}$$

Essa ci quantifica l'eventuale degradazione del rapporto S/N nel passaggio del segnale dall'ingresso all'uscita del demodulatore.

Ci servono dunque le seguenti due quantità:

- $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$ è il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore, ossia quello che abbiamo calcolato nel paragrafo precedente:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{P_s}{2kT_w}$$

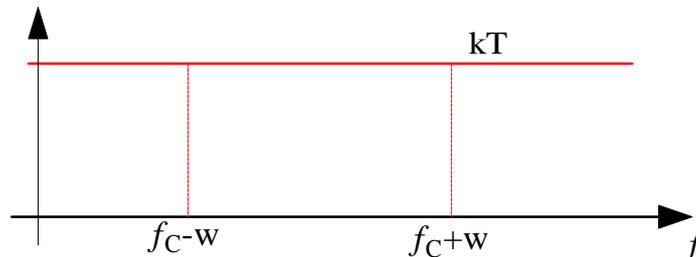
- $\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}$ è invece il rapporto segnale-rumore in ingresso al demodulatore, ossia in uscita dal mezzo trasmissivo: considerando sempre le potenze medie, sarà dunque il rapporto tra la potenza media del segnale trasmesso $s_t(t)$ e la potenza media del rumore (in questo caso $n(t)$) nella banda del segnale modulato $s(t)$.

Valutiamo allora $\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}$. Il numeratore rappresenta la potenza media del segnale trasmesso:

$$E[s_t^2(t)] = E[(s(t)\cos(2\pi f_c t))^2] = E[s^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)] = \frac{1}{2}E[s^2(t)] = \frac{1}{2}P_s$$

Questa potenza è evidentemente pari alla metà di quella in uscita dal demodulatore.

Il denominatore è invece la potenza media del rumore nella banda del segnale modulato: il rumore in ingresso al demodulatore ha densità spettrale di potenza pari a kT per tutte le frequenze, ma la banda del segnale modulato è $2w$, doppia rispetto al caso precedente:



Di conseguenza, l'area (ossia appunto la potenza media) è ancora $2kTw$ così come all'uscita del demodulatore. Concludiamo dunque che il rapporto S/N all'ingresso del demodulatore vale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} = \frac{P_S}{2kTw}$$

Questo rapporto risulta pari alla metà di quello trovato in uscita dal demodulatore, dal che deduciamo che

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{P_{S,media}}{P_{N,media}}|_{IN}}{\frac{P_{S,media}}{P_{N,media}}|_{OUT}} = \frac{\frac{P_S/2}{2kTw}}{\frac{P_S}{2kTw}} = \frac{1}{2}$$

Quindi, il rapporto S/N in uscita è il doppio di quello in ingresso, il che significa che la demodulazione porta innegabili benefici sulla qualità del segnale.

Potremmo scegliere di usare, per il segnale, la potenza di picco anziché la potenza media:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{P_{S,picco}}{P_{N,media}}|_{IN}}{\frac{P_{S,picco}}{P_{N,media}}|_{OUT}}$$

Per la potenza di rumore valgono le stesse considerazioni di prima, per cui il rapporto si riduce ancora una volta a confrontare la potenza di segnale in uscita con la potenza di segnale in ingresso (anche se questa volta confrontiamo le potenze di picco, mentre prima confrontavamo le potenze medie):

$$\frac{P_{S,picco}|_{IN}}{P_{S,picco}|_{OUT}}$$

La potenza di picco di un segnale è il quadrato del massimo modulo del segnale stesso:

- all'uscita dal demodulatore, il segnale è $s(t)$, per cui la sua potenza di picco è

$$P_{S,picco}|_{OUT} = (|s(t)|_{MAX})^2$$

- all'ingresso del demodulatore, invece, il segnale è $s(t)\cos(2\pi f_c t)$: dato che il Coseno ha valore massimo 1, deduciamo che la potenza di picco è ancora

$$P_{S,picco}|_{IN} = (|s(t)\cos(2\pi f_c t)|_{MAX})^2 = (|s(t)|_{MAX})^2$$

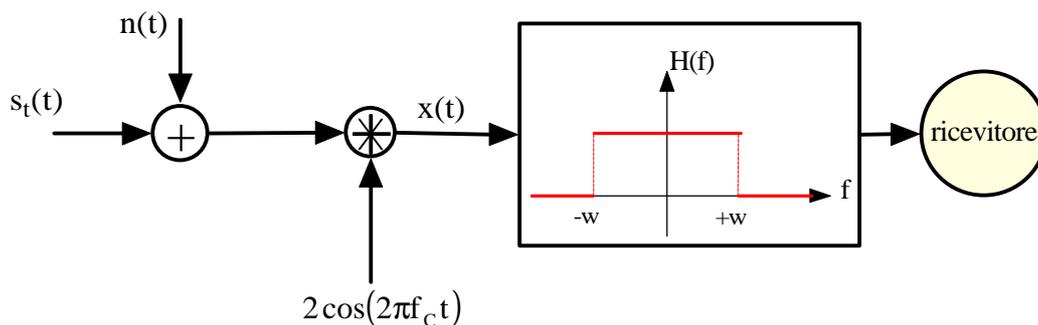
Deduciamo dunque che la potenza di picco rimane invariata dall'ingresso all'uscita del demodulatore, per cui in questo caso

$$\frac{P_{S,picco}|_{IN}}{P_{S,picco}|_{OUT}} = 1$$

Questo significa, in altre parole, che la modulazione di ampiezza non altera il bilancio di potenza di picco rispetto al caso della trasmissione diretta del segnale; di conseguenza, nel caso di mezzo trasmissivo con attenuazione e rumore indipendenti dalla frequenza, la potenza di picco che si deve trasmettere per avere una certa qualità in ricezione è la stessa sia che si trasmetta direttamente in banda base sia che si trasmetta in alta frequenza mediante modulazione di ampiezza DSB-SC.

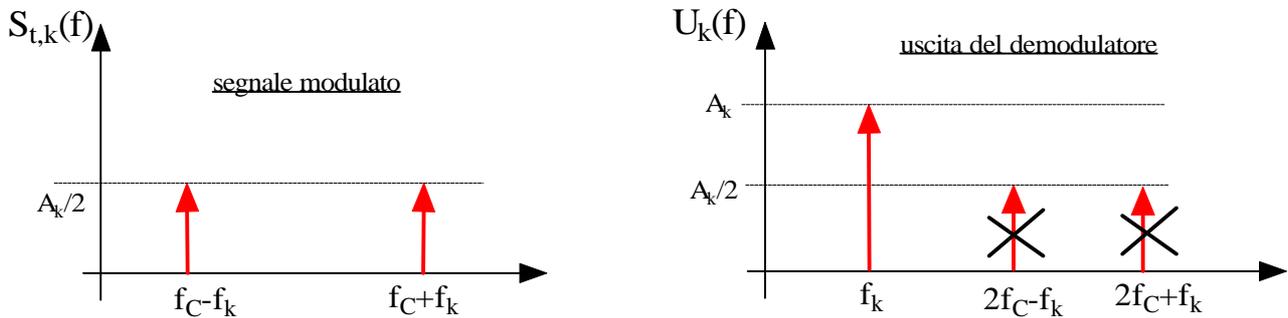
Osservazione: pre-filtraggio nel modulatore

Riprendiamo lo schema dell'apparato di **demodulazione coerente** nella tecnica DSB-SC:



Abbiamo detto che l'oscillazione locale, per la quale viene moltiplicato il segnale $s_t(t)+n(t)$, ha fondamentalmente l'effetto di riportare in banda base tutte le componenti armoniche che invece sono state spostate, in sede di modulazione, attorno alla frequenza f_c dell'oscillazione stessa. Del resto, essa porta queste stesse componenti anche intorno alla frequenza $2f_c$, ma esse vengono poi eliminate dal successivo filtraggio passa-basso.

Con riferimento ad una singola armonica (ampiezza A_k e frequenza f_k) del segnale modulante, la situazione è dunque la seguente (solo per le frequenze positive):



Abbiamo anche detto che non si riesce mai a generare una oscillazione puramente sinusoidale a frequenza f_c , per cui la situazione più frequente è quella per cui tale oscillazione possiede qualche altra armonica, di ampiezza minore. Vogliamo allora capire quale sia l'effetto di queste ulteriori armoniche. Vediamo a livello analitico.

Per semplicità, supponiamo che l'oscillazione locale presenti, oltre all'armonica fondamentale, anche la terza armonica e supponiamo anche che essa abbia la stessa ampiezza della fondamentale (cosa che generalmente non avviene): si tratterà quindi di un segnale del tipo

$$m(t) = 2 \cos(2\pi f_c t) + 2 \cos(2\pi(3 \cdot f_c) t)$$

Questo segnale va a moltiplicare il segnale modulato $s_i(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$: considerando solo la generica armonica di $s(t)$, il risultato della moltiplicazione, tramite qualche manipolazione algebrica, risulta essere

$$\begin{aligned} x(t) &= [A_k \cos(2\pi f_k t) \cos(2\pi f_c t)] 2[\cos(2\pi f_c t) + \cos(2\pi(3f_c) t)] = \\ &= A_k [\cos(2\pi(f_c - f_k) t) + \cos(2\pi(f_c + f_k) t)] \cos(2\pi f_c t) + \\ &+ A_k [\cos(2\pi(f_c - f_k) t) + \cos(2\pi(f_c + f_k) t)] \cos(2\pi(3f_c) t) = \\ &= \frac{A_k}{2} [\cos(2\pi(2f_c - f_k) t) + \cos(2\pi f_k t) + \cos(2\pi(4f_c + f_k) t) + \cos(2\pi f_k t)] + \\ &+ \frac{A_k}{2} [\cos(2\pi(4f_c - f_k) t) + \cos(2\pi(2f_c - f_k) t) + \cos(2\pi(4f_c + f_k) t) + \cos(2\pi(2f_c + f_k) t)] \end{aligned}$$

Osserviamo la presenza delle 2 componenti a frequenza f_k che vengono sommate, cui si aggiungono componenti a frequenze $2f_c - f_k$, $4f_c + f_k$, $4f_c - f_k$ e $2f_c + f_k$. Queste ultime componenti vengono tutte filtrate dal successivo filtro passa-basso, per cui deduciamo che, dal punto di vista del segnale, non ci sono peggioramenti (come avevamo già trovato in precedenza studiando gli andamenti temporali dei vari segnali coinvolti).

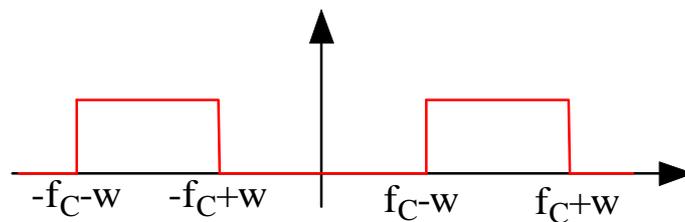
I problemi vengono invece dal rumore $n(t)$ che, essendo sovrapposto al segnale modulato, viene anch'esso moltiplicato per $2 \cos(2\pi f_c t) + 2 \cos(2\pi(3 \cdot f_c) t)$: questa moltiplicazione ha l'effetto di traslare in banda base sia le componenti di rumore intorno alla frequenza f_c sia quelle intorno alla frequenza $3f_c$. Generalmente, questi

contributi di rumore sono tra loro incorrelati (o addirittura statisticamente indipendenti), per cui si sommano in potenza. Il risultato è dunque quello di un maggior rumore, rispetto al caso di oscillazione puramente sinusoidale, che risulta sovrapposto al segnale in uscita dal demodulatore.

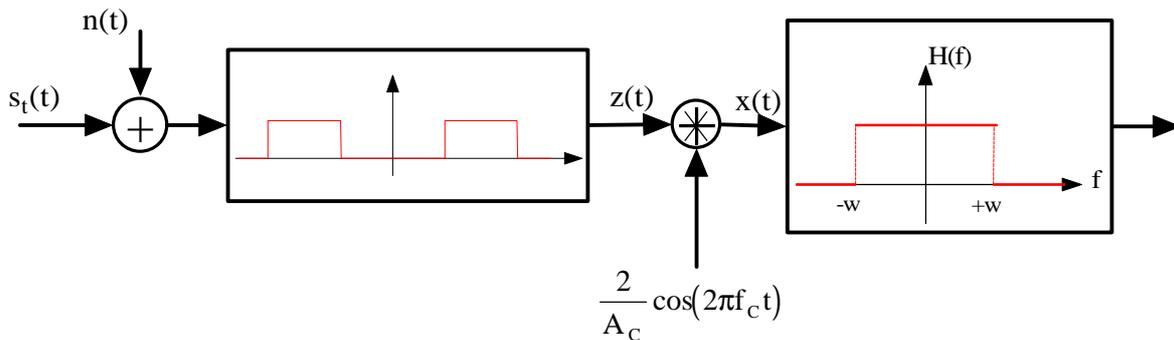
In altre parole, la presenza di ulteriori armoniche, oltre la fondamentale, nell'oscillazione locale fa sì che un maggior contributo di rumore venga sovrapposto al segnale ricostruito, con evidente peggioramento della ricostruzione stessa. Si rende allora necessario un rimedio a questa situazione.

E' evidente che il rimedio consiste nell'eliminare preventivamente tutto l'eventuale rumore presente al di fuori della banda occupata dal segnale modulato. Infatti, abbiamo prima visto che il segnale modulato $s_t(t)$ consta sostanzialmente di una replica di $S(f)$ posizionata in f_c e quindi estesa nell'intervallo $[f_c - w, f_c + w]$ (la situazione è poi simmetrica per le frequenze negative): di conseguenza, se usiamo, prima della demodulazione, un **filtro passa-banda** che elimini tutto ciò che si trova al di fuori di questo intervallo, non perdiamo alcuna informazione sul segnale modulato, mentre eliminiamo tutto il rumore al di fuori dell'intervallo.

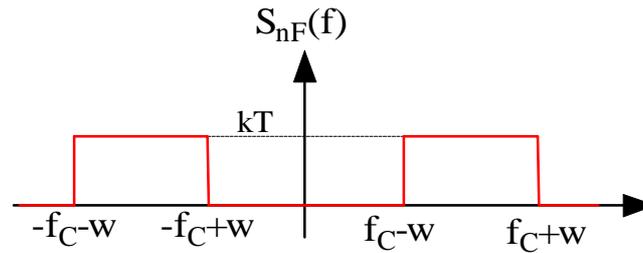
Il filtro avrà dunque una funzione di trasferimento (si considerano anche le frequenze negative, dove la situazione è simmetrica rispetto a quelle positive) del tipo seguente:



L'apparato di demodulazione si modifica dunque nel modo seguente:



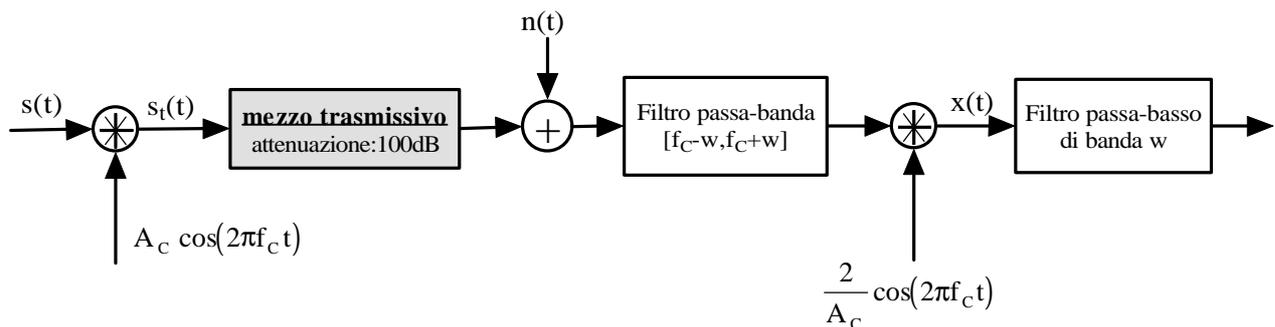
All'uscita dal filtro passa-banda troviamo dunque il segnale modulato, rimasto inalterato, cui è sommato un rumore filtrato $n_F(t)$ che ovviamente non è più bianco (ossia non ha più spettro di potenza costante in tutte le frequenze), ma è nullo al di fuori degli intervalli $[f_c - w, f_c + w]$ e $[-w - f_c, -f_c + w]$, mentre entro questi intervalli risulta essere costante e ancora pari a kT . E' dunque qualcosa del tipo seguente:



Così facendo, si può verificare che sia il rapporto S/N in uscita al demodulatore sia quello in ingresso al demodulatore (cioè a valle del filtro passa-banda) rimangono invariati, il che significa che anche il fattore di rumore del demodulatore rimane invariato. *Il miglioramento, rispetto a prima, è invece nel fatto che l'eventuale presenza, nell'oscillazione locale, di armoniche diverse dalla fondamentale non comporta alcuna aggiunta di rumore in banda base e quindi alcun peggioramento delle prestazioni.*

Esempio numerico

Consideriamo un apparato di modulazione/demodulazione coerente di ampiezza (con la tecnica DSB-SC) del tipo schematizzato nella figura seguente:



Supponiamo che il segnale modulante $s(t)$ sia un tipico **segnale musicale**, cioè un *segnale passa-basso* avente una banda di circa 15 kHz (cioè un segnale il cui spettro si estende dalla frequenza nulla alla frequenza $w=15\text{kHz}$). Il nostro obiettivo è quello di dimensionare il sistema in modo che il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore valga **43dB**.

Facciamo due ipotesi:

- in primo luogo, supponiamo che il canale di trasmissione introduca solo una attenuazione di 100 dB sul segnale modulato $s_t(t)$ che riceve in ingresso;
- in secondo luogo, supponiamo per comodità che l'ampiezza A_C della portante sia unitaria, per cui la portante è $\cos(2\pi f_C t)$ e l'oscillazione locale usata dal demodulatore è $2\cos(2\pi f_C t)$.

La prima considerazione che possiamo fare riguarda il modo con cui varia il rapporto segnale-rumore dall'ingresso all'uscita del demodulatore vero e proprio: abbiamo visto, nel paragrafo precedente, che, riferendosi alla potenza media del

segnale, il rapporto S/N aumenta di 3dB dall'ingresso all'uscita del demodulatore. Di conseguenza, *se vogliamo un rapporto S/N di 43 dB in uscita dal demodulatore, ci servirà un rapporto S/N di 40 dB in ingresso al demodulatore.*

Accertato questo, ci serve l'espressione del rapporto S/N in ingresso al demodulatore: nel paragrafo precedente abbiamo trovato che esso ha espressione

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} = \frac{P_S/2}{2kT_w}$$

(dove ricordiamo che abbiamo posto $A_c=1$, per cui il termine A_c^2 normalmente presente a numeratore scompare, ed inoltre abbiamo supposto il canale privo di attenuazione). Con T abbiamo indicato la temperatura complessiva T_0+T_{eq} del dispositivo, che cioè tiene conto non solo della temperatura di lavoro ma anche del rumore introdotto dal dispositivo stesso e portato a monte di esso.

Ai nostri fini conviene utilizzare un'altra espressione di questo rapporto segnale/rumore, altrettanto valida:

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} = \frac{P_R}{FkT_0 \cdot w}}$$

Questa espressione nasce dalle seguenti considerazioni:

- al numeratore, bisogna considerare la potenza del segnale utile: dato che stiamo ragionando sull'uscita del canale e stiamo considerando quest'ultimo non più ideale, la potenza da considerare è la potenza P_R ricevuta dal canale (che ovviamente è diversa da quella trasmessa $P_T=P_S/2$ sul canale stesso a causa dell'attenuazione $\alpha=100\text{dB}$ da esso introdotta);
- al denominatore, dobbiamo invece considerare la potenza (valutata nella banda del segnale modulato) del rumore (gaussiano bianco) che si somma al segnale utile che viene fuori dal canale: se indichiamo con F il *fattore di rumore* degli apparati di demodulazione ⁽⁶⁾, la densità spettrale di potenza di rumore è FkT_0 (incluso in F il fattore 2) e va pesata nella banda w del segnale utile per ottenere la potenza di rumore nella suddetta banda. E' però importante capire quale sia il valore di F: in effetti, l'apparato demodulatore non è costituito, nella pratica, solo dal moltiplicatore e dal filtro passa-basso, ma anche da apparati di amplificazione posti in cascata (eventualmente intervallati da opportuni filtri); alcuni di tali apparati di amplificazione sono posti a monte del demodulatore ed hanno lo scopo di alzare il livello del segnale captato dall'antenna (livello che, altrimenti, sarebbe troppo basso per le successive elaborazioni). Di conseguenza, il fattore di rumore da considerare è proprio quello di questi stadi iniziali di amplificazione, in quanto, nel momento in cui avviene la demodulazione vera e propria, il livello di segnale è diventato sufficientemente alto da poter trascurare il rumore eventualmente sovrapposto dagli apparati di demodulazione. Generalmente, si considera, dunque, un fattore di rumore **F=10dB**, per cui questo sarà il valore cui faremo riferimento in questo esercizio e in quelli che seguiranno.

⁶ Ricordiamo che la rumorosità di un dispositivo può essere caratterizzata sia in termini di temperatura equivalente di rumore sia in termini di fattore di rumore: nel primo caso, si ha un termine di rumore kT_{eq} da aggiungere a kT_0 che è insieme al segnale; nel secondo caso, si prende il rumore kT_0 che è insieme al segnale e lo si moltiplica per F.

A questo punto, data l'espressione del rapporto S/N in ingresso al demodulatore, se ragioniamo in dB abbiamo che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} [\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} = 10 \log_{10} \frac{P_R}{FkT_0 w} = 10 \log_{10} P_R - 10 \log_{10} FkT_0 w = P_R [\text{dB}] - 10 \log_{10} FkT_0 w$$

Anziché ragionare in dB, si ragiona spesso in **dBm**, ossia rapportando le potenze coinvolte, prima di calcolarne il logaritmo, ad una quantità di riferimento che è 1mW anziché 1W:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{IN}} [\text{dB}] &= 10 \log_{10} \frac{P_R / 1\text{mW}}{FkT_0 w / 1\text{mW}} = 10 \log_{10} \frac{P_R}{1\text{mW}} - 10 \log_{10} \frac{FkT_0 w}{1\text{mW}} = P_R [\text{dBm}] - 10 \log_{10} \frac{FkT_0 w}{1\text{mW}} = \\ &= P_R [\text{dBm}] + (FkT_0 w)_{\text{dBm}} \end{aligned}$$

Dobbiamo dunque imporre che

$$P_R [\text{dBm}] - (FkT_0 w)_{\text{dBm}} = 43[\text{dB}]$$

Tenendo conto che la potenza ricevuta P_R è pari a quella trasmessa P_T diminuita però dei 100dB di attenuazione del canale, possiamo scrivere che $P_R [\text{dBm}] = P_T [\text{dBm}] - 100[\text{dB}]$, per cui la relazione da considerare vale

$$P_T [\text{dBm}] - 100[\text{dB}] - (FkT_0 w)_{\text{dBm}} = 43[\text{dB}] \longrightarrow P_T [\text{dBm}] = 143[\text{dB}] + (FkT_0 w)_{\text{dBm}}$$

Non ci resta ora che quantificare numericamente la potenza media del rumore in ingresso al demodulatore: considerando che la banda del segnale modulante $s(t)$ è $w=15\text{kHz}$ e che la temperatura ambiente vale $T_0=293^\circ\text{K}$ e prendendo $F=10\text{dB}$ (in base alle considerazioni fatte prima), risulta

$$\begin{aligned} (FkT_0 w)_{\text{dBm}} &= 10 \log_{10} \frac{FkT_0 w}{1\text{mW}} = 10 \log_{10} \frac{kT_0}{1\text{mW}} + 10 \log_{10} F + 10 \log_{10} w = \\ &= -174[\text{dBm}] + 10[\text{dB}] + 41,7[\text{dB}] \cong -122\text{dBm} \end{aligned}$$

per cui possiamo concludere che la potenza (di segnale) da trasmettere sul canale vale

$$P_T [\text{dBm}] = 143[\text{dB}] + (-122[\text{dBm}]) = 21[\text{dBm}] \longrightarrow P_T = \mathbf{0.1258\text{mW}}$$

Riferimento di fase e di frequenza nel segnale modulato

Abbiamo ampiamente visto, nei paragrafi precedenti, che, in sede di demodulazione DSB-SC, è importante poter disporre di una oscillazione locale che sia **coerente**, sia in fase sia in frequenza, con la portante usata in trasmissione:

$$\text{segnale modulato} \longrightarrow s_t(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

$$\text{oscillazione locale} \longrightarrow m(t) = \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Se si volesse generare autonomamente una oscillazione di questo tipo, usando un oscillatore opportuno in ricezione, non si otterrebbe mai la coerenza, né in fase né in frequenza: anche a patto di ottenere una sinusoidale isofrequenziale con la portante (in realtà ci saranno sempre diversi Hz di differenza), non si potrà mai avere la garanzia che tale sinusoidale abbia la stessa fase della portante. Di conseguenza, l'unico modo sensato di procedere è quello di ricavare le informazioni circa la fase e la frequenza della portante direttamente dal segnale ricevuto.

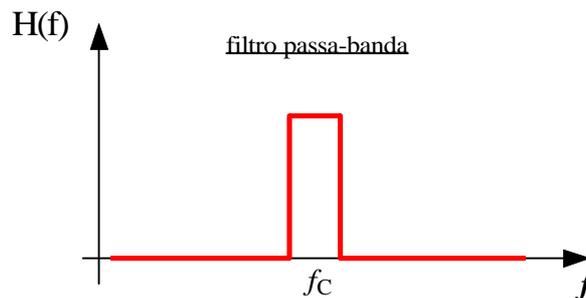
Una prima possibilità è quella di trasmettere, insieme al segnale modulato $s(t)c(t)$, anche la portante, sia pure con ampiezza ridotta ma con potenza sufficiente a consentirne la separazione dal rumore: questo procedimento viene adottato nella cosiddetta **modulazione AM standard** (o *modulazione AM in DSB con portante trasmessa*). Vediamo come si procede in questo caso.

Il segnale modulato ricevuto dal canale, nel caso si trasmetta anche la portante, assume evidentemente la seguente espressione

$$s_i(t) = s(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi) + \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

(nel caso di portante con ampiezza unitaria e con fase arbitraria).

Come visto in precedenza, questo segnale ha uno spettro esteso nell'intervallo $[f_c - w, f_c + w]$ e contiene anche una cosinusoidale a frequenza f_c . Si potrebbe allora pensare di estrarre questa armonica in ricezione, facendo passare il segnale per un filtro passa-banda molto stretto attorno alla frequenza f_c :



Questo procedimento, in realtà, non funziona in quanto il filtro, per quanto stretto possa essere, lascia passare anche altre componenti spettrali, di frequenza prossima ad f_c , per cui si otterrebbe una sinusoidale estremamente "sporca".

Supponiamo invece che la portante non venga trasmessa, per cui il segnale ricevuto dal canale è

$$s_i(t) = s(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Si può pensare, in sede di ricezione, di raddrizzare il segnale ricevuto (mediante ad esempio una moltiplicazione per un'onda quadra oppure usando un apposito circuito elettronico raddrizzatore), in modo da ottenerne in pratica il modulo:

$$|s_i(t)| = |s(t)\cos(2\pi f_c t + \varphi)| = |s(t)| |\cos(2\pi f_c t + \varphi)|$$

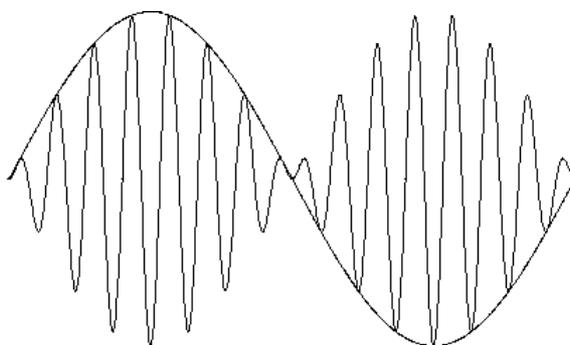
Si può verificare che questo segnale contiene anche una componente armonica del tipo $\cos(2\pi(2f_c)t + 2\varphi)$, che risulta anche isolata dal resto dello spettro: si può allora fare riferimento a questo termine, ottenuto mediante apposito filtraggio anche non perfetto, per generare una oscillazione locale a frequenza $2f_c$ e con fase

2ϕ da cui poi ottenere l'oscillazione a frequenza f_c e con fase ϕ (tramite una divisione in frequenza).

Il problema, con il procedimento appena descritto, è quello di perdere il "segno" della portante modulata (visto che se ne fa il modulo) e quindi anche il segno di $s(t)$.

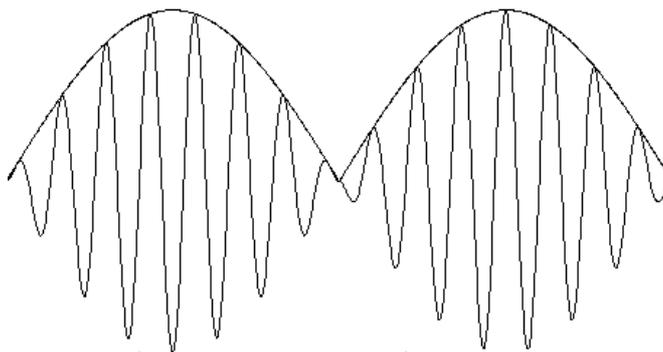
Per comprendere quanto appena detto, in riferimento al "segno" della portante modulata, consideriamo ancora una volta un esempio concreto.

Facciamo nuovamente riferimento al caso in cui il segnale modulante è una sinusoide di frequenza 1kHz e la portante è una sinusoide a 15 kHz. Abbiamo in precedenza osservato che il segnale modulato è fatto nel modo seguente:



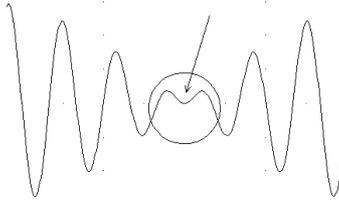
In questa figura è riportato il segnale modulato ed il suo inviluppo, che rappresenta proprio il segnale modulante $s(t)$, ossia anche il segnale che deve essere ricostruito dal demodulatore.

Quest'ultimo, ricevendo in ingresso $s_t(t)$, deve capire se l'inviluppo del segnale modulato è quello della figura precedente oppure quello indicato nella figura seguente:

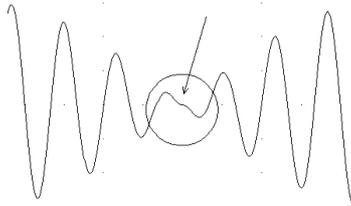


L'unico modo di effettuare la scelta è quello di andare a vedere come varia il segnale modulato in corrispondenza dell'attraversamento per lo zero:

- nel primo caso, la fase del segnale modulato cambia segno in corrispondenza dell'attraversamento dello zero:



- nel secondo caso, invece, la fase del segnale modulato non cambia segno in corrispondenza dell'attraversamento dello zero:



“Osservando” questo cambiamento di segno, il demodulatore può scegliere tra i due possibili involuppi.

Un'altra possibilità è quella di effettuare il quadrato del segnale ricevuto ⁽⁷⁾:
usando la solita formula $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$, si ottiene

$$[s_t(t)]^2 = s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \varphi) = s^2(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_c)t + 2\varphi) \right] = \frac{1}{2} s^2(t) + \frac{1}{2} s^2(t) \cos(2\pi(2f_c)t + 2\varphi)$$

Anche in questo caso abbiamo la componente $\cos(2\pi(2f_c)t + 2\varphi)$ da cui ottenere il riferimento (di fase e di frequenza) desiderato.

Autore: Sandro Petrizzelli

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

⁷ Ricordiamo che la quadratura è una tipica operazione non lineare.