

Appunti di Comunicazioni Elettriche

Capitolo 2 – parte II

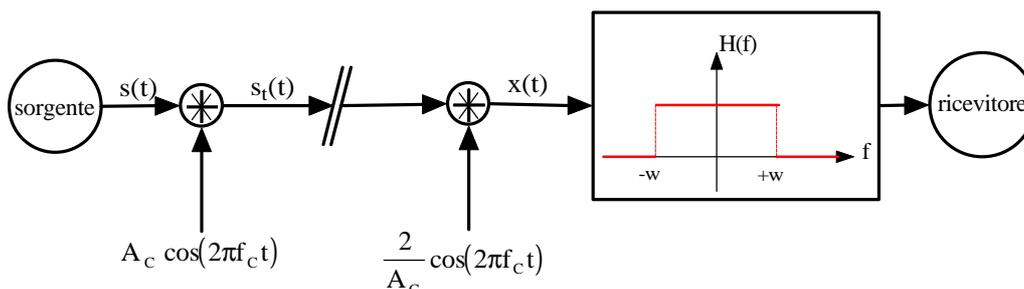
Modulazione d'ampiezza

MODULAZIONE DI AMPIEZZA CON 2 PORTANTI IN QUADRATURA	2
<i>Introduzione</i>	2
<i>Presenza di sfasamenti</i>	5
<i>Analisi nel dominio del tempo</i>	7
<i>Osservazione: banda del segnale modulato</i>	9
MODULAZIONE DI AMPIEZZA SSB	11
<i>Introduzione</i>	11
<i>Uso di un “singolo tono modulante”</i>	14
Modulazione.....	14
Demodulazione	17
<i>Analisi nel dominio del tempo</i>	18
<i>Modulazione e demodulazione per un segnale modulante generico</i>	20
<i>Rumore nella tecnica di modulazione SSB</i>	25
Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita	27
MODULAZIONE DI AMPIEZZA VSB	29
<i>Introduzione</i>	29
<i>Descrizione dei processi di modulazione/demodulazione</i>	29
MODULAZIONE AM-STANDARD	34
<i>Introduzione</i>	34
<i>Rumore nella tecnica AM-standard</i>	38
Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita	41
<i>Paradosso dell’allargamento della banda</i>	42

Modulazione di ampiezza con 2 portanti in quadratura

Introduzione

Riprendiamo lo schema generale di un sistema di trasmissione che utilizza la modulazione di ampiezza con la tecnica DSB-SC:

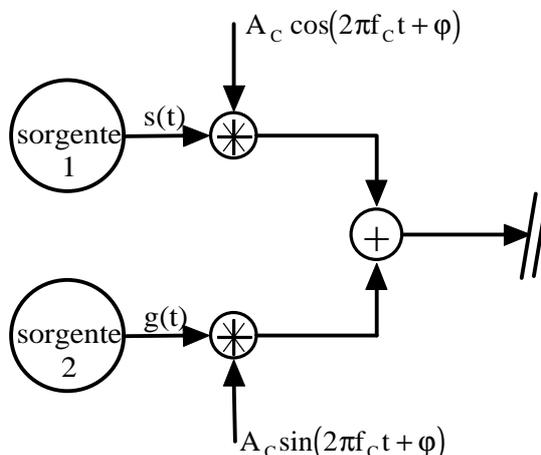


Abbiamo visto che, in sede di demodulazione, la ricostruzione del segnale di partenza $s(t)$, a partire dal segnale modulato $s_t(t) = s(t)c(t)$, è tanto più precisa quanto più è piccolo (al limite nullo) il valore dell'eventuale sfasamento ϕ tra la portante e l'oscillazione locale $m(t)$ prodotta nel demodulatore.

Un caso assolutamente particolare e dannoso è quello in cui lo sfasamento ϕ risulta essere pari ad un multiplo dispari di $\pi/2$: in questo caso, infatti, $\cos\phi=0$ e quindi non esiste alcun metodo che consenta di ricostruire il segnale di partenza.

Proprio questo fatto, cioè la possibilità di annullare il valore del segnale o di parte di esso, viene volutamente sfruttato in un'altra tecnica di modulazione di ampiezza, che prende il nome di **modulazione di ampiezza con 2 portanti in quadratura**: la caratteristica di questa tecnica è quella di consentire la trasmissione, mediante lo stesso mezzo trasmissivo e nella stessa banda, di due diversi segnali analogici, che poi possono essere nuovamente separati, in fase di demodulazione, perché arrivino ai rispettivi ricevitori.

Per comprendere bene come funziona questa tecnica, è conveniente rifarsi ai soliti schemi grafici; in particolare, riportiamo qui lo schema dell'apparato di modulazione:



Spieghiamo questo schema. Il nostro scopo è quello di trasmettere, mediante lo stesso mezzo trasmissivo, i due segnali analogici $s(t)$ e $g(t)$, occupando la stessa banda che sarebbe necessaria per trasmettere uno solo di essi. Per ottenere questo, per prima cosa moduliamo in ampiezza ciascuno di questi segnali mediante la tecnica DSB-SC, ossia moltiplichiamo ciascuno di essi per una opportuna portante. Qui subentra la particolarità di questa tecnica, in quanto, come si vede in figura, le due portanti sono identiche tranne per il fatto di essere sfasate di 90° (da cui il termine "quadratura").

I due segnali modulati sono dunque i seguenti:

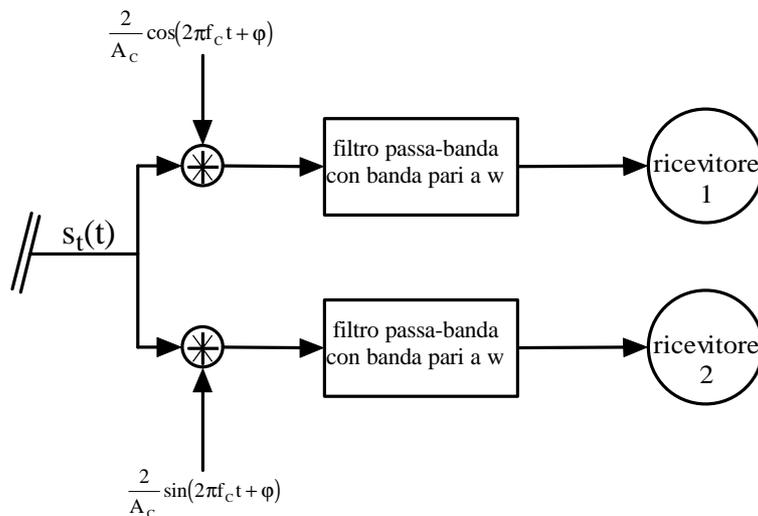
$$s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

$$g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Questi due segnali vengono successivamente sommati per ottenere l'unico segnale da trasmettere attraverso il canale: si tratta perciò del segnale

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Nell'ipotesi che il canale sia ideale, per cui non introduce sfasamenti o distorsioni su $s_t(t)$, possiamo dunque ritenere che $s_t(t)$ sia proprio il segnale che arriva in ingresso all'apparato di demodulazione, che possiamo schematizzare nel modo seguente:



Così come per l'apparato modulatore, anche l'apparato demodulatore consta di due rami, in ciascuno dei quali viene effettuata una demodulazione del segnale modulato $s_t(t)$ secondo sempre la tecnica DSB-SC; in particolare, il processo di demodulazione consiste nel moltiplicare il segnale ricevuto $s_t(t)$ per due oscillazioni locali distinte, una per ciascun ramo: nel ramo superiore, da cui si vuole estrarre $s(t)$, si utilizza l'oscillazione $\frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi)$, mentre nel ramo inferiore, da cui si vuole estrarre $g(t)$, si usa il segnale $\frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi)$. A valle delle due moltiplicazioni, infine, viene effettuato il classico filtraggio passa-banda.

Verifichiamo allora che, effettivamente, il ricevitore 1 riceva $s(t)$ e il ricevitore 2 riceva $g(t)$.

Abbiamo detto che il segnale che arriva in ingresso all'apparato demodulatore è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Questo segnale viene trasmesso ad entrambi i rami dell'apparato, nei quali viene moltiplicato nel modo appena descritto: quindi nel ramo superiore abbiamo

$$\begin{aligned} x_s(t) &= s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi) = \\ &= 2s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \cos(2\pi f_c t + \varphi) + 2g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \end{aligned}$$

mentre in quello inferiore abbiamo

$$\begin{aligned} x_g(t) &= s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi) = \\ &= 2s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi) + 2g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \end{aligned}$$

Applichiamo adesso a queste espressioni le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

Per il ramo 1 otteniamo

$$x_s(t) = 2s(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t + 2\varphi) \right] + 2g(t) \left[\frac{1}{2} \sin(4\pi f_c t + 2\varphi) + \frac{1}{2} \sin(0) \right]$$

mentre per il ramo 2 otteniamo

$$x_g(t) = 2s(t) \left[\frac{1}{2} \sin(2\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(0) \right] + 2g(t) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t + 2\varphi) \right]$$

Queste espressioni possono essere riscritte nel modo seguente:

$$x_s(t) = s(t) + s(t) \cos(4\pi f_c t + 2\varphi) + g(t) \sin(4\pi f_c t + 2\varphi)$$

$$x_g(t) = s(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) + g(t) - g(t) \cos(4\pi f_c t + 2\varphi)$$

Gli spettri di questi due segnali sono i seguenti:

$$X_s(f) = S(f) + S(f) * \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + G(f) \left[\frac{1}{2j} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right]$$

$$X_g(f) = S(f) \left[\frac{1}{2j} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + G(f) - G(f) \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right]$$

ossia sono

$$X_s(f) = S(f) + \frac{1}{2} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) + \frac{1}{2j} e^{j\varphi} G(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} G(f + 2f_c)$$

$$X_g(f) = \frac{1}{2j} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) + G(f) - \frac{1}{2} e^{j\varphi} G(f - 2f_c) - \frac{1}{2} e^{-j\varphi} G(f + 2f_c)$$

Il primo spettro consta di una replica centrale perfetta di $S(f)$ e di altre 4 componenti (due repliche di $S(f)$ e altrettante di $G(f)$), traslate sulle frequenze $-2f_c$ e $+2f_c$: si capisce, quindi, come il filtraggio di $X_s(f)$ dia esattamente $S(f)$, ossia consenta la ricostruzione di $s(t)$.

In modo del tutto analogo, il secondo spettro consta di una replica centrale perfetta di $G(f)$ e di altre 4 componenti (due repliche di $S(f)$ e altrettante di $G(f)$), traslate sulle frequenze $-2f_c$ e $+2f_c$: si capisce, quindi, come anche in questo caso il filtraggio di $X_g(f)$ dia esattamente $G(f)$, ossia consenta la ricostruzione di $g(t)$.

Presenza di sfasamenti

Nell'illustrare in precedenza la tecnica di modulazione AM in DSB-SC, abbiamo mostrato come la presenza di eventuali sfasamenti tra portante e oscillazione locale possa compromettere la fedeltà del segnale finale ricostruito rispetto al segnale di partenza. Dato che la tecnica delle due portanti in quadratura si basa proprio sulla tecnica DSB-SC, è intuitivo comprendere come tali sfasamenti possano essere dannosi anche in questo caso. Vediamo allora anche qui di esaminare la questione da un punto di vista analitico.

Concentriamoci per comodità solo sul ramo inferiore del demodulatore, in quanto il discorso sull'altro ramo è identico.

Abbiamo detto che il segnale che arriva a tale ramo è

$$s_i(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Nel caso ideale, questo segnale viene moltiplicato per il segnale $\frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi)$ avente la stessa fase e la stessa frequenza delle due portanti usate in trasmissione. Supponiamo invece adesso che questo segnale presenti uno sfasamento: ad esempio, supponiamo che esso sia $\frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_1)$.

L'esito della moltiplicazione è dunque

$$x_g(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) =$$

$$= 2s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) + 2g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi_1)$$

Applicando le solite formule trigonometriche

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

abbiamo che

$$x_g(t) = s(t) [\sin(4\pi f_c t + \varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi_1 - \varphi)] + g(t) [\cos(\varphi_1 - \varphi) - \cos(4\pi f_c t + \varphi + \varphi_1)]$$

Se adesso effettuiamo il filtraggio di questo segnale attraverso il filtro considerato prima, è facile verificare che non otteniamo più il segnale $g(t)$ come nel caso precedente, bensì otteniamo il segnale

$$g_u(t) = s(t) \sin(\varphi_1 - \varphi) + g(t) \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

Sono allora evidenti i problemi che si sono creati:

- in primo luogo, il segnale $s(t)$ non è affatto scomparso, ma risulta ancora sovrapposto a $g(t)$, per cui è impossibile la ricostruzione perfetta di quest'ultimo: abbiamo cioè ottenuto una interferenza tra i due segnali trasmessi;
- in secondo luogo, sono presenti i due fattori moltiplicativi $\sin(\varphi_1 - \varphi)$ e $\cos(\varphi_1 - \varphi)$ i quali compromettono la fedeltà della ricostruzione quando il valore di $(\varphi_1 - \varphi)$ è notevole.

E' ovvio che ogni problema scompare quando $\varphi_1 = \varphi$: in questo caso, infatti, si ha che

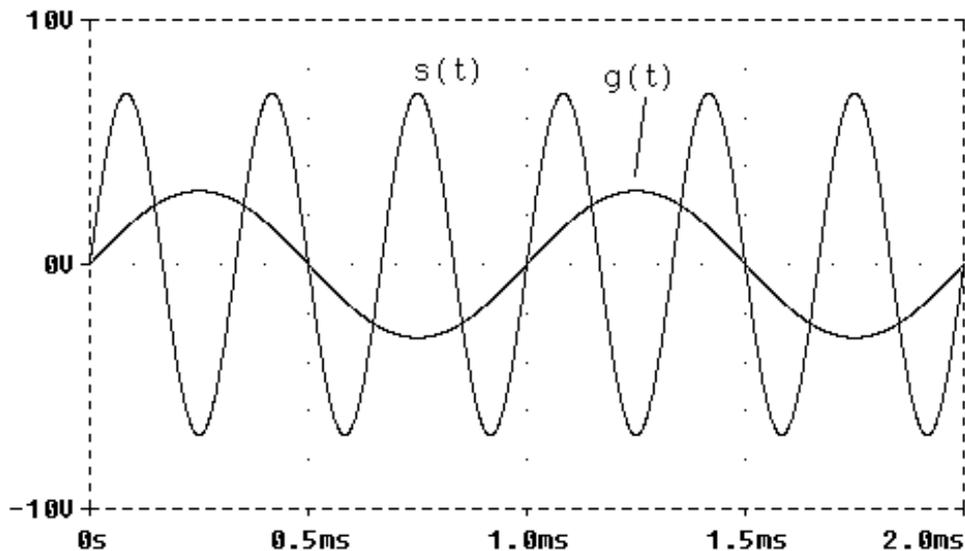
$$g_u(t) = s(t) \sin(0) + g(t) \cos(0) = g(t)$$

La conclusione che possiamo trarre è la seguente: *sia la tecnica DSB-SC sia la tecnica delle due portanti in quadratura presentano una certa sensibilità agli eventuali sfasamenti (o alle eventuali variazioni di frequenza) introdotti dalla trasmissione e dai dispositivi di rice-trasmissione; tuttavia, mentre la tecnica DSB-SC presenta una sensibilità tutto sommato piccola a tali sfasamenti se essi stessi sono piccoli, la tecnica delle due portanti in quadratura presenta senz'altro una sensibilità maggiore; allo stesso tempo, essa ha il vantaggio di consentire la trasmissione di due diversi segnali mediante l'occupazione della stessa banda sullo stesso mezzo trasmissivo.*

Analisi nel dominio del tempo

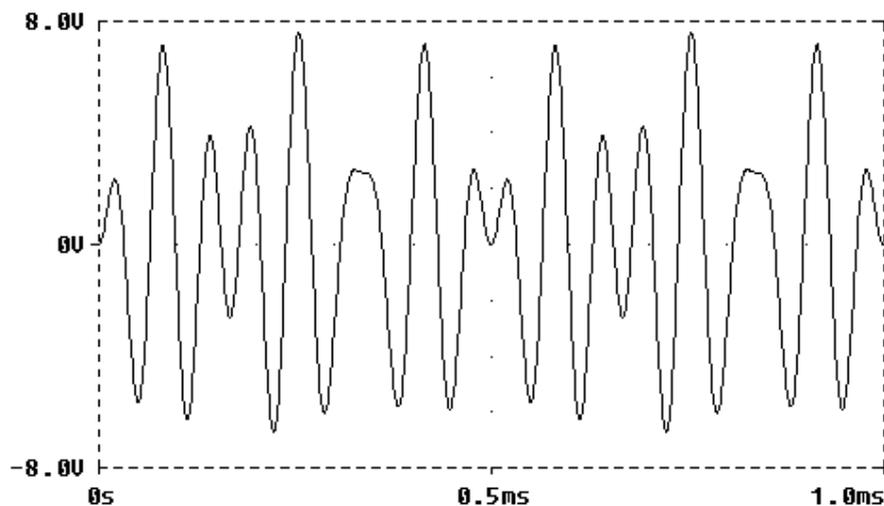
Così come abbiamo fatto nel caso della modulazione DSB-SC, esaminiamo anche per la modulazione con due portanti in quadratura l'andamento temporale dei segnali coinvolti.

Cominciamo con la scelta dei due segnali analogici $s(t)$ e $g(t)$ da trasmettere: supponiamo che $s(t)$ (ramo superiore) sia una sinusoide di ampiezza 7V e frequenza 3 kHz, mentre $g(t)$ (ramo inferiore) sia una sinusoide di ampiezza 3V e frequenza 1 kHz. I rispettivi andamenti temporali sono di seguito riportati:



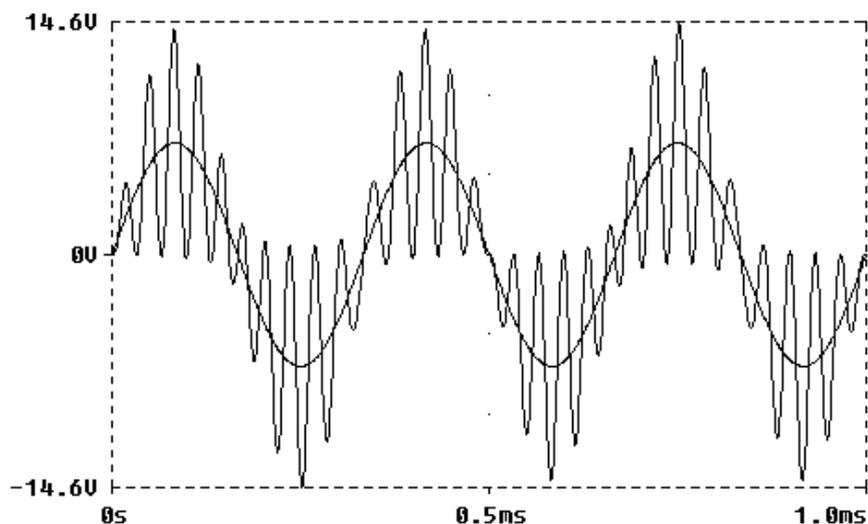
Per quanto riguarda le portanti, scegliamo per $s(t)$ una sinusoide $c_1(t)$ di ampiezza unitaria e frequenza 15 kHz, per cui la portante $c_2(t)$ per $g(t)$ sarà identica, ma con un anticipo di fase di 90° (in modo da essere in quadratura con c_1).

Nella figura seguente è indicato l'andamento del segnale modulato $s_t(t)$ inviato al canale dopo la modulazione:



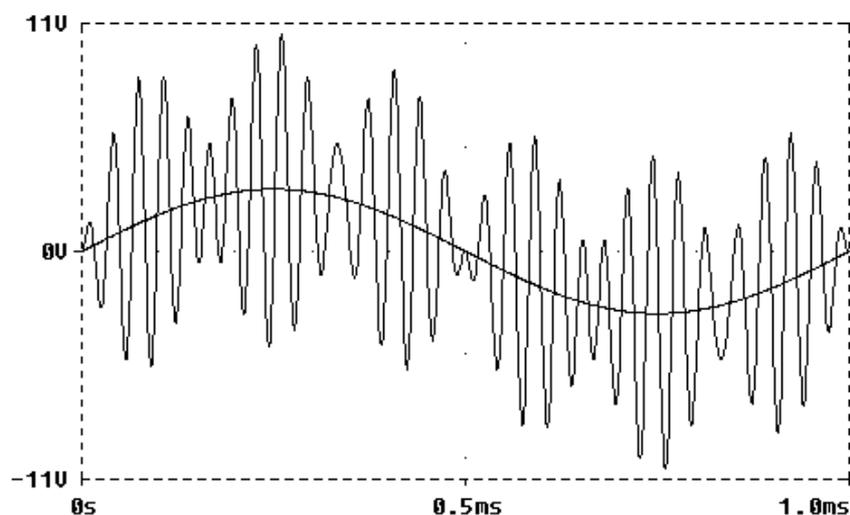
Nell'ipotesi di canale ideale, $s_t(t)$ è il segnale che giunge in ingresso al demodulatore, nel quale il segnale segue due percorsi diversi:

- nel ramo superiore, $s_t(t)$ viene moltiplicato per una sinusoide $m_1(t)$ coincidente con la portante $c_1(t)$, ma di ampiezza doppia; il risultato della moltiplicazione è un segnale $x_1(t)$ avente il seguente andamento temporale:



Come evidenziato il figura, si osserva che la media temporale di questo segnale coincide proprio con $s(t)$;

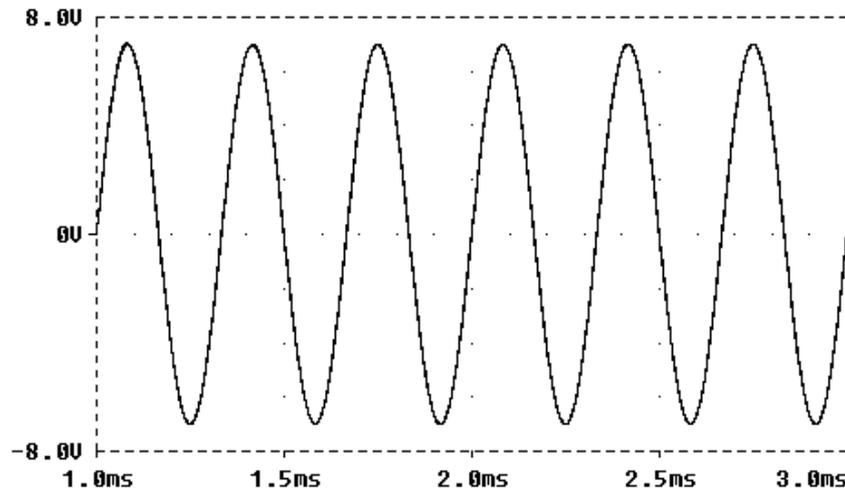
- nel ramo inferiore, invece, $s_t(t)$ viene moltiplicato per una sinusoide $m_2(t)$ coincidente con la portante $c_2(t)$, ma di ampiezza doppia; il risultato della moltiplicazione è un segnale $x_2(t)$ avente il seguente andamento temporale:



Anche in questo caso, la figura evidenzia che la media temporale di questo segnale coincide con $g(t)$.

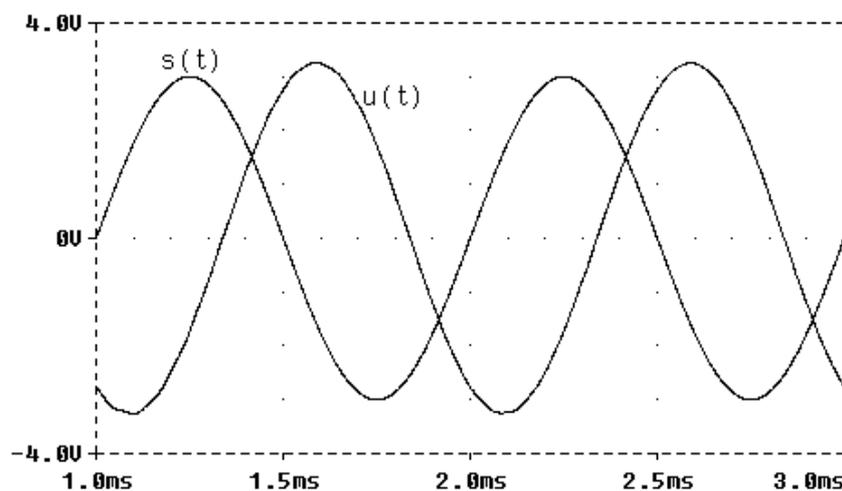
Effettuando quindi i due successivi filtraggi, si ottengono nuovamente i segnali $s(t)$ e $g(t)$ originariamente trasmessi:

- l'uscita del ramo inferiore risulta avere il seguente andamento temporale:



In questa figura sono stati sovrapposti il segnale in uscita dal ramo inferiore ed il segnale modulante $g(t)$, da cui si deduce la perfetta ricostruzione;

- l'uscita del ramo superiore risulta essere invece la seguente:



Anche in questo caso, a parte uno sfasamento tra i due segnali e una leggera amplificazione dell'uscita, si osserva l'ottima ricostruzione.

Osservazione: banda del segnale modulato

Abbiamo detto che il grosso vantaggio della tecnica delle due portanti in quadratura è quello di consentire la trasmissione di due diversi segnali mediante lo stesso mezzo trasmissivo. Ora, è chiaro che questo fatto costituisce un vantaggio solo nel caso in cui l'intervallo di frequenze da trasmettere è lo stesso sia che si trasmettano i due segnali separatamente sia che li si trasmetta contemporaneamente.

Per capirci meglio, siano $[-w_G, +w_G]$ e $[-w_S, +w_S]$ gli intervalli di banda entro i quali sono definiti i due segnali $g(t)$ e $s(t)$. Supponiamo anche che $w_G > w_S$, ossia che la banda di $g(t)$ sia più estesa della banda di $s(t)$. Allora, *la convenienza di trasmettere "insieme" i due segnali subentra solo se la banda del segnale trasmesso*

non è superiore a quella di cui avremmo bisogno per trasmettere separatamente i due segnali; viceversa, se la banda di tale segnale complessivo dovesse risultare più estesa, allora la convenienza potrebbe venire meno, in quanto sarebbe necessario migliorare le prestazioni del mezzo trasmissivo.

Facciamo allora vedere che, effettivamente, nella tecnica delle due portanti in quadratura, la banda del segnale da trasmettere è proprio quella necessaria alla trasmissione del segnale a banda maggiore.

Abbiamo detto che il segnale da trasmettere è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Per trovare la sua banda, dobbiamo trasformare secondo Fourier:

$$\begin{aligned} S_t(f) &= A_c S(f) \text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t + \varphi)] + A_c G(f) * \text{Fourier}[\sin(2\pi f_c t + \varphi)] = \\ &= A_c S(f) * \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + A_c G(f) * \left[\frac{1}{2j} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] = \\ &= A_c \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) \right] + A_c \left[\frac{1}{2j} e^{j\varphi} G(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} G(f + 2f_c) \right] \end{aligned}$$

Da questa relazione si nota come lo spettro $S_t(f)$ sia formato da 4 componenti: ci sono due repliche traslate (e scalate) di $G(f)$ e due repliche traslate (e scalate) di $S(f)$; in particolare, per ciascuna coppia di repliche, una replica è centrata in $-2f_c$, l'altra in $+2f_c$. E' evidente perciò che l'intervallo di frequenza su cui è definito $s_t(t)$ è $[-2f_c - w_G, +2f_c + w_G]$.

Adesso, andando a riguardare quanto detto a proposito della tecnica DSB-SC, si nota come questa sia esattamente la banda da trasmettere quando il segnale interessato è $g(t)$, ossia appunto il segnale a banda maggiore.

Modulazione di ampiezza SSB

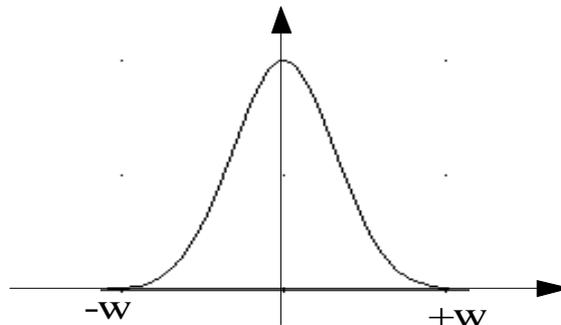
Introduzione

L'acronimo **SSB** sta per **Single Side Band**, ossia “*Singola Banda Laterale*”. Questa tecnica di modulazione di ampiezza sfrutta una importante proprietà della trasformata di Fourier, secondo la quale, se il segnale $s(t)$ è un segnale reale, il suo spettro $S(f)$ gode della *simmetria hermitiana*, ossia è tale che

$$S(-f) = S^*(f)$$

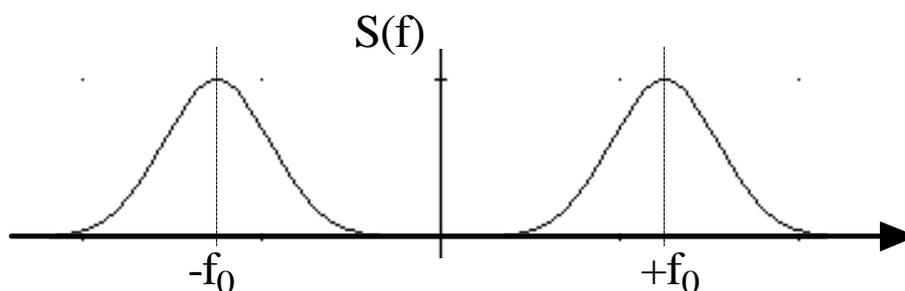
Detta in termini concreti, questa proprietà di simmetria dice che la parte dello spettro su frequenze positive è perfettamente simmetrica rispetto alla parte su frequenze negative.

Un tipico esempio di spettro che gode della simmetria hermitiana è il seguente:



Solitamente, prende il nome **banda laterale inferiore** (brevemente **BLI**) la *parte negativa* dello spettro, mentre quella *positiva* prende il nome di **banda laterale superiore** (brevemente **BLS**).

Se il segnale considerato, anziché essere passa-basso come quello appena disegnato, è un passa-banda, la condizione di simmetria da considerare è quella per cui lo spettro presenta due parti simmetriche rispetto ad una determinata frequenza centrale f_0 :

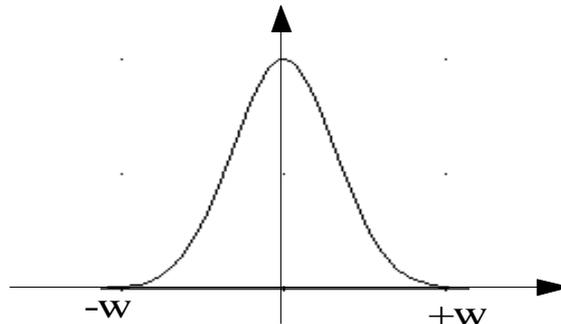


E' evidente che, essendo simmetriche le due bande, possiamo trasmetterne una sola, ricostruendo poi l'altra solo in fase di ricezione, ottenendo chiaramente un notevole risparmio in banda (dove per “*risparmio in banda*” intendiamo la trasmissione di un numero di componenti di frequenza inferiore a quelle effettivamente presentate dal segnale considerato).

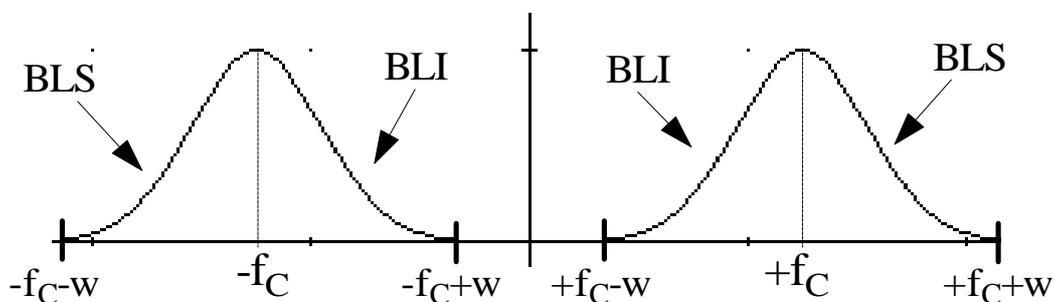
Proprio su questo concetto, ossia sulla trasmissione della sola banda laterale superiore o della sola banda laterale inferiore, si basa la tecnica di modulazione SSB. In particolare, la modulazione SSB si basa su due passaggi fondamentali:

- il primo consiste nella modulazione secondo la tecnica DSB-SC descritta in precedenza;
- il secondo consiste in un opportuno filtraggio del segnale modulato.

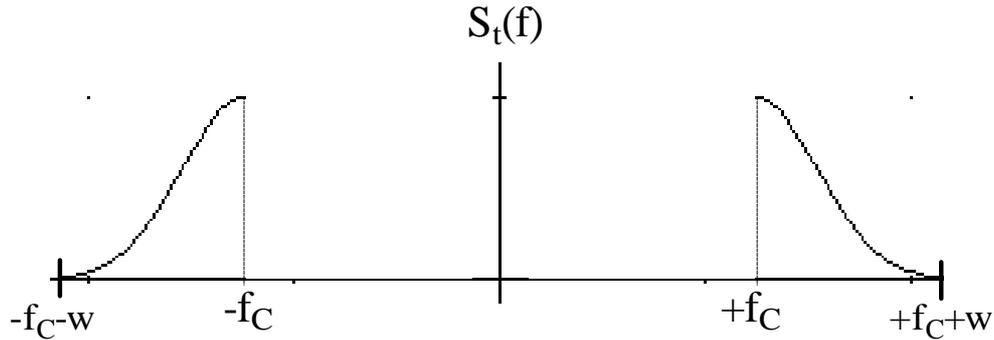
Supponiamo ad esempio di voler trasmettere il segnale avente il seguente spettro:



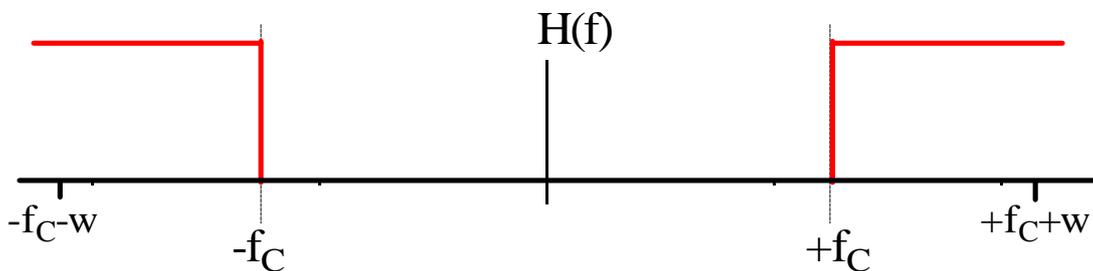
In accordo a quanto detto poco fa, la prima cosa da fare è effettuare la modulazione secondo la classica tecnica DSB-SC: come sappiamo, questo significa che il segnale modulato è $s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \phi)$ e tale segnale risulta avere uno spettro del tipo seguente (in modulo):



A questo punto, è chiaro che possiamo trasmettere solo le due bande laterali superiori oppure solo quelle inferiori; ad esempio, supponiamo di voler trasmettere quelle superiori: per fare questo, come detto poco fa, dobbiamo filtrare, in modo opportuno, il segnale prima di trasmetterlo, ossia dobbiamo azzerare le componenti che non intendiamo inviare sul canale di trasmissione. Il filtraggio dovrà dunque fornire il seguente spettro:



Il segnale $s_t(t)$ avente questo spettro è quello che effettivamente inviamo al canale di trasmissione. Per ottenere questo spettro, a partire da quello originale, avremmo bisogno dunque del seguente filtro:

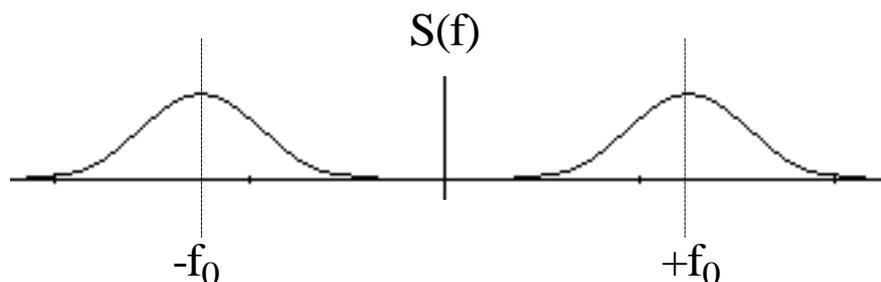


Sappiamo però bene che questo filtro è assolutamente ideale, nel senso che non potremo mai realizzarlo nella pratica, in quanto non è possibile effettuare una transizione così netta tra la banda passante ($f \geq f_c$) e la banda arrestata ($f < f_c$). Al contrario, quello che possiamo ottenere è un filtro in cui la transizione dal valore nullo al valore non nullo avviene sì rapidamente, ma non certo bruscamente, in un intorno più o meno esteso delle due frequenze $-f_c$ e $+f_c$.

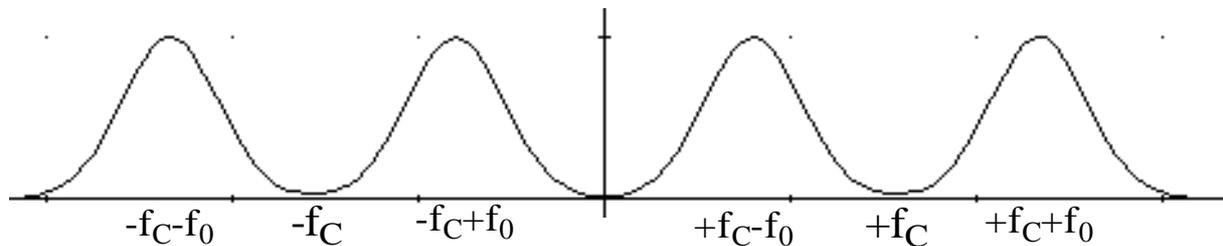
Questo limite fisico impone subito una considerazione: il risultato del filtraggio non include solo le due BLS, bensì include anche una sia pure minima parte delle due BLI. In fase di demodulazione, quindi, avremo necessariamente una certa imprecisione.

Questo è il motivo principale per il quale la tecnica SSB viene usata solo in alcuni casi particolari: la particolarità deriva dal fatto che *lo spettro del segnale da trasmettere deve presentare una minima quantità di energia in corrispondenza del valore nullo di frequenza*. E' cioè necessario che lo spettro di tale segnale valga zero o quasi zero in prossimità di $f=0$, in quanto, in questo caso, l'imperfezione del filtro non comporta alcuna imprecisione.

Per esempio, un segnale che sicuramente potrà essere trasmesso con questa tecnica di modulazione è quello avente uno spettro del tipo seguente:



In questo caso, infatti, lo spettro del segnale modulato in DSB-SC è del tipo seguente:



ed è evidente, quindi, che, nel filtrare le due BLI (oppure le due BLS), si riesce effettivamente ad eliminarle interamente.

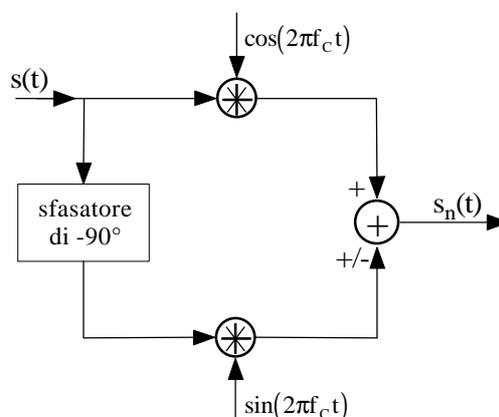
Uso di un "singolo tono modulante"

Fino ad ora abbiamo dunque esposto, in linea solo teorica, quali sono i principi che stanno alla base della modulazione di ampiezza secondo la tecnica SSB. Vogliamo ora vedere, dal punto di vista analitico, come si effettua la modulazione SSB, ossia, in definitiva, come è possibile isolare, dato il segnale di partenza $s(t)$, la sua BLI o la sua BLS, e come è poi possibile effettuare la demodulazione, ossia la ricostruzione di $s(t)$.

Ci mettiamo, per comodità di ragionamento, nel caso particolare in cui il segnale modulante sia $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (si parla di **singolo tono modulante**). Lo spettro di questo segnale consta semplicemente di due impulsi posizionati simmetricamente in $+f_0$ e $-f_0$, per cui tale segnale risponde perfettamente ai requisiti necessari per la modulazione SSB.

Modulazione

L'apparato di modulazione è fatto nel modo seguente:



Vediamo quali operazioni vengono compiute sul segnale di partenza $s(t)$ al fine di produrre il segnale modulato $s_n(t)$ che viene inviato sul canale:

- una volta entrato nell'apparato di modulazione, il segnale $s(t)$ viene trasmesso su due distinti rami;
 - nel primo ramo esso viene semplicemente moltiplicato per la portante $\cos(2\pi f_c t)$, per cui subisce la classica modulazione di ampiezza DSB-SC;
 - nel secondo ramo, esso subisce prima uno sfasamento di $-\pi/2$ e poi viene moltiplicato per un altro segnale portante $\sin(2\pi f_c t)$, in quadratura con quello usato nell'altro ramo;
- infine, ciò che viene fuori dai due rami viene sommato (oppure sottratto a seconda che si voglia trasmettere la BLS o la BLI) e quindi inviato al canale.

In definitiva, quindi, il segnale modulato ha la seguente espressione nel dominio del tempo:

$$s_n(t) = \underbrace{\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_c t)}_{\substack{\text{prodotto del ramo superiore} \\ \text{(DSB-SC)}}} \pm \underbrace{\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo inferiore}}$$

Vogliamo far vedere che, effettivamente, lo spettro di questo segnale corrisponde allo spettro del segnale $s(t)$, modulato in DSB-SC, privato però della BLS o della BLI; in altre parole, vogliamo dimostrare che quell'apparato effettua la modulazione SSB così come è stata descritta prima.

In primo luogo, l'espressione di $s_n(t)$ può anche essere modificata: sappiamo infatti dalla trigonometria che

$$\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi f_0 t)$$

per cui possiamo riscrivere il segnale modulato nella forma

$$s_n(t) = \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_c t) \pm \sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_c t)$$

Adesso, ricordando la formula di duplicazione del coseno, possiamo anche scrivere che

$$s_n(t) = \cos(2\pi(f_0 \mp f_c)t)$$

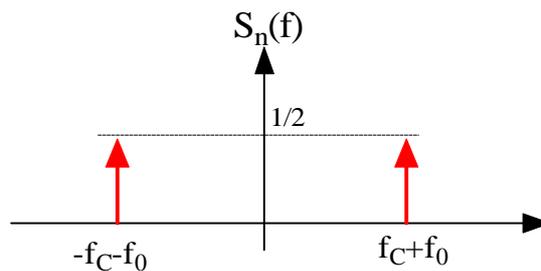
Per proseguire nei calcoli, supponiamo che il prodotto del ramo inferiore e quello del ramo superiore vengano sottratti, il che equivale a prendere, in quest'ultima formula, il segno "+": quindi il segnale modulato che noi consideriamo è

$$s_n(t) = \cos(2\pi(f_0 + f_c)t)$$

Lo spettro di questo segnale è evidentemente

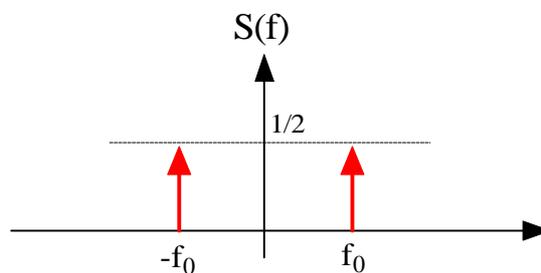
$$S_n(f) = \frac{1}{2}\delta(f - (f_0 + f_c)) + \frac{1}{2}\delta(f + (f_0 + f_c))$$

ed ha la seguente rappresentazione grafica:



Verifichiamo allora effettivamente che questo sia $s(t)$ modulato in SSB, ossia che quei due impulsi corrispondano alla BLI o alla BLS del segnale $s(t)$ modulato in DSB-SC.

Il segnale modulante era $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, per cui il suo spettro è il seguente:



Di questo segnale effettuiamo una modulazione in DSB-SC, il che equivale a moltiplicarlo per la portante $\cos(2\pi f_c t)$; ciò che otteniamo è il segnale

$$s_t(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t)$$

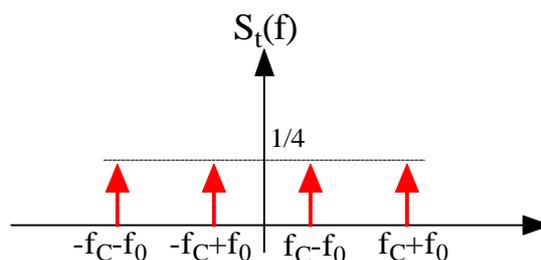
Questo segnale, usando le apposite formule trigonometriche, può essere riscritto nella forma

$$s_t(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_0 + f_c)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_0 - f_c)t)$$

Il suo spettro è il seguente:

$$S_t(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(f - (f_0 + f_c)) + \frac{1}{2} \delta(f + (f_0 + f_c)) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(f - (f_0 - f_c)) + \frac{1}{2} \delta(f + (f_0 - f_c)) \right]$$

La sua rappresentazione grafica è la seguente:



Confrontando $S_t(f)$ con $S_n(f)$, si osserva immediatamente che $S_n(f)$ presenta solo le due BLS di $S_t(f)$, mentre non presenta le due BLI.

Abbiamo dunque raggiunto due conclusioni fondamentali:

- la prima è che, effettivamente, l'apparato modulatore prima disegnato effettua la modulazione SSB;
- la seconda è che, in quell'apparato, sottraendo i prodotti del ramo superiore e di quello inferiore, si ottengono le due BLS di $s(t)$, mentre, sommando tali prodotti, si ottengono le due BLI.

Demodulazione

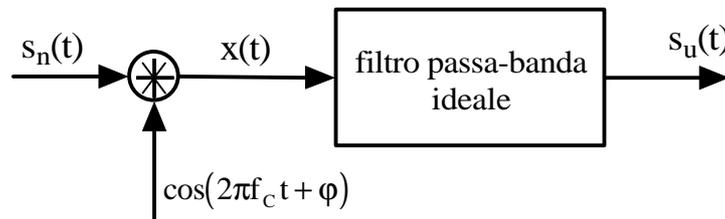
Abbiamo dunque appurato che il segnale modulato in SSB, ossia il segnale che viene inviato al canale per la trasmissione, ha la seguente espressione:

$$s_n(t) = \underbrace{\cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo superiore}} \pm \underbrace{\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \sin(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo inferiore}} = \cos(2\pi(f_0 \mp f_c)t)$$

dove il segno “-” va preso quando si intende inviare le due BLS ed il segno “+” quando si intende inviare le due BLI.

Nell'ipotesi di idealità del canale, $s_n(t)$ è anche il segnale che giunge all'apparato demodulatore. Quest'ultimo ha il compito di ricostruire $s(t)$. Vediamo allora, sempre dal punto di vista matematico, come si comporta.

Lo schema generale dell'apparato demodulatore in SSB è quello classico del demodulatore coerente:



La prima operazione compiuta dal demodulatore è il prodotto del segnale modulato per il segnale $\cos(2\pi f_c t + \phi)$: l'esito del prodotto è il nuovo segnale

$$x(t) = s_n(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) = \cos(2\pi(f_0 \mp f_c)t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

Consideriamo ancora una volta il segno “+”: quindi

$$x(t) = \cos(2\pi(f_0 + f_c)t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

Usando le opportune formule trigonometriche, $x(t)$ può essere riscritto nella forma

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_0 + 2f_c)t + \phi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t - \phi)$$

Ricordando adesso che

$$\text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t + \varphi)] = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_c)$$

si deduce che questo segnale ha uno spettro composto da ben 4 impulsi, applicati nelle frequenze

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + 2f_c \\ f_2 &= -f_0 - 2f_c \\ f_3 &= f_0 \\ f_4 &= -f_0 \end{aligned}$$

Questo spettro entra in ingresso ad un filtro passa-banda avente banda pari proprio a quella del segnale modulante, ossia f_0 . Ciò significa che i due impulsi centrati in $f_0 + 2f_c$ ed in $-f_0 - 2f_c$ vengono filtrati, per cui, nel dominio del tempo, abbiamo in uscita dal filtro il segnale

$$s_u(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t - \varphi)$$

Questo segnale, a meno del termine $\frac{1}{2}$ (che può essere eliminato usando un filtro di altezza 2), corrisponde esattamente al segnale $s(t)$ quando $\varphi=0$; quando invece $\varphi \neq 0$, esso corrisponde a $s(t)$ semplicemente sfasato.

Analisi nel dominio del tempo

Dopo la descrizione teorica della modulazione/demodulazione di un segnale sinusoidale con la tecnica SSB, passiamo all'analisi degli andamenti temporali dei segnali descritti.

Come tono modulante consideriamo una tensione sinusoidale da 3V a frequenza 1 kHz. Come portanti in quadratura, consideriamo un Coseno da 1V ed a 15 kHz ed un Seno sempre da 1V ed a 15 kHz:

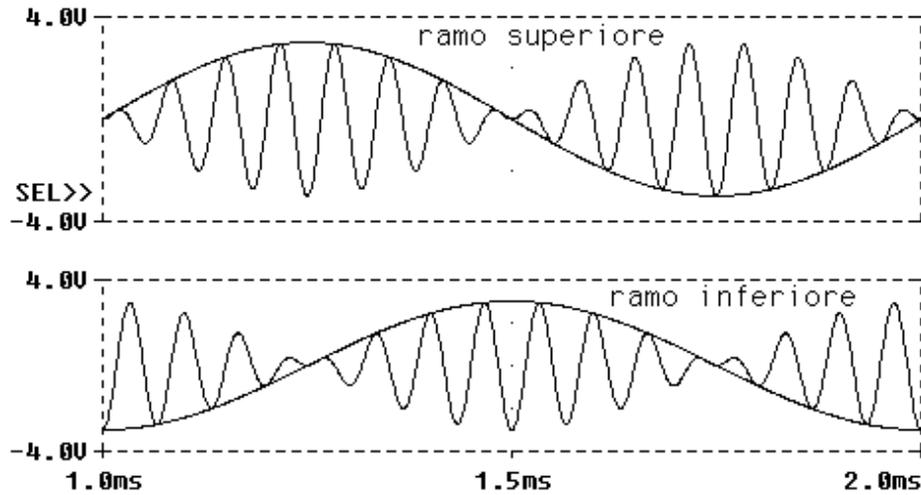
$$\text{segnale modulante} \longrightarrow s(t) = 3 \cos(2\pi(10^3)t)$$

$$\text{portanti} \longrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) \\ \sin(2\pi(15 \cdot 10^3)t) \end{cases}$$

I due segnali modulati sul ramo superiore e sul ramo inferiore risultano avere le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \text{ramo superiore} &\longrightarrow 3 \cos(2\pi(10^3)t) \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) \\ \text{ramo inferiore} &\longrightarrow 3 \sin(2\pi(10^3)t) \sin(2\pi(15 \cdot 10^3)t) \end{aligned}$$

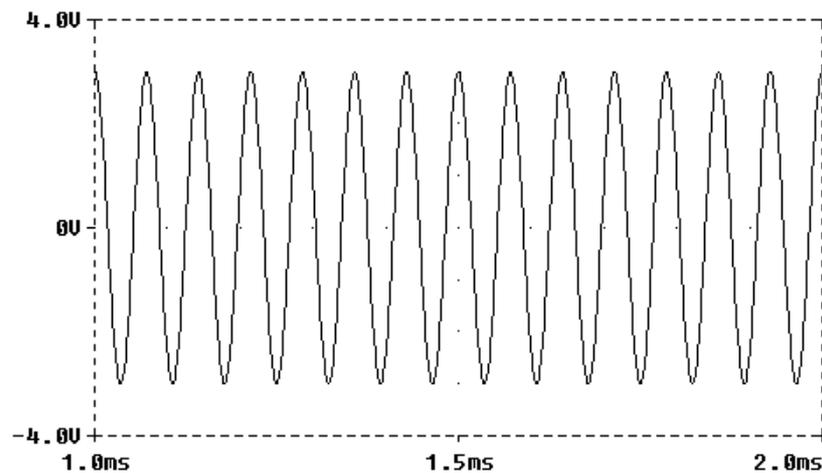
L'andamento temporale di questi due segnali risulta essere il seguente:



Supponiamo adesso di sottrarre questi due segnali, in modo da ottenere il segnale da trasmettere effettivamente sul canale:

$$s_n(t) = 3 \cos(2\pi(10^3)t) \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) - 3 \sin(2\pi(10^3)t) \sin(2\pi(15 \cdot 10^3)t) = \\ = 3[\cos(2\pi(15 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3)t)] = 3 \cos(2\pi(16 \cdot 10^3)t)$$

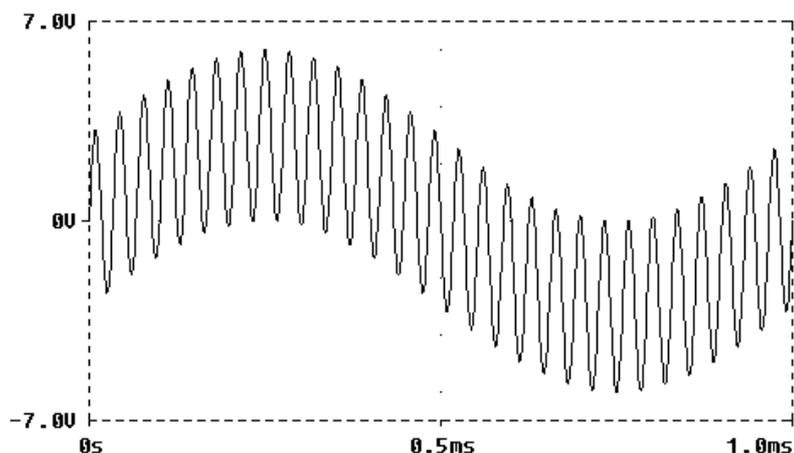
Si ottiene dunque una sinusoide a 16 kHz, di ampiezza 3V pari a quella del segnale modulante, come confermato dall'andamento temporale ottenuto dalle simulazioni:



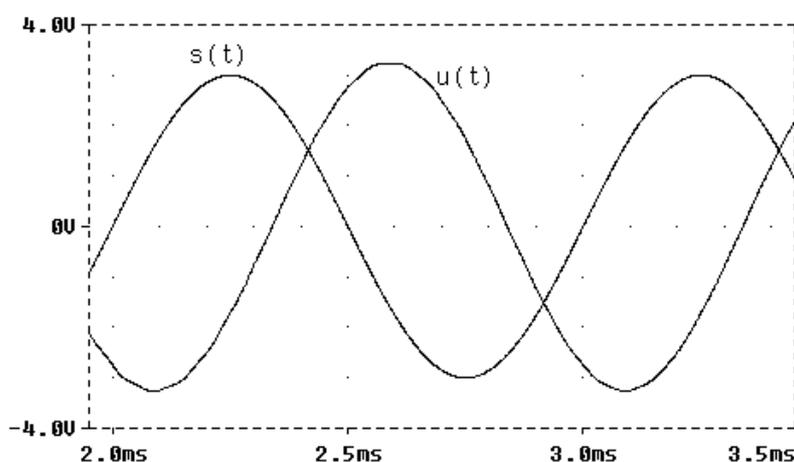
Questo segnale arriva dunque così com'è (nell'ipotesi di canale di trasmissione ideale) al demodulatore, che effettua una semplice demodulazione in DSB-SC: per prima cosa, c'è la moltiplicazione per $2 \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t)$, per cui si ottiene il segnale

$$s_n(t) = 3 \cos(2\pi(16 \cdot 10^3)t) \cdot 2 \cos(2\pi(15 \cdot 10^3)t) = 3[\cos(2\pi(31 \cdot 10^3)t) + \cos(2\pi(10^3)t)]$$

L'uscita è dunque la somma di due termini, che sono il segnale modulante ed una armonica a frequenza 31 kHz:



Il successivo filtraggio porta quindi alla eliminazione dell'armonica a 31 kHz, fornendo in uscita il seguente segnale:



Lo sfasamento e la leggera amplificazione dell'uscita rispetto all'ingresso sono dovute alle caratteristiche del filtro usato per la simulazione. A prescindere da queste differenze, si osserva quanto fedele sia la ricostruzione del segnale modulante.

Modulazione e demodulazione per un segnale modulante generico

Abbiamo dunque descritto ampiamente cosa succede, nella modulazione SSB, quando il segnale modulante è puramente sinusoidale: questo ha semplificato molto le cose in quanto lo spettro di un segnale siffatto consta semplicemente di due impulsi. Vediamo invece cosa accade per un segnale $s(t)$ generico, dallo spettro quindi altrettanto generico (sempre, però, dotato della simmetria hermitiana).

Sia $s(t)$ il segnale modulante. Il primo passo della tecnica SSB consiste nell'effettuare una modulazione DSB-SC di $s(t)$, per cui il segnale modulato è

$$s_1(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$$

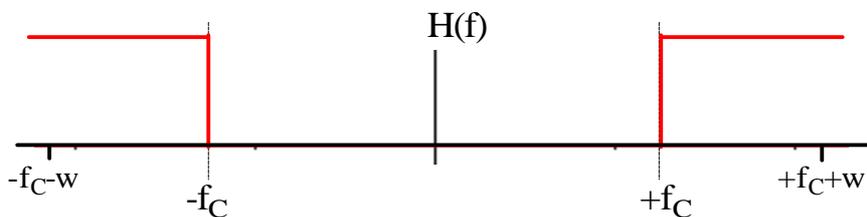
il cui spettro ha espressione analitica

$$S_i(f) = \frac{1}{2}S(f - f_c) + \frac{1}{2}S(f + f_c)$$

Questo spettro consta evidentemente di due repliche (a meno del fattore 1/2) del segnale di partenza, posizionate sulle frequenze f_c e $-f_c$.

Da questo spettro è necessario filtrare le due BLS o le due BLI e lo si può fare utilizzando un opportuno filtro: sarà un *filtro passa-alto* se decidiamo di filtrare le due BLI e di trasmettere le due BLS oppure, viceversa, sarà un *filtro passa-basso* se trasmettiamo le due BLI e filtriemo le due BLS.

Ad esempio, se decidiamo di trasmettere le due BLS, il filtro avrà una funzione di trasferimento $H(f)$ (ideale) del tipo seguente:



Questa $H(f)$, del tutto ideale in base a quanto già osservato in precedenza, è semplicemente composta da due gradini, per cui la possiamo esprimere come

$$H(f) = u(f - f_c) + u(-f + f_c)$$

All'uscita dal filtro, quindi, avremo, nel dominio della frequenza, il segnale

$$S_n(f) = S_i(f)H(f) = \left[\frac{1}{2}S(f - f_c) + \frac{1}{2}S(f + f_c) \right] \left[u(f - f_c) + u(-f + f_c) \right] =$$

$$\left[\frac{1}{2}S(f - f_c)u(f - f_c) + \frac{1}{2}S(f + f_c)u(f - f_c) \right] + \left[\frac{1}{2}S(f - f_c)u(-f + f_c) + \frac{1}{2}S(f + f_c)u(-f + f_c) \right]$$

Questo spettro consta di 4 componenti, ma è facile verificare che, in effetti, due di esse vengono azzerate:

- la prima componente (a meno del termine 1/2) è $S(f - f_c)u(f - f_c)$ e corrisponde ad $S(f)$ posizionata su f_c e moltiplicata per un gradino che azzerava tutto prima di f_c : si tratta dunque di $S(f - f_c)$ privata della BLI;
- la seconda componente è $S(f + f_c)u(f - f_c)$: essa corrisponde al prodotto di $S(f)$ posizionata su $-f_c$ per un gradino che azzerava tutto prima di f_c , per cui questa componente, di fatto, è nulla;
- la terza componente è $S(f - f_c)u(-f + f_c)$: essa corrisponde al prodotto di $S(f)$ posizionata in f_c per un gradino che azzerava tutto oltre $-f_c$, per cui anche questa componente è nulla;

- l'ultima componente è $S(f+f_c)u(-f+f_c)$ e corrisponde ad $S(f)$ posizionata su $-f_c$ e moltiplicata per un gradino che azzerava tutto oltre $-f_c$: si tratta dunque di $S(f+f_c)$ privata della BLI.

Il segnale che viene fuori dal filtro è dunque il seguente:

$$S_n(f) = \frac{1}{2}S(f-f_c)u(f-f_c) + \frac{1}{2}S(f+f_c)u(-f+f_c)$$

Usando la nota proprietà dell'impulso di Dirac secondo cui la convoluzione di una funzione per l'impulso è pari alla funzione stessa calcolata nel punto di applicazione dell'impulso, possiamo riscrivere $S_n(f)$ nel modo seguente:

$$S_n(f) = \frac{1}{2}[S(f)u(f)] * \delta(f-f_c) + \frac{1}{2}[S(f)u(-f)] * \delta(f+f_c)$$

Adesso passiamo dal dominio della frequenza al dominio del tempo: ricordando che il prodotto nel dominio della frequenza corrisponde alla convoluzione nel dominio del tempo ed anche che la convoluzione nel dominio della frequenza corrisponde al prodotto nel dominio del tempo, possiamo scrivere che

$$s_n(t) = \frac{1}{2}[s(t) * \text{Fourier}^{-1}[u(f)]]\text{Fourier}^{-1}[\delta(f-f_c)] + \frac{1}{2}[s(t) * \text{Fourier}^{-1}[u(-f)]]\text{Fourier}^{-1}[\delta(f+f_c)]$$

Adesso utilizziamo le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(t)}{2} - \frac{j}{2\pi t} &\longleftrightarrow u(f) \\ \frac{\delta(t)}{2} + \frac{j}{2\pi t} &\longleftrightarrow u(-f) \\ e^{j2\pi f_c t} &\longleftrightarrow \delta(f-f_c) \end{aligned}$$

Usando queste proprietà, possiamo riscrivere $s_n(t)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{2}\left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2} - \frac{j}{2\pi t}\right)\right]e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2}\left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2} + \frac{j}{2\pi t}\right)\right]e^{-j2\pi f_c t} = \\ &= \frac{1}{2}\left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2}\right) - s(t) * \left(\frac{j}{2\pi t}\right)\right]e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2}\left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2}\right) + s(t) * \left(\frac{j}{2\pi t}\right)\right]e^{-j2\pi f_c t} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}s(t) - \frac{j}{2\pi}\left(s(t) * \frac{1}{t}\right)\right]e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}s(t) + \frac{j}{2\pi}\left(s(t) * \frac{1}{t}\right)\right]e^{-j2\pi f_c t} \end{aligned}$$

Un'altra proprietà che possiamo sfruttare è la seguente:

$$s(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{s}(t)$$

dove $\hat{s}(t)$ è il segnale prodotto in uscita dal cosiddetto **filtro di Hilbert**, la cui funzione di risposta all'impulso è $1/\pi t$, nel caso ovviamente in cui esso sia alimentato in ingresso da $s(t)$.

Possiamo dunque scrivere che

$$s_n(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) - \frac{j}{2} \hat{s}(t) \right] e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) + \frac{j}{2} \hat{s}(t) \right] e^{-j2\pi f_c t}$$

Adesso, raggruppando i termini in cui compare $s(t)$ e quelli in cui compare $\hat{s}(t)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{4} s(t) e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{4} s(t) e^{-j2\pi f_c t} - \left(\frac{j}{4} \hat{s}(t) e^{j2\pi f_c t} - \frac{j}{4} \hat{s}(t) e^{-j2\pi f_c t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} s(t) \left(\frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \left(\frac{e^{j2\pi f_c t} - \hat{s}(t) e^{-j2\pi f_c t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

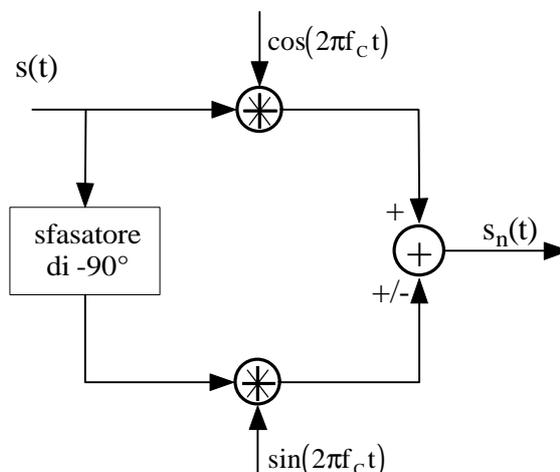
In conclusione, quindi, il segnale che viene inviato sul canale, dopo la modulazione DSB-SC ed il filtraggio (attraverso il filtro passa-alto) delle due BLI, è esprimibile nel modo seguente:

$$s_n(t) = \frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Se, al posto di filtrare le due BLI, avessimo filtrato le due BLS, avremmo ottenuto

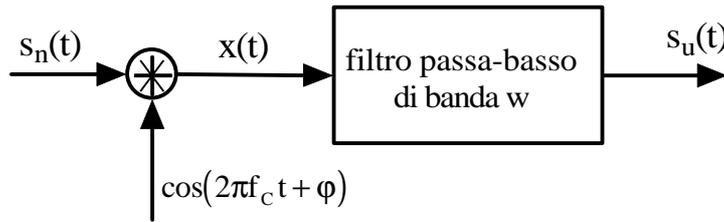
$$s_n(t) = \frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

In generale, il segnale $s_n(t)$ è proprio quello che si ottiene utilizzando l'apparato modulatore disegnato nel caso del singolo tono modulante e che qui ridisegniamo:



La presenza, nella formula ricavata prima, della trasformata di Hilbert corrisponde allo sfasamento introdotto su $s(t)$ prima di inviarlo nel ramo inferiore: ricordiamo infatti che il **filtro di Hilbert** ha la caratteristica di lasciare invariato il modulo del segnale in ingresso e di ritardarne la fase di 90° . Quindi, quando il segnale modulante $s(t)$ è generico (e non un singolo tono modulante), lo sfasatore di -90° indicato in figura è proprio il filtro di Hilbert.

Passiamo alla demodulazione. Anche qui, l'apparato demodulatore è lo stesso disegnato nel caso del singolo tono modulante:



Il segnale in ingresso al demodulatore, nell'ipotesi di idealità del canale e nell'ipotesi di aver filtrato le due BLI, è dunque

$$s_n(t) = \frac{1}{2}s(t)\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

L'esito della prima moltiplicazione è il segnale

$$x(t) = \frac{1}{2}s(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

il quale può essere anche riscritto nella forma seguente (usando le solite formule trigonometriche):

$$x(t) = \frac{1}{2}s(t)\frac{1}{2}[\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \cos(-\varphi)] + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\frac{1}{2}[\sin(4\pi f_c t + \varphi) + \sin(-\varphi)]$$

Ricordando che il coseno è una funzione pari e che il seno è una funzione dispari, possiamo anche scrivere che

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}s(t)\frac{1}{2}[\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \cos(\varphi)] + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\frac{1}{2}[\sin(4\pi f_c t + \varphi) - \sin(\varphi)] = \\ &= \frac{1}{4}s(t)\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{4}s(t)\cos(\varphi) + \frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(4\pi f_c t + \varphi) - \frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Passando questo segnale al filtro passa-banda, di banda pari proprio alla banda w del segnale $s(t)$, è evidente che vengono eliminate le componenti $\frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(4\pi f_c t + \varphi)$

e $\frac{1}{4}s(t)\cos(4\pi f_c t + \varphi)$, per cui rimane

$$s_u(t) = \frac{1}{4}s(t)\cos(\varphi) - \frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(\varphi)$$

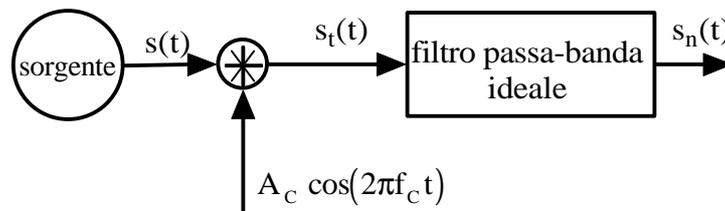
Da qui si deduce che, in assenza di sfasamento, cioè per $\varphi=0$, il segnale in uscita al demodulatore, a parte un coefficiente $1/4$ che può essere eliminato dal filtro, è proprio $s(t)$.

Al contrario, in presenza di sfasamento φ , le cose non vanno così bene, per cui anche questo metodo è abbastanza sensibile agli sfasamenti.

Rumore nella tecnica di modulazione SSB

Così come abbiamo fatto per la modulazione di ampiezza con la tecnica DSB-SC, esaminiamo anche la tecnica SSB dal punto di vista del rumore.

La prima cosa che ci interessa calcolare è la potenza del segnale modulato $s_n(t)$ che il demodulatore riceve in ingresso direttamente dal mezzo trasmissivo (supposto ideale). Questo segnale si ottiene prima modulando la portante, in DSB-SC, mediante il segnale modulante $s(t)$ e poi filtrando le due bande laterali inferiori o quelle laterali superiori. Possiamo allora schematizzare l'apparato di modulazione nel modo seguente:



In base ai passaggi effettuati nel paragrafo precedente, il segnale trasmesso sul canale, nell'ipotesi di aver filtrato le due BLI, è

$$s_n(t) = \frac{1}{2}s(t)\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

(stiamo supponendo unitaria l'ampiezza A_c della portante).

Calcoliamo la potenza di questo segnale $s_n(t)$: si nota che esso è la somma di due processi stocastici in quadratura, per cui possiamo sfruttare una nota proprietà secondo cui *la potenza del segnale complessivo è la somma delle potenze dei singoli segnali in quadratura*; abbiamo perciò che

$$P_t = E[s_n^2(t)] = E\left[\frac{1}{4}s^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)\right] + E\left[\frac{1}{4}\tilde{s}^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)\right]$$

Sfruttando adesso la linearità della media, abbiamo che

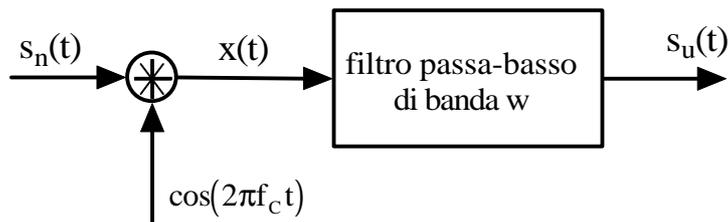
$$P_t = \frac{1}{4}E[s^2(t)\cos^2(2\pi f_c t)] + \frac{1}{4}E[\tilde{s}^2(t)\sin^2(2\pi f_c t)] = \frac{1}{8}E[s^2(t)] + \frac{1}{8}E[\tilde{s}^2(t)] = \frac{1}{8}P_s + \frac{1}{8}E[\tilde{s}^2(t)]$$

E' inoltre possibile dimostrare che $E[\tilde{s}^2(t)] = P_s$, per cui possiamo concludere che

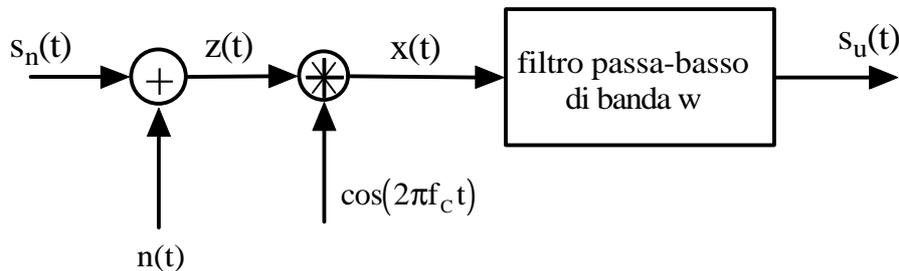
$$P_t = \frac{1}{4} P_s$$

Possiamo a questo punto fare un confronto con la potenza trasmessa nella tecnica DSB-SC: in tale tecnica, infatti, la potenza del segnale modulato (cioè quindi la potenza trasmessa sul canale) valeva $E[s_i^2(t)] = \frac{1}{2} P_s$, da cui deduciamo, come del resto c'era da aspettarsi, che la tecnica SSB consente di trasmettere metà della potenza che invece viene trasmessa con la DSB-SC.

Passiamo adesso all'apparato di demodulazione:



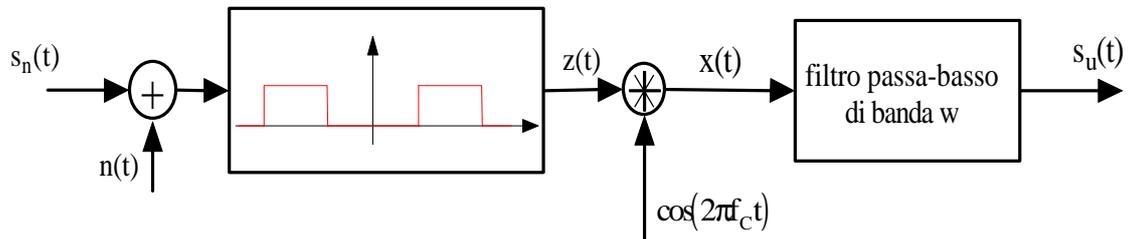
Al fine di tenere conto del rumore additivo (gaussiano bianco), modifichiamo questo schema nel modo seguente:



Inoltre, facendo un discorso del tutto analogo a quello fatto per la DSB-SC, possiamo inserire, dopo il sommatore che introduce il rumore, un filtro che elimini quella parte di rumore esterna all'intervallo di frequenza in cui è definito $s_n(t)$. La differenza con la DSB-SC sta nella posizione dei due *rettangoli* che costituiscono la funzione di trasferimento del filtro: infatti, mentre nella DSB-SC tali rettangoli erano posizionati in corrispondenza degli intervalli $[-w - f_c, -f_c + w]$ e $[-w + f_c, +f_c + w]$, in questo caso, avendo trasmesso solo le due BLS o solo le due BLI, possiamo restringerli:

- se abbiamo trasmesso le due BLS, i due rettangoli saranno posizionati negli intervalli $[-w - f_c, -f_c]$ e $[f_c, +f_c + w]$;
- se abbiamo trasmesso le due BLI, invece, saranno posizionati sui $[-f_c, -f_c + w]$ e $[-w + f_c, +f_c]$.

Ad ogni modo, fatta salva questa precisazione, lo schema dell'apparato di ricezione è il seguente:



Analizziamo quello che succede: all'uscita dal filtro passa-banda (che serve ad eliminare il rumore esterno alla banda in cui è allocato il segnale utile), abbiamo il segnale $z(t)$ composto dal segnale modulato $s_n(t)$ inalterato e da $n(t)$ filtrato; indicando questo rumore filtrato con $n_F(t)$, abbiamo dunque che

$$z(t) = s_n(t) + n_F(t)$$

Questo segnale viene successivamente moltiplicato per $\cos(2\pi f_c t)$, per cui si ottiene il segnale

$$x(t) = s_n(t) \cos(2\pi f_c t) + n_F(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Ricordando l'espressione di $s_n(t)$ e applicando le opportune formule trigonometriche, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t) \right] \cos(2\pi f_c t) + n_F(t) \cos(2\pi f_c t) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) [\cos(2\pi(2f_c)t) + 1] + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \cos(2\pi(2f_c)t) \right] + n_F(t) \cos(2\pi f_c t) = \\ &= \left[\frac{1}{4} s(t) \cos(2\pi(2f_c)t) + \frac{1}{4} s(t) + \frac{1}{4} \hat{s}(t) \cos(2\pi(2f_c)t) \right] + n_F(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

Questo $x(t)$ va in ingresso al secondo filtro, che elimina le componenti oltre la frequenza w : ciò significa che l'uscita del filtro è la somma di $\frac{1}{4} s(t)$ più un rumore ulteriormente filtrato (che risulta essere composto a sua volta dalla somma di due termini in quadratura tra loro, che quindi si sommano in potenza).

Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita

In base a quanto detto nel paragrafo precedente, il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore sarà il rapporto tra la potenza del segnale utile, che vale evidentemente

$$S = E \left[\left(\frac{1}{4} s(t) \right)^2 \right] = \frac{1}{16} P_s$$

e la potenza delle componenti di rumore: tale potenza risulta essere $N = \frac{kT_w}{2}$, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{P_s}{8kT_w}}$$

Passiamo ora a calcolare $\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}$, ossia il rapporto S/N all'uscita dal canale e quindi all'ingresso del demodulatore: in base alle stesse considerazioni fatte nella tecnica DSB-SC, la potenza di rumore è la stessa vista in quel caso, ossia $N=kT_w$, mentre la potenza di segnale, per le considerazioni del paragrafo precedente, è la metà di quella della DSB-SC, ossia vale $E[s_i^2(t)] = \frac{1}{4}P_s$. Deduciamo che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE} = \frac{P_s/4}{kT_w} = \frac{P_s}{4kT_w}$$

Essendo questa quantità pari al doppio di $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$, si deduce che il rapporto segnale/rumore in uscita è la metà di quello in ingresso:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{P_s}{4kT_w}}{\frac{P_s}{8kT_w}} = 2$$

Abbiamo dunque ottenuto un risultato diverso da quello visto per la DSB-SC: infatti, mentre in quel caso il rapporto S/N si raddoppiava dall'ingresso all'uscita del demodulatore, indicando così un miglioramento della "qualità" del segnale ricevuto, adesso il rapporto S/N risulta dimezzato, il che indica un degrado della qualità.

Modulazione di ampiezza VSB

Introduzione

Nell'esaminare la tecnica di modulazione di ampiezza SSB, la quale è applicabile solo a segnali con spettro che goda della simmetria hermitiana, abbiamo visto che essa presenta fundamentalmente un vantaggio e uno svantaggio:

- il grosso vantaggio è quello di consentire un risparmio in banda, in quanto il requisito fondamentale di questa tecnica è quello di trasmettere solo la banda laterale inferiore del segnale oppure solo quella superiore;
- il grosso svantaggio è, invece, quello per cui è difficile realizzare concretamente dei filtri che eliminino la parte di spettro che non si vuole trasmettere.

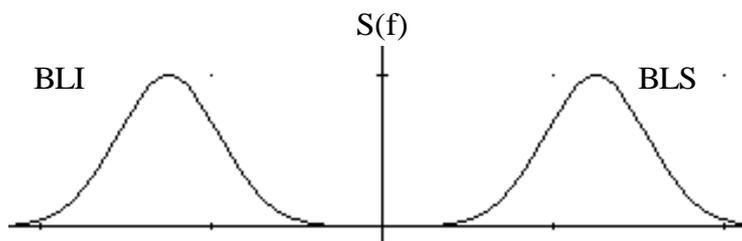
Questo limite della tecnica SSB fa' sì, come detto in precedenza, che essa venga utilizzata per la trasmissione solo di segnali particolari, come il segnale telefonico: essi devono presentare un contenuto energetico praticamente nullo in corrispondenza delle bassissime frequenze, il che consente di ovviare alle imperfezioni dei filtri.

Questa imperfezione dei filtri viene invece tollerata in un'altra tecnica di modulazione, che prende il nome di **tecnica VSB** (dove l'acronimo VSB sta per **Vestigial Side Band**): si tratta, in pratica, ancora della SSB, con la differenza fondamentale che viene effettuata la trasmissione sia della banda laterale prescelta (superiore o inferiore) sia anche di una *piccola parte dell'altra*.

Evidentemente, questa tecnica, proprio per il fatto di ammettere che venga trasmessa parte dell'altra banda laterale, ha il pregio di poter essere applicata a segnali di spettro qualsiasi, ossia a segnali che non necessariamente presentino contenuto energetico nullo alle basse frequenze.

Descrizione dei processi di modulazione/demodulazione

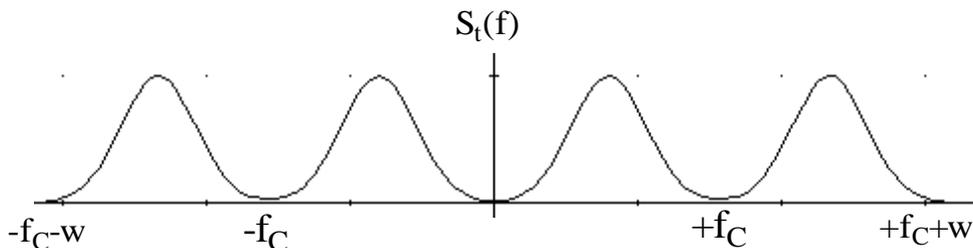
Supponiamo ancora una volta che il segnale analogico $s(t)$ da trasmettere abbia il seguente spettro:



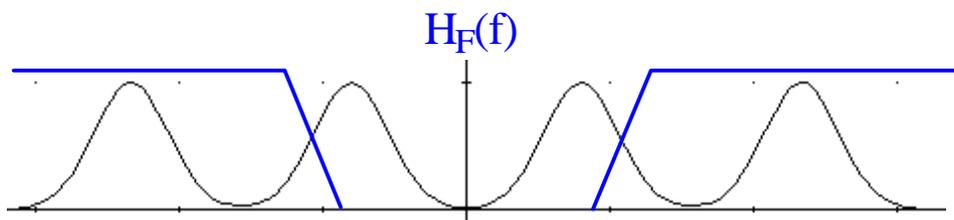
Per prima cosa, effettuiamo una modulazione di ampiezza secondo la tecnica DSB-SC: sappiamo ormai bene che questo consiste nell'ottenere il segnale $s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$, il cui spettro è

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

Da un punto di vista grafico, $S_t(f)$ sarà del tipo seguente:



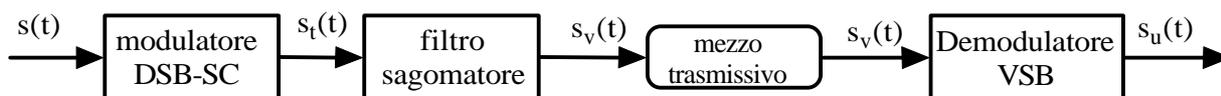
A questo punto, dobbiamo scegliere quale banda laterale, superiore o inferiore, trasmettere: supponiamo di voler trasmettere la banda laterale superiore. Abbiamo detto che, con la tecnica VSB, viene trasmessa tale banda più parte dell'altra; il filtro che utilizzeremo sarà allora del tipo seguente:



(il disegno del filtro è stato linearizzato).

E' chiara subito una cosa: il filtro deve essere progettato in modo tale che, in fase di demodulazione, sia possibile ricostruire lo spettro del segnale di partenza. Vedremo tra un attimo sulla base di quali parametri va effettuata la progettazione del filtro. Limitiamoci per il momento a dire che il filtro prende il nome di **filtro sagomatore**.

Come sempre, tracciamo uno schema semplificato degli apparati di modulazione e demodulazione:



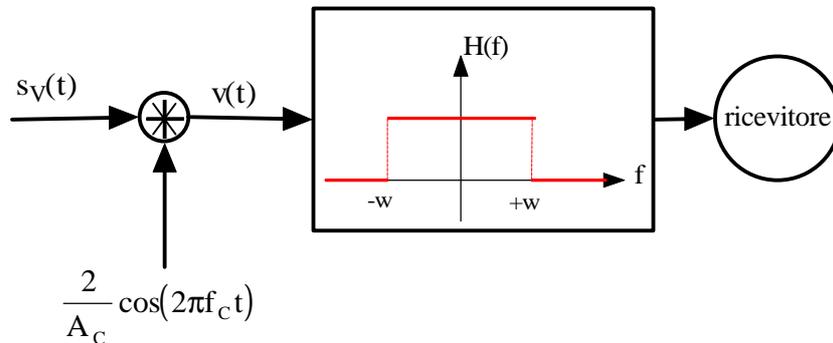
Il segnale analogico $s(t)$ da trasmettere arriva in ingresso al primo organo, che è il modulatore DSB-SC, il quale non fa altro che generare il segnale

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Il segnale così modulato va poi in ingresso al *filtro sagomatore*, progettato in modo da effettuare il filtraggio di una parte della banda laterale che si vuole escludere. Indicata con $H_F(f)$ la funzione di trasferimento del filtro, il segnale in uscita, nel dominio della frequenza, è

$$S_v(f) = H_F(f)S_t(f)$$

Questo segnale viene trasmesso mediante il mezzo trasmissivo e, nella ipotesi di idealità di quest'ultimo, è lo stesso segnale che arriva al demodulatore VSB, che ha il compito di ricostruire il segnale di partenza. Esso è identico al demodulatore visto per la tecnica DSB-SC, per cui è schematizzabile nel modo seguente:



Il primo passo è la moltiplicazione del segnale in ingresso $s_v(t)$ per un segnale sinusoidale avente fase e frequenza identiche a quelle della portante: l'esito della moltiplicazione è il segnale

$$v(t) = s_v(t) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t)$$

Nel dominio della frequenza, abbiamo

$$V(f) = \frac{1}{A_c} S_v(f - f_c) + \frac{1}{A_c} S_v(f + f_c)$$

Poiché $S_v(f) = H_F(f)S_t(f)$, possiamo anche scrivere che

$$V(f) = \frac{1}{A_c} H_F(f - f_c)S_t(f - f_c) + \frac{1}{A_c} H_F(f + f_c)S_t(f + f_c)$$

Sappiamo inoltre che

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

per cui

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{A_c} H_F(f - f_c) \left[A_c \frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f) \right] + \frac{1}{A_c} H_F(f + f_c) \left[A_c \frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2} A_c S(f + 2f_c) \right] = \\ &= H_F(f - f_c) \left[\frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} S(f) \right] + H_F(f + f_c) \left[\frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2} S(f + 2f_c) \right] \end{aligned}$$

Evidenziando adesso $S(f)$, abbiamo quanto segue:

$$V(f) = \frac{1}{2} [H_F(f - f_c) + H_F(f + f_c)] S(f) + \frac{1}{2} H_F(f - f_c) S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} H_F(f + f_c) S(f + 2f_c)$$

Da questa relazione si osserva come $V(f)$ consti di tre repliche, a meno del termine $\frac{1}{2}$ (che può essere eliminato modificando il moltiplicatore), dello spettro del segnale di partenza: la posizione di queste repliche è tale che, facendo passare $V(f)$ per un filtro passa-banda di banda pari a w , si riesca a filtrare sia $\frac{1}{2}H_F(f + f_c)S(f + 2f_c)$ sia $\frac{1}{2}H_F(f - f_c)S(f - 2f_c)$.

Di conseguenza, il segnale che viene fuori dal filtro ha il seguente spettro:

$$S_u(f) = \frac{1}{2} [H_F(f - f_c) + H_F(f + f_c)] S(f)$$

A questo punto, affinché da $S_u(f)$ si riesca a recuperare esattamente $S(f)$, a meno di un fattore di scala, è evidentemente necessario che il termine tra parentesi quadra sia una costante.

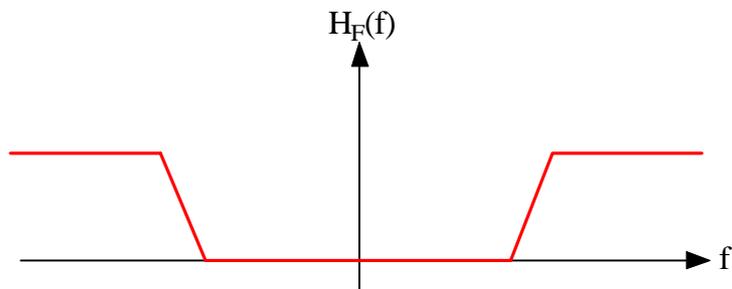
Questo è dunque il vincolo di cui bisogna tenere conto nel progettare il filtro sagomatore: la sua funzione di trasferimento deve essere tale da soddisfare la condizione

$$H_F(f - f_c) + H_F(f + f_c) = \text{cost}$$

Dobbiamo capire come ottenere questa condizione. Intanto, è fondamentale che questa condizione sia verificata solo nell'intervallo di frequenza nel quale è definito il nostro segnale, mentre invece importa poco se essa non è verificata al di fuori di tale intervallo.

In linea generale, la funzione $H_F(f)$ verificherà quella proprietà se godrà di particolari simmetrie. Vediamo a livello intuitivo cosa deve accadere.

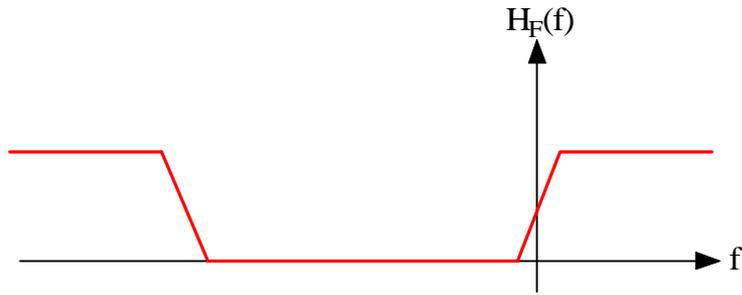
Abbiamo prima detto che la funzione $H_F(f)$ deve essere del tipo seguente:



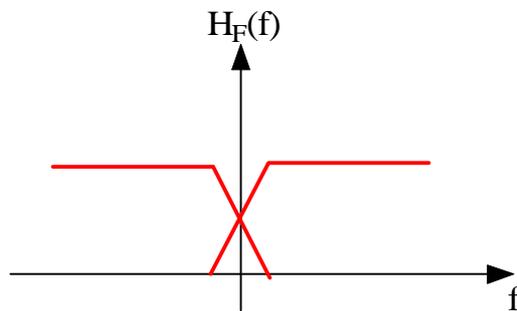
La funzione $H_F(f - f_c)$ non è altro che quella funzione traslata verso destra di una quantità pari a f_c :



In modo analogo, $H_F(f+f_c)$ è $H_F(f)$ traslata verso sinistra della quantità f_c :



Sovrapponendo le due funzioni nell'intervallo $[-w, w]$, abbiamo approssimativamente qualcosa del genere:



Appare ovvio, allora, che sommando quelle due curve, si ottiene una curva praticamente costante nell'intervallo desiderato.

Modulazione AM-standard

Introduzione

Una caratteristica comune alle tecniche di modulazione di ampiezza finora esaminate è il fatto per cui lo spettro del segnale modulato non contiene affatto lo spettro della portante, che è composto da due impulsi posizionati in $+f_c$ e in $-f_c$.

Tali due impulsi compaiono invece nello spettro del segnale modulato utilizzato nella tecnica denominata **AM-standard** o anche **modulazione di ampiezza con portante trasmessa**.

Il motivo per cui compaiono questi due impulsi sta semplicemente nel fatto che il segnale modulato con questa tecnica corrisponde alla somma della portante e del segnale modulato secondo la tecnica DSB-SC. Per dirla in formule, il segnale modulato nella tecnica AM-standard è

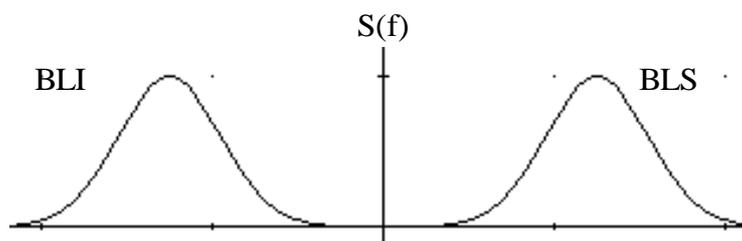
$$s_t(t) = \underbrace{A_c \cos(2\pi f_c t)}_{\text{portante}} + \underbrace{A_c K_a s(t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{segnale modulato DSB-SC}}$$

e può anche essere scritto in forma più compatta nella forma

$$s_t(t) = A_c (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

Questa espressione mostra molto chiaramente quale sia l'effetto dell'aggiunta della portante rispetto al semplice segnale modulato in DSB-SC: infatti, il segnale $s_t(t)$ può essere visto come una portante $A_c \cos(2\pi f_c t)$ modulata in DSB-SC dal segnale $(1 + K_a s(t))$. Quindi, in altre parole, la modulazione AM standard coincide con una modulazione DSB-SC dove però il segnale modulante non è più $s(t)$ ma $(1 + K_a s(t))$.

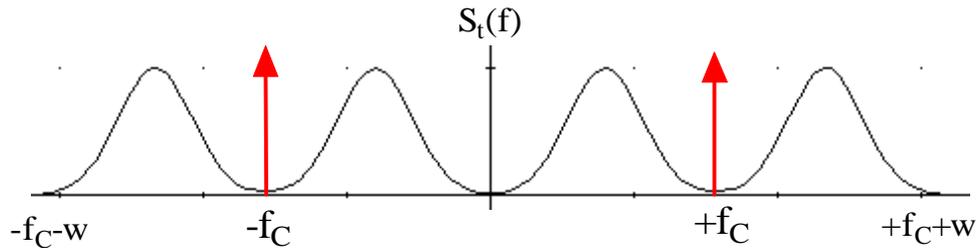
Per avere una idea di come è fatto lo spettro del segnale modulato $s_t(t)$, supponiamo come al solito che il segnale $s(t)$ abbia uno spettro del tipo seguente:



Lo spettro del segnale modulato è

$$S_t(f) = \underbrace{\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c)}_{\text{spettro della portante}} + \underbrace{A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)}_{\text{spettro del segnale modulato DSB-SC}}$$

e, graficamente, è del tipo seguente:



Facciamo notare sin da ora, come si vede chiaramente nella figura, che il livello della portante è sempre maggiore del livello del segnale.

Ovviamente, dato che in tutte le tecniche precedenti non è stato mai trasmesso lo spettro della portante, viene da chiedersi per quale motivo questo invece venga fatto nella tecnica AM-standard.

Tra l'altro è chiaro che, dovendo trasmettere anche questo spettro, è necessario trasmettere maggiore potenza di quella che invece basterebbe per trasmettere il solo segnale $s_t(t) = A_c s(t) \cos(2\pi f_c t)$.

Il motivo sarà chiaro quando avremo esaminato la tecnica di demodulazione: la portante viene trasmessa ad un livello di potenza tale da consentire, in ricezione, di demodulare direttamente senza richiedere la rigenerazione locale della portante stessa. Questa possibilità è chiaramente di particolare interesse quando sia importante semplificare al massimo i ricevitori; d'altra parte, il prezzo che essa richiede non è indifferente, essenzialmente in termini di maggiorazione della potenza trasmessa.

Una osservazione importante riguarda il valore che viene impostato per la costante K_a ; esso non è (ovviamente) casuale, ma viene scelto in modo che sia rispettato il seguente vincolo:

$$1 + K_a s(t) > 0 \quad \forall t$$

Questo vincolo viene imposto affinché la portante modulata conservi, istante per istante, un "involuppo" sempre positivo.

Il caso più critico è chiaramente quello in cui il segnale modulante $s(t)$ raggiunge il suo massimo valore negativo $s(t)_{pn}$ (che possiamo anche indicare con $-|s(t)|_{pn}$), nel quale caso deve risultare

$$1 - K_a |s(t)|_{pn} > 0$$

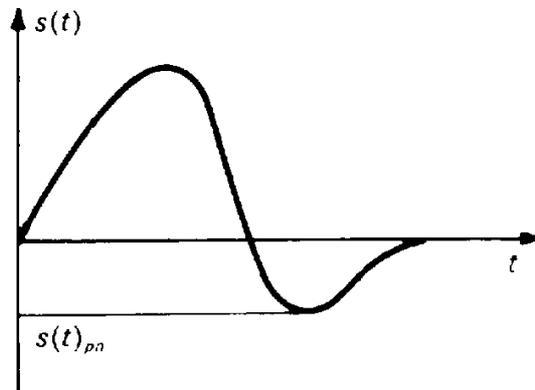
da cui quindi si ricava che $K_a < \frac{1}{|s(t)|_{pn}}$.

E' possibile ragionare anche in termini di ampiezza della portante. Infatti, se prendiamo $K_a = 1/A_c$, dove A_c è l'ampiezza della portante, il segnale modulato assume l'espressione

$$s_t(t) = (A_c + s(t)) \cos(2\pi f_c t) = A_c \left(1 + \frac{s(t)}{A_c} \right) \cos(2\pi f_c t)$$

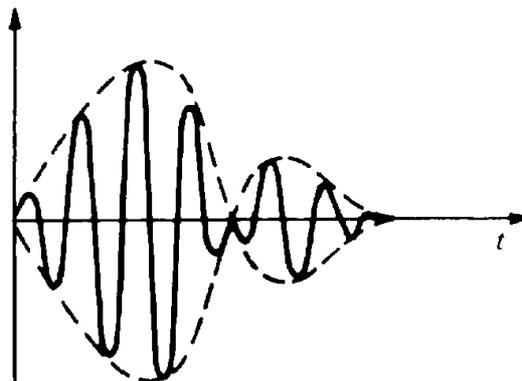
Vediamo allora di capire come è fatto il segnale modulato al variare proprio di A_c .

Consideriamo, ad esempio, il seguente segnale modulante $s(t)$:

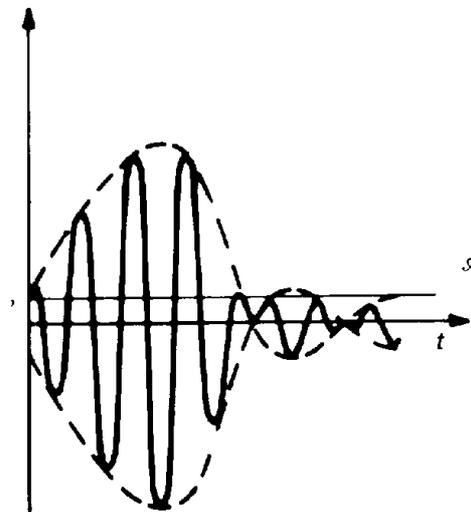


Abbiamo indicato con $s(t)_{pn}$ il massimo valore negativo di $s(t)$, il cui modulo è ovviamente $|s(t)|_{pn}$.

Il caso più semplice è quello in cui $A_c=0$, nel quale caso abbiamo evidentemente la semplice modulazione di ampiezza con la tecnica DSB-SC. Il segnale modulato è in questo caso fatto nel modo seguente:

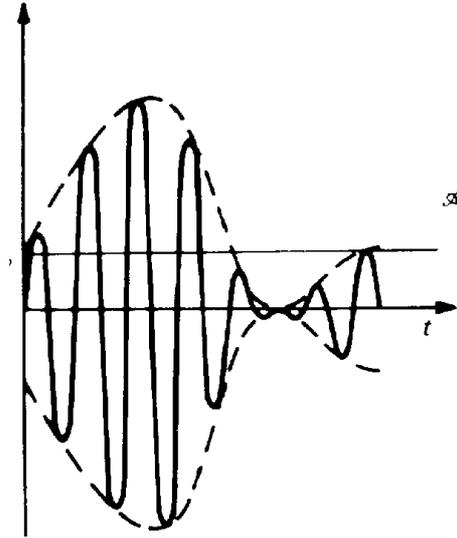


Se supponiamo che A_c venga preso inferiore a $|s(t)|_{pn}$, il segnale modulato è il seguente:

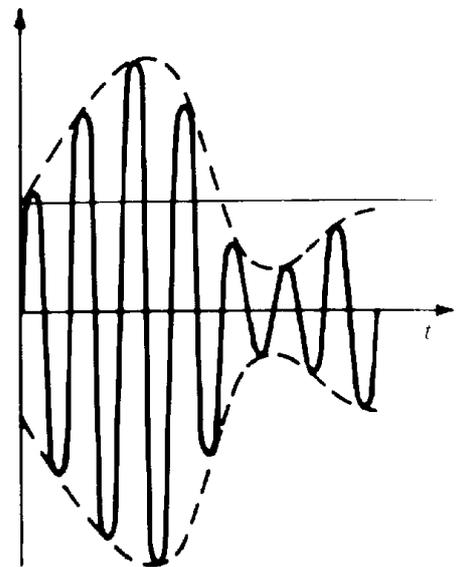


Come si nota, nelle ultime due figure l'involuppo del segnale modulato non corrisponde al segnale modulante $s(t)$, bensì al segnale modulante raddrizzato e non è ovviamente quello che a noi interessa.

Se invece A_c viene preso esattamente uguale a $|s(t)|_{pn}$, il segnale modulato è il seguente:



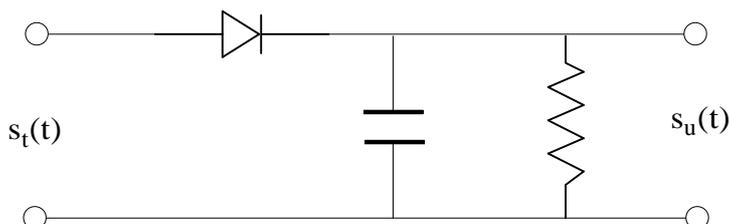
Infine, se A_c viene preso superiore a $|s(t)|_{pn}$, il segnale modulato è il seguente:



Questa è la soluzione migliore possibile ed è infatti quella adottata nella pratica: si nota infatti che l'involuppo del segnale non è mai negativo, per cui consente di risalire al segnale modulante tramite quello che tra poco definiremo come **demodulatore ad involuppo**.

Si nota dunque che l'*inviluppo* del segnale modulato riproduce esattamente la forma d'onda modulante ⁽¹⁾. Il fatto che accada una cosa del genere è dovuto proprio alla condizione per cui $1+K_a s(t) > 0$. Se questa condizione non fosse verificata in qualche intervallo di tempo, si avrebbe, in tale intervallo, un coseno tutto al di sotto dell'asse delle ascisse, il che impedirebbe la ricostruzione, in quanto l'inviluppo non corrisponderebbe più alla forma d'onda del segnale $s(t)$.

L'apparato demodulatore, per la tecnica AM-standard, prende il nome di **demodulatore ad inviluppo** proprio in accordo a quanto detto poco fa circa l'inviluppo di $s_t(t)$; a livello solo qualitativo, il circuito elettrico usato come demodulatore è del tipo seguente:

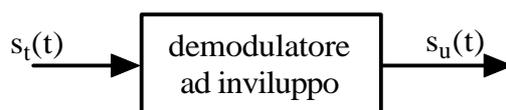


Si tratta evidentemente di un circuito estremamente semplice da realizzare (bastano un buon diodo, una resistenza ed una capacità) e questo è il motivo per cui la modulazione AM-standard è quella più utilizzata nella realtà, per esempio nella trasmissione del segnale radiofonico.

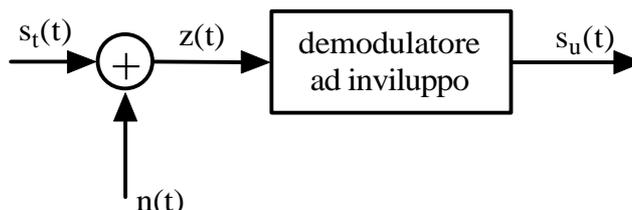
Il funzionamento, sinteticamente, è quello per cui il circuito mantiene il condensatore carico sempre alla tensione di picco del segnale modulato, in modo appunto da "seguire" l'inviluppo del segnale modulato.

Rumore nella tecnica AM-standard

Possiamo schematizzare l'apparato demodulatore, supposto ideale (ossia non affetto da rumore), nel modo seguente:



Se invece vogliamo tener conto della presenza del rumore introdotto sia dagli apparati di trasmissione sia da quelli di demodulazione, poniamo ancora una volta a monte del demodulatore un sommatore che aggiunge ad $s_t(t)$ il solito rumore $n(t)$ additivo gaussiano bianco:

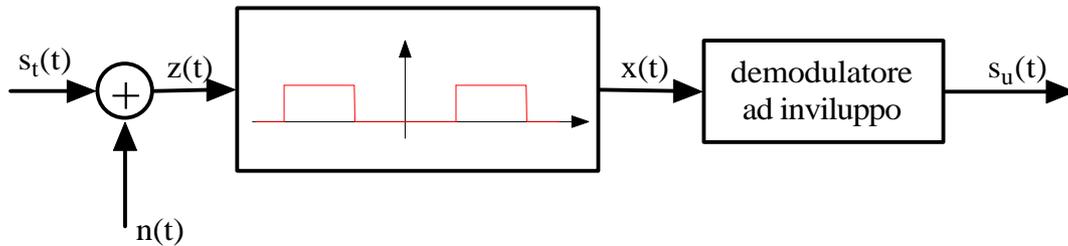


¹ La cosa è ancora più evidente se si pensa che, aumentando la frequenza, aumentano le oscillazioni nell'unità di tempo

L'uscita dal sommatore è dunque il segnale $z(t) = s_t(t) + n(t)$, dato dalla composizione del segnale utile e del rumore che ad esso si è sovrapposto.

Sempre in accordo a quanto fatto nei casi precedenti di modulazione, poniamo un filtro passa-banda subito dopo il sommatore: questo filtro è fatto in modo da lasciar passare inalterato il segnale utile $s_t(t)$ e da filtrare invece le componenti di rumore esterne all'intervallo di frequenza in cui il segnale utile è definito ⁽²⁾.

Lo schema si modifica allora nel modo seguente:



All'uscita dal filtro abbiamo dunque il segnale $x(t) = s_t(t) + n_F(t)$, somma del segnale utile inalterato e del rumore filtrato. Come possiamo esprimere analiticamente questo rumore filtrato? Si dimostra che esso può essere espresso come somma di due distinte componenti in quadratura:

$$n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

dove $n_I(t)$ e $n_q(t)$ sono, rispettivamente, il rumore uscente da un demodulatore coerente comandato da $2\cos(2\pi f_c t)$ e quello uscente da un demodulatore coerente comandato da $2\sin(2\pi f_c t)$.

Possiamo dunque scrivere che

$$x(t) = s_t(t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Ricordando inoltre che il segnale modulato ha espressione

$$s_t(t) = A_c (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

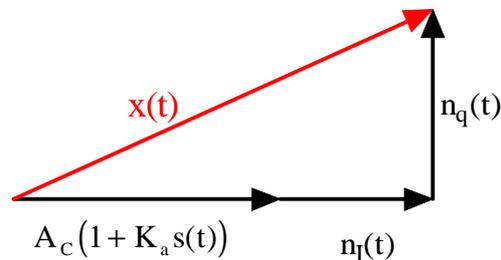
possiamo infine scrivere che il segnale in uscita dal filtro passa-banda, ossia il segnale che va in ingresso al demodulatore ad involucro, ha la seguente espressione:

$$x(t) = A_c (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Come si nota, $x(t)$ è dunque dato dalla somma di tre segnali distinti, di cui uno è il segnale utile e gli altri due, che risultano in quadratura, sono dovuti al rumore.

² Ricordiamo che la modulazione AM-standard è identica a quella DSB-SC, salvo la presenza della portante; dato che lo spettro della portante consiste di due impulsi posizionati su $-f_c$ e $+f_c$, è chiaro che *la banda del segnale modulato nella AM-standard è la stessa di quello modulato nella DSB-SC, per cui le considerazioni per l'utilizzo del filtro passa-banda sono le stesse*

Possiamo comodamente rappresentare questi tre segnali con il metodo dei vettori rotanti: abbiamo infatti tre sinusoidi isofrequenziali (per cui sono ferme una rispetto all'altra e rispetto ad un piano supposto in rotazione con la stessa frequenza angolare), di cui due in fase (i due Coseni) ed una in quadratura. Possiamo quindi adottare una rappresentazione del tipo seguente:



(l'asse orizzontale è quella del coseno, mentre quella verticale corrisponde al seno)

Il compito del demodulatore ad involuppo è quello di prendere, ad ogni istante, il modulo di $x(t)$: tale modulo, come si nota dalla figura, è dato da

$$|x(t)| = \sqrt{(A_c(1 + K_a s(t)) + n_1(t))^2 + n_q^2(t)}$$

Adesso, dato che il nostro scopo è quello di calcolare il rapporto segnale-rumore e dato che $|x(t)|$ costituisce l'uscita del demodulatore, dobbiamo trovare il modo di separare, in quella espressione, il segnale utile dal rumore, al fine di calcolare le rispettive potenze.

Per fare questo, facciamo una ipotesi semplificativa: supponiamo che il termine di rumore $n_q^2(t)$ in quadratura sia trascurabile rispetto all'altro termine. Sotto questa ipotesi, evidentemente che

$$|x(t)| = A_c(1 + K_a s(t)) + n_1(t)$$

Questo segnale, prima di costituire l'uscita $s_u(t)$ del demodulatore, viene ulteriormente filtrato, in modo tale da eliminare la componente continua A_c e quindi da dare in uscita il segnale

$$s_u(t) = A_c K_a s(t) + n_1(t)$$

In definitiva, *finche* $n_q(t)$ (e quindi anche $n_1(t)$) sono piccoli rispetto alla portante, solo $n_1(t)$ provoca una uscita dal demodulatore ad involuppo, il quale si comporta quindi, nei riguardi del rumore, come un demodulatore coerente.

Se, invece, le componenti di rumore non sono piccole, la presenza del termine $n_q(t)$ non più trascurabile modifica il comportamento del demodulatore e la trattazione analitica si fa ovviamente più complicata. Basta considerare che, in assenza di modulazione, il rumore determina, tramite le componenti $n_q(t)$ e $n_1(t)$, un vettore simbolico $x(t)$ che si somma al vettore rappresentativo della portante, come indicato nella figura prima riportata. Questo vettore assume, istante per istante, ampiezze e fasi diverse a seconda della combinazione dei valori istantanei

delle componenti $n_1(t)$ e $n_q(t)$. L'estremo del vettore risultante $x(t)$ descrive perciò una curva che dipende da entrambe le componenti.

A questo punto, si deduce che un demodulatore ad involuppo si comporta in modo diverso a seconda che si limiti o meno la banda passante a monte del demodulatore stesso: questo, infatti, equivale a variare la potenza di $n_1(t)$ e $n_q(t)$. E' fondamentale riuscire a limitare al minimo, mediante il filtro passa-banda precedentemente descritto, tale banda passante, in modo da limitare al minimo anche la potenza di rumore sovrapposta a quella del segnale utile.

Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita

Nella espressione del segnale in uscita dal demodulatore ad involuppo, si distingue ovviamente il segnale utile $A_c K_a s(t)$ dal rumore $n_1(t)$, per cui è immediato calcolare le rispettive potenze: la potenza del segnale utile è evidentemente

$$S = E[(A_c K_a s(t))^2] = A_c^2 k_a^2 P_s$$

mentre la potenza del rumore si calcola tenendo conto che $n_1(t)$ (come anche $n_q(t)$) ha densità spettrale di potenza costante e pari a $2kT$ nella banda di segnale: deduciamo che

$$N = E[n_1^2(t)] = 4kT\omega$$

per cui possiamo concludere che il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore è

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{A_c^2 k_a^2 P_s}{4kT\omega}}$$

Facciamo osservare che si tratta comunque di un risultato approssimato, vista l'ipotesi di partenza di poter trascurare il termine $n_q(t)$.

Adesso passiamo a calcolare $\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}$, ossia il rapporto S/N a monte del demodulatore. Il segnale complessivo da considerare adesso è $z(t) = s_i(t) + n(t)$: il segnale ricevuto dal canale è $s_i(t) = A_c (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t)$, per cui la sua potenza è

$$\begin{aligned} S &= E[(s_i(t))^2] = A_c^2 E[(1 + K_a s(t))^2 \cos^2(2\pi f_c t)] = \\ &= A_c^2 \{E[\cos^2(2\pi f_c t)] + E[K_a^2 s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t)] + E[2K_a s(t) \cos^2(2\pi f_c t)]\} = \\ &= A_c^2 \{E[\cos^2(2\pi f_c t)] + K_a^2 E[s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t)] + 2K_a E[s(t) \cos^2(2\pi f_c t)]\} = \\ &= A_c^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{K_a^2}{2} E[s^2(t)] + K_a E[s(t)] \right\} = \frac{A_c^2}{2} (1 + K_a^2 P_s) \end{aligned}$$

(dove abbiamo supposto $s(t)$ a media nulla).

Per quanto riguarda, invece, il rumore, esso ha una densità spettrale di potenza costante sul valore kT : pesandola nella banda $2w$ del segnale modulante, abbiamo che $N=2kTw$, per cui concludiamo che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} = \frac{\frac{A_c^2}{2}(1+K_a^2P_s)}{2kTw}$$

Possiamo infine calcolare il rapporto tra i rapporti S/N appena calcolati:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{A_c^2(1+K_a^2P_s)}{4kTw}}{\frac{A_c^2K_a^2P_s}{4kTw}} = \frac{1+K_a^2P_s}{K_a^2P_s} = 1 + \frac{1}{K_a^2P_s}$$

Paradosso dell'allargamento della banda

Un metodo di modulazione è tanto più efficiente, nei confronti del rumore, quanto maggiore è la banda su cui viene allocato il segnale utile. Questa affermazione potrebbe sembrare un paradosso, in quanto, allargando la banda, ingurgitiamo più rumore. In realtà, non è così, perché c'è da considerare quanto segue: le componenti spettrali di rumore sono tra loro incorrelate, per cui, in base ad una nota proprietà, esse si sommano in potenza; al contrario, le componenti spettrali di segnale sono tra loro correlate e quindi si sommano in tensione (o in corrente); dato che la potenza è proporzionale al quadrato della tensione, deduciamo che il rapporto S/N, all'aumentare della banda occupata dal segnale, non può che aumentare: questo perché, appunto, la somma delle potenze di segnale cresce più rapidamente della somma delle potenze di rumore.

Quindi, con una **modulazione a larga banda**, ossia sostanzialmente una modulazione efficiente nei riguardi del rumore, riusciamo a trasmettere anche in ambienti molto rumorosi. Tipico è il caso della telefonia cellulare oppure delle tecniche di modulazione dette di **spread spectrum**, nelle quali cioè si cerca di *spalmare* la potenza di segnale su un intervallo di frequenza il più largo possibile.

Autore: **Sandro Petrizzelli**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>