

Appunti di Comunicazioni Elettriche

Capitolo 6 - Il sistema radar

Introduzione	1
Caratteristiche principali	1
Potenza ricevuta	2
<i>Radar monostatici e bistatici</i>	4
<i>Osservazione sulla "sezione radar"</i>	4
Criterio generale di dimensionamento energetico	5
Determinazione della distanza radiale.....	5
dimensionamento del sistema: criterio di Neymann-Pearson.....	6
Rapporto segnale-rumore in ingresso al sistema a soglia.....	11
Funzionamento qualitativo del filtro adattato.....	15
Caso del rumore colorato.....	16
Risoluzione azimutale del radar.....	18
<i>Osservazione sul segnale trasmesso</i>	25
<i>Filtro adattato ad un impulso rettangolare</i>	27
<i>Osservazione: risoluzione temporale</i>	28
Moving target indicator	28
Fenomeno dello shift doppler	30

INTRODUZIONE

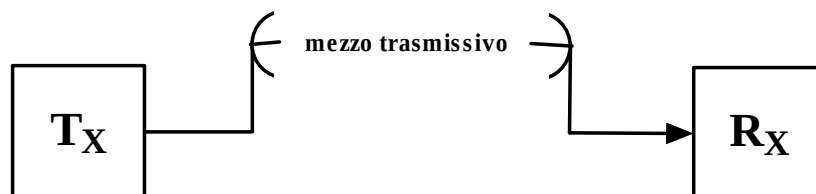
L'acronimo **RADAR** sta per *radio detection and ranging*, ossia radiorivelazione e misurazione di distanza. Si tratta, cioè, di un **sistema radiolocalizzatore** che sfrutta la proprietà dell'oggetto ricercato (*bersaglio*) di riflettere le radioonde, allo scopo di determinarne la posizione nello spazio.

Esistono vari tipi di sistemi radar, denominati in base alle caratteristiche tecniche (radar distanziometrico, radar panoramico e così via) o in base allo scopo (radar nautico, radar d'avvistamento e così via).

In generale, si parla di **radar terrestre**, in contrapposizione a radar aeronautico e radar navale, per indicare genericamente un radar, fisso o mobile, installato a terra.

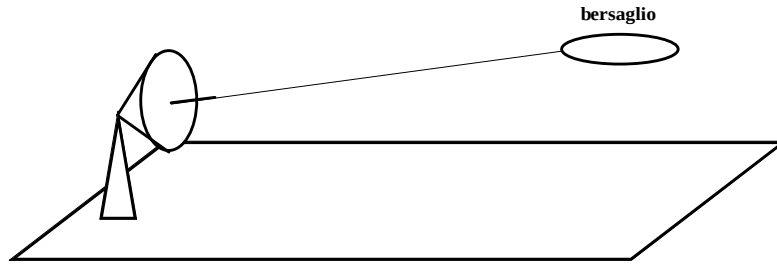
CARATTERISTICHE PRINCIPALI

In tutti i sistemi di trasmissione che abbiamo esaminato in precedenza, lo scopo era quello di far giungere all'utente una forma d'onda che fosse quanto più simile possibile a quella originale trasmessa:



Ci sono invece altri casi in cui la forma d'onda che viene ricevuta è già nota (a meno, ovviamente, delle distorsioni e delle attenuazioni introdotte dal mezzo trasmissivo) e lo scopo è quello di ricavare da essa delle particolari misure. Un esempio tipico è quello di un sistema radar.

Il principio di funzionamento del radar consiste nell'irradiare verso l'oggetto ricercato (**bersaglio radar**) un *fascio di radioonde* ottenuto mediante una *antenna direttiva orientabile* e nel ricevere le onde riflesse (**echi radar**) dal bersaglio stesso:



Se le onde si propagano in linea retta, come generalmente accade, con buona approssimazione, per le onde ultracorte e le microonde, *la direzione lungo la quale si trova il bersaglio è quella individuata dall'asse del fascio di radioonde inviato dall'antenna*, ossia quindi dalla direzione nella quale è puntata l'antenna.

Tale antenna, quindi, trasmette un segnale $s(t)$ noto, che si propaga; se c'è un bersaglio, una parte dell'energia irradiata viene da esso riflessa e quindi rilevata. Si tratta allora di valutare il cosiddetto **ritardo d'eco**, ossia il tempo che l'eco impiega per tornare indietro, e l'ampiezza di tale eco rispetto all'ampiezza del segnale trasmesso inizialmente: tali parametri sono infatti legati alle proprietà del bersaglio "colpito" dal fascio esplorante e permettono di identificare la presenza, la posizione spaziale e le dimensioni del bersaglio stesso.

POTENZA RICEVUTA

Cominciamo a capire quanta parte della potenza trasmessa può essere captata dal radar nel caso in cui sia presente un bersaglio. Indichiamo con P_T la potenza emessa dall'antenna trasmittente. Questa potenza è irradiata nello spazio libero, per cui subisce l'*attenuazione in spazio libero* (dovuta al fenomeno della *divergenza sferica delle onde*). Ad una certa distanza R , la densità di potenza (per unità di superficie) disponibile è dunque

$$D_T(R) = P_T \frac{G_T}{4\pi R^2} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

dove G_T è il *guadagno direttivo* dell'antenna trasmittente (si intende il valore che tale guadagno ha nella direzione di massima radiazione), che deve essere quanto più alto possibile per avere un puntamento quanto più preciso possibile.

Se c'è, dunque, un bersaglio a distanza R , la densità di potenza (per unità di superficie) incidente su di esso è $D_T(R)$. Parte di questa potenza viene reirradiata verso il trasmettitore, per cui è come avere un altro trasmettitore, che irradia una potenza

$$P_T \frac{G_T}{4\pi R^2} \sigma_0$$

In questa espressione, σ_0 è la cosiddetta **sezione radar del bersaglio** (espressa in m^2) ed ingloba una serie di informazioni sul bersaglio stesso: da un lato, tiene conto della capacità captativa del bersaglio (cioè di quanta potenza il bersaglio stesso riesce a captare) e, dall'altro, tiene anche conto delle proprietà direzionali del bersaglio (nel senso che quantifica la capacità del

bersaglio di irradiare potenza nella direzione considerata)¹. In pratica, è l'equivalente del prodotto tra l'area efficace e il guadagno direttivo di una antenna ricevente che dovesse ricevere e ritrasmettere quella potenza.

La potenza $P_T \frac{G_T}{4\pi R^2} \sigma_0$ trasmessa dal bersaglio verso il ricevitore subisce a sua volta il fenomeno della divergenza sferica, per cui diminuisce anch'essa con il quadrato della distanza: a distanza R dal bersaglio, cioè in corrispondenza dell'antenna ricevente del radar, la densità di potenza vale allora

$$D_R(R) = P_T \frac{G_T}{4\pi R^2} \sigma_0 \frac{1}{4\pi R^2} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

La potenza ricevuta dal radar si ottiene adesso moltiplicando $D_R(R)$ per l'area efficace dell'antenna ricevente del radar:

$$P_R = P_T \frac{G_T}{4\pi R^2} \sigma_0 \frac{A_R}{4\pi R^2}$$

Ricordando ancora una volta che A_R è legata al guadagno direttivo dell'antenna ricevente dalla relazione $A_R = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}$, possiamo concludere che

$$P_R = P_T \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} \sigma_0$$

Questa è nota come **equazione del radar** (nel vuoto). Essa mostra, tra le altre cose, che, a parità di altre condizioni, la portata R del radar aumenta all'aumentare della lunghezza d'onda λ del fascio esplorante (sempre che ci si riferisca al caso teorico del vuoto, prescindendo da altri fenomeni della radiopropagazione nell'atmosfera terrestre). D'altra parte, si può verificare che all'aumentare di λ aumenta, a parità di dimensioni geometriche dell'antenna, l'apertura del fascio esplorante, e quindi diminuisce il **potere risolutivo angolare**, cioè la capacità del radar di individuare la posizione spaziale del bersaglio².

Ricordiamo che il **guadagno direttivo** di una antenna è anche dato da

$G = \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2$, dove θ è l'apertura, in radianti, del fascio emesso:

$$\theta = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{4A}}$$

dove A è l'area efficace dell'antenna.

Queste espressioni mostrano che l'apertura del fascio cresce all'aumentare della lunghezza d'onda e quindi che il guadagno decresce all'aumentare della lunghezza d'onda.

¹ In dettaglio, la sezione radar del bersaglio dipende dal materiale, dalle dimensioni, dalla forma e dalla posizione relativa rispetto all'antenna del radar

² Questi aspetti saranno ampiamente ripresi in seguito.

Come al solito, quindi, è necessario un compromesso tra le opposte esigenze di operare con onde relativamente lunghe, al fine di ottenere una grande portata, e di operare con onde relativamente corte, per ottenere un grande potere risolutivo angolare. La questione è ulteriormente complicata dai *fenomeni della radiopropagazione atmosferica*: da un lato la propagazione è tanto più vicina allo schema per raggi rettilinei quanto più le onde sono corte (cioè quanto maggiore è la frequenza), mentre, dall'altro lato, certe dannose influenze di eventi meteorologici, come la pioggia, si fanno sentire meno per onde relativamente lunghe.

La definizione convenzionale di σ_0 dipende dall'equazione del radar prima ricavata: *la sezione radar del bersaglio è quella quantità che, moltiplicata per la densità di potenza $D_T(R)$ incidente sul bersaglio, fornisce una potenza complessiva che, se reirradiata in modo isotropo, permette di valutare la densità di potenza $D_R(R)$ che ritorna verso l'antenna trasmittente¹.*

Come detto, σ_0 ingloba anche la funzione di direttività del bersaglio inteso come antenna trasmittente. Si tratta di un parametro a carattere essenzialmente empirico: è dell'ordine di qualche m^2 per piccoli natanti e piccoli aeromobili, di qualche decina di m^2 per grossi aeromobili, di migliaia di m^2 per grossi natanti. Per un assegnato bersaglio, σ_0 è funzione dei due angoli che identificano l'orientamento dell'oggetto rispetto alla direzione di incidenza della radiazione.

Radar monostatici e bistatici

Osserviamo che, a seconda del tipo di radar, l'antenna trasmittente può o meno coincidere con l'antenna ricevente: si può usare una sola antenna (e si parla di **radar monostatico**) nel caso in cui è possibile disaccoppiare elettricamente il segnale trasmesso da quello ricevuto, mentre invece, in caso contrario, le antenne sono due (**radar bistatico**), una per trasmettere ed una per ricevere gli echi.

E' chiaro che, nel caso di radar monostatico, coincidono i guadagni G_T e G_R in quanto si riferiscono alla stessa antenna, per cui

$$P_R = P_T \frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} \sigma_0$$

Osservazione sulla "sezione radar"

Nell'*equazione del radar* ricavata nel paragrafo precedente, compare quella che abbiamo definito *sezione radar del bersaglio*, utile per descrivere molte caratteristiche del bersaglio stesso. Implicitamente, *abbiamo ritenuto che questa sezione radar fosse costante con la frequenza, quando invece questo non è rigorosamente vero*: infatti, il bersaglio può essere visto come un riflettore composito, che reirradia, verso il radar, un segnale di ampiezza diversa a seconda si come si compongono i vari termini. Questo è vero, ma è altrettanto vero che, rispetto alla *frequenza centrale*² usata dai radar, che è dell'ordine dei GHz, la banda del segnale trasmesso è invece molto stretta, visto che si tratta di qualche decina di MHz. Da questo punto di vista, è lecito ritenere che la sezione radar sia praticamente costante con la frequenza.

¹ Detto anche in altro modo, la sezione radar del bersaglio è l'area di un riflettore metallico piano, ortogonale al fascio esplorante, che, posto alla medesima distanza R dal bersaglio, darebbe echi di uguale intensità di quelli dati dal bersaglio in questione.

² Come vedremo meglio nel seguito, il segnale trasmesso dal radar è una sinusoide modulata, nel caso più semplice, in ampiezza, per cui la *frequenza centrale* di cui si parla è la frequenza della portante, attorno alla quale si distribuisce l'intero spettro del segnale modulato.

CRITERIO GENERALE DI DIMENSIONAMENTO ENERGETICO

Il sistema radar è abbastanza difficile da dimensionare, soprattutto dal punto di vista energetico: come al solito, l'antenna ricevente non capta solo l'eventuale eco, ma capta anche del rumore (col quale intendiamo tutti gli eventuali segnali captati che siano distinti dall'eco), per cui bisogna distinguere l'eco dal rumore; il problema viene dal fatto che la potenza di segnale P_R è generalmente molto piccola, in quanto essa diminuisce con la quarta potenza della distanza, come indicato dall'equazione del radar. Si tratta, quindi, di una attenuazione molto maggiore di quella di un normale ponte radio, nel quale l'attenuazione cresce con il quadrato della distanza.

Per compensare questa notevole attenuazione, il primo rimedio è ovviamente un aumento della potenza trasmessa P_T , ma non si possono ovviamente superare certi limiti. In secondo luogo, si possono migliorare le "prestazioni" dell'antenna, aumentandone il guadagno direttivo e l'area efficace.

D'altra parte, è impensabile realizzare un sistema radar che riveli qualunque bersaglio (cioè con qualunque valore di σ_0) ed a qualunque distanza R . Al contrario, nelle specifiche iniziali di progetto vengono sempre fissate la **portata**, ossia la massima distanza $R_{\max}$ alla quale il radar deve essere in grado di rivelare un bersaglio, e la sezione radar minima $\sigma_{0,\min}$ che si deve essere in grado di rivelare a tale distanza.

In corrispondenza di tali due valori, la potenza in ricezione è

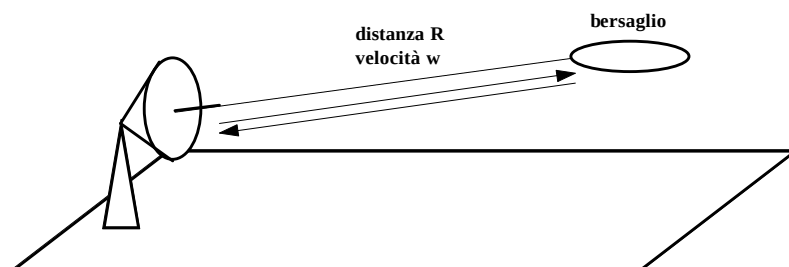
$$P_{R,\min} = P_T \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi)^3 R_{\max}^2} \sigma_{0,\min}$$

Note le caratteristiche delle antenne (cioè G_T e G_R , eventualmente uguali) e nota la lunghezza d'onda del segnale inviato per la rivelazione, si può calcolare il valore di P_T necessario ad ottenere una prefissata potenza in ricezione.

A questo punto, si tratta allora di capire quanto deve valere P_R : dobbiamo cioè determinare il valore minimo di P_R necessario affinché il sistema possa rivelare il bersaglio.

DETERMINAZIONE DELLA DISTANZA RADIALE

Non ci sono invece problemi per quanto riguarda la determinazione della distanza: infatti, una volta accertata la presenza del bersaglio, è immediato valutarne la distanza a partire dal ritardo d'eco, ossia dal tempo che l'eco ha impiegato per tornare indietro. Facciamo riferimento alla figura seguente:



Sia w la velocità con cui si propaga il segnale e sia R la distanza alla quale si trova il bersaglio (che ovviamente deve essere rivelato): dire che τ è il ritardo d'eco, significa che il segnale ha impiegato un tempo di $\tau/2$ per raggiungere il bersaglio; viaggiando a velocità w , la distanza percorsa

è allora $\boxed{R = w \frac{\tau}{2}}$.

E' ovvio che la velocità di propagazione è quella della luce (cioè approssimativamente $3 \cdot 10^8$ m/s).

In tal modo, dunque, con una determinazione geometrica (direzione dell'antenna) ed una determinazione cronometrica (ritardo d'eco) si hanno le due grandezze atte ad individuare il bersaglio in un riferimento polare in cui il polo cade nell'antenna dell'apparato.

DIMENSIONAMENTO DEL SISTEMA: CRITERIO DI NEYMANN-PEARSON

Dobbiamo valutare la potenza minima da richiedere perché il radar possa rivelare l'eventuale bersaglio. Dobbiamo tener conto, come detto, del fatto che il segnale ricevuto è enormemente attenuato (oltre che ritardato di τ) rispetto al segnale trasmesso e del fatto che l'antenna ricevente capta inevitabilmente del rumore. A questo rumore captato va anche aggiunto il rumore derivante dalle apparecchiature che è necessario utilizzare per amplificare il segnale ricevuto¹.

Un presupposto di fondo da considerare è il fatto che, *in ricezione, non interessa ricostruire la forma d'onda ricevuta, ma interessa solo riuscire a decidere, nella maniera più precisa possibile, se il bersaglio è presente o meno*. Consideriamo allora le uniche due situazioni possibili:

- la prima situazione è quella in cui non c'è alcun bersaglio, per cui non c'è alcun eco e il segnale captato dall'antenna è solo rumore (che indichiamo con $n(t)$):

$$s_R(t) = n(t)$$

In questo caso, il sistema deve essere in grado di capire che il segnale ricevuto è solo rumore, ossia che non c'è alcun eco;

- l'altra situazione è invece quella in cui c'è un bersaglio, per cui c'è anche un eco: come detto prima, quest'eco non è altro che il segnale trasmesso $s_T(t)$ che arriva attenuato di una certa quantità k e ritardato di τ , per cui il segnale ricevuto dall'antenna è

$$s_R(t) = k s_T(t - \tau) + n(t)$$

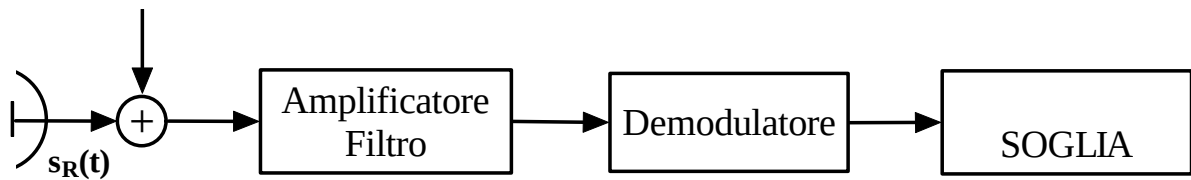
In questo secondo caso, il sistema deve essere in grado di capire che c'è un eco, ossia che è presente un bersaglio.

Come sono fatti i segnali $k s_T(t - \tau)$ e $n(t)$ nel tempo? Il rumore presenta semplicemente delle piccole fluttuazioni casuali simmetriche rispetto allo zero; l'eco, invece, essendo il segnale trasmesso costituito da impulsi di breve durata², presenta un picco in corrispondenza della rivelazione del bersaglio. Allora, il sistema di ricezione, in presenza di questo picco, deve capire che non si tratta di rumore, ma si tratta appunto di un eco. Il modo più semplice per effettuare la decisione (assenza o presenza di bersaglio) è quello di utilizzare una **soglia**: se il segnale ricevuto supera, in un certo istante, il valore della soglia, allora è presente il bersaglio, mentre, se il segnale ricevuto rimane costantemente sotto la soglia, allora non c'è alcun bersaglio.

Da un punto di vista pratico, si usa un sistema di ricezione del tipo schematizzato nella figura seguente:

¹ Sapendo che il segnale ricevuto è sempre molto basso, è ovvia l'importanza di avere un apparato di ricezione quanto meno rumoroso possibile. Il fattore di rumore di tali apparati è generalmente di 1÷3 dB.

² Torneremo più avanti sulla forma d'onda trasmessa dal radar e su quella eventualmente ricevuta in presenza di bersaglio.



Il primo blocco ha il duplice scopo di amplificare (nel modo che vedremo) il segnale ricevuto (al fine di facilitare il successivo sistema a soglia) e di filtrare tutto quello che si trova certamente al di fuori della banda del segnale di interesse.

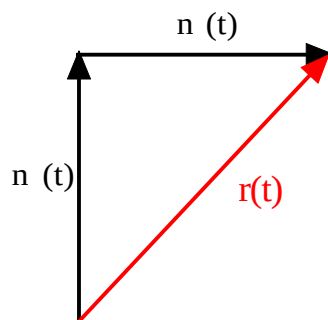
Il secondo blocco è un **demodulatore d'ampiezza**, che serve a misurare l'ampiezza del segnale ricevuto: infatti, come sarà chiaro anche in seguito, del segnale ricevuto non interessa conoscere la forma, ma solo ricavare l'informazione circa la presenza o l'assenza del bersaglio; di conseguenza, al fine di distinguere l'eventuale eco dal rumore captato, ciò che serve è proprio l'ampiezza dell'eco stesso.

La misura effettuata viene inviata ad un **sistema a soglia**, il quale, come detto prima, deve decidere se è presente un bersaglio o meno, rilevando eventuali picchi del segnale ricevuto.

Dobbiamo dunque capire come devono funzionare il demodulatore e l'amplificatore/filtro; in particolare, dobbiamo capire quali prestazioni devono avere tali due sistemi affinché il sistema a soglia funzioni correttamente, cioè sia in grado di effettuare rilevazioni corrette.

Abbiamo già detto che il demodulatore è un misuratore d'ampiezza, quindi un demodulatore AM. Non può trattarsi di un demodulatore coerente, nel quale, cioè, venga utilizzata una oscillazione locale con la stessa fase del segnale ricevuto: la fase del segnale ricevuto, infatti, non è nota a priori, in quanto cambia al variare del ritardo τ . E' necessario perciò usare un **demodulatore ad inviluppo**.

Il punto fondamentale, adesso, è lo studio del rumore captato, al fine di capire come sia fatto il rumore che entra nel sistema a soglia. Il rumore che troviamo in ingresso alle apparecchiature riceventi (cioè in ingresso all'amplificatore-filtro) è il classico rumore bianco con distribuzione gaussiana delle ampiezze. All'uscita dal filtro, tale rumore conserva la propria statistica, ma diventa passa-banda, proprio a causa del filtraggio. Sappiamo, allora, che di tale rumore possiamo dare una descrizione in termini di *componente in fase* con la portante trasmessa e *componente in quadratura* con essa¹:



L'ingresso al demodulatore ad inviluppo è dunque costituito da questo rumore passa-banda, che conveniamo di indicare ancora con $n(t)$, e dall'eventuale segnale corrispondente all'eco.

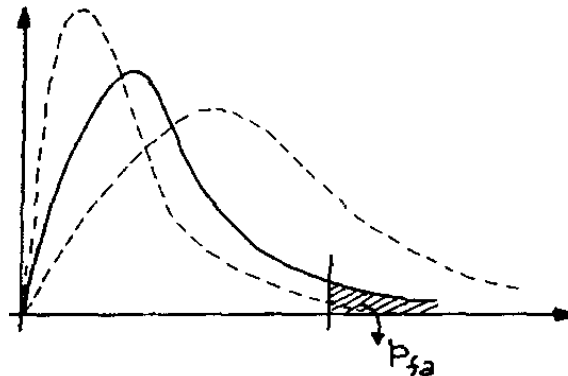
Mettiamoci prima nel caso in cui non c'è eco (cioè il caso rappresentato nella figura precedente), per cui l'ingresso al demodulatore è solo rumore $n(t)$. Sappiamo allora che il demodulatore ad

¹ Ricordiamo che il segnale trasmesso dal radar per effettuare l'esplorazione è sempre una portante modulata da un opportuno segnale: per questo motivo ha senso parlare di componenti del rumore in fase ed in quadratura con la portante trasmessa.

involuppo fornisce, in uscita, la risultante delle due componenti di rumore: l'ampiezza del rumore passa-banda è dunque

$$r(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$$

Dato che $n_c(t)$ e $n_s(t)$ sono entrambe a statistica gaussiana, per definizione $r(t)$ avrà **statistica di Rayleigh**. Quindi, possiamo affermare che, in assenza di bersaglio, il segnale (ad esempio una tensione) in ingresso al sistema a soglia è una variabile aleatoria la cui ampiezza presenta statistica di Rayleigh. La funzione densità di probabilità di questa variabile aleatoria è del tipo illustrato nella figura seguente:



La funzione parte da 0 in corrispondenza del valore 0, dopo di che assomiglia ad una campana (come nel caso della distribuzione gaussiana); essa decresce asintoticamente all'aumentare di x .

A cosa ci serve sapere come è fatta la distribuzione di probabilità di $r(t)$? Ci serve per fissare la soglia del sistema. Infatti, il principio con cui fissare la soglia è quello di garantire che il sistema non indichi alcun bersaglio quando l'unico segnale captato è rumore; essendo il rumore una quantità aleatoria, non possiamo ragionare in modo deterministico, ma solo in modo probabilistico: dobbiamo cioè garantire che, con una certa probabilità, il sistema non rilevi alcun bersaglio in presenza di solo rumore; possiamo anche vedere la cosa al contrario: indicato con l'espressione **falso allarme** l'evento per il quale il sistema segnala la presenza di un bersaglio quando questo invece non c'è, dobbiamo garantire che la probabilità che questo evento si verifichi sia al di sotto di un certo valore tollerabile. Allora, indicata con $p_{F.A.}$ tale probabilità e indicato con $(p_{F.A.})_{MAX}$ il suo valore massimo accettabile, dobbiamo garantire che

$$p_{F.A.} < (p_{F.A.})_{MAX}$$

E' chiaro che, fissato $(p_{F.A.})_{MAX}$, solo il valore della soglia può garantire o meno che questo primo vincolo di progetto sia verificato. Il valore di $p_{F.A.}$ si individua sulla curva della densità di probabilità di $r(t)$, che rappresenta la probabilità condizionata all'evento "**assenza di bersaglio**": si tratta di una *probabilità condizionata* in quanto tale curva indica tutti i possibili valori del segnale in uscita dal filtro nell'ipotesi di partenza che non ci sia alcun bersaglio.

La forma della curva cambia al variare della rumorosità (comunque bassa) delle apparecchiature di ricezione; in particolare, la curva varia al variare della varianza del rumore: essendo l'area sottesa unitaria, essa diventa più alta e più stretta se la rumorosità diminuisce, mentre invece si abbassa e si allarga se la rumorosità aumenta.

Nota la varianza del rumore, cioè nota la forma della curva, si va dunque a individuare il valore di $p_{F.A.}$: indicata con $f(r)$ la densità di probabilità di $r(t)$, avremo che

$$p_{F.A.} = \int_S^{+\infty} f(r) dr$$

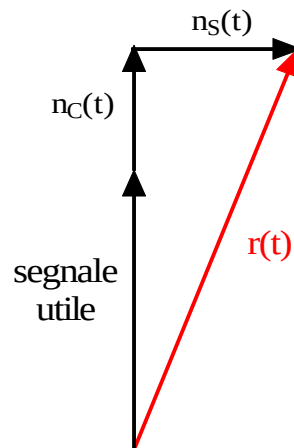
dove S è la soglia da fissare: nota l'espressione di $p_{F.A.}$ in funzione di S , si fissa la soglia in modo che sia soddisfatto il vincolo $p_{F.A.} < (p_{F.A.})_{MAX}$.

In definitiva, quindi, nel dimensionamento del sistema, è necessario definire, oltre ai parametri R_{max} (**portata** del radar) e $\sigma_{0,min}$ (minima sezione radar rilevabile alla massima portata), anche la probabilità $(p_{F.A.})_{MAX}$ di falso allarme tollerabile. E' chiaro che questa va resa piccola quanto più è possibile.

Non è però finita, in quanto bisogna considerare quello che succede quando è effettivamente presente un bersaglio, per cui il sistema di ricezione capta il segnale

$$s_r(t) = k s_T(t - \tau) + n(t)$$

Supponendo che questo stesso segnale arrivi in ingresso al demodulatore (il precedente filtraggio, come già detto, serve solo ad eliminare il rumore al di fuori della banda di interesse), possiamo darne la solita schematizzazione in termini di vettori rotanti:

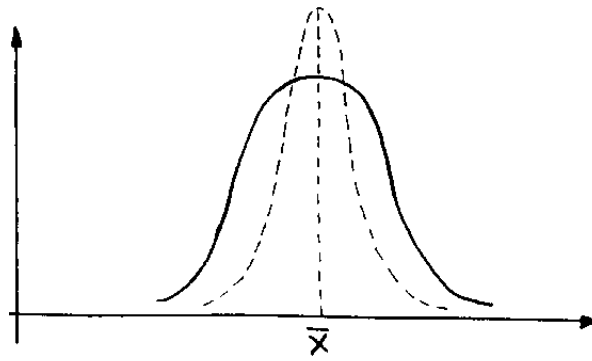


dove per *segnale utile* abbiamo ovviamente inteso il segnale $s_r(t) = k s_T(t - \tau) \cos(\omega_p(t - \tau))$, ossia il segnale modulato ricevuto (è quindi un segnale passa-banda, posto a cavallo della frequenza centrale f_p).

Abbiamo dunque il segnale cui si sommano la componente di rumore in fase e quella in quadratura. L'uscita del demodulatore è ancora una volta data dalla risultante: è quindi un segnale di ampiezza

$$r(t) = \sqrt{(s_r(t) + n_c(t))^2 + n_s^2(t)}$$

La statistica della variabile di uscita non è più una statistica di Rayleigh, ma una **statistica di Rice**, la cui funzione densità di probabilità è indicata nella figura seguente:



La curva è centrata attorno al valore di segnale che si avrebbe in assenza di rumore. L'area sottesa dalla curva è naturalmente sempre unitaria.

Se non ci fosse alcun rumore, l'uscita del demodulatore sarebbe sicuramente (cioè con probabilità pari ad 1) il segnale $s_r(t)$, il che significa che la densità di probabilità di $r(t)$ sarebbe semplicemente un impulso piazzato in corrispondenza del valore x_s dell'ampiezza del segnale $s_r(t)$. Al contrario, la presenza del rumore modifica tale densità di probabilità secondo la curva di Rice prima tracciata. Mettiamoci allora nell'ipotesi, abbastanza realistica, che il termine di segnale sia dominante rispetto ai termini di rumore, per cui risulta

$$r(t) \cong \sqrt{(s_r(t-\tau) + n_c(t))^2} = s_r(t-\tau) + n_c(t)$$

Dato che $n_c(t)$ ha statistica gaussiana, al crescere dell'ampiezza dell'eco il valore x_s tende a crescere e quindi la distribuzione assume sempre più la forma di una gaussiana. Quanto più piccolo è il rumore, tanto più la distribuzione risulterà stretta attorno al valore x_s .

Questo valore x_s dipende dalla potenza con cui torna l'eco all'antenna del radar: più forte è l'eco, maggiore è la tensione all'uscita del demodulatore e quindi maggiore è il valore di x_s .

A questo punto, si pone il seguente problema: mentre prima abbiamo visto che il sistema può sbagliare nel caso dell'evento *falso allarme* (cioè quando interpreta un picco di rumore come un picco del segnale), la seconda possibilità di errore è quella di **mancato bersaglio**: accade cioè che, pure in presenza di eco (quindi di bersaglio), il rumore è tale (per esempio assume un picco negativo) da portare comunque il segnale complessivo $r(t)$ al di sotto della soglia, per cui il sistema non rileva alcun bersaglio quando invece questo è presente. Ecco, allora, un secondo vincolo di progetto: indicata con $p_{M.B.}$ la probabilità dell'evento di mancato bersaglio (cioè la mancata rivelazione di un bersaglio effettivamente presente) e indicato con $(p_{M.B.})_{MAX}$ il suo valore massimo accettabile, dobbiamo garantire che

$$p_{M.B.} < (p_{M.B.})_{MAX}$$

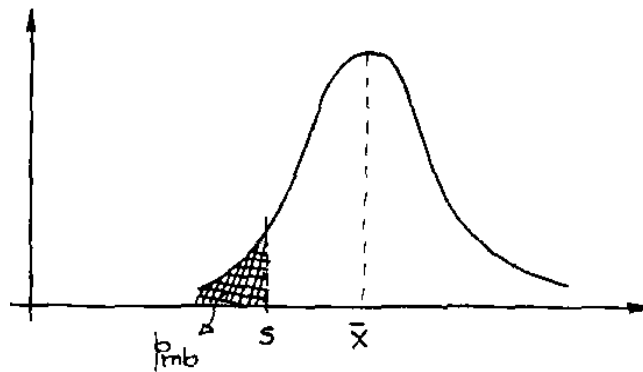
In realtà, in base ai discorsi che faremo tra un attimo, è più conveniente vedere la cosa al contrario: infatti, se $p_{M.B.}$ è la probabilità di mancato bersaglio, allora $1-p_{M.B.}$ è la cosiddetta **probabilità di corretta rilevazione**, cioè la probabilità che il radar rilevi effettivamente il bersaglio presente: ponendo allora $p_{C.R.} = 1-p_{M.B.}$ e quindi anche $(p_{C.R.})_{MIN} = 1-(p_{M.B.})_{MAX}$, dobbiamo garantire che risulti

$$p_{C.R.} > (p_{C.R.})_{MIN}$$

Dobbiamo cioè garantire che il sistema funzioni in un certo numero minimo di situazioni.

E' evidente che non possiamo più agire sulla soglia, che viene univocamente determinata dal vincolo su $(p_{F.A.})_{MAX}$. Non solo: una volta che la soglia sia stata fissata, resta anche *parzialmente determinato* il valore di $p_{C.R.}$, individuabile sulla distribuzione di Rice così come $p_{F.A.}$ era individuabile sulla curva di Rayleigh: indicata con $f_{RICE}(r)$ la densità di probabilità di $r(t)$, risulta infatti

$$p_{C.R.} = 1 - p_{M.B.} = 1 - \int_{-\infty}^S f_{RICE}(r) dr = \int_S^{+\infty} f_{RICE}(r) dr$$



L'altro parametro a nostra disposizione è allora la potenza da trasmettere: infatti, tale potenza determina la forma della curva di Rice e determina anche il valore massimo x_S del segnale utile, per cui determina anche il valore di $p_{C.R.}$. Bisogna quindi fissare, in funzione di R_{max} (portata massima) e $\sigma_{0,min}$ (minima sezione radar rilevabile alla massima portata), la potenza da trasmettere in maniera tale che la potenza dell'eco che torna sia sufficientemente grande (per ottenere x_S grande) e quindi $p_{C.R.}$ risulti superiore ad un valore minimo $(p_{C.R.})_{MIN}$ tollerabile.

In conclusione, *il dimensionamento di un sistema radar dipende, in base ai criteri appena esposti, dal valore dei parametri $(p_{F.A.})_{MAX}$, $(p_{C.R.})_{MIN}$, R_{max} e $\sigma_{0,min}$* . Questo criterio di dimensionamento statistico della soglia di un sistema radar è detto **criterio di Neymann-Pearson**.

E' naturale che si vorrebbe $p_{F.A.} = 0$ (mai un falso allarme) e $p_{C.R.} = 1$ (sempre rilevazione corretta): tuttavia, per avere $p_{F.A.} = 0$ bisognerebbe porre la soglia all'infinito, nel qual caso non si avrebbe mai rilevazione di bersaglio, ossia $p_{C.R.} = 0$; al contrario, per avere $p_{C.R.} = 1$, la soglia andrebbe posta a 0, nel qual caso si avrebbe $p_{F.A.} = 1$. Anche in questo caso, dunque, è necessario un compromesso tra le due specifiche: bisogna garantire che, nella maggior parte dei casi, il sistema non sbagli, ossia rilevi il bersaglio se c'è e non dia una falsa rilevazione quando non c'è.

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE IN INGRESSO AL SISTEMA A SOGLIA

Nei paragrafi precedenti abbiamo capito quali criteri devono essere adottati per il dimensionamento del sistema radar. Abbiamo anche sottolineato l'importanza del filtro posto immediatamente a valle dell'antenna ricevente del radar: tale filtro deve garantire che si possa ricavare, dal segnale ricevuto, l'informazione circa la presenza e l'assenza del bersaglio, per cui deve filtrare il rumore captato in una banda quanto più stretta possibile attorno alla frequenza della portante. Diventa dunque critica la determinazione della funzione di trasferimento di tale filtro.

A tale fine, dobbiamo intanto capire come definire il rapporto segnale-rumore in ingresso al sistema a soglia e quanto tale rapporto deve valere. A tal proposito, abbiamo già osservato che la

decisione circa la presenza o l'assenza del bersaglio deve essere presa nell'istante (che indicheremo con t_m) in cui l'uscita del demodulatore assume il valore più alto possibile. Allora, *una definizione sensata del rapporto S/N in ingresso al sistema a soglia prevede il confronto tra la potenza di picco del segnale utile e la potenza media di rumore*¹:

$$\frac{S}{N}_{\text{soglia}} = \frac{P_{S,\text{picco}}}{P_{N,\text{media}}}$$

Perché il sistema lavori nel modo migliore possibile, questo rapporto va reso massimo: vedremo allora che la massimizzazione del rapporto S/N porta alla definizione ottimale della funzione di trasferimento del filtro.

E' subito opportuno osservare che non avrebbe senso massimizzare soltanto la quantità $P_{S,\text{picco}}$, cioè massimizzare solo il segnale in uscita: infatti, la funzione di trasferimento che si troverebbe in questo caso potrebbe massimizzare, nell'istante di lettura considerato, anche il rumore, abbassando così le prestazioni in termini di rapporto S/N. Dobbiamo invece massimizzare il rapporto $P_{S,\text{picco}} / P_{N,\text{media}}$ nel suo complesso.

Cominciamo a calcolare $P_{S,\text{picco}}$: abbiamo detto che il segnale utile che giunge in ingresso al filtro è $k s_T(t - \tau)$, ossia una copia attenuata e ritardata del segnale trasmesso; se $S_T(f)$ è lo spettro del segnale trasmesso, lo spettro del segnale ricevuto sarà $k S_T(f) e^{-j\omega\tau}$. Questo spettro viene moltiplicato per la funzione di trasferimento $H(f)$ del filtro², per cui l'uscita è un segnale avente spettro

$$S_u(f) = k H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau}$$

L'andamento nel tempo di questo segnale si ottiene antitrasformando:

$$s_u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(f) e^{j\omega t} df = k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} df$$

A noi interessa la potenza di picco di questo segnale: supponendo allora che tale picco venga raggiunto nell'istante t_m (che quindi sarà anche l'istante in cui andrà effettuata la decisione circa l'assenza o la presenza del bersaglio), possiamo scrivere che

$$P_{S,\text{picco}} = |s_u(t_m)|^2 = \left| k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_m} df \right|^2$$

Per quanto riguarda, invece, il rumore, sappiamo che la sua densità spettrale di potenza disponibile è costante, per tutte le frequenze, sul valore h_n : tale rumore entra nel filtro, da cui esce con una densità spettrale di potenza disponibile che vale $h_{nu} = h_n |H(f)|^2$. Integrando tra 0 ed ∞ (ricordiamo che h_n è riferita alla trasformata monolaterale), otteniamo la potenza media di rumore in uscita dal filtro:

¹ Ricordiamo che, nel caso della demodulazione ad involuppo, il valore di picco del segnale è lo stesso prima e dopo la demodulazione.

² $H(f)$ rappresenta, nei casi, pratici, la funzione di trasferimento della parte lineare del ricevitore, il quale congloberà spesso una notevole amplificazione

$$P_{N,media} = \int_0^{+\infty} h_{nu} df = \int_0^{+\infty} h_n |H(f)|^2 df = h_n \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Volendo passare alla trasformata bilatera (per uniformità col numeratore), ci basta porre

$$P_{N,media} = \frac{h_n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Possiamo dunque formalizzare l'espressione del rapporto S/N:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{soglia} = \frac{\left| k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\frac{h_n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}$$

In base alla nota **disuguaglianza di Schwarz**, se abbiamo due funzioni $f(f)$ e $g(f)$ in generale complesse, risulta

$$\left| \int f(f) \cdot g(f) df \right|^2 \leq \int |f(f)|^2 df \int |g(f)|^2 df$$

dove il segno di uguaglianza vale solo se le due funzioni sono una complessa coniugata dell'altra (cioè $f(f) = g^*(f)$).

Possiamo allora applicare questa disuguaglianza nel nostro caso: possiamo infatti porre $f(f) = kS_T(f)$ e $g(f) = H(f)$, in modo da ottenere

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{soglia} = \frac{\left| k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\frac{h_n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |kS_T(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{h_n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |kS_T(f)|^2 df}{\frac{h_n}{2}}$$

Se vogliamo l'uguaglianza, dobbiamo imporre che sia $f(f) = g^*(f)$, ossia $\boxed{H(f) = k'S_T^*(f)}$: la *funzione di trasferimento del filtro deve cioè essere proporzionale al complesso coniugato dello spettro del segnale trasmesso dal radar*¹. Un filtro così fatto è un **filtro adattato**.

Nell'ipotesi, dunque, di utilizzare un filtro adattato, il rapporto S/N in ingresso al sistema a soglia è dato da

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{soglia} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |kS_T(f)|^2 df}{\frac{h_n}{2}}$$

¹ E' chiaro che la proporzionalità tra $H(f)$ e $S_T^*(f)$ deve essere secondo un coefficiente qualsiasi.

Il valore massimo di $\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}}$ si verifica dunque, tornando indietro con le espressioni trovate, quando $t_m = \tau$, ossia annullando l'esponentiale a numeratore dell'espressione della potenza di segnale:

$$\left(\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}} \right)_{\text{MAX}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |kS_T(f)|^2 df}{\frac{h_n}{2}}$$

Abbiamo dunque ottenuto due risultati:

- il primo è che l'uso di un filtro adattato $H(f) = k'S_T^*(f)$ consente di ottenere il massimo rapporto S/N in ingresso al ricevitore;
- il secondo è che il massimo valore di tale rapporto S/N si ottiene per $t_m = \tau$: quindi, *l'istante ottimale in cui effettuare la decisione circa la presenza o l'assenza del bersaglio è proprio l'istante in cui l'eco torna indietro.*

E' inoltre importante osservare che, in base al **teorema di Parseval**, la quantità $E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} |kS_T(f)|^2 df$ rappresenta proprio l'energia del segnale ricevuto $ks_T(t - \tau)$:

$$\left(\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}} \right)_{\text{MAX}} = \frac{E_R}{\frac{h_n}{2}}$$

Questa formula dice dunque quanto vale il rapporto S/N nell'ipotesi di adottare il filtro adattato in ricezione. Essa mostra che, a parità di rumore captato, il rapporto S/N è tanto migliore quanto maggiore è la forma d'onda del segnale ricevuto. Questo è un concetto fondamentale che utilizzeremo nei discorsi seguenti.

Per concludere, vediamo quale sia il valore di picco del segnale in uscita dal filtro adattato: avevamo in precedenza trovato che tale segnale, in termini di antitrasformata di Fourier, era

$$s_u(t) = k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} df$$

Ponendo $H(f) = k'S_T^*(f)$, otteniamo

$$s_u(t) = kk' \int_{-\infty}^{+\infty} |S_T(f)|^2 e^{j\omega(t-\tau)} df = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |S_T(f)|^2 e^{j\omega(t-\tau)} df$$

Il picco che questo segnale assume all'istante $t = \tau$ viene usato dal sistema a soglia per la decisione circa l'assenza o la presenza del bersaglio: tale picco è

$$(s_u(t))_{\text{MAX}} = s_u(\tau) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |S_T(f)|^2 df = \alpha E_T$$

L'integrale che compare in questa espressione è l'energia del segnale trasmesso, che quindi diventa determinante ai fini del funzionamento del sistema e, in particolare, ai fini della decisione finale circa l'assenza o la presenza del bersaglio.

FUNZIONAMENTO QUALITATIVO DEL FILTRO ADATTATO

Nel paragrafo precedente siamo pervenuti alla definizione del filtro adattato mediante dei passaggi matematici. Vediamo allora come arrivare allo stesso filtro mediante un discorso di natura più qualitativa.

Quando il radar trasmette il segnale $s_T(t)$ per la rilevazione dell'eventuale bersaglio, $s_T(t)$ ha una descrizione attraverso il proprio spettro (cioè come sovrapposizione di sinusoidi di ampiezza e fase opportuna). In ricezione, in presenza di eco, giunge il segnale $ks_T(t-\tau)$ (sommato al rumore): *da questo segnale non interessa ricostruire $s_T(t)$, mentre interessa solo ottenere la massima ampiezza possibile in corrispondenza almeno di un istante*. Per ottenere questo risultato, è sufficiente che, nell'istante desiderato, tutte le componenti armoniche raggiungano il valore massimo e questo accade, ovviamente, se hanno tutte la stessa fase¹. Quindi, sostanzialmente, il filtro adattato deve rifasare tutte le componenti spettrali di $ks_T(t-\tau)$.

Questa operazione di rifasamento può essere però effettuata solo in un istante ben preciso, in quanto le sinusoidi non sono in rapporto armonico tra loro: se così non fosse, ci potrebbero essere più istanti in cui il rifasamento sarebbe costruttivo.

Da un punto di vista più analitico, se esprimiamo lo spettro del segnale trasmesso come

$$S_T(f) = |S_T(f)|e^{j\langle S_T(f) \rangle}$$

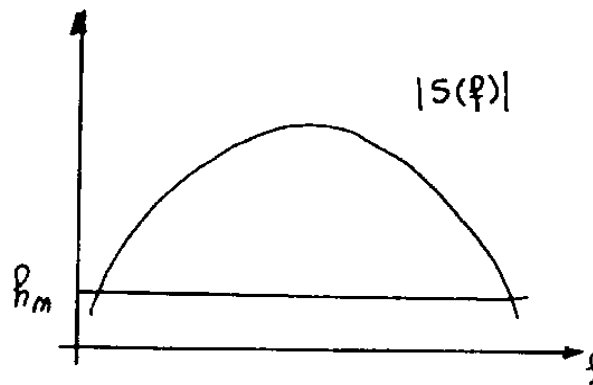
L'unico modo con cui ottenere il rifasamento è quello di adottare, per la funzione di trasferimento del filtro, una caratteristica di fase $e^{-j\langle S_T(f) \rangle}$: ponendo allora $H(f) = |H(f)|e^{-j\langle S_T(f) \rangle}$, l'uscita del filtro è

$$S_U(f) = |S_T(f)||H(f)|$$

Si ha cioè un azzeramento delle fasi, in modo che i moduli si sommino all'istante $t=0$.

Resta adesso da definire la caratteristica di ampiezza del filtro. A questo scopo, bisogna confrontare lo spettro del segnale utile ricevuto con lo spettro bianco del rumore sovrapposto. *Al fine di massimizzare il rapporto tra l'ampiezza massima del segnale e il valore efficace del rumore, è evidente che bisogna pesare maggiormente i termini spettrali più puliti del segnale, ossia quelli con ampiezza maggiore.*

¹ Si pensi, per esempio, alla somma di due seni, a frequenza diversa, di ampiezza rispettivamente X ed Y: se essi presentano un certo sfasamento, la somma avrà un certo andamento temporale; se essi sono in fase, invece, la loro somma, nell'istante $t=0$ e in istanti successivi periodici, sarà sicuramente $X+Y$, cioè il valore massimo possibile.



A questo deve servire il filtro: per pesare le componenti spettrali maggiori, il modulo del filtro deve coincidere o almeno essere proporzionale al modulo dello spettro del segnale stesso, per cui $|H(f)| = k'S_T(f)$ e quindi

$$H(f) = k'S_T(f)e^{-j\angle S_T(f)}$$

Ancora una volta abbiamo ottenuto il **filtro adattato**: esso fornisce il massimo rapporto S/N a parità di energia E_R della forma d'onda ricevuta o, in modo equivalente, a parità di potenza media del segnale ricevuto.

E' opportuno osservare una cosa: è ovvio che il filtro adattato, così come ha un certo effetto sul segnale ricevuto, ha anche un effetto sul rumore sovrapposto. Per quanto riguarda il modulo, si tratterà di una semplice amplificazione o attenuazione dell'ampiezza delle componenti di rumore; per quanto riguarda, invece, la fase, è ovvio che, essendo casuale la fase delle componenti di rumore in ingresso al filtro, essa rimane ancora casuale all'uscita del filtro. In altre parole, l'operazione di rifasamento ha effetto solo sul segnale e non sul rumore.

CASO DEL RUMORE COLORATO

I discorsi fatti nei paragrafi precedenti, che hanno portato alla definizione del filtro adattato, valgono nell'ipotesi fondamentale che il rumore $n(t)$ sovrapposto al segnale in ricezione sia un rumore (gaussiano) bianco, cioè con densità spettrale di potenza $h_n(f)$ costante su tutte le frequenze. Questo non è proprio il caso reale, in quanto $h_n(f)$ è in generale funzione della frequenza, per cui si parla di **rumore colorato**. Ci chiediamo allora come deve essere fatto il filtro affinché il rapporto S/N in ricezione sia il massimo possibile in presenza di rumore colorato.

Il concetto su cui basarsi è del tutto analogo a quello seguito nel caso di rumore bianco: se le componenti di rumore hanno ampiezza diversa alle varie frequenze, è chiaro che le componenti più "fastidiose" sono quelle di ampiezza maggiore; allora, così come prima abbiamo detto che è importante dare maggiore peso alle componenti di segnale di ampiezza maggiore, in modo analogo dobbiamo in questo caso dare il peso maggiore alle componenti che hanno un rapporto tra ampiezza dello spettro del segnale e ampiezza dello spettro del rumore più grande possibile. Vediamo la cosa da un punto di vista matematico.

Intanto, l'espressione trovata in precedenza per il rapporto S/N non cambia, salvo il fatto di considerare $h_n(f)$ variabile con la frequenza:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}} = \frac{\left| k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_T(f) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(f) |H(f)|^2 df}$$

Osserviamo che non compare più il termine $\frac{1}{2}$ a denominatore per il semplice fatto che con $h_n(f)$ intendiamo direttamente la *densità spettrale bilatera* del rumore.

Se, nella funzione integranda a numeratore, moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{h_n(f)}$, otteniamo

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H(f) \sqrt{h_n(f)} \right) \frac{k S_T(f)}{\sqrt{h_n(f)}} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(f) |H(f)|^2 df} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H(f) \sqrt{h_n(f)} \right) \frac{k S_T(f)}{\sqrt{h_n(f)}} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(f) |H(f)|^2 df}$$

Possiamo nuovamente applicare la disuguaglianza di Schwarz: possiamo infatti porre $f(f) = \frac{k S_T(f)}{\sqrt{h_n(f)}}$ e $g(f) = H(f) \sqrt{h_n(f)}$, in modo da ottenere

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |k S_T(f)|^2 \frac{1}{h_n(f)} df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(f) |H(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(f) |H(f)|^2 df} = \int_{-\infty}^{+\infty} |k S_T(f)|^2 \frac{1}{h_n(f)} df$$

Ancora una volta, quindi, il massimo valore di questo rapporto si ottiene per $t_m = \tau$:

$$\left(\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{soglia}} \right)_{\text{MAX}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |k S_T(f)|^2 \frac{1}{h_n(f)} df$$

Questo è dunque il rapporto S/N massimo ottenibile, in ricezione, in presenza di rumore colorato. Lo abbiamo ottenuto applicando la disuguaglianza di Schwarz, per la quale il segno di uguaglianza vale solo se le due funzioni $f(f) = \frac{k S_T(f)}{\sqrt{h_n(f)}}$ e $g(f) = H(f) \sqrt{h_n(f)}$ sono, a meno di un coefficiente di proporzionalità, una la complessa coniugata dell'altra:

$$H(f) \sqrt{h_n(f)} = \left(\frac{k S_T(f)}{\sqrt{h_n(f)}} \right)^* = \frac{k}{\sqrt{h_n(f)}} S_T^*(f) \longrightarrow H(f) = k' \frac{S_T^*(f)}{h_n(f)}$$

Esprimendo lo spettro di $S_T(f)$ in termini di modulo e fase, possiamo dunque concludere che il filtro ottimale, in presenza di rumore colorato, è

$$H(f) = k' \frac{|S_T(f)|}{h_n(f)} e^{-j\angle(S_T(f))}$$

Il discorso è dunque del tutto analogo a quello fatto in presenza del rumore bianco, con la differenza che il filtro è adattato sia al segnale sia al rumore, in quanto tiene conto anche della "coloritura" del rumore e quindi pesa maggiormente le componenti di segnale più grandi rispetto alle componenti di rumore alla stessa frequenza.

RISOLUZIONE AZIMUTALE DEL RADAR

Abbiamo in precedenza trovato che il sistema a soglia funziona andando a valutare, nell'istante $t_m = \tau$, il valore assunto dal segnale in uscita dal filtro, che è poi identico al picco del segnale in uscita del demodulatore visto che la demodulazione stessa è ad inviluppo:

$$(s_u(t))_{MAX} = s_u(\tau) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |S_T(f)|^2 df = \alpha E_T$$

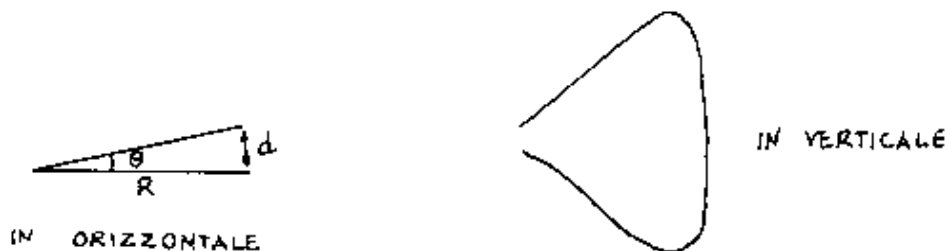
In base a questa espressione, già precedentemente commentata, il picco che il sistema a soglia va a misurare, al fine di decidere se è presente o meno un bersaglio, è direttamente proporzionale all'energia del segnale trasmesso, che quindi diventa determinante ai fini del funzionamento del sistema. Da questo punto di vista, quindi, sembrerebbe non importare tanto il tipo di forma d'onda trasmessa, quanto la sua energia. In altre parole, sono del tutto equivalenti le due forme d'onda rappresentate nella figura seguente:



L'importante è che l'area sottesa sia uguale nei due casi.

Queste considerazioni valgono però con riferimento alla sola **risoluzione radiometrica** del radar, ossia appunto alla capacità del sistema di distinguere l'eco dal rumore (per bersagli situati alla massima distanza possibile, cioè a quella che abbiamo definito *portata* del radar)

Un'altra fondamentale caratteristica di un radar riguarda, invece, la cosiddetta **risoluzione geometrica** (o anche *spaziale*), ossia la capacità del radar di distinguere (cioè appunto risolvere) due bersagli vicini tra di loro. Da questo punto di vista, è di notevole importanza il diagramma di irradiazione dell'antenna trasmittente del radar, ossia l'andamento del *fascio di irradiazione*. Per un **radar di avvistamento**, tale fascio di irradiazione è fatto come nella figura seguente:



Il fascio è molto stretto in azimuth (cioè in orizzontale), mentre ha forma a ventaglio nella direzione verticale¹. Dato che l'antenna ruota, con una certa velocità angolare, intorno ad un perno, si riesce a coprire tutto lo spazio aereo circostante, fornendo una descrizione bidimensionale della distribuzione dei bersagli. In base al tempo τ di ritorno dell'eventuale eco, è così possibile fornire la distanza radiale R del bersaglio dall'antenna. Se si volesse fornire anche la quota del bersaglio, basterebbe usare un radar con diagramma di irradiazione dell'antenna trasmittente duale rispetto al precedente: dovrebbe essere stretto in verticale e largo in orizzontale.

Il modo con cui fissare la risoluzione geometrica del radar è molto semplice: indicata con θ l'apertura angolare del fascio di irradiazione dell'antenna trasmittente, a distanza radiale R il fascio coprirà una distanza d tale che

$$\theta = \arctg \frac{d}{R}$$

Allora, fissata la distanza minima $d_{\min}$ alla quale si vuole che due bersagli siano distinti (in orizzontale), resta definita la massima apertura angolare del fascio:

$$\theta_{\max} = \arctg \frac{d_{\min}}{R}$$

L'antenna deve dunque avere dimensioni geometriche tali da garantire questa apertura angolare massima e quindi la corrispondente **risoluzione geometrica azimuthale**.

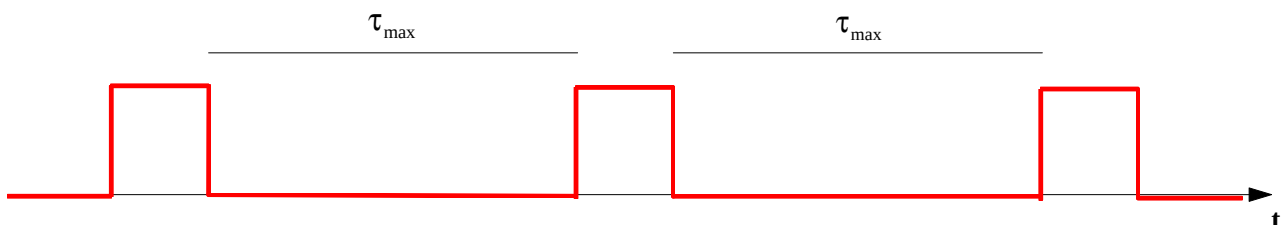
Abbiamo già detto più volte che è relativamente facile valutare la distanza alla quale si trova un eventuale bersaglio: se c è la velocità della luce (cioè quella con cui si propaga il segnale) e τ è il ritardo d'eco, la distanza R alla quale si trova il bersaglio vale

$$R = c \frac{\tau}{2}$$

dove si è tenuto conto del fatto che il segnale percorre un percorso complessivo di lunghezza $2R$.

Questo discorso vale solo nel caso di un singolo bersaglio. Nel caso di due distinti bersagli, le cose sono più complicate.

In primo luogo, supponiamo che il nostro radar trasmetta degli impulsi rettangolari (**radar impulsato**) ad una certa distanza temporale τ uno dall'altro:



Perché la forma d'onda trasmessa è di questo tipo? Il motivo è semplice: il radar invia il primo impulso rettangolare, dopo di che cessa ogni trasmissione ed aspetta l'arrivo di un eventuale eco; nel momento in cui c'è la garanzia che questo eco non può più arrivare, può partire il secondo impulso e

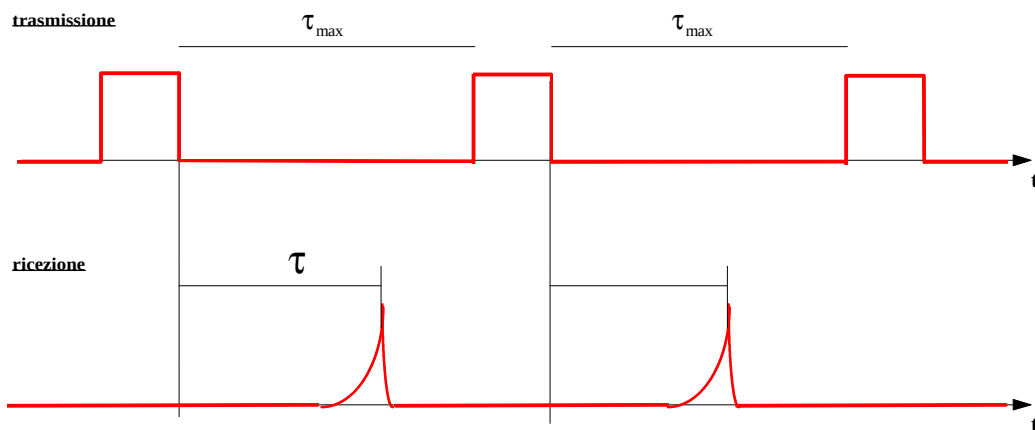
¹ A proposito della forma del fascio in direzione verticale, è opportuno dire che, specialmente per i radar di avvistamento, si fa in modo che il fascio non copra il terreno, che è fonte di numerose riflessioni. Questo ha come inconveniente quello di non poter rilevare i bersagli che si muovono sul terreno stesso oppure che si trovano a distanza piccola da esso.

così via. Il criterio in base al quale scegliere il valore $\tau_{\max}$ (cioè l'istante in cui c'è la garanzia che non possa più giungere l'eco relativo all'ultimo impulso trasmesso) è legato alla portata del radar: infatti, il radar è dimensionato per individuare la presenza di un eventuale bersaglio a distanza massima $R_{\max}$; ciò significa, essendo $R = c \frac{\tau}{2}$, che il massimo ritardo d'eco possibile è

$$\tau_{\max} = \frac{2R_{\max}}{c}$$

Se, dopo il tempo $\tau_{\max}$, non è giunto alcun eco, significa che non c'è alcun bersaglio (a meno della inevitabile probabilità di mancata rivelazione), per cui è possibile inviare l'impulso successivo. Come si vede, quindi, il cosiddetto **periodo di ripetizione** degli impulsi $\tau_{\max}$ dipende dalla portata $R_{\max}$ del radar.

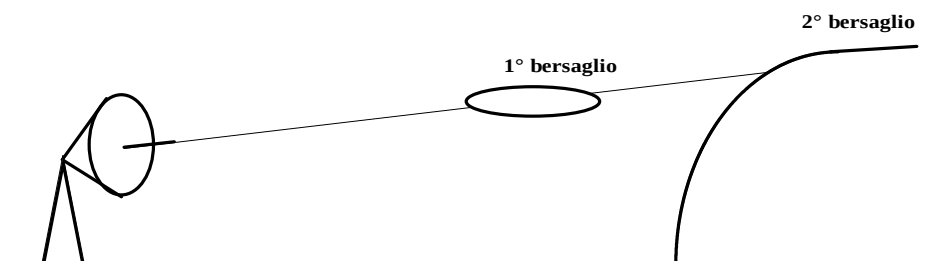
Premesso questo, ci chiediamo cosa accade se è presente un eco. Se è presente un eco, che arriva con un ritardo τ , sappiamo, in base a come abbiamo dimensionato il filtro in ricezione, che il segnale in uscita dal filtro stesso presenta un picco τ secondi dopo l'invio dell'ultimo impulso:



(in figura è stato riportato un segnale in ricezione estremamente pulito, ma ovviamente vanno considerate le fluttuazioni casuali dovute al rumore).

Anche se torneremo su questo aspetto in seguito, è chiaro che, se il bersaglio si muove verso il radar, l'eco relativo all'impulso successivo presenterà un ritardo più piccolo di τ e così via per i rilevamenti successivi, come appunto illustrato in figura.

Supponiamo adesso che ci siano due bersagli in corrispondenza della stessa posizione angolare, come ad esempio un aereo (primo bersaglio) posto tra il radar ed una montagna (secondo bersaglio):



In questo caso, ci saranno due echi, che supponiamo portino la stessa potenza (il che è poco realistico nel caso dell'aereo e della montagna, visto che quest'ultima riflette molto di più, mentre è verosimile per due aerei di simili dimensioni):



Se un bersaglio è fisso e l'altro è mobile, l'eco del primo giungerà sempre con lo stesso ritardo, mentre l'altro con ritardo diverso (sempre minore se si sta avvicinando al radar o sempre maggiore in caso contrario). Se invece i due bersagli, sempre alla stessa posizione angolare, sono entrambi mobili e si muovono nella stessa direzione (o si avvicinano o si allontanano entrambi) ed alla stessa velocità, la distanza temporale degli echi rimane invariata.

Se i due bersagli si avvicinano tra di loro, invece, anche i picchi tendono ad avvicinarsi, fino al momento in cui non sarà più possibile distinguerli. Quindi, non solo dobbiamo tener conto della massima distanza $R_{\max}$ alla quale il radar è in grado di individuare un bersaglio, ma anche di altri due parametri: la massima e la minima distanza alla quale il radar è in grado di distinguere i due bersagli.

La distanza minima al di sotto della quale i due bersagli non sono più distinguibili dipende dalla forma d'onda all'uscita del filtro di ricezione: in particolare, vedremo che la capacità risolutiva è tanto maggiore quanto più stretta (nel tempo) è la forma d'onda, in quanto tanto più stretti risultano i picchi.

Questa considerazione ci porta nuovamente al filtro in ricezione: dal punto di vista del funzionamento del sistema a soglia, abbiamo visto che il filtro adattato risolve il problema, in quanto garantisce sempre il massimo valore del segnale negli istanti di lettura; per quanto riguarda, poi, tale massimo valore del segnale negli istanti di misura, abbiamo visto che dipende dall'energia del segnale trasmesso. Adesso dobbiamo vedere se il filtro adattato viene anche incontro alle esigenze di risoluzione geometrica.

Interpretiamo allora nel tempo le operazioni fatte con il filtro. Abbiamo visto, in precedenza, che il segnale in uscita dal filtro è

$$s_u(t) = k \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \underbrace{S_T(f)}_{S_R(f)} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} df$$

Se sostituiamo l'espressione $H(f) = S_T^*(f)$ della funzione di trasferimento del filtro (a meno di una costante di proporzionalità e nell'ipotesi di rumore bianco), otteniamo un segnale che, a meno delle costanti di proporzionalità, è

$$s_u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_T^*(f) S_R(f) e^{j\omega t} df$$

Abbiamo cioè ottenuto $s_u(t)$ come antitrasformata del suo spettro, che è $S_T^*(f)S_R(f)$: ci ricordiamo, allora, della proprietà per cui un prodotto in frequenza equivale ad una convoluzione nel tempo, per cui possiamo scrivere che

$$s_u(t) = F^{-1}[S_T^*(f)] * F^{-1}[S_R(f)] = F^{-1}[S_T^*(f)] * s_R(t)$$

In base ad un'altra nota proprietà della trasformata di Fourier, risulta $S_T^*(f) = S_T(-f)$, per cui

$$s_u(t) = F^{-1}[S_T(-f)] * s_R(t)$$

Sempre per le proprietà della trasformata di Fourier, se $S_T(f)$ è lo spettro di $s_T(t)$, allora $S_T(-f)$ è lo spettro di $s_T(-t)$, per cui

$$s_u(t) = s_T(-t) * s_R(t)$$

Adesso, sappiamo che $s_R(t) = k s_T(t - \tau)$: se poniamo $\alpha = t - \tau$, questa diventa $s_R(\alpha + \tau) = k s_T(\alpha)$; successivamente, possiamo porre $\alpha = -t$, per cui concludiamo che $s_R(\tau - t) = k s_T(-t)$. Abbiamo dunque, a meno della costante di proporzionalità k , che

$$s_u(t) = s_R(\tau - t) * s_R(t) = s_R(t) * s_R(\tau - t)$$

In base a questa espressione, abbiamo in pratica ricavato che la *funzione di risposta all'impulso* del filtro adattato è $h(t) = s_R(\tau - t)$.

Applicando ora la definizione di *convoluzione* tra due segnali, abbiamo che

$$s_u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - x) s_R(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s_R(x - t + \tau) s_R(x) dx$$

Se adesso poniamo $\alpha = t - \tau$, abbiamo che

$$s_u(\tau + \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_R(x - \alpha) s_R(x) dx$$

Infine, calcolando l'uscita del filtro all'istante $t = \tau = t_m$, risulta $\alpha = 0$ e quindi

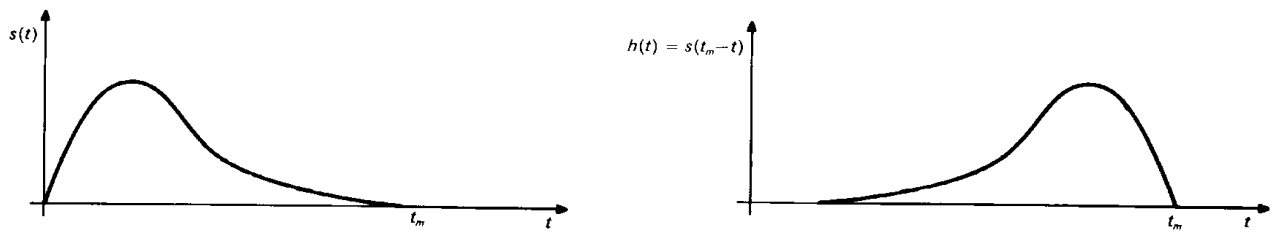
$$s_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_R(x) s_R(x) dx$$

Questo risultato mostra che la forma d'onda in uscita dal filtro adattato è uguale alla funzione di autocorrelazione¹ del segnale ricevuto $s_R(t)$ calcolata in τ .

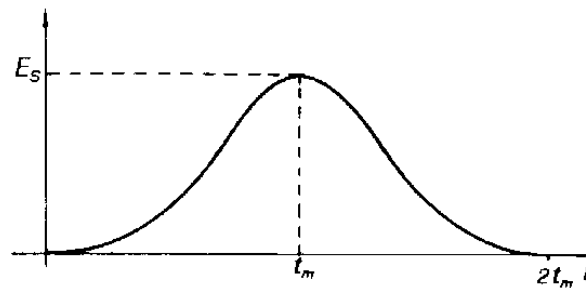
Cerchiamo allora di farci una idea di come sono fatte le forme d'onda coinvolte.

Ad esempio, nella figura seguente è indicato una possibile forma d'onda del segnale ricevuto (indicata con $s(t)$) e la corrispondente risposta impulsiva $h(t)$ del filtro:

¹ Ricordiamo che la funzione di autocorrelazione di un segnale di energia gode di due importanti proprietà: in primo luogo, se calcolata in $t=0$, essa rappresenta l'energia del segnale; in secondo luogo, se il segnale considerato è reale, la sua funzione di autocorrelazione risulta essere una funzione pari.

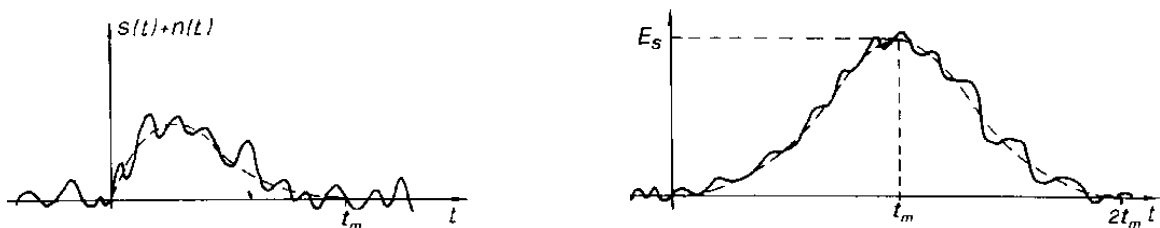


Si verifica, in presenza di queste forme d'onda, che l'uscita del filtro è fatta nel modo seguente:

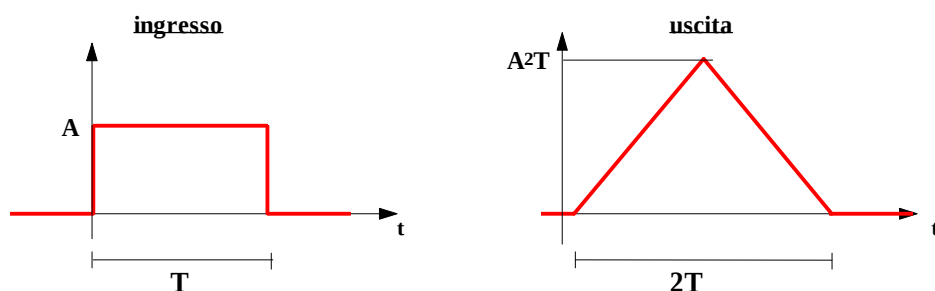


Come volevamo, essa presenta il suo massimo valore in corrispondenza dell'istante di lettura t_m .

Ovviamente, questa è la forma d'onda pulita ideale, mentre, nella realtà, bisogna comunque considerare il rumore ad essa sovrapposto. Le forme d'onda, in ingresso ed in uscita al filtro, sono allora del tipo seguente:

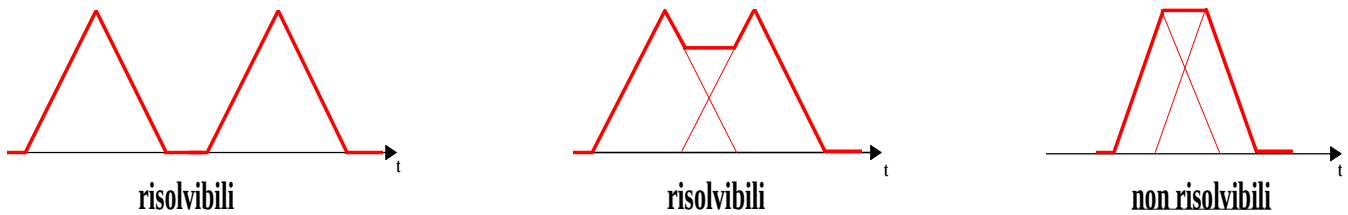


E' facile verificare¹ che, se il segnale ricevuto $s_R(t)$ ha forma d'onda rettangolare di durata T , il risultato di quell'integrale, ossia il segnale in uscita dal filtro, è un'onda triangolare:



Allora, dobbiamo capire cosa accade, in presenza di due bersagli, all'uscita dal filtro: avremo evidentemente due triangoli ad una certa distanza tra loro. E' evidente che la capacità risolutiva geometrica del radar, in questo caso (cioè nel caso di forma d'onda rettangolare), dipende dalla posizione reciproca dei due triangoli:

¹ Consultare l'appendice



I bersagli sono distinguibili fino a quando sono distinti i corrispondenti triangoli in uscita dal filtro. Sono risolvibili anche quando i triangoli si sovrappongono parzialmente, a patto però che la forma d'onda complessiva mantenga evidenti i picchi. Quando la sovrapposizione è tale da non rendere più distinguibili i picchi, i bersagli non sono più risolvibili.

Quindi, con forme d'onda trasmesse di tipo rettangolare (o ad involuppo rettangolare) di durata T e con filtraggio adattato in ricezione, la capacità di discriminare nel tempo è pari proprio a T . Detto in altre parole, sono discriminabili echi a distanza T uno dall'altro: a questa distanza T corrisponde una

distanza geometrica tra i due bersagli pari a $\ell = c \frac{T}{2}$. Questa è dunque la minima distanza radiale alla quale i due bersagli devono trovarsi uno dall'altro affinché il radar possa distinguerli.

E' evidente, dunque, che la distanza ℓ appena calcolata dipende dalla durata T degli impulsi trasmessi dal radar: per avere un radar con la capacità di discriminare bersagli molto vicini, è necessario ridurre la durata T degli impulsi. Questa durata, però influenza anche la capacità del radar di accorgersi o meno della presenza di bersagli: infatti, abbiamo visto che conta, a tal fine, l'energia della forma d'onda ricevuta (e quindi anche di quella trasmessa), per cui è ovvio che, se riduciamo la durata di ciascun impulso, dobbiamo necessariamente aumentarne l'ampiezza, cioè il suo valore di picco, cioè la potenza di picco da trasmettere.

Quindi, siamo arrivati alla conclusione per cui, *se vogliamo avere una buona risoluzione radiometrica del radar e vogliamo, al contempo, una buona capacità risolutiva geometrica, dobbiamo ridurre la durata T degli impulsi e aumentare la potenza di picco in trasmissione*. E' ovvio, però, che tale potenza non è aumentabile a piacere, in quanto ci sono problemi, oltre che di natura economica¹, di natura tecnologica.

A questo proposito, si definisce **duty-cycle** il rapporto tra il tempo T in cui il trasmettitore trasmette ed il tempo t_p di ripetizione degli impulsi:

$$\text{duty cycle} = \frac{T}{t_p} = \frac{T}{\tau_{\max} + T} \cong \frac{T}{\tau_{\max}}$$

dove ricordiamo che $\tau_{\max}$ è la distanza temporale tra un impulso e l'altro.

Si verifica allora che i dispositivi amplificatori non possono lavorare con un duty-cycle piccolo a piacere, per cui non è possibile pensare di ridurre troppo il valore di tale rapporto.

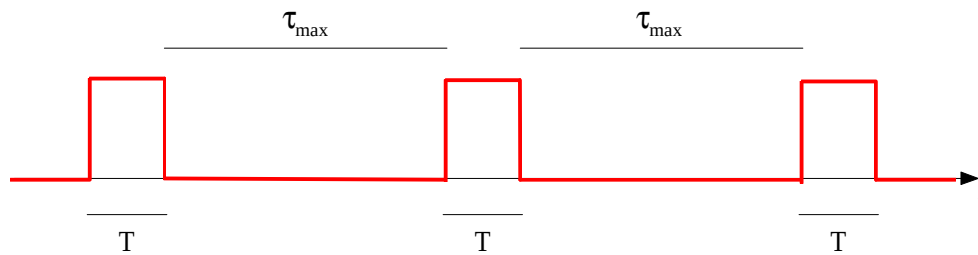
Le limitazioni sul duty-cycle diventano dunque limitazioni sul valore di T e quindi anche sulla risoluzione geometrica ottenibile dal radar.

Riassumiamo dicendo che, *mentre la risoluzione radiometrica dipende dall'energia in ingresso al filtro (adattato) in ricezione, la risoluzione geometrica dipende dalla durata della forma d'onda trasmessa*.

¹ Mentre nelle applicazioni militari generalmente non si bada a spese, in applicazioni di altra natura vanno tenuti i conto anche i costi, che possono limitare la potenza trasmissibile.

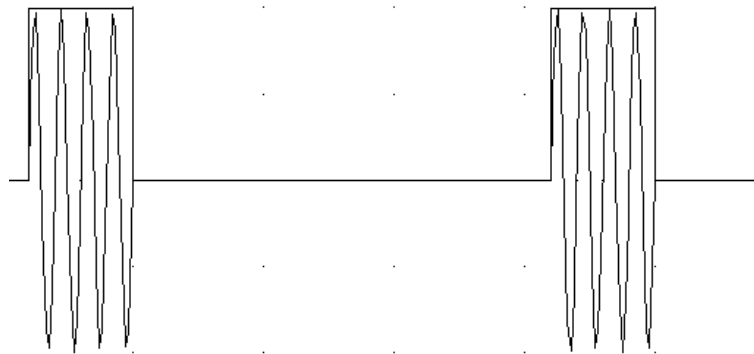
Osservazione sul segnale trasmesso

Abbiamo finora detto la forma d'onda trasmessa del radar è un successione di impulsi opportunamente distanziati tra loro:



In realtà, le cose non stanno proprio così, in quanto, come già detto in precedenza, bisogna tener conto che il mezzo trasmissivo utilizzato (cioè l'atmosfera terrestre) è un tipico mezzo passa-banda, che "accetta" cioè segnali solo entro una determinata banda (*banda passante* del mezzo trasmissivo). Allora, una volta generata la sequenza la sequenza di impulsi indicata nella figura precedente, essa va necessariamente traslata in frequenza, il che è ottenibile solo tramite una modulazione. La sequenza va dunque a modulare in ampiezza una portante ad una determinata frequenza (che in precedenza abbiamo definito **frequenza centrale** del radar). Ovviamente, la modulazione di ampiezza è tale che la sequenza di impulsi rettangolari rappresenti l'involuppo del segnale modulato, motivo per cui i discorsi dei paragrafi precedenti conservano intatta la loro validità.

Il risultato della modulazione di ampiezza di una sinusoidale, a frequenza f_p , mediante una sequenza di impulsi del tipo della figura precedente è una forma d'onda del tipo seguente:

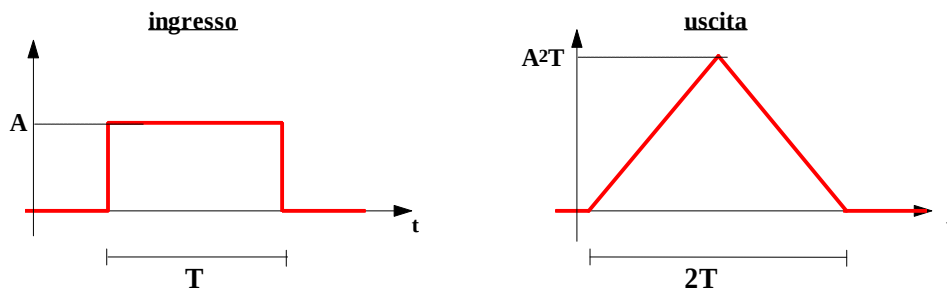


(in figura è mostrato sia il segnale trasmesso, costituito appunto dagli impulsi sinusoidali, sia il suo involuppo, che coincide con gli impulsi rettangolari).

A meno di attenuazione e ritardo, questa è dunque la forma d'onda che giunge all'antenna ricevente del radar in presenza di un bersaglio.

In ricezione, abbiamo detto in precedenza che può rendersi necessaria una preventiva traslazione del segnale in bassa frequenza, onde effettuare le successive operazioni (filtraggio adattato e demodulazione) a frequenze più basse: è bene, infatti, ricordare che l'operazione di traslazione in frequenza non altera il contenuto informativo del segnale, per cui, ad esempio, il filtraggio adattato può essere effettuato direttamente a radiofrequenza oppure dopo la traslazione a bassa frequenza.

Consideriamo sempre quello che succede tra l'ingresso e l'uscita del filtro adattato, con riferimento alla figura seguente:



In base a questa figura, quanto più la durata T dell'impulso è piccola, tanto più stretta è la base del triangolo e tanto più basso è il suo vertice. Si capisce, allora, come del resto già detto in precedenza, che una durata T piccola è in contrasto con i requisiti circa la risoluzione radiometrica: fissata l'ampiezza A degli impulsi, quanto più basso è T , tanto minore è l'energia ricevuta E_R o, in alternativa, tanto più basso è il valore di picco del segnale in uscita dal filtro e in ingresso al sistema a soglia.

D'altra parte, abbiamo visto che, in presenza di due bersagli radialmente vicini tra loro, sarebbe opportuno avere triangoli, in uscita dal filtro, quanto più stretti possibili, in modo da facilitarne la distinguibilità.

Come possiamo, allora, venire incontro a queste esigenze contrastanti? La risposta consiste *nel ricercare delle forme d'onda che abbiamo due caratteristiche: elevata energia in ingresso al filtro adattato, in modo da facilitare la risoluzione radiometrica, ed autocorrelazione stretta all'uscita dallo stesso filtro, in modo da facilitare la risoluzione geometrica.*

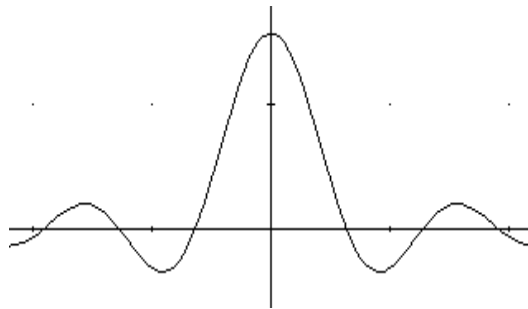
Se la forma d'onda in uscita dal filtro deve essere molto stretta, il suo spettro deve essere molto largo. Dato che il filtro non può aumentare la banda del segnale che riceve in ingresso, è necessario che anche tale segnale abbia spettro largo. Dato, però, che questo segnale deve anche essere abbastanza lungo, nel tempo, per convogliare la massima energia possibile, bisogna trovare un altro modo per allargarne lo spettro.

Il modo consiste nel sovrapporre, alla forma d'onda trasmessa, delle variazioni quanto più complicate possibile: questo, infatti, corrisponde ad introdurre componenti armoniche ad alta frequenza e quindi corrisponde ad un allargamento della banda (ricordiamo che la banda è sempre proporzionale all'informazione trasmessa). E' chiaro che questo ampliamento non deve essere casuale, ma deve essere tale da portare dei benefici in ricezione, ossia, in definitiva, una correlazione, dopo il filtraggio adattato, quanto più stretta possibile attorno al massimo.

Come otteniamo, nella pratica, il suddetto ampliamento dello spettro? La cosa teoricamente più semplice da fare sarebbe quella di usare, come forma d'onda trasmessa, un rumore bianco, preventivamente filtrato nella banda che si vuole utilizzare nel sistema: infatti, si può verificare che la autocorrelazione del rumore bianco fornisce un impulso, per cui l'autocorrelazione del rumore bianco filtrato sarà una funzione anch'essa molto stretta, tanto più prossima ad un impulso quanto maggiore è la banda su cui è stato effettuato il filtraggio.

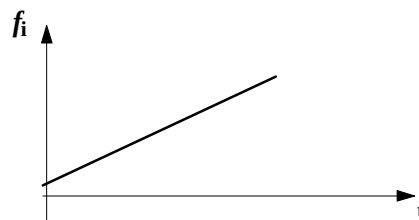
Ovviamente, non possiamo trasmettere il rumore bianco, ma possiamo ugualmente ricorrere a segnali che siano simili, per alcune proprietà, al rumore bianco. Per esempio, si può trasmettere, nel periodo T , una sinusoide la cui fase vari di 180° a passo regolare con frequenza sufficientemente elevata. Per ottenere questo, basta effettuare due successive modulazioni: prima si modula in ampiezza la portante mediante un impulso rettangolare molto lungo e poi si modula di fase la portante modulata mediante una forma rettangolare molto più stretta. L'esito di questo procedimento è proprio un allargamento della banda.

Subentra però un altro problema: non è possibile effettuare la modulazione di fase mediante un segnale perfettamente periodico come l'onda quadra. Il motivo è che, se operassimo tale modulazione di fase, otterremmo, in uscita dal filtro, un segnale con un massimo molto pronunciato, ma con degli altri massimi secondari via via più piccoli:



Questi massimi potrebbero essere interpretati come altri echi, dando così luogo ad una inopportuna *moltiplicazione dei bersagli*. Si ricorre allora ad una particolare onda quadra, sempre per la modulazione di fase, nella quale il passaggio dal livello alto a quello basso avvenga in modo pseudo-casuale e non con regolarità. Questo fa sì che i massimi secondari risultino praticamente eliminati.

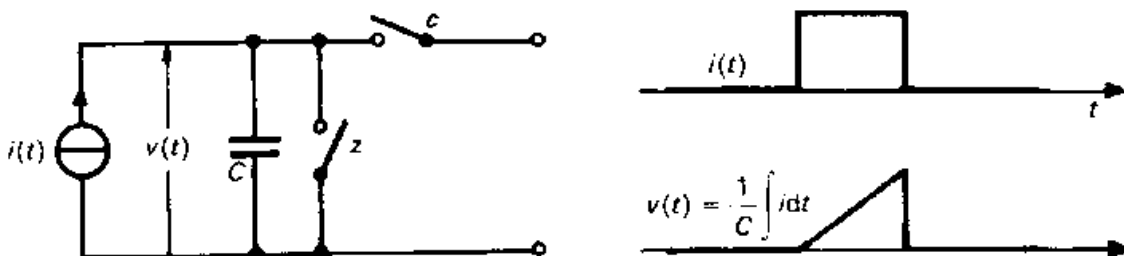
Si tratta, però, di una soluzione molto complicata e costosa da realizzare, per cui ne sono state individuate altre. Una di queste, più economica della precedente, consiste nell'effettuare una modulazione angolare molto più regolare, usando un *segnale CHIRP* (ossia ...). In pratica, *la sinusoide viene modulata linearmente di frequenza, nel senso che la sua frequenza istantanea viene fatta aumentare nel tempo in modo lineare*:



Filtro adattato ad un impulso rettangolare

Abbiamo visto che la forma d'onda trasmessa del radar è sostanzialmente rappresentata da impulsi rettangolari trasmessi ad intervalli di tempo regolari. A meno di attenuazioni e ritardi, questi stessi impulsi giungono al radar in ricezione, per cui costituiscono il segnale ricevuto $s_R(t)$. Il filtro in ricezione deve essere allora adattato a tali impulsi, cioè deve avere funzione di trasferimento proporzionale al complesso coniugato dello spettro di $s_R(t)$.

Nella pratica, il filtro adattato ad un impulso rettangolare può essere realizzato, molto facilmente, nel modo seguente:



Si tratta, semplicemente, di un integratore, la cui uscita, quando parte l'impulso di ampiezza A , è notoriamente rappresentata da una rampa di pendenza A/C :

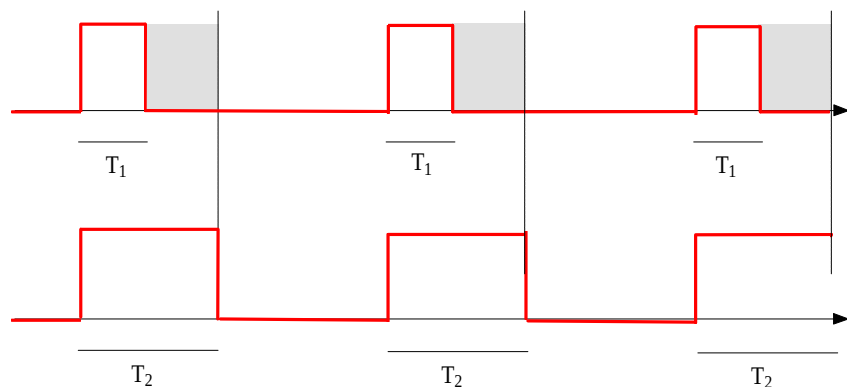
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\alpha) d\alpha = \frac{1}{C} \int_0^t A d\alpha = \frac{A}{C} t$$

Non appena l'impulso di ingresso termina, viene azionato il campionatore c , in modo da fornire in uscita il picco del segnale necessario per il successivo sistema a soglia. Dopo il campionamento, l'uscita $v(t)$ dell'integratore viene azzerata semplicemente cortocircuitando i terminali di uscita.

Osservazione: risoluzione temporale

Nei paragrafi precedenti abbiamo valutato la durata T degli impulsi rettangolari trasmessi da radar dal punto di vista della risoluzione radiometrica e della risoluzione radiale: per la prima è opportuno avere T elevato, in modo da avere una maggiore energia E_R in ricezione, mentre per la seconda è opportuno avere T basso, in modo da ottenere, in uscita dal filtro di ricezione, triangoli molto stretti attorno al valore massimo. C'è un'altra problematica rispetto alla quale conviene avere T piccolo.

Confrontiamo, per esempio, le seguenti due sequenze di impulsi rettangolari:

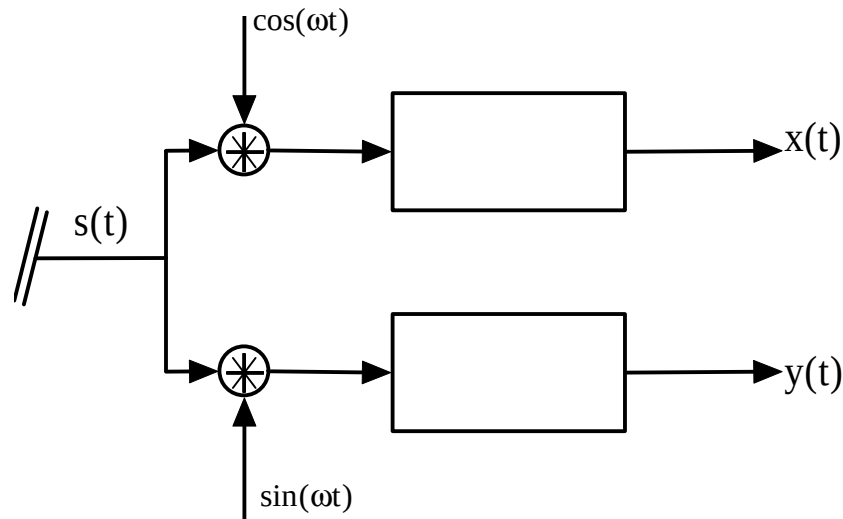


Gli impulsi hanno uguale ampiezza, ma diversa durata. E' intuitivo capire che la prima forma d'onda è preferibile rispetto alla seconda, in quanto il corrispondente radar "vede" più lontano, nel senso che tollera per l'eco un maggiore ritardo. La minore durata degli impulsi consente dunque una migliore **risoluzione temporale** dei bersagli.

MOVING TARGET INDICATOR

Fino ad ora abbiamo implicitamente fatto riferimento ad un demodulatore incoerente (tipicamente ad un demodulatore ad involuppo): il motivo, come già detto, per cui non si può effettuare la demodulazione coerente è che, in un sistema radar, l'eventuale eco arriva con una fase che non è possibile conoscere, dato che il ritardo da cui essa dipende è variabile.

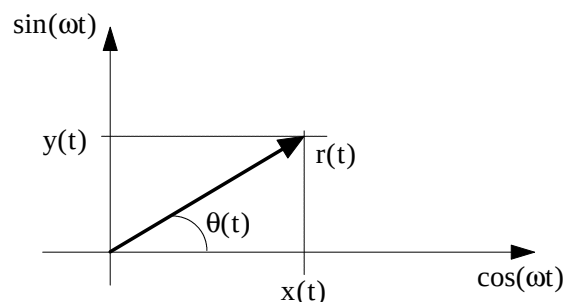
In realtà, invece, si può comunque pensare di effettuare una demodulazione coerente, usando uno schema del tipo seguente:



Si tratta del classico schema di demodulazione con due oscillazioni locali (alla frequenza della portante) in quadratura, che sfrutta l'*inviluppo complesso*: con questo schema è comunque possibile effettuare la demodulazione ad inviluppo, in quanto basta calcolare, dati i due segnali in uscita $x(t)$ ed $y(t)$, la loro risultante:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\theta(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$$



In effetti, se servisse solo conoscere l'inviluppo del segnale, basterebbe un demodulatore ad inviluppo. Questo schema si rende invece molto utile in quei casi in cui è utile conoscere anche la fase del segnale in arrivo.

La fase del segnale in arrivo può essere di primaria importanza per distinguere un eventuale bersaglio in movimento da altri bersagli fissi: pensiamo ad esempio alla necessità di distinguere un aereo in movimento dalle montagne vicino alle quali l'apparecchio si muove. Come abbiamo già avuto modo di dire, la conformazione territoriale intorno al radar può creare disturbi, in quanto la presenza di montagne o altri ostacoli riflettenti crea echi indesiderati. Nel caso in cui si effettui la semplice demodulazione ad inviluppo dell'eco, sarebbe impossibile distinguere l'eco del bersaglio di interesse dall'eco dei bersagli fissi (montagne).

Conoscendo, invece, la fase del segnale ricevuto, si può fare il seguente ragionamento: l'eco di una montagna (o quello semplicemente del terreno) risulta essere sicuramente molto più forte dell'eco di un eventuale aereo; anziché confrontare le ampiezze dei due echi, si può individuare quello dell'aereo confrontando le fasi: infatti, mentre l'eco della montagna rimane sostanzialmente invariato tra due scansioni successive (si tenga presente che, dopo un millisecondo, l'antenna è ruotata di pochissimo), l'eco del bersaglio mobile cambia sicuramente la propria fase (dato appunto

il movimento); *effettuando allora la differenza, tenendo conto della fase, tra i segnali ottenuti da due scansioni successive, è possibile cancellare l'eco dei bersagli fissi, riuscendo così ad isolare l'eco del bersaglio in movimento.*

Da un punto di vista pratico, è molto facile realizzare uno schema di questo tipo: infatti, basta utilizzare, in ricezione, una **linea di ritardo**, che conservi il segnale relativo ad un intervallo di tempo e consenta poi di confrontarlo con quello relativo all'intervallo temporale successivo.

A questo punto, è bene osservare che tutto questo discorso vale solo se il bersaglio si avvicina o si allontana dal radar o, in generale, se presenta una componente radiale di velocità: infatti, se esso segue una traiettoria circolare intorno all'antenna, il suo eco non subisce alcuna variazione di fase in due scansioni successive, per cui viene anch'esso cancellato dalla differenza. Solo in questo caso, il bersaglio mobile risulta dunque invisibile al radar.

Questo sistema di riconoscimento dei bersagli mobili prende il nome di **Moving Targeting Indicator**, ossia appunto *indicatore di bersaglio mobile*.

FENOMENO DELLO SHIFT DOPPLER

In tutti i discorsi precedenti abbiamo utilizzato, in ricezione, un filtro adattato, che, come visto, presenta indubbi vantaggi dal punto di vista della risoluzione radiometrica del radar. In realtà, i discorsi fatti vanno perfezionati, in quanto non abbiamo mai tenuto conto, di fatto, del movimento del eventuale bersaglio. Tra l'altro, non è detto che sia solo il bersaglio a muoversi, in quanto anche il radar può trovarsi su un apparato mobile (si pensi ad una nave). In generale, bisogna tener conto del movimento relativo dell'antenna del radar rispetto all'eventuale bersaglio.

La distanza tra il bersaglio ed il sensore del radar sarà dunque una funzione del tempo e aumenterà o diminuirà a seconda che i due si allontanino o si avvicinino:

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 + v_R t && \text{se il bersaglio è in allontanamento} \\ R(t) &= R_0 - v_R t && \text{se il bersaglio è in avvicinamento} \end{aligned}$$

Abbiamo qui indicato con R_0 la distanza all'istante iniziale $t=0$ (arbitrario) e con v_R la velocità radiale all'istante t considerato. Chiaramente, il termine $v_R t$ di variazione della distanza è funzione solo della componente di velocità del bersaglio in direzione radiale, cioè lungo la congiungente antenna-bersaglio. Questo, come vedremo adesso, crea dei problemi.

In primo luogo, abbiamo già detto più volte che il ritardo con cui l'eco torna al ricevitore è legato alla distanza del bersaglio dalla relazione $\tau=2R/c$. Se R è funzione del tempo, lo è anche τ :

$$\tau(t) = 2 \frac{R(t)}{c} = 2 \frac{R_0 + v_R t}{c}$$

(dove v_R va presa positiva se il bersaglio si allontana e negativa in caso contrario).

Consideriamo allora l'effetto di tale ritardo su una generica componente spettrale del segnale: in assenza di ritardo, la componente sarebbe $A_k \sin(\omega_k t + \phi_k)$, mentre, in presenza di ritardo $\tau(t)$, essa diventa

$$\begin{aligned} A_k \sin(\omega_k (t - \tau(t)) + \phi_k) &= A_k \sin\left(\omega_k \left(t - 2 \frac{R_0 + v_R t}{c}\right) + \phi_k\right) = A_k \sin\left(\omega_k t - 2\omega_k \frac{R_0 + v_R t}{c} + \phi_k\right) = \\ &= A_k \sin\left(\omega_k t + \phi_k - \frac{2\omega_k R_0}{c} - \frac{2\omega_k v_R t}{c}\right) = A_k \sin\left(\omega_k \left(1 - \frac{2v_R}{c}\right) t + \phi_k - \frac{2\omega_k R_0}{c}\right) \end{aligned}$$

In base a questa espressione, il ritardo provoca una rotazione $-\frac{2\omega_k R_0}{c}$ della fase della sinusoide rispetto al valore ϕ_k in assenza di ritardo ed anche una variazione di frequenza, che passa da ω_k a $\omega_k - \frac{2v_R}{c}\omega_k$. Si ottiene, cioè, una variazione $\Delta\omega = \frac{2v_R}{c}\omega_k$ di pulsazione.

Questo è il cosiddetto **effetto Doppler**: *se una sorgente sinusoidale si muove rispetto all'osservatore, questo percepisce la sinusoide spostata in frequenza*: se il bersaglio si allontana ($v_R > 0$), la frequenza diminuisce, mentre, se il bersaglio si avvicina ($v_R < 0$), la frequenza aumenta¹.

Nel nostro caso, dunque, il segnale che torna al radar ha le componenti spettrali traslate in frequenza di una quantità legata sia a v_R/c sia a ω_k : tali componenti vengono dunque traslate di entità diverse a seconda della loro frequenza, per cui non si ha solo una semplice traslazione di frequenza dell'intero spettro; al contrario, l'effetto Doppler cambia completamente la forma del segnale.

Tuttavia, se consideriamo che la banda relativa è piccola, possiamo comunque assimilare l'effetto Doppler ad una semplice traslazione in frequenza dello spettro: analiticamente, quindi, se $s_T(t)$ è il segnale trasmesso, si può assumere che il segnale ricevuto sia

$$s_R(t) = k s_T(t - \tau) \cos(\omega_D t)$$

dove il Coseno a frequenza ω_D modella appunto lo spostamento in frequenza.

Ad ogni modo, il filtro adattato non è più quello ottimale: lo sarebbe solo se il bersaglio si muovesse lungo una traiettoria circolare centrata nell'antenna (in quanto sarebbe $v_R = 0$), il che non è pensabile.

Dobbiamo allora ideare un altro sistema, fermo restando, però, che il filtro adattato è comunque quello ottimale per la risoluzione radiometrica. Si può allora procedere nel modo seguente: in primo luogo, è possibile valutare il *massimo shift Doppler in avvicinamento o in allontanamento* (velocità solo radiale), in modo da conoscere la massima variazione $\Delta\omega_{\max}$ di pulsazione (il cosiddetto *intervallo dello shift Doppler*). Nota questa quantità, andremo a disporre una batteria di filtri, ciascuno adattato ad una diversa versione del segnale trasmesso: ogni versione sarà ottenuta sottoponendo il segnale a entità discrete di shift Doppler entro l'intervallo atteso $\Delta\omega_{\max}$.

Quando arriva il segnale, ciascun filtro darà una propria uscita, ma l'uscita di valore massimo sarà quella del filtro che risulta meglio adattato al segnale ricevuto; tramite un semplice confronto, tale uscita viene selezionata, ottenendo così un duplice risultato: da un lato, si ha una stima ottimale della distanza, proprio perché è stato selezionato il filtro meglio adattato, e, dall'altro, si ottiene anche una stima abbastanza precisa dello shift Doppler. Questa è utile, ad esempio, per valutare la componente radiale della velocità del bersaglio.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>

¹ Il fatto che la frequenza aumenti quando il bersaglio si avvicina spiega perché il suono di una sirena o il fischio di un treno sono più acuti quando il mezzo in questione si avvicina all'osservatore. Nel caso delle onde luminose, l'effetto Doppler provoca variazioni di colore: all'aumento di frequenza (avvicinamento) corrisponde uno spostamento verso l'estremità violetta dello spettro, mentre alla diminuzione della frequenza (allontanamento) corrisponde uno spostamento verso l'estremità rossa. Proprio sull'effetto Doppler sono basati, per esempio, i rilevatori di velocità: il rilevatore emette microonde, aspetta la loro riflessione da parte dell'oggetto osservato e misura il loro spostamento di frequenza, in modo da risalire alla velocità.