

Appunti di Comunicazioni Elettriche

Capitolo 7

Trasmissione numerica - Parte II

Scelta del filtro in ricezione.....	1
<i>Osservazione sulle caratteristiche del mezzo trasmissivo.....</i>	9
<i>Dimensionamento in assenza di filtro adattato</i>	10
Effetto di disturbi generici	12
Introduzione	12
<i>Cenni alla trasmissione di dati su canali analogici.....</i>	13
Calcolo della probabilità media di errore	13
Sistemi multilivello.....	17
Introduzione	17
<i>Osservazione: uso della codifica di Grey</i>	20
Dimensionamento di un sistema multilivello	20
Osservazione sull'equiprobabilità dei simboli	24

SCELTA DEL FILTRO IN RICEZIONE

Nei precedenti paragrafi, abbiamo seguito un criterio di dimensionamento basato sull'ipotesi che il filtro in ricezione fosse un *filtro adattato*: sotto questa ipotesi, il rapporto segnale/rumore all'uscita del filtro è legato ad una quantità (E_R =energia ricevuta) all'ingresso del filtro stesso dalla relazione

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \frac{E_R}{h_n / 2}$$

Ci chiediamo adesso se il filtro adattato sia in effetti quello ottimale. Vedremo che non è così.

Cominciamo a ricordare che il sistema funziona tanto meglio quanto più le forme d'onda in uscita dal filtro si approssimano a forme d'onda ad intersimbolo nullo¹. Scegliendo, ad esempio, forme d'onda di Nyquist, abbiamo anche visto che, una volta fissato il roll off δ , nell'ipotesi di usare il filtro adattato risulta automaticamente fissato il modulo dello spettro del segnale che deve arrivare in ingresso al filtro: questo significa che, a meno della caratteristica di fase (che sappiamo di poter scegliere in modo da minimizzare il fattore di picco), in trasmissione siamo costretti a trasmettere delle forme d'onda con una ben precisa fisionomia. Nel caso in cui il filtro non riceva forme d'onda con questa fisionomia, allora non sarà più adattato e quindi le forme d'onda in uscita dal filtro stesso non saranno più ad intersimbolo nullo.

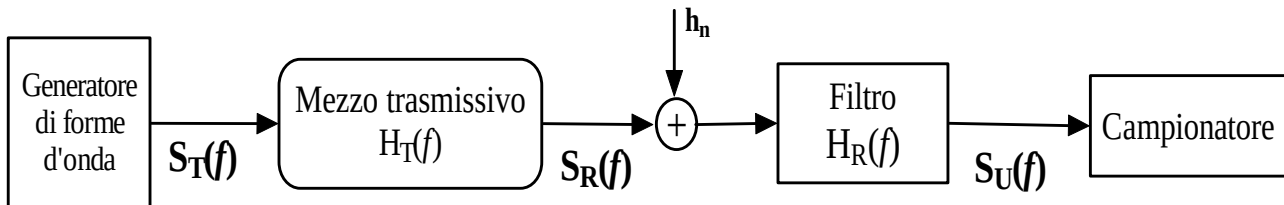
Quindi, un primo importante problema del filtro adattato è che esso è adattato solo a delle predefinite forme d'onda, che non necessariamente possiamo o vogliamo trasmettere.

¹ Parliamo di "approssimazione" in quanto, nella pratica, non è mai possibile ottenere forme d'onda che siano a zeri perfettamente equidistanti, come del resto non è mai possibile ottenere degli istanti di campionamento distanziati ugualmente tra di loro.

In secondo luogo, il dimensionamento del sistema, facendo uso del filtro adattato, si basa sulla ottimizzazione della potenza media in ricezione: abbiamo infatti detto che il filtro adattato è ottimo nel senso che fornisce il massimo rapporto segnale/rumore (o, equivalentemente, la minima probabilità di errore) a parità di potenza media ricevuta (supponendo che il rumore sovrapposto sia bianco). Il fatto è che il parametro limitante, nel dimensionamento di un sistema di trasmissione, non è generalmente la potenza media, ma la potenza di picco. Allora, nel momento in cui la potenza media non è più il parametro limitante, non ha più senso fare un dimensionamento che tenti di ottimizzare le prestazioni proprio in termini di potenza media. Non solo, ma sappiamo che l'unica forma d'onda che permette di usare, con il massimo di efficienza, gli amplificatori in trasmissione è la forma d'onda rettangolare che oscilla tra due valori estremi di tensione: per questa forma d'onda in trasmissione, il filtro non è adattato.

In base a queste considerazioni, andiamo a ripetere i nostri ragionamenti fissando una determinata forma d'onda (rettangolo) in trasmissione e determinando la funzione di trasferimento del filtro necessaria per ottenere, all'uscita del filtro stesso, forme d'onda ad intersimbolo nullo (o approssimativamente nullo).

Indichiamo con $S_T(f)$ lo spettro del segnale che, in trasmissione, inviamo sul mezzo trasmissivo. Indichiamo inoltre che $H_T(f)$ è la funzione di trasferimento del mezzo trasmissivo: si tratta di un parametro che, in generale, ci è noto o comunque può essere misurato. All'uscita del mezzo trasmissivo, abbiamo un segnale con spettro $S_R(f)$. A questo segnale si somma un rumore, che supponiamo sia bianco (gaussiano) con densità spettrale (monolaterale) pari ad $h_n = kT$. La somma di questi due segnali giunge in ingresso al filtro di ricezione, che ha funzione di trasferimento $H_R(f)$ e produce in uscita un segnale con spettro $S_U(f)$. Stiamo dunque facendo riferimento allo schema indicato nella figura seguente:



Abbiamo detto che vogliamo fissare le forme d'onda in trasmissione: consideriamo allora forme d'onda rettangolari di altezza A e durata τ . Sappiamo bene che lo spettro di ciascuna di queste forme d'onda è del tipo

$$S_T(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

(questo spettro è relativo ad un impulso rettangolare posizionato simmetricamente rispetto all'origine dei tempi; se l'impulso fosse invece traslato rispetto all'origine dei tempi, basterebbe introdurre l'operatore ritardo).

La forma d'onda all'uscita del mezzo trasmissivo avrà dunque spettro

$$S_R(f) = S_T(f)H_T(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)$$

Questo segnale entra nel filtro di ricezione e produce in uscita un segnale avente spettro

$$S_U(f) = S_R(f)H_R(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)H_R(f)$$

Il nostro scopo è quello di calcolare il rapporto S/N all'uscita del generico filtro di ricezione, in modo poi da confrontarlo con quello che si otterrebbe se il filtro fosse adattato. Possiamo allora ripetere gli stessi ragionamenti già fatti in precedenza.

Intanto, ricordiamo ancora una volta che a noi interessa misurare, in uscita dal filtro, il picco del segnale, che supponiamo si ottenga nell'istante t_m . Allora, il rapporto S/N da considerare è riferito al confronto *tra la potenza di picco del segnale utile e la potenza media di rumore*:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{OUT FILTRO}} = \frac{P_{S,\text{picco}}}{P_{N,\text{media}}}$$

Cominciamo a calcolare $P_{S,\text{picco}}$. Se $S_U(f)$ è lo spettro del segnale in uscita dal filtro, il corrispondente andamento temporale si ottiene antitrasformando:

$$s_U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_U(f) e^{j\omega t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)H_R(f) e^{j\omega t} df = A\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)H_R(f) e^{j\omega t} df$$

A noi interessa la potenza di picco di questo segnale: supponendo che tale picco venga raggiunto nell'istante t_m , possiamo scrivere che

$$P_{S,\text{picco}} = |s_U(t_m)|^2 = \left| A\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2$$

Per quanto riguarda, invece, il rumore, sappiamo che la sua densità spettrale di potenza è costante, per tutte le frequenze, sul valore h_n (rumore bianco): tale rumore entra nel filtro, da cui esce con una densità spettrale (monolaterale) di potenza $h_{nu} = h_n |H_R(f)|^2$. Integrando tra 0 ed ∞ , otteniamo la potenza media di rumore in uscita dal filtro:

$$P_{N,\text{media}} = \int_0^{+\infty} h_{nu} df = \int_0^{+\infty} h_n |H_R(f)|^2 df = h_n \int_0^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$$

Volendo passare alla trasformata bilatera (per uniformità col numeratore), ci basta porre

$$P_{N,\text{media}} = \frac{h_n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$$

Possiamo dunque formalizzare l'espressione del rapporto S/N:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{FILTRO}}^{\text{OUT}} = \frac{\left| A\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f) H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\frac{h_n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df} = \frac{A^2 \tau^2}{\frac{h_n}{2}} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f) H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

Moltiplichiamo e dividiamo il denominatore per il periodo di cifra $T=1/f_s$:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{FILTRO}}^{\text{OUT}} = \frac{A^2 \tau^2}{\frac{h_n}{2} \frac{1}{T}} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f) H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{T \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df} = \frac{A^2}{h_n \frac{f_s}{2}} \frac{\left| \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f) H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} T |H_R(f)|^2 df}$$

Consideriamo adesso la seconda frazione, dove sono rapportati i due integrali: tale rapporto è una quantità adimensionale, che possiamo allora esprimere mediante una generica attenuazione equivalente. Conviene indicare tale attenuazione con $e^{-2\alpha_E}$:

$$e^{-2\alpha_E} = \frac{\left| \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f) H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} T |H_R(f)|^2 df}$$

Così facendo, otteniamo che

$$\boxed{\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{FILTRO}}^{\text{OUT}} = \frac{A^2}{h_n \frac{f_s}{2}} e^{-2\alpha_E}}$$

Questo è dunque quello che si ottiene per un filtro di ricezione generico e in presenza di solo rumore bianco:

- al denominatore, abbiamo ancora una volta la potenza media di rumore valutata nella banda convenzionale $f_s/2$, così come avveniva nel caso del filtro adattato;
- al numeratore, invece, A^2 rappresenta chiaramente la potenza di picco trasmessa, visto che A è l'ampiezza dei rettangoli in trasmissione; d'altra parte, generalmente si usano forma d'onda del tipo **NRZ** (cioè *non ritorno a zero*), il che significa che τ coincide con il periodo di cifra T e quindi anche che la potenza di picco coincide con la potenza media.

Possiamo dunque riscrivere quel rapporto nella forma

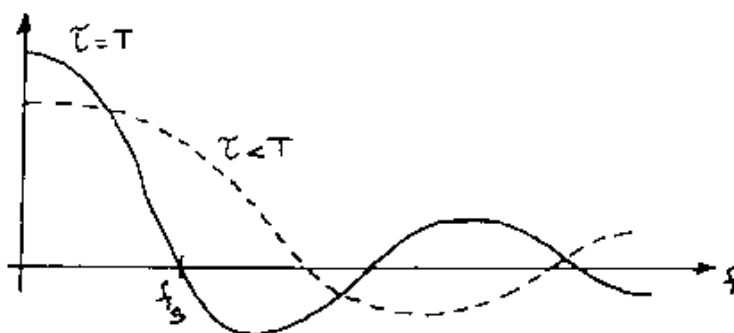
$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{FILTRO}}^{\text{OUT}} = \frac{P_{T,media}}{h_n \frac{f_s}{2}} e^{-2\alpha_E}$$

dove appunto $P_{T,media}$ è la potenza media trasmessa.

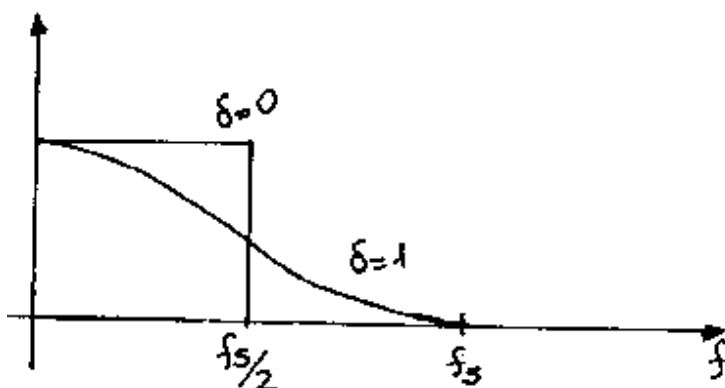
Confrontando allora questa espressione con quella ottenuta per il filtro adattato, è evidente che la differenza è solo nell'attenuazione equivalente $e^{-2\alpha_E}$: in base all'espressione di questo fattore, è evidente che esso dipende dalla forma d'onda trasmessa (quindi essenzialmente da τ , visto che comunque si è scelto di trasmettere rettangoli), dalla funzione di trasferimento del mezzo trasmissivo e dalle forme d'onda in uscita dal filtro di ricezione (quindi tipicamente dal roll off δ visto che si richiedono sempre forme d'onda ad intersimbolo nullo).

Per quanto riguarda il filtro di ricezione, è evidente che è univocamente determinato nel momento in cui decidiamo di fissare la forma d'onda che vogliamo ottenere in uscita da esso e la forma d'onda inviata in ingresso al mezzo trasmissivo (e quindi approssimativamente all'ingresso del filtro stesso). E' possibile che il filtro non sia realizzabile: questo avviene sicuramente, per esempio, quando la forma d'onda desiderata in uscita ha bisogno di una componente spettrale ad una frequenza in corrispondenza della quale lo spettro del segnale in ingresso è nullo².

Nel caso che stiamo considerando, la forma d'onda trasmessa (rettangolo), e quindi in ingresso al filtro, ha uno spettro del tipo $\sin(f)/f$ indicato nella figura seguente:



Allo stesso tempo, supponendo di effettuare il solito progetto alla Nyquist, all'uscita del filtro richiediamo forma d'onda con spettro del tipo seguente:



In base alla figura, è evidente che, in uscita dal filtro, abbiamo bisogno di componenti spettrali non nulle a tutte le frequenze comprese tra la continua ($f=0$) e la frequenza di cifra ($f = f_s$). Osservando lo spettro in ingresso, si trova che esso è al più nullo a frequenza f_s e questo ci va bene in uscita, qualunque sia il valor del roll off δ che abbiamo scelto. Di conseguenza, qualunque

² Ricordiamo, infatti, che un filtro, in quanto sistema lineare (solo per i sistemi lineari tempo-invarianti è possibile definire una funzione di trasferimento), non può produrre in uscita componenti spettrali assenti in ingresso; tutt'al più esso può azzerare in uscita componenti spettrali che invece erano presenti il contrario, ma non può compiere l'operazione inversa: Quest'ultima è realizzabile solo con sistemi non lineari (come per esempio un operatore quadratico).

sia il valore di t , facendo un progetto alla Nyquist il filtro è sempre comunque realizzabile.

Osserviamo che il valore di τ rappresenta in effetti un grado di libertà a nostra disposizione, dato che non è legato ad alcun vincolo di progetto (trascurando per il momento l'occupazione di banda sul mezzo trasmissivo). Sappiamo allora che la scelta migliore, dal punto di vista del rendimento in termini di rapporto S/N all'uscita in funzione dell'ampiezza della forma d'onda rettangolare trasmessa, è quella per cui $\tau=T$, ossia per cui la forma d'onda trasmessa ha durata esattamente pari al periodo di cifra (nel qual caso si ha anche la minore occupazione di banda possibile sul mezzo trasmissivo).

Tornando adesso a quello che il filtro deve fare, le sue funzioni (concettuali) sono essenzialmente due: esso deve equalizzare il mezzo trasmissivo e deve inoltre "sagomare" il segnale ricevuto in ingresso in modo che esso assuma la "forma" desiderata (cioè si passi allo spettro di Nyquist).

Per ottenere questo, la scelta del filtro è, almeno a livello concettuale, immediata: infatti, avendo visto prima che lo spettro del segnale in uscita dal filtro è

$$S_U(f) = S_R(f)H_R(f) = S_T(f)H_T(f)H_R(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)H_R(f)$$

ci basta imporre che

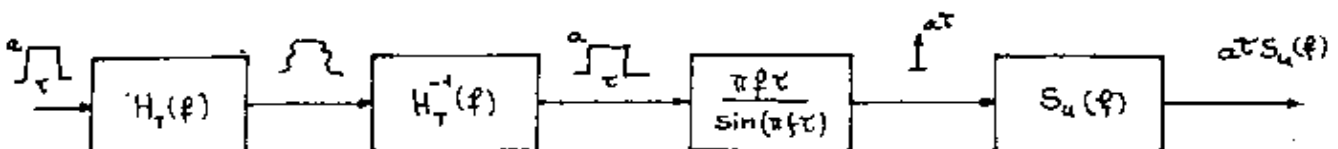
$$H_R(f) = \frac{S_U(f)}{A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} H_T(f)}$$

Fissato $S_U(f)$ (che sarà uno spettro di Nyquist), risulta automaticamente determinata la funzione di trasferimento del filtro:

$$H_R(f) = \frac{1}{H_T(f)} \frac{1}{\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}} \frac{S_U(f)}{A\tau}$$

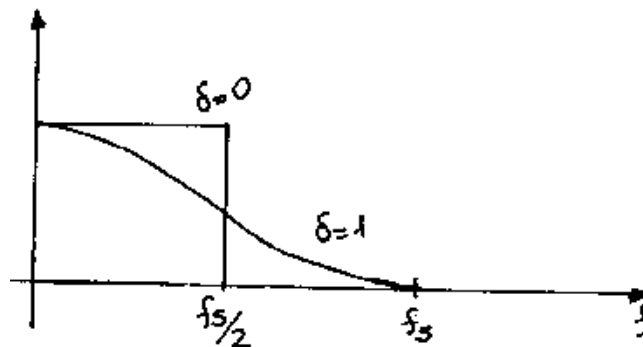
- per equalizzare il mezzo trasmissivo, riottenendo esattamente il rettangolo trasmesso, ossia lo spettro $S_T(f)$, basta dividere per la funzione di trasferimento del mezzo stesso;
- dopo di che, bisogna trasformare (*sagomare*) lo spettro dell'impulso rettangolare in uno spettro di Nyquist, il che può essere ottenuto, sempre a livello concettuale, con due filtri in cascata:
 - * il primo deve produrre un impulso dove prima c'era un rettangolo, ossia deve far diventare piatto lo spettro: ciò significa che deve essere un filtro sbiancatore con funzione di trasferimento del tipo $\frac{\pi f\tau}{\sin(\pi f\tau)}$;
 - * il secondo filtro deve invece avere una funzione di trasferimento pari esattamente allo spettro $S_U(f)$ del segnale che si desidera ottenere in uscita.

Lo schema di principio è dunque il seguente:



E' chiaro che si tratta di uno schema puramente concettuale, in quanto le funzioni di trasferimento $H_T^{-1}(f)$ e $\frac{\pi f \tau}{\sin(\pi f \tau)}$ sono irrealizzabili nella pratica se prese a se stanti: $H_T^{-1}(f)$ richiederebbe una equalizzazione a banda infinita, il che non è realizzabile; $\frac{\pi f \tau}{\sin(\pi f \tau)}$, invece, ha il problema che vale teoricamente ∞ in frequenze equispaziate tra loro: infatti, sappiamo che $\sin(\pi f \tau) = 0$ in tutte le frequenze tali che $\pi f \tau = k\pi$, ossia $f_k = \frac{k}{\tau}$, con $k=1,2,\dots,\infty$. Dire che una funzione di trasferimento vale ∞ in una certa frequenza significa dire che il corrispondente filtro deve comunque fornire in uscita, a quella frequenza, una componente spettrale non nulla, anche se la stessa componente era nulla in ingresso. In altre parole, un filtro con funzione di trasferimento $\frac{\pi f \tau}{\sin(\pi f \tau)}$ dovrebbe riempire lo spettro anche in quelle frequenze dove sicuramente all'ingresso c'era zero, il che non è realizzabile nella pratica.

Al contrario, la catena complessiva è implementabile, visto che è presente il filtro con funzione di trasferimento $S_U(f)$, che è di tipo passa-basso (sempre nel caso di progetto alla Nyquist) e si estende fino alla frequenza f_s :



Questo significa che, qualunque cosa possano fare i filtri precedenti oltre la frequenza f_s , $S_U(f)$ fa comunque in modo che si abbia sempre spettro nullo oltre f_s . In altre parole, la limitazione in banda di $S_U(f)$ rende realizzabili anche le funzioni di trasferimento precedenti³.

Torniamo adesso al filtro, che deve essere realizzato con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{1}{H_T(f)} \frac{1}{\frac{\sin(\pi f \tau)}{f \tau}} \frac{S_U(f)}{A \tau}$$

Per quanto riguarda, invece, il dimensionamento, dobbiamo fare riferimento all'espressione, trovata prima, del rapporto S/N in uscita dal filtro:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{OUT FILTRO}} = \frac{T_{\text{media}}}{h_n \frac{f_s}{f_n}} e^{-2 \pi f_s \tau}$$

³ Ricordiamo comunque che, nella pratica, non si deve mai pensare di implementare separatamente le 3 funzioni.

Nota la densità spettrale monolaterale h_n del rumore (bianco) in ricezione, si può calcolare la potenza media di rumore nella banda convenzionale $f_s/2$; così facendo, per risalire a quanta potenza media di segnale serve ricevere per ottenere un prefissato rapporto S/N all'uscita del filtro, resta da calcolare l'attenuazione equivalente $e^{-2\alpha_E}$.

A questo punto, ci ricordiamo che *il filtro adattato è ottimo nel senso che, in presenza di solo rumore bianco, fornisce la massimizzazione del rapporto S/N a parità di potenza media ricevuta*; questo significa anche dire che il filtro adattato consente la minimizzazione della potenza media in ricezione, una volta fissato il rapporto S/N desiderato. In effetti, però, a noi non interessa tanto minimizzare la potenza media in ricezione, quanto minimizzare la potenza media in trasmissione: la cosa è infatti equivalente solo nell'ipotesi che il mezzo trasmissivo sia ideale, cioè effettui semplicemente una moltiplicazione del segnale trasmesso per una costante minore di 1 (sarebbe il reciproco dell'attenuazione⁴). In base a queste considerazioni, dato che noi vogliamo confrontare il filtro adattato con il filtro non adattato, dobbiamo necessariamente porci in un contesto in cui il filtro adattato sia ottimo: dobbiamo perciò ipotizzare, come del resto già fatto, che il rumore in ricezione sia bianco e dobbiamo inoltre ipotizzare che il mezzo trasmissivo scali semplicemente il segnale.

Possiamo allora supporre che il mezzo trasmissivo abbia la seguente funzione di trasferimento:

$$H_T(f) = e^{-\alpha_T}$$

dove α_T è ovviamente costante.

Si tratta di una funzione di trasferimento reale (non c'è termine di fase) e con modulo costante in frequenza.

Andiamo allora a vedere cosa succede, con questo mezzo trasmissivo, alla potenza media trasmessa: abbiamo scelto di trasmettere forme d'onda rettangolari, di ampiezza A, con codifica NRZ (quindi con $\tau=T$), per cui la potenza media trasmessa coincide con quella di picco, che vale A^2 ; per ricavare la potenza media ricevuta, dobbiamo moltiplicare questa potenza per $|H_T(f)|^2 = e^{-2\alpha_T}$, ottenendo che $P_{R,media} = A^2 e^{-2\alpha_T}$. Possiamo allora valutare il rapporto S/N all'uscita dal filtro:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{FILTRO}} = \frac{P_{T,media}}{h_n \frac{f_s}{2}} e^{-2\alpha_E} = \frac{P_{R,media} e^{2\alpha_T}}{h_n \frac{f_s}{2}} e^{-2\alpha_E}$$

Sostituendo $H_T(f) = e^{-\alpha_T}$ nell'espressione di $e^{-2\alpha_E}$, otteniamo

$$e^{-2\alpha_E} = \frac{\left| \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} H_T(f) H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} T |H_R(f)|^2 df} = e^{-2\alpha_T} \frac{\left| \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} H_R(f) e^{j\omega t_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} T |H_R(f)|^2 df}$$

Per distinguere quello che accade con un mezzo trasmissivo generico da quello che accade con un mezzo trasmissivo con funzione di trasferimento $H_T(f) = e^{-\alpha_T}$, in quest'ultimo caso si pone

⁴ Si definisce attenuazione (in potenza) il rapporto tra la potenza trasmessa e quella ricevuta: quest'ultima è sempre minore di quella trasmessa, per cui l'attenuazione è sempre una quantità maggiore di 1, così come il suo reciproco è sempre minore di 1.

$$e^{-2\alpha_F} = e^{2\alpha_T} e^{-2\alpha_E}$$

L'esponentiale $e^{-2\alpha_F}$ dipende a questo punto solo dalle forme d'onda trasmesse e ricevute e gli diamo quindi il nome di **fattore di forma**:

$$\frac{S}{N}_{\text{OUT FILTRO}} = \frac{P_{R, \text{media}}}{h_n \frac{f_S}{2}} e^{-2\alpha_F}$$

A questo punto, abbiamo ottenuto una formula nuovamente molto simile a quella ottenuta con il filtro adattato: la differenza è nella presenza dell'attenuazione equivalente e del fattore di forma. Il fattore di forma, quindi, rappresenta la perdita di potenza dovuta al disadattamento del filtro di ricezione.

Se vogliamo effettivamente confrontare le prestazioni con e senza il filtro adattato, dobbiamo essenzialmente valutare $e^{-2\alpha_F}$:

- se si tratta di una quantità piccola, per cui non ci sono grosse perdite di potenza con il filtro adattato, allora dobbiamo considerare quali vantaggi traiamo, in trasmissione, dal fatto di usare forme d'onda rettangolari;
- al contrario, se il fattore di forma risulta elevato, il che significa che il disadattamento provoca una consistente perdita di potenza, allora dobbiamo valutare la convenienza di scegliere forme d'onda diverse dai rettangoli.

Normalmente, la presenza del fattore di forma comporta una riduzione del rapporto S/N a valle del filtro di **0.5 dB**⁽⁵⁾: si tratta chiaramente di un valore abbastanza piccolo, per cui possiamo affermare che l'eventuale disadattamento del filtro è in pratica comparabile con semplici fluttuazioni non controllabili del sistema. Tra l'altro, a fronte di questa minima perdita nel rapporto S/N, si verifica che si può contare su un incremento di efficienza del trasmettitore dell'ordine anche di 10 dB: ricordiamo, infatti, che, trasmettendo rettangoli, possiamo usare amplificatori mandati in saturazione, che forniscono al carico gran parte della potenza prelevata dalle alimentazioni.

La conclusione del discorso è dunque quella per cui, pur di trasmettere rettangoli, si rinuncia all'adattamento del filtro.

Osservazione sulle caratteristiche del mezzo trasmissivo

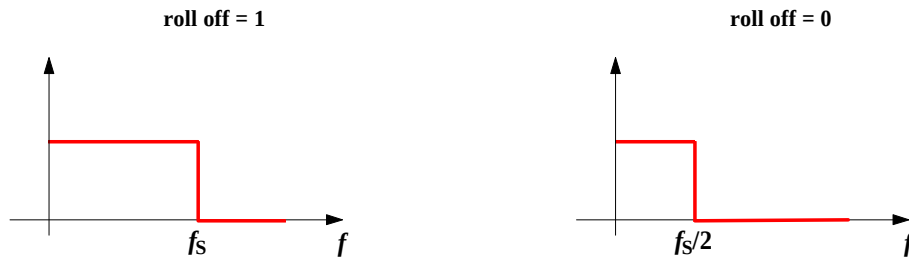
Nel giungere alla conclusione appena riassunta, siamo partiti dal considerare un mezzo trasmissivo con funzione di trasferimento

$$H_T(f) = e^{-\alpha_T}$$

Si tratta cioè di un mezzo trasmissivo ideale a tutte le frequenze, nel senso che dà una attenuazione costante su tutto lo spettro. Ci possiamo allora chiedere se il discorso fatto valga solo sotto questa ipotesi, che non è congruente con la realtà, in quanto non esistono mezzi trasmissivi di questo tipo.

⁵ Questo sarà in effetti il valore che considereremo in tutti gli esercizi che faremo in seguito.

Possiamo allora cominciare ad osservare che, in effetti, non ci interessa che il mezzo trasmissivo sia ideale fino a frequenza infinita; al contrario, ci interessa che esso dia attenuazione costante solo nella banda del segnale che intendiamo trasmettere: dato che stiamo considerando (almeno per il momento) segnali passa-basso, ci interessa che il mezzo trasmissivo dia attenuazione costante solo fino alla massima frequenza presente nello spettro del segnale trasmesso. Anzi, possiamo ancora restringere il campo, affermando che l'attenuazione costante ci interessa solo fino alla massima frequenza presente nello spettro del segnale in uscita dal filtro di ricezione, in quanto il resto non conta più. All'uscita del filtro di ricezione, la massima frequenza è f_s se $\delta=1$ oppure $f_s/2$ se $\delta=0$, per cui queste sono le frequenze che delimitano la banda nella quale richiediamo un mezzo trasmissivo ideale:



Inoltre, il numeratore della quantità $\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{OUT FILTRO}}$ non rappresenta, in realtà, l'effettiva potenza di picco della forma d'onda in ricezione: infatti, se il mezzo trasmissivo non è ideale per tutte le frequenze, in ricezione non otteniamo rettangoli, ma rettangoli deformati (perché appunto sottoposti all'effetto passa-basso del mezzo).

Quindi, il numeratore di $\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{OUT FILTRO}}$ rappresenta la potenza di picco che si avrebbe, per rettangoli in trasmissione, solo se il mezzo trasmissivo avesse attenuazione α_T fino a frequenza infinita.

In generale, dunque, il discorso fatto risulta valido se il mezzo trasmissivo risulta ideale per frequenze non inferiori a

$$B = (1 + \delta) \frac{f_s}{2}$$

Se questa condizione è verificata, allora si può di fatto ritenere che il mezzo trasmissivo sia ideale per tutte le frequenze, cioè con funzione di trasferimento $H_T(f) = e^{-\alpha_T}$.

Dimensionamento in assenza di filtro adattato

L'ultima cosa da fare è adesso quella di indicare come si effettua praticamente il dimensionamento del sistema in assenza di filtro adattato. Il discorso è assolutamente analogo a quello seguito nei casi precedenti, con l'accortezza di considerare, adesso, l'attenuazione equivalente ed il fattore di forma.

Per prima cosa, dobbiamo passare dalla $p(\epsilon)$ a valle del decisore al rapporto segnale-rumore a valle del campionatore: abbiamo visto che questo avviene considerando che $p(\epsilon) = Q(\gamma)$, dove $\gamma = \frac{V_1 - V_0}{2\sigma_n}$, avendo indicato con V_1 e V_0 i livelli di tensione che si misurerebbero, in uscita dal

campionatore, in assenza di rumore (caratterizzato da una deviazione standard σ_n , uguale sia all'uscita sia all'ingresso del campionatore).

Noto γ (che in pratica rappresenta il rapporto segnale/rumore a valle del campionatore), possiamo associare questo parametro al rapporto segnale/rumore $\frac{S}{N}\bigg|_{\text{OUT}_{\text{FILTRO}}}$ a valle del filtro di ricezione. Qui, però, dobbiamo operare una ulteriore scelta, scegliendo tra una codifica ortogonale e una codifica antipodale:

$$\begin{aligned} \text{antipodale} &\longrightarrow \frac{S}{N}\bigg|_{\text{OUT}_{\text{FILTRO}}} = \frac{P_{S,p}}{P_{N,m}} = \gamma^2 \\ \text{ortogonale} &\longrightarrow \frac{S}{N}\bigg|_{\text{OUT}_{\text{FILTRO}}} = \frac{P_{S,p}}{P_{N,m}} = 4\gamma^2 \end{aligned}$$

dove $P_{S,p}$ rappresenta la potenza di picco del segnale all'uscita del filtro di ricezione e $P_{N,m}$ rappresenta la potenza media del rumore all'uscita dello stesso filtro.

Optiamo, ad esempio, per una *codifica antipodale*, per cui la definizione da considerare è la prima delle due appena elencate:

$$\frac{S}{N}\bigg|_{\text{OUT}_{\text{FILTRO}}} = \frac{P_{S,p}}{P_{N,m}} = \gamma^2$$

Per passare all'ingresso del filtro di ricezione, dobbiamo scegliere il tipo di filtro, stabilendo se esso sia adattato o meno. Sappiamo allora che, se il filtro è adattato, risulta

$$\frac{S}{N}\bigg|_{\text{OUT}_{\text{FILTRO}}} = \frac{P_{R,media}}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2$$

dove $P_{R,media}$ è la potenza media (di segnale) ricevuta e $h_n \frac{f_s}{2}$ la potenza media di rumore valutata in una banda convenzionale pari a metà della frequenza di cifra f_s .

Se invece il filtro non è adattato, abbiamo visto prima che dobbiamo considerare l'attenuazione equivalente:

$$\frac{S}{N}\bigg|_{\text{OUT}_{\text{FILTRO}}} = \frac{P_{T,media} e^{-2\alpha_E}}{h_n \frac{f_s}{2}}$$

Portando $e^{-2\alpha_E}$ al secondo membro, la formula da applicare diventa allora

$$\frac{P_{T,media}}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2 e^{2\alpha_E}$$

Se poi il mezzo trasmissivo è ideale, con attenuazione costante α_T , allora la potenza media in ricezione è legata a quella in trasmissione dalla relazione $P_{R,media} = P_{T,media} e^{-2\alpha_T}$, da cui quindi deduciamo che

$$\frac{P_{R,media}}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2 e^{2\alpha_E} e^{-2\alpha_T} = \gamma^2 e^{2\alpha_F}$$

Ricordando che il fattore di forma è stato definito come $e^{2\alpha_E} e^{-2\alpha_T} = e^{2\alpha_F}$, concludiamo che *la formula da utilizzare per il dimensionamento, in presenza di filtro non adattato alle forme d'onda in ricezione e di mezzo trasmissivo ideale, è*

$$\boxed{\frac{P_{R,media}}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2 e^{2\alpha_F}}$$

Non ci sono dunque molte differenze rispetto al dimensionamento con il filtro adattato: basta saper valutare numericamente l'attenuazione equivalente (nel caso di mezzo trasmissivo generico) o l'attenuazione di forma (nel caso di mezzo trasmissivo ideale almeno nella banda di interesse).

Concludiamo con un'ultima osservazione relativa alle forme d'onda in trasmissione: così come abbiamo osservato che il mezzo trasmissivo ci serve ideale solo nella banda $B = (1 + \delta) \frac{f_s}{2}$, allo stesso modo ci interessa che le forme d'onda trasmesse siano uguali a quelle effettivamente desiderate (cioè i rettangoli) solo nella stessa banda B. In altre parole, quindi, non è necessario che le forme d'onda in trasmissione siano rettangolari con i fronti esattamente verticali, ma basta che esse abbiano spettro, tra 0 e $(1 + \delta) \frac{f_s}{2}$, coincidente con lo spettro della forma d'onda rettangolare.

Effetto di disturbi generici

INTRODUZIONE

Quando trasmettiamo dei segnali numerici su doppini telefonici situati nello stesso cavo, è molto facile che su un generico doppino si induca, per accoppiamento capacitivo e induttivo, del disturbo che non è più legato al moto casuale dei portatori di carica (rumore termico), ma è legato alla corrente transitante nel doppino adiacente.

Non solo, ma nel caso di trasmissione numerica è molto importante la presenza del cosiddetto **rumore impulsivo**: se la trasmissione è analogica, questo tipo di rumore, che si manifesta essenzialmente come un disturbo localizzato nel tempo, è quasi sempre sopportabile; *se, invece, la trasmissione è numerica, allora il disturbo impulsivo può avere effetti molto più deleteri, soprattutto se è molto frequente.*

Cenni alla trasmissione di dati su canali analogici

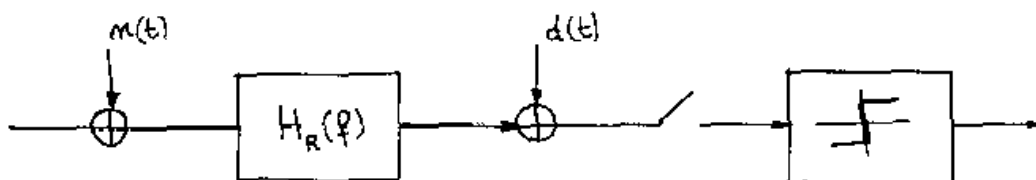
Per lo scambio di informazioni tra calcolatori, e tra calcolatori e utilizzatori, è necessario utilizzare mezzi per la trasmissione di segnali in forma numerica⁶. Occorre tuttavia, per molte applicazioni, sfruttare, per la trasmissione di dati, sistemi e canali di trasmissione già esistenti per altri scopi: in modo particolare, occorre sfruttare l'esistente rete per la trasmissione analogica dei segnali telefonici. Rientra, in questo quadro, l'importante problema della trasmissione di dati su singolo canale telefonico. Per questa applicazione, le difficoltà principali scaturiscono dal fatto che il canale telefonico presenta generalmente forti distorsioni di fase (cui però il segnale telefonico è praticamente insensibile) e anche disturbi impulsivi (che, entro certi limiti, non hanno grande rilievo nella trasmissione telefonica, data la tendenza dell'utente a integrare il rumore su tempi relativamente lunghi). Quest'ultimo tipo di disturbo è presente, in modo particolare, sulle linee commutate, per le quali si ha anche l'inconveniente che il percorso tra due utenti cambia ad ogni collegamento e quindi cambiano anche le caratteristiche del canale⁷ (in particolare quella di fase). In ogni caso, i canali telefonici devono essere equalizzati se si desidera adoperarli per una efficiente trasmissione di dati.

Il nostro scopo è allora quello di capire come è possibile quantificare e portare in conto disturbi di altra natura rispetto al rumore termico. E' ovvio, e lo sarà ancora di più nei prossimi discorsi, che possiamo portare in conto questi disturbi solo nell'ipotesi di conoscerli quanto meno in termini statistici, per cui riterremo valida questa ipotesi.

CALCOLO DELLA PROBABILITÀ MEDIA DI ERRORE

In generale, stiamo dunque considerando un sistema di trasmissione binario nel quale, in ricezione, il segnale è "sporcato" sia da rumore termico (gaussiano, bianco, additivo) sia da rumore impulsivo. Si potrebbe allora pensare di determinare la totale potenza media di rumore semplicemente sommando le potenze medie relative al rumore termico ed al disturbo impulsivo, procedendo poi nello stesso identico modo seguito in precedenza per il solo rumore termico. In realtà, è lecito seguire un procedimento di questo tipo solo in una ipotesi: anche il disturbo impulsivo deve avere distribuzione gaussiana. Al contrario, generalmente questo non si verifica, per cui dobbiamo necessariamente seguire un'altra strada.

Per prima cosa, dobbiamo riportare equivalentemente il disturbo impulsivo $d(t)$ all'uscita del filtro di ricezione, adottando perciò uno schema del tipo seguente:



⁶ Ricordiamo, a questo proposito, che un segnale numerico può rappresentare, in modo unico, tutti i segnali che interessano in pratica, eventualmente associandoli tra loro, a seconda della necessità, con la tecnica della divisione di tempo: questo costituisce una delle ragioni principali per cui la trasmissione in forma numerica è tanto importante per gli sviluppi di reti di comunicazione capaci di soddisfare a tutte le esigenze di servizio.

⁷ Quando invece si affitta permanentemente una linea, le variazioni delle caratteristiche di trasmissione sono soltanto quelle che avvengono nel tempo, a causa, ad esempio, delle variazioni di temperatura.

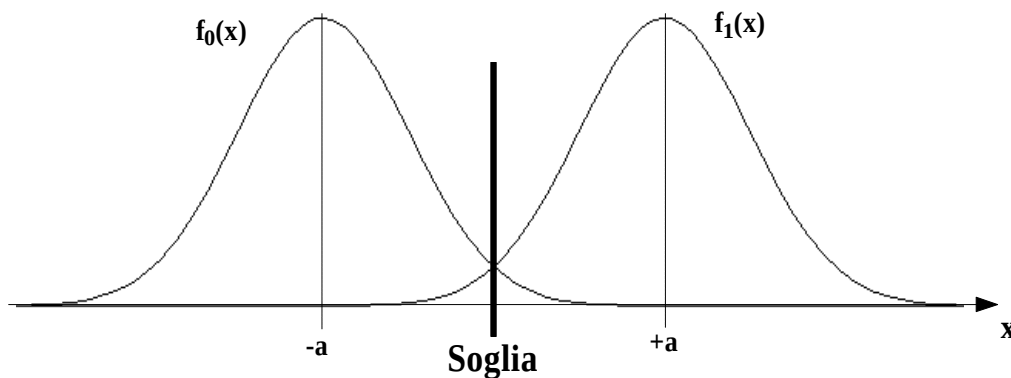
Appare subito ovvio l'effetto qualitativo del disturbo $d(t)$: esso va ad influenzare il segnale in uscita dal filtro di ricezione, ossia il segnale che il campionario deve misurare affinché il successivo decisore possa optare per il simbolo 1 o per il simbolo 0.

Facciamo l'ipotesi di aver adottato in trasmissione una codifica di tipo antipodale, per cui trasmettiamo forme d'onda identiche, con ampiezza positiva o negativa (uguale in valore assoluto) a seconda che si voglia trasmettere 1 o 0. Cominciamo dal caso ideale in cui non ci sia nessun rumore (né termico né impulsivo): in questo caso, il campionario campionerebbe un valore di tensione $+a$ nel caso di trasmissione di 1 e un valore di tensione $-a$ nel caso di trasmissione di 0. Indicata con x la tensione all'uscita del campionario, avremmo dunque la situazione seguente:



In questo caso, il sistema non avrebbe possibilità di sbagliare.

Al contrario, sappiamo che è presente un rumore termico, con distribuzione gaussiana delle ampiezze, il che fa sì che la situazione diventi quella indicata nella figura seguente:



Il rumore fa sì che la tensione x sia una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana: se è stato trasmesso un 1, allora la densità di probabilità (che è una densità di probabilità condizionata) è $f_1(x)$, mentre si tratta di $f_0(x)$ se è stato trasmesso uno 0. Le funzioni $f_1(x)$ e $f_0(x)$ hanno la stessa varianza σ_n , che è quella del rumore campionato (pari anche a quella del rumore in uscita dal filtro) e valor medio, rispettivamente, pari a $+a$ e $-a$.

Sappiamo che la probabilità di errore è data da

$$p(\epsilon) = p(0T)P(\epsilon|0) + p(1T)P(\epsilon|1) = 0.5 \cdot [P(\epsilon|0) + P(\epsilon|1)]$$

dove si è supposto che $p(1T)$ e $p(0T)$ (rispettivamente, la probabilità di aver trasmesso 1 e la probabilità di avere trasmesso 0) siano uguali entrambe a 0.5 (simboli equiprobabili).

Ponendo la soglia del decisore a metà (quindi $S = 0$), risultano anche uguali le singole probabilità di errore $P(\epsilon|0)$ e $P(\epsilon|1)$, per cui si conclude che

$$p(\epsilon) = 0.5 \cdot 2 \cdot P(\epsilon|T) = P(\epsilon|T)$$

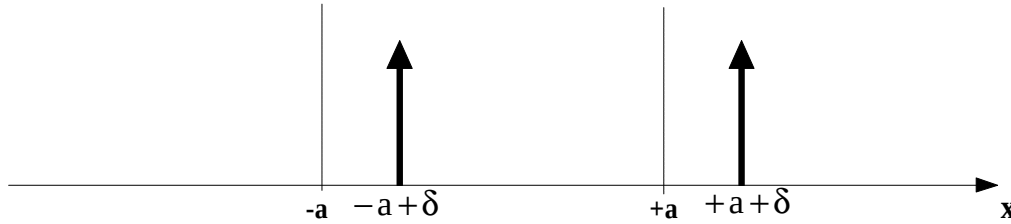
dove appunto $P(\epsilon|T) = P(\epsilon|0) = P(\epsilon|1)$.

Ricordiamo inoltre che

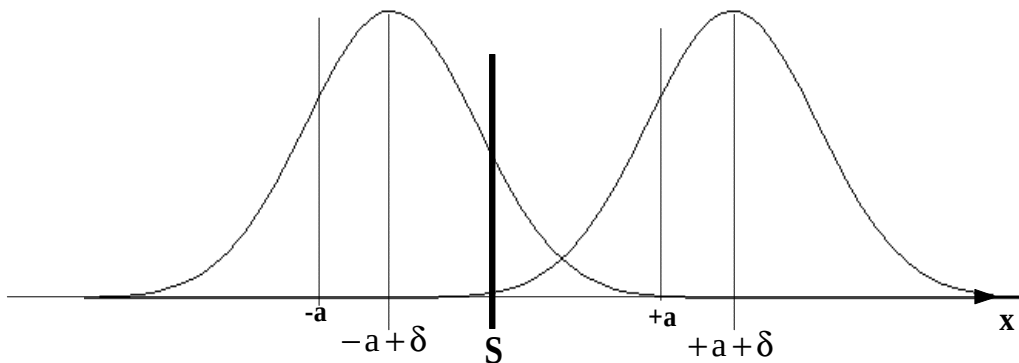
$$p(\epsilon) = P(\epsilon | 1) = P(\epsilon | 0) = Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) = \int_{a/\sigma_n}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Questo, dunque, in assenza di disturbo impulsivo.

Adesso supponiamo invece che non ci sia rumore termico, ma ci sia solo il disturbo impulsivo $d(t)$: l'effetto di questo disturbo, che si manifesta in istanti casuali e quindi anche in quelli di campionamento, è quello per cui il campionatore non misura più $-a$ o $+a$, ma $+a+\delta$ oppure $-a-\delta$, dove δ (che può essere positivo o negativo) è il valore campionato del disturbo stesso. Abbiamo dunque quanto segue:



Si ha dunque l'effetto di una traslazione verso destra (se $\delta > 0$) o verso sinistra (se $\delta < 0$) degli impulsi. Se, a questo punto, consideriamo anche il rumore termico, è evidente che avremo una identica traslazione anche delle gaussiane:



A questo punto, è evidente che, lasciando la soglia dove si trovava prima (cioè a metà tra $-a$ e $+a$), sono cambiati i valori di $P(\epsilon | 0)$ e $P(\epsilon | 1)$. D'altra parte, δ è frutto del campionamento di un processo casuale, per cui essa stessa è una variabile casuale, che non possiamo determinare a priori, per cui non abbiamo la possibilità di spostare S in funzione del valore di δ , che non può essere noto a priori. Al contrario, se il valore medio di δ è nullo (come si può lecitamente assumere) l'unica possibilità è quella di lasciare la soglia fissa a 0. Sotto questa ipotesi⁸, andiamo allora a vedere quanto la probabilità di errore aumenta rispetto a prima.

Dato che la soglia non si trova più esattamente a metà tra le gaussiane, è evidente che $P(\epsilon | 0)$ e $P(\epsilon | 1)$ sono adesso diverse, dato che le rispettive code (delimitate dalla soglia) delimitano aree diverse. Allora, con riferimento alla stessa simbologia usata prima, dobbiamo scrivere che

$$p(\epsilon) = p(0T)P(\epsilon | 0) + p(1T)P(\epsilon | 1) = 0.5 \cdot [P(\epsilon | 0) + P(\epsilon | 1)] = 0.5 \cdot \left[Q\left(\frac{a-\delta}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{a+\delta}{\sigma_n}\right) \right]$$

⁸ Lasciare la soglia a metà, quando le gaussiane si sono spostate di δ equivale a lasciare invariata la posizione delle gaussiane ed a spostare la soglia della stessa quantità δ , ma nella direzione opposta.

E' facile rendersi conto che, in totale, la probabilità di errore aumenta.

A questo punto, dato che il disturbo $d(t)$ assume valori diversi in ogni istante, anche i valori di δ sono diversi in ciascun istante di campionamento. Questo ci impedisce di trattare il caso di un disturbo impulsivo del tutto generico. D'altra parte, è nostro interesse poter stimare la probabilità media di errore, in presenza di disturbo impulsivo: allora, l'unica cosa che possiamo fare è valutare la probabilità d'errore condizionata al verificarsi di un certo evento; in altre parole, possiamo fare una ipotesi di partenza, assumendo che δ assuma un preciso valore, e poi valutare la corrispondente probabilità di errore: sarà

$$p_x(\epsilon) = P(\epsilon | x)P(x)$$

Questa relazione dice in pratica che la probabilità di errore $p_x(\epsilon)$, nell'ipotesi che si sia verificato un valore x del disturbo, è pari alla probabilità di errore $P(\epsilon|x)$, in presenza del suddetto valore x del disturbo, per la probabilità che si abbia appunto $\delta=x$. D'altra parte, visto che la conoscenza del valore x non può essere deterministica, per ottenere la probabilità media di errore dobbiamo semplicemente mediare i risultati di quel calcolo per tutti i possibili valori x del disturbo impulsivo. Nel caso in cui il processo di disturbo sia a valori continui, l'operazione di media ci porta alla formula

$$p_{\text{media}}(\epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\epsilon | x)P(x)dx$$

dove ripetiamo che $P(\epsilon|x)$, è la probabilità di errore dovuta ad un valore x del disturbo, mentre $P(x)$ è la probabilità che il disturbo assuma un generico valore x . Ovviamente, $P(x)$ è nota solo a patto di conoscere (ad esempio tramite misurazioni opportune) o comunque di poter stimare la statistica del disturbo impulsivo. Inoltre, la quantità $P(\epsilon|x)$ è data evidentemente da

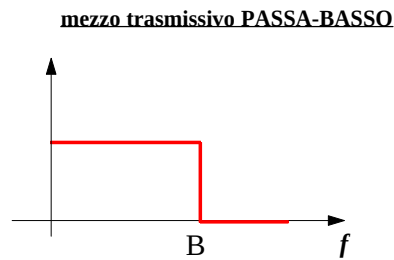
$$P(\epsilon | x) = p(0T)P(\epsilon | 0, x) + p(1T)P(\epsilon | 1, x)$$

dove $P(\epsilon|0,x)$ è la probabilità di sbagliare quando il bit trasmesso è 0 e quando il disturbo campionato vale x , mentre $P(\epsilon|1,x)$ è la probabilità di sbagliare quando il bit trasmesso è 1 e quando il disturbo campionato vale x .

Sistemi multilivello

INTRODUZIONE

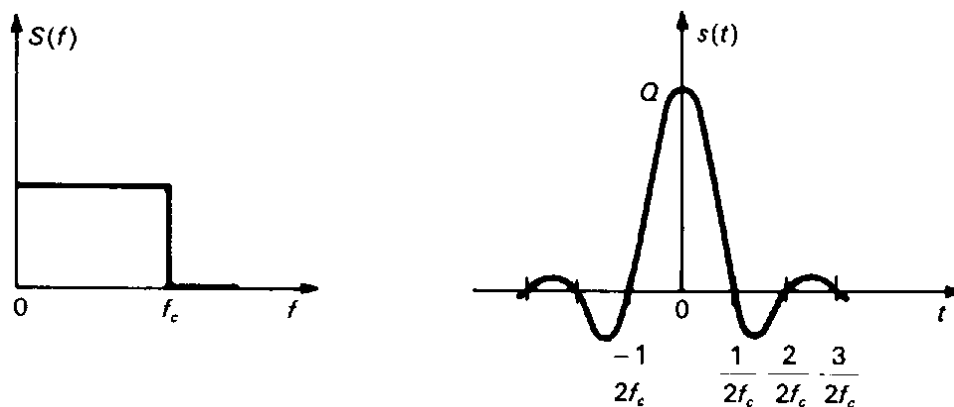
Consideriamo un sistema di trasmissione numerico che utilizzi un mezzo trasmissivo passa-basso con banda di B (Hz):



Abbiamo visto che, effettuando un progetto del sistema alla Nyquist (cioè richiedendo forme d'onda ad intersimbolo nullo all'uscita del filtro di ricezione), la banda B_{RF} occupata sul mezzo trasmissivo è legata alla frequenza di cifra f_s (cioè al numero di bit che trasmettiamo in 1 secondo) dalla seguente relazione:

$$B_{RF} = (1 + \delta) \frac{f_s}{2}$$

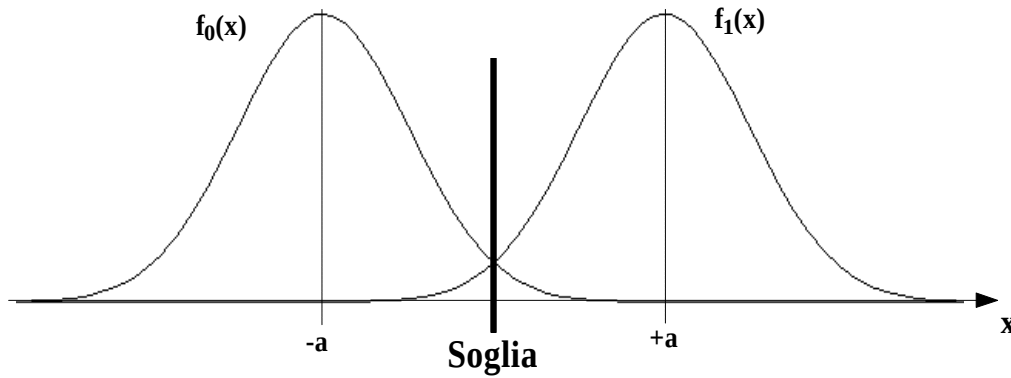
Se scegliamo di occupare tutta la banda B a nostra disposizione sul mezzo trasmissivo (se cioè poniamo $B_{RF}=B$), allora sappiamo che la massima frequenza di cifra alla quale possiamo trasmettere è $f_s = 2B$ e si ottiene per roll off $\delta=0$, ossia scegliendo di ottenere, in uscita dal filtro di ricezione, forme d'onda del tipo seguente:



Il criterio di progetto che abbiamo seguito fino ad ora è sempre stato quello di occupare tutta la banda disponibile, calcolando poi la potenza necessaria, in trasmissione, per ottenere determinate prestazioni, ossia fondamentalmente una prefissata probabilità di errore $p(\epsilon)$ a valle del decisore.

Adesso, invece, ci poniamo un altro problema: supponendo di avere a disposizione una esuberanza di potenza, ci chiediamo se essa possa essere utilizzata, a parità di banda occupata e di probabilità di errore $p(\epsilon)$, per aumentare la velocità di trasmissione.

Consideriamo allora un sistema binario con codifica antipodale, per il quale sappiamo che la distribuzione statistica della tensione x a valle del campionatore è del tipo seguente:



Il rumore termico fa sì che la tensione x sia una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana: se è stato trasmesso un 1, allora la densità di probabilità (che è una densità di probabilità condizionata) è $f_1(x)$, mentre si tratta di $f_0(x)$ se è stato trasmesso uno 0. Le funzioni $f_1(x)$ e $f_0(x)$ hanno la stessa varianza σ_n , che è quella del rumore campionato (pari anche a quella del rumore in uscita dal filtro) e valor medio, rispettivamente, dato da $+a$ e $-a$.

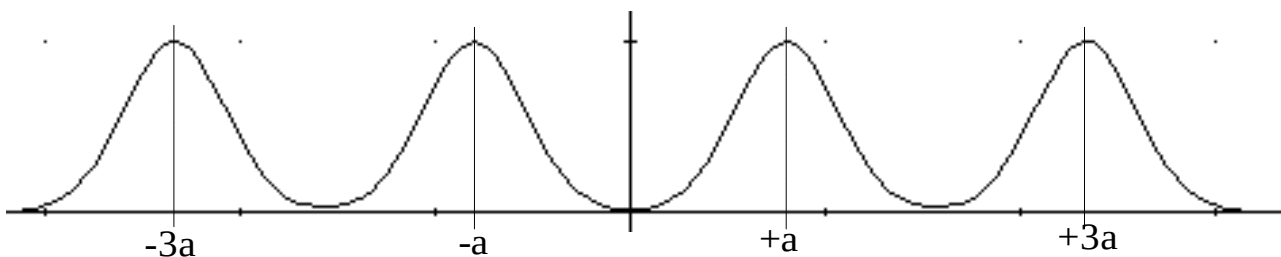
Avendo a disposizione più potenza di quanta ne serva per ottenere i valori $+a$ e $-a$, possiamo pensare di spenderla per trasmettere le stesse forme d'onda, ma ad un livello di potenza maggiore: così facendo, otteniamo, in uscita dal campionatore, non più i valori $+a$ e $-a$, ma valori $+b$ e $-b$, con $b > a$. Otteniamo cioè l'effetto di distanziare maggiormente le gaussiane, col che riduciamo l'area sottesa dalla code delle gaussiane stesse (area delimitata dalla soglia) e quindi riduciamo anche la probabilità di errore.

Con riferimento agli stessi calcoli fatti in precedenza, sappiamo, ad esempio, che, aumentando la potenza in trasmissione (e quindi anche quella in ricezione) di 10 dB, otteniamo una diminuzione della probabilità di errore di 10 ordini di grandezza: ad esempio, se prima avevamo $p(\epsilon) = 10^{-6}$, con 10 dB in più di potenza trasmessa otteniamo $p(\epsilon) = 10^{-16}$.

D'altra parte, nella maggior parte delle applicazioni non serve giungere ad un valore così basso della probabilità di errore, per cui ha senso provare ad impiegare la potenza in sovrappiù in altro modo, ad esempio per aumentare la velocità di trasmissione. Possiamo per esempio chiederci se, con quei 10 dB in più, possiamo mantenere la probabilità di errore al valore 10^{-6} , aumentando però la velocità di trasmissione.

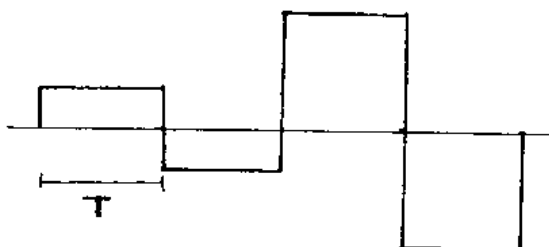
In effetti, questo obbiettivo si può raggiungere. Ricordiamo, infatti, che la probabilità di errore $p(\epsilon)$ dipende solo da due parametri: la varianza σ_n del rumore (la quale quantifica l'apertura delle gaussiane) e la distanza tra i livelli di tensione in uscita dal campionatore (i cosiddetti **livelli di restituzione**) in assenza di rumore, vale a dire quindi $2a$. Allora, dato che la varianza del rumore è sempre la stessa, quale che sia il segnale ricevuto dal filtro di ricezione, possiamo senz'altro mantenere la stessa probabilità di errore se trasmettiamo forme d'onda con più di due livelli di tensione, a patto, però, che questi livelli siano tali che, in uscita dal campionatore, i livelli di restituzione adiacenti siano sempre distanziati di $2a$.

In altre parole, la distribuzione statistica della tensione x all'uscita del campionatore può per esempio essere del tipo seguente:



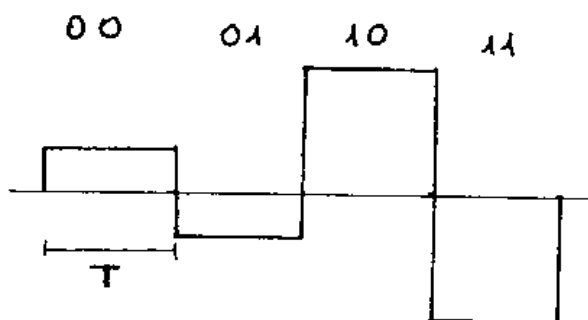
Le gaussiane sono tutte uguali tra loro (stessa varianza σ_n) e con quelle che si ottenevano nel caso di 2 soli livelli, e la distanza tra i livelli consecutivi è ancora $2a$.

Chiaramente, per ottenere 4 distinti livelli di tensione in uscita dal campionatore, dobbiamo trasmettere 4 distinte forme d'onda. Scegliendo ancora una volta la trasmissione di rettangoli antipodali, le 4 forme d'onda saranno del tipo seguente:



Se il ricevitore è in grado, con sufficiente affidabilità, di discriminare, in base al valore misurato dal campionatore, quale tra le 4 forme d'onda è stata trasmessa, abbiamo in pratica ottenuto un sistema che permette di decidere, per ogni periodo T , quale forma d'onda è stata trasmessa.

Ovviamente, avendo 4 forme d'onda, potremo associare a ciascuna di esse non più 1 solo bit, ma una coppia di bit⁹, come ad esempio indicato nella figura seguente:



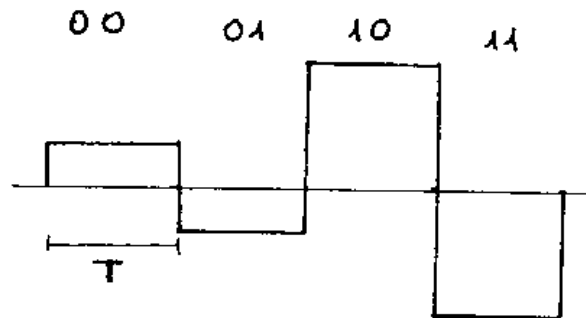
Riuscendo a decidere quale forma d'onda è stata trasmessa, resta dunque identificata una coppia di bit e non più 1 solo bit.

Abbiamo in pratica raddoppiato la frequenza di cifra rispetto al sistema a 2 soli livelli: trasmettendo ancora 1 forma d'onda per ogni periodo T , trasmettiamo in pratica 2 bit nello stesso periodo T . Di conseguenza, il periodo T non è più il periodo di cifra (in quanto non rappresenta più l'intervallo di tempo associato a ciascun bit), così come il suo reciproco non è più la frequenza di cifra (in quanto non rappresenta più il numero di bit trasmesso nell'unità di tempo): l'inverso del periodo T prende allora il nome di **baud rate** (sarà indicato generalmente con f_B), in quanto rappresenta il numero di forme d'onda inviate in linea nell'unità di tempo; l'unità di misura del baud rate è il **baud**. Nel caso considerato, di un sistema numerico a 4 livelli, il baud rate è pari al doppio della frequenza di cifra f_s : ad esempio, se si adotta un baud rate $f_B = 1000$ baud, la corrispondente frequenza di cifra è $f_s = 2000$ bit/sec.

⁹ Se volessimo trasmettere 3 bit per ogni periodo, avremmo bisogno di 8 diverse forme d'onda; per 4 bit, ne servirebbero 16 e così via con le potenze di 2.

Osservazione: uso della codifica di Grey

Abbiamo dunque visto che, trasmettendo 4 forme d'onda, possiamo associare a ciascuna di esse una coppia di bit. Il criterio migliore con cui effettuare l'associazione tra forme d'onda e coppie di bit è quello di adottare una **codifica di Grey**, del tipo indicato nella figura seguente:

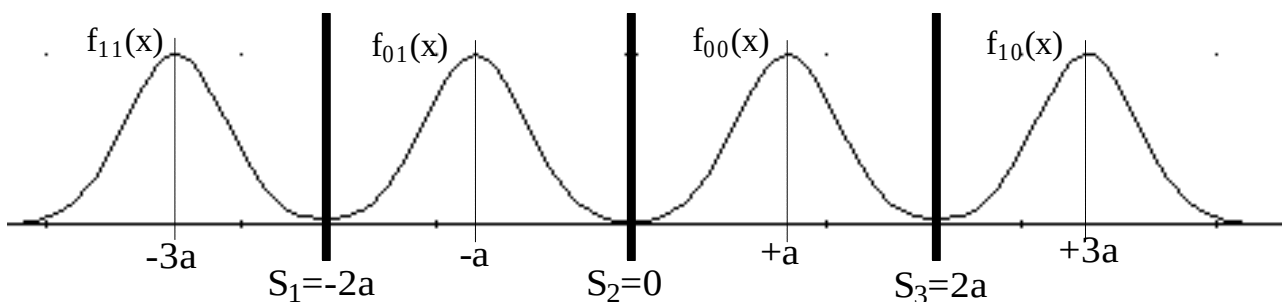


Il motivo, che sarà anche più chiaro nei paragrafi successivi, è evidentemente quello per cui il ricevitore può sbagliare, con maggiore probabilità, due forme d'onda di ampiezza "vicina" (ad esempio $+3a$ e $+a$, oppure $+a$ e $-a$ oppure ancora $-a$ e $-3a$), mentre più difficilmente potrà confondere forme d'onda di ampiezza molto diversa (come $+a$ e $-3a$); di conseguenza, con la codifica di Grey, che è notoriamente una codifica con distanza 1 (tale cioè per cui ogni configurazione differisce da quella successiva solo di 1 bit), l'errore più probabile è quello singolo, mentre quello doppio è senz'altro meno probabile (il che però non esclude che si possa comunque verificare).

DIMENSIONAMENTO DI UN SISTEMA MULTILIVELLO

Vediamo come dimensionare un sistema multilivello che soddisfi determinate specifiche, tipicamente una fissata probabilità di errore.

Dato che la varianza del rumore e la statistica del rumore stesso non variano al variare della forma d'onda ricevuta, è ovvio che non ha senso considerare livelli a spaziatura diversa tra loro. Di conseguenza, in uscita dal campionatore abbiamo gaussiane tutte equispaziate tra loro. Nel caso di sistema a 4 livelli, la situazione è stata già presentata nel paragrafo precedente:



Dobbiamo ancora una volta disporre delle soglie, in base alle quali il decisore possa optare per un unico simbolo trasmesso. Supponendo sempre che tutte e 4 le coppie di bit siano equiprobabili, è ovvio che la posizione delle soglie è ancora una volta a metà tra una gaussiana e l'altra, come indicato nella figura.

La probabilità di errore $p(\epsilon)$ è definita semplicemente come la probabilità di sbagliare simbolo: ad esempio, se è stato trasmessa la coppia 11, cui dovrebbe corrispondere il livello $-3a$ e, in ricezione, si campiona $-1.9a$, allora il decisore opta per il livello $-a$, ossia per la coppia 01, sbagliando così il

primo bit della coppia. La probabilità di sbagliare, in questo esempio, è l'area delimitata dalla gaussiana $f_{11}(x)$ tra la soglia S_1 e ∞ .

In generale, le probabilità di sbagliare sono le seguenti:

$$\begin{array}{ll}
 11 \longrightarrow \begin{cases} P(01|11) = P(-2a < x < 0) \\ P(00|11) = P(0 < x < 2a) \\ P(10|11) = P(2a < x < \infty) \end{cases} & 00 \longrightarrow \begin{cases} P(11|00) = P(0 < x < 2a) \\ P(10|00) = P(2a < x < \infty) \\ P(01|00) = P(-2a < x < 0) \end{cases} \\
 01 \longrightarrow \begin{cases} P(11|01) = P(-\infty < x < -2a) \\ P(00|01) = P(0 < x < 2a) \\ P(10|01) = P(2a < x < \infty) \end{cases} & 10 \longrightarrow \begin{cases} P(11|10) = P(0 < x < 2a) \\ P(01|10) = P(-2a < x < 0) \\ P(00|10) = P(0 < x < 2a) \end{cases}
 \end{array}$$

Per ogni coppia di bit, possiamo sbagliare in 3 situazioni diverse: ad esempio, trasmettendo la coppia 11, cui corrisponderebbe il livello di tensione $x = -3a$, possiamo sbagliare se la tensione x è compresa tra $-2a$ e 0 , nel qual caso il decisore opta per 01, oppure se x è compresa tra 0 e $2a$, nel quale caso il decisore opta per 00, oppure infine se x è maggiore di $2a$, nel qual caso il decisore opta per 10. Analogo discorso per le altre 2 coppie di bit.

Per valutare la probabilità media di errore, dobbiamo dunque tener presente tutte queste possibilità. Osserviamo allora due cose:

- in primo luogo, indichiamo con p la probabilità di confondere un livello con quello adiacente: si tratta dunque dell'area sottesa da ciascuna gaussiana e delimitata dalla corrispondente soglia; si tratta anche della stessa probabilità di errore che si aveva nel sistema numerico a 2 soli livelli, dove i livelli di tensione in uscita dal campionatore erano solo $+a$ e $-a$: non dobbiamo infatti dimenticare che la varianza del rumore (e quindi le gaussiane) è sempre la stessa, qualunque sia il segnale che arriva dal mezzo trasmissivo; per questo motivo, p prende anche il nome di **probabilità di errore del sistema binario antipodale equivalente**, ossia di un sistema di trasmissione binario antipodale che, tra le 4 possibili forme d'onda in considerazione, utilizza semplicemente le due più interne;
- in secondo luogo, è evidente che la probabilità di confondere i due livelli estremi ($-3a$ e $+3a$) è estremamente bassa, per cui la possiamo trascurare rispetto alle altre probabilità; in effetti, è anche bassa la probabilità di confondere un livello non con quello adiacente, ma con quello contiguo a quello adiacente: ad esempio, si tratta della probabilità di confondere $-3a$ con $+a$, oppure $-a$ con $+3a$; scegliamo allora di trascurare anche queste probabilità;

Con queste assunzioni, le possibilità di errore diventano le seguenti:

$$\begin{array}{ll}
 11 \longrightarrow \begin{cases} P(01|11) = p \\ P(00|11) \cong 0 \\ P(10|11) = 0 \end{cases} & 00 \longrightarrow \begin{cases} P(11|00) \cong 0 \\ P(10|00) = p \\ P(01|00) = p \end{cases} \\
 01 \longrightarrow \begin{cases} P(11|01) = p \\ P(00|01) = p \\ P(10|01) \cong 0 \end{cases} & 10 \longrightarrow \begin{cases} P(11|10) = 0 \\ P(01|10) \cong 0 \\ P(00|10) = p \end{cases}
 \end{array}$$

A questo punto, la probabilità P_{errore} di sbagliare una coppia è la somma delle probabilità appena elencate, per cui

$$P_{\text{errore}} = \frac{P(\epsilon | 11) + P(\epsilon | 01) + P(\epsilon | 00) + P(\epsilon | 10)}{4} = \frac{p + 2p + 2p + p}{4}$$

dove il fattore 4 a denominatore tiene conto dell'equiprobabilità delle coppie.

Passando adesso al caso generale, se N sono i livelli (cioè N sono le forme d'onda in trasmissione), la probabilità di sbagliare è

$$P_{\text{errore}} = \frac{(N-2) \cdot 2p + p + p}{N} = \frac{N-1}{N} 2p$$

In questa formula, abbiamo dunque tenuto conto che, *mentre per ogni livello interno (ad esempio $-a$ e $+a$) è possibile confondere il livello trasmesso sia col precedente sia col successivo, per i livelli estremi c'è in pratica 1 sola possibilità di errore (per il livello estremo a sinistra, si può fare confusione solo col livello successivo, con probabilità p , mentre per il livello estremo a destra si può fare confusione solo col livello precedente, con probabilità sempre p)*. Quindi, mentre a rigore sarebbe necessario tener conto di tutte le possibilità, nei calcoli si può in effetti considerare solo l'errore dovuto alla confusione con i soli livelli adiacenti (che sono 2 per i livelli interni e 1 per i due livelli estremi).

A questo punto, dalla probabilità P_{errore} sul generico livello dobbiamo risalire alla probabilità media di errore sul bit, per calcolare la quale dobbiamo necessariamente scegliere una codifica binaria delle forme d'onda trasmesse (e quindi ricevute). Abbiamo allora già osservato che la codifica migliore è quella di Grey: trascurando gli eventi relativi ad errori con livelli non contigui, l'evento "errore di livello" viene a coincidere con l'evento "errore con un livello contiguo"; se poi la codifica è di Grey, per cui le configurazioni binarie di due livelli contigui differiscono per 1 solo bit, allora l'evento "errore con un livello contiguo" coincide con l'evento "errore di un bit su n ": ciò significa che la probabilità di sbagliare 1 bit è pari proprio a

$$P_{\text{errore su 1 bit}} = P_{\text{errore}} = \frac{N-1}{N} 2p$$

La probabilità media di errore si otterrà allora dividendo per il numero di bit associati a ciascun livello, ossia a ciascuna forma d'onda: questo numero è $\log_2 N$, dove N sono i livelli (cioè le forme d'onda), per cui concludiamo che

$$p(\epsilon) = \frac{P_{\text{errore su 1 bit}}}{\log_2 N} = \frac{1}{\log_2 N} \frac{N-1}{N} 2p$$

La conclusione cui possiamo giungere è la seguente: aggiungendo ad un sistema binario antipodale, che garantisce la probabilità di errore richiesta, delle forme d'onda di ampiezza via via più grande, in modo tale che in ricezione si ottengano, all'uscita dello stesso filtro (negli istanti di campionamento), valori che distano di una quantità $2a$, pari alla distanza tra i due livelli originali, si passa a un sistema multilivello che consente decisioni più complesse, ma con la stessa frequenza e con approssimativamente la stessa probabilità media di errore sul bit. Risulta invece aumentata la velocità di trasmissione, che è $\log_2 N$ volte maggiore di quella del sistema binario di partenza¹⁰.

¹⁰ Facciamo l'esempio di $N=4$ livelli: la probabilità di errore risulta essere $p(\epsilon)=3p/4$ e la velocità di trasmissione è raddoppiata.

Chiaramente, questo aumento di velocità non è “gratuito”, ma si paga in termini di maggiore potenza da trasmettere e di maggiore complessità dei circuiti sia in trasmissione sia in ricezione.

Soffermiamoci, in particolare, sulla potenza. Indichiamo con P_B la potenza di picco¹¹ che si trasmette nel caso del sistema binario antipodale e valutiamo di quanto dobbiamo incrementare questa potenza per passare ad un sistema antipodale con N livelli.

Se N sono i livelli, si verifica facilmente che l'ampiezza della forma d'onda più grande sta in un rapporto di $N-1:1$ con l'ampiezza della forma d'onda relativa al sistema binario equivalente: ad esempio, nel caso di $N=4$ livelli, l'ampiezza massima è $3c$, mentre quella del sistema binario è c , per cui il rapporto è $3:1$, ossia appunto $N-1:1$. Allora, la corrispondente potenza di picco da trasmettere è

$$P_{\text{picco},N} = (N-1)^2 P_B$$

La potenza media da trasmettere risulta invece pari a

$$P_{\text{media},N} = \frac{(N^2 - 1)}{3} P_B$$

Quindi, rispetto alla potenza media P_B che trasmettiamo col sistema binario, per passare ad un sistema ad N livelli dobbiamo aumentare la potenza media di un fattore $\frac{(N^2 - 1)}{3}$.

Quest'ultimo risultato consente di fare un ragionamento di questo tipo: avendo a disposizione, in trasmissione, una certa potenza P_T , ci chiediamo quanti livelli possiamo utilizzare per il nostro sistema. E' evidente che basta imporre la condizione

$$P_T > P_{\text{media},N} = \frac{(N^2 - 1)}{3} P_B$$

Se è stata già valutata P_B (cioè la potenza necessaria per usare 2 soli livelli), allora possiamo ragionare in unità logaritmiche:

$$P_T[\text{dB}] - P_B[\text{dB}] > \frac{(N-1)^2}{3} \Big|_{\text{dB}}$$

Osserviamo, a questo punto, che non sempre, pur avendo a disposizione potenza in sovrappiù, conviene passare da un sistema binario antipodale ad un sistema multilivello. In generale, è sempre necessario tener conto del mezzo trasmissivo con cui si ha a che fare. Un caso tipico è quello del **segnale del Televideo** (del quale avremo modo di parlare dettagliatamente più avanti): in questo caso non si usa un sistema multilivello, in quanto bisogna tener conto del fatto che, per vari motivi, al segnale che giunge all'utente sono sovrapposte una serie di interferenze che assumono molta più rilevanza nel caso di un sistema multilivello che non nel caso di sistema binario.

¹¹ Se consideriamo rettangoli antipodali in trasmissione, la potenza di picco e la potenza media coincidono

OSSERVAZIONE SULL'EQUIPROBABILITÀ DEI SIMBOLI

In tutti i ragionamenti precedenti per il calcolo della probabilità di errore $p(\epsilon)$ in un sistema numerico, abbiamo sempre supposto che i bit fossero equiprobabili, dicendo che questo è il caso più ragionevole. In effetti, non è detto che una data sorgente emetta bit equiprobabili, ma si può comunque fare in modo che lo diventino. Vediamo di che si tratta.

In generale, nei più importanti sistemi di trasmissione numerici, non è possibile accettare che una particolare configurazione di simboli possa creare problemi, per cui bisogna sempre fare in modo che i bit che vengono sostituiti con forme d'onda da inviare in linea siano sempre comunque equiprobabili. Per ottenere questo risultato, basta effettuare il cosiddetto **scrambling** delle sequenze di bit:



In pratica, si tratta di modificare la sequenza di bit emessa dalla sorgente in modo che la sequenza che realmente va trasmessa sia composta da bit equiprobabili. Bisogna allora tener presente di una cosa: l'ideale, per ottenere una sequenza di bit equiprobabili, sarebbe quello di effettuare lo scrambling in maniera del tutto casuale; tuttavia, se si facesse così, non si avrebbe poi alcuna possibilità di ricostruire, in ricezione, l'originale messaggio informativo che si voleva trasmettere. Di conseguenza, si può pensare di memorizzare delle sequenze con funzione di autocorrelazione estremamente stretta (come accade per il processo di rumore), sequenze che però non siano casuali, ma **pseudo-casuali**, nel senso che le variazioni da 1 a 0 e viceversa avvengono in maniera deterministica e quindi in modo che la sequenza originale sia recuperabile in ricezione.

Quindi, effettuando un XOR tra una sequenza pseudo-casuale del tipo descritto (detta quindi **sequenza di scrambling**) e la sequenza di bit emessa dalla sorgente, si ottiene nuovamente una sequenza pseudo-casuale, nella quale quindi l'equiprobabilità dei simboli è praticamente garantita. Questa sequenza pseudo-casuale è quella effettivamente trasmessa e che quindi arriva il ricevitore: qui, essa va nuovamente in XOR con la sequenza di scrambling usata prima della trasmissione, in modo da ricostruire esattamente (a meno, ovviamente, degli errori durante la trasmissione) la sequenza originale.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>