

Appunti di Comunicazioni Elettriche

Capitolo 10 - Parte IV

Demodulatori angolari

Introduzione	1
<i>Considerazioni intuitive sulla demodulazione di fase</i>	2
Demodulazione diretta di fase	3
Demodulazione indiretta di frequenza	7
discriminatore di frequenza	9
<i>Demodulatore FM di Trevis</i>	14
<i>Demodulatore di Foster-Seeley</i>	15
<i>Realizzazione circuitale del ritardatore di gruppo</i>	23
Strutture autobilanciate	27

INTRODUZIONE

Ricordiamo che un segnale modulato angolarmente non è altro che una sinusoide in cui viene fatta variare nel tempo la fase. La legge con cui avviene tale variazione di fase dipende dal tipo di modulazione angolare: nel caso di modulazione di fase (PM), la fase varia proporzionalmente al segnale modulante, mentre, nel caso di modulazione di frequenza (FM), la fase varia proporzionalmente all'integrale del segnale modulante¹. Le rispettive espressioni analitiche del segnale modulato sono dunque le seguenti:

$$s_t(t) = A_C \underbrace{\cos(2\pi f_C t + K_P s(t))}_{\text{modulazione PM}}$$

$$s_t(t) = A_C \underbrace{\cos\left(2\pi f_C t + 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right)}_{\text{modulazione FM}}$$

Per demodulare una portante modulata angolarmente, possiamo seguire due strade:

- la prima strada è quella della *demodulazione diretta*, nella quale dobbiamo in qualche modo realizzare le operazioni duali rispetto a quelle che abbiamo effettuato per la modulazione;
- la seconda strada è quella della *demodulazione indiretta*, nella quale invece si esegue la demodulazione angolare sfruttando una demodulazione di ampiezza, che è una operazione più facile da fare, specialmente con tecniche analogiche.

¹ In questo caso, è la frequenza istantanea della portante che varia proporzionalmente al segnale modulante

Considerazioni intuitive sulla demodulazione di fase

Prima di passare in rassegna le varie possibilità, facciamo delle considerazioni intuitive a proposito della demodulazione di fase.

Come detto poco fa, il segnale modulato PM ha espressione

$$s_t(t) = A_C \cos(2\pi f_c t + K_p s(t))$$

La prima cosa che verrebbe da chiedersi è se, così come nella demodulazione di ampiezza, si possa pensare ad una demodulazione coerente. Vediamo se questo è possibile.

In primo luogo, applicando le formule di duplicazione del Coseno, possiamo scrivere il segnale modulato nella forma

$$s_t(t) = A_C \cos(2\pi f_c t) \cos(K_p s(t)) - A_C \sin(2\pi f_c t) \sin(K_p s(t))$$

Se abbiamo scelto un basso indice di modulazione, per cui la deviazione di fase $K_p s(t)$ è piccola, possiamo approssimare $\cos(K_p s(t)) \cong 1$ e $\sin(K_p s(t)) \cong K_p s(t)$, nel quale caso il segnale modulato diventa

$$s_t(t) \cong A_C \cos(2\pi f_c t) - A_C \sin(2\pi f_c t) K_p s(t)$$

Se allora moltiplichiamo questo segnale per una oscillazione locale sincrona con la portante ma in quadratura con essa e con segno negativo, otteniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= s_t(t) (-\sin(2\pi f_c t)) = -A_C \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) + A_C \sin^2(2\pi f_c t) K_p s(t) = \\ &= -\frac{A_C}{2} \sin(4\pi f_c t) + \frac{A_C}{2} (1 + \sin(4\pi f_c t)) K_p s(t) = -\frac{A_C}{2} \sin(4\pi f_c t) + \frac{A_C}{2} \sin(4\pi f_c t) + \frac{A_C}{2} K_p s(t) \end{aligned}$$

Questo segnale contiene due termini in alta frequenza ($2f_c$) ed un termine in banda base proporzionale al segnale modulante: allora, con un filtraggio passa-basso di banda pari a quella di $s(t)$, otteniamo proprio $s(t)$. Quindi, se la deviazione di fase $K_p s(t)$ è piccola, la demodulazione coerente consente l'estrazione del segnale modulante.

Se la deviazione di fase non è invece piccola, le cose si complicano: in questo caso, la moltiplicazione dà

$$\begin{aligned} x(t) &= s_t(t) (-\sin(2\pi f_c t)) = -A_C \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) \cos(K_p s(t)) + A_C \sin^2(2\pi f_c t) \sin(K_p s(t)) = \\ &= -\frac{A_C}{2} \sin(4\pi f_c t) \cos(K_p s(t)) + \frac{A_C}{2} (1 + \sin(4\pi f_c t)) \sin(K_p s(t)) = \\ &= -\frac{A_C}{2} \sin(4\pi f_c t) \cos(K_p s(t)) + \frac{A_C}{2} \sin(4\pi f_c t) + \frac{A_C}{2} \sin(K_p s(t)) \end{aligned}$$

In questo caso, abbiamo ancora termini in alta frequenza, eliminabili col filtraggio passa-basso, ma il termine di interesse è diventato $\frac{A_C}{2} \sin(K_p s(t))$, il che mostra nuovamente la necessità di avere $K_p s(t)$ piccola.

Un'altra possibilità, valida per qualsiasi valore di $K_p s(t)$, è quella di generare localmente una oscillazione locale che, anziché essere a frequenza fissa, abbia a sua volta una legge di modulazione angolare, ottenuta tramite una stima sufficientemente approssimata dell'onda da demodulare: si tratterebbe cioè di usare un'oscillazione del tipo $-\sin(2\pi f_c t + K_p s(t) - \varepsilon(t))$, dove il termine $\varepsilon(t)$

rappresenta di quanto la stima si discosta dal segnale modulante. Effettuando la moltiplicazione, otteniamo in questo caso

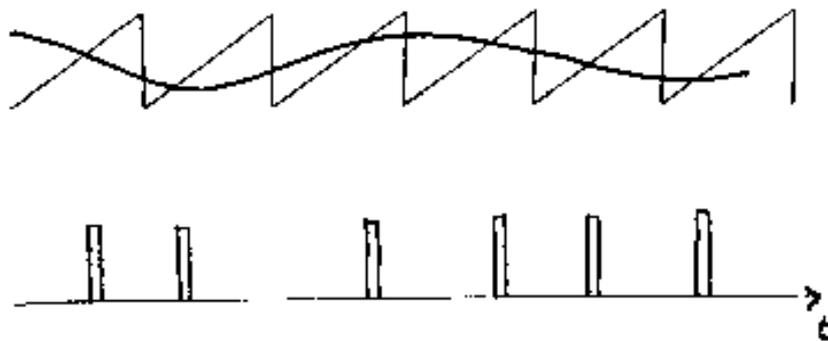
$$\begin{aligned} x(t) &= s_t(t) \left(-\sin(2\pi f_c t + K_p s(t) - \varepsilon(t)) \right) = -A_c \cos(2\pi f_c t + K_p s(t)) \left(\sin(2\pi f_c t + K_p s(t) - \varepsilon(t)) \right) = \\ &= \dots = \frac{A_c}{2} \sin(\varepsilon(t)) + \text{termini in alta frequenza} \end{aligned}$$

Otteniamo cioè che l'uscita dipende dall'errore $\varepsilon(t)$ commesso nella stima: se tale errore è piccolo allora otteniamo, dopo il solito filtraggio, un segnale approssimativamente proporzionale ad $\varepsilon(t)$, il che ci consentirebbe di correggere la stima e ottenere il segnale di interesse.

Il problema, in quest'ultimo schema, è ovviamente nella generazione della stima di $s(t)$: ad ogni modo, sistemi che usano uno schema di principio di questo tipo sono gli **anelli ad aggancio di fase**, i quali includono particolari oscillatori controllati in frequenza.

DEMODULAZIONE DIRETTA DI FASE

Cominciamo adesso a parlare della demodulazione diretta di fase. Avendo detto che dobbiamo effettuare operazioni duali rispetto a quelle usate per la modulazione, riprendiamo i metodi usati per la modulazione di fase. Uno di questi metodi era quello di usare un dispositivo che, ricevendo in ingresso un dente di sega ed il segnale modulante, sganciasse degli impulsini ideali (teoricamente) in corrispondenza degli istanti in cui i due segnali assumono lo stesso valore:



Così facendo, otteniamo un treno di impulsi modulati in posizione dal segnale modulante²; filtrando passa-banda, con banda passante centrata sulla frequenza f_p dell'onda triangolare, isoliamo proprio una sinusoide, a frequenza f_p , che risulta modulata di fase da $s(t)$. Il pregio di questo meccanismo, come già sottolineato a suo tempo, è che non è necessario generare alcuna portante da modulare, ma solo il segnale a dente di sega.

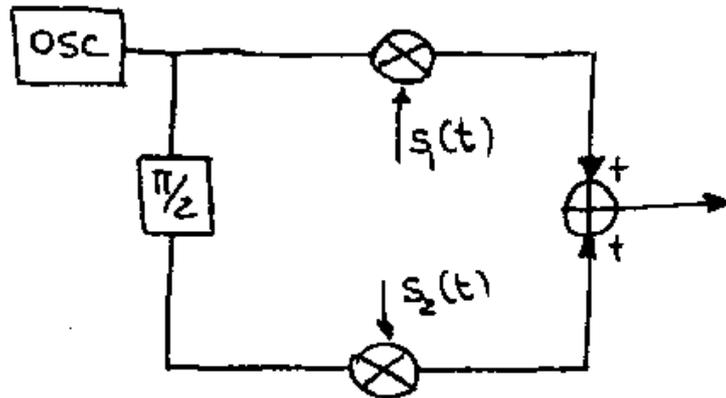
Questo stesso meccanismo può essere usato in sede di demodulazione: infatti, se la frequenza f_p della portante è molto maggiore della banda del segnale modulante, possiamo immaginare che l'informazione contenuta nella fase della portante modulata sia legata proprio agli istanti di attraversamento dello zero. Allora, mandando la portante modulata $s_t(t)$ in un circuito di trigger, esso ci dà in uscita degli impulsi in corrispondenza degli istanti in cui $s_t(t)$ attraversa lo zero con pendenza, ad esempio, positiva. Così facendo otteniamo un treno di impulsi ancora modulati in posizione, dove la distanza temporale tra gli impulsi è funzione dell'entità del segnale modulante: quando la frequenza istantanea della portante modulata è maggiore di f_p , significa che la deviazione di frequenza è positiva, per cui gli impulsi sono più vicini, mentre invece la deviazione di frequenza

² Si parla di **PPM**, ossia appunto *Pulse Position Modulation*

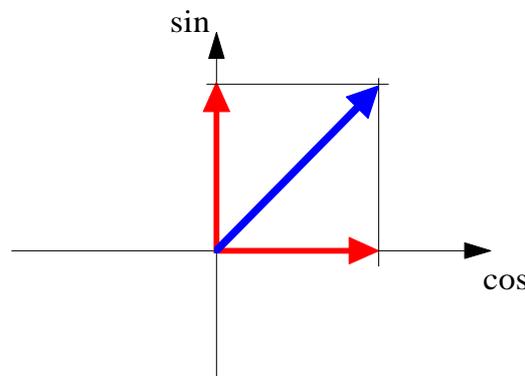
è negativa quando la frequenza istantanea della portante modulata è inferiore a f_p , ossia quando la deviazione di frequenza è negativa.

Se, a questo punto, inviamo questi impulsi in un filtro passa-basso, questo esegue la media temporale del segnale in un intervallo di tempo abbastanza lungo³: ciò significa che la sua uscita sarà maggiore quando gli impulsi sono più frequenti e minore quando invece sono più radi. Questo equivale ad ottenere una uscita proporzionale al segnale modulante.

Un altro modo che a suo tempo abbiamo esaminato per realizzare una modulazione di fase è quello di usare un **modulatore di Armstrong**:



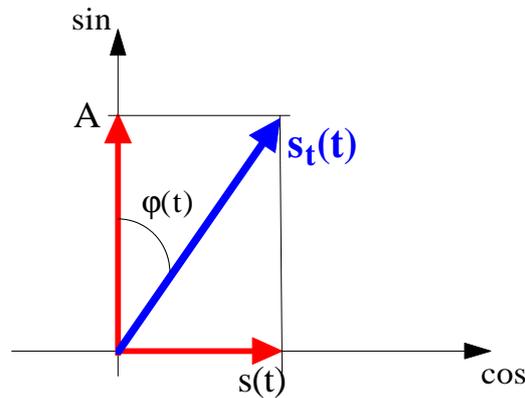
In questo caso, si trattava di osservare che, per generare una sinusoide di ampiezza e fase qualunque, ad una precisa frequenza, è sufficiente combinare in modo opportuno due sinusoidi che siano isofrequenziali ma in quadratura:



Variando semplicemente l'ampiezza delle sinusoidi in quadratura (cioè modulandole di ampiezza), la loro somma dà origine ad una ulteriore sinusoide, alla stessa frequenza, ma di ampiezza e fase dipendenti dalle due leggi di modulazione. Avevamo allora pensato di modulare d'ampiezza una delle due sinusoidi mediante il segnale modulante $s(t)$ e di lasciare l'altra invariata (tranne un fattore moltiplicativo A), ottenendo

$$s_1(t) = A\sin(\omega_p t) + s(t)\cos(\omega_p t)$$

³ teoricamente infinito se la banda è limitata



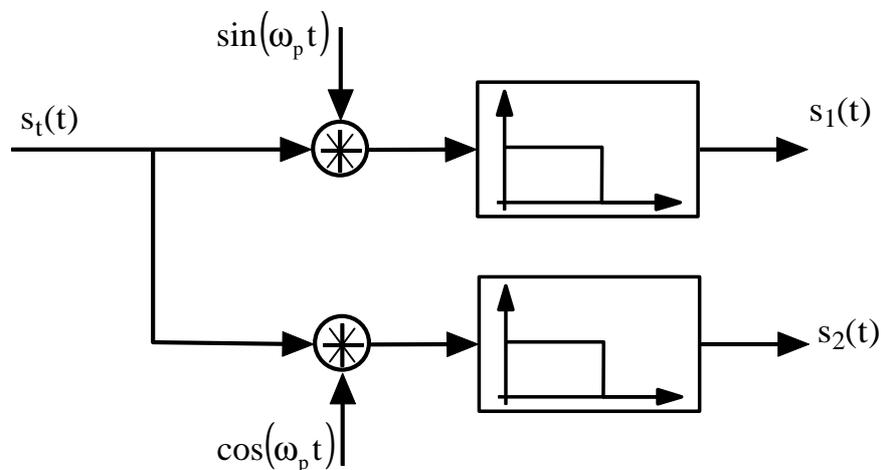
L'ampiezza della risultante è $M(t) = \sqrt{A^2 + s^2(t)}$, mentre la fase è $\varphi(t) = \arctan \frac{s(t)}{A}$: rendendo la costante A abbastanza grande, risulta

$$M(t) \cong \sqrt{A^2} = A$$

$$\varphi(t) \cong \frac{s(t)}{A}$$

Otteniamo cioè una sinusoide di ampiezza praticamente costante e di fase che varia in modo praticamente lineare con $s(t)$.

Un principio di questo tipo si può usare anche in sede di demodulazione. Consideriamo infatti un demodulatore fatto nel modo seguente:



In sede di ricezione, in primo luogo generiamo nuovamente le due sinusoidi in quadratura, isofrequenziali tra loro e con quelle usate per la modulazione. Moltiplichiamo successivamente ciascuna di queste sinusoidi con il segnale modulato ricevuto dal canale: se

$$s_1(t) \cong A \cos\left(\omega_p t + \frac{s(t)}{A}\right) = A \left[\cos(\omega_p t) \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) - \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin(\omega_p t) \right]$$

è il segnale modulato, otteniamo dunque i due segnali

$$A \left[\cos(\omega_p t) \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) - \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin(\omega_p t) \right] \sin(\omega_p t) = A \left[\sin(\omega_p t) \cos(\omega_p t) \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) - \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin^2(\omega_p t) \right]$$

$$A \left[\cos(\omega_p t) \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) - \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin(\omega_p t) \right] \cos(\omega_p t) = A \left[\cos^2(\omega_p t) \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) - \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin(\omega_p t) \cos(\omega_p t) \right]$$

Sviluppando qualche semplice conto, otteniamo ancora che

$$\text{ramo superiore} \longrightarrow A \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin(2\omega_p t) - \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_p t)) \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \right]$$

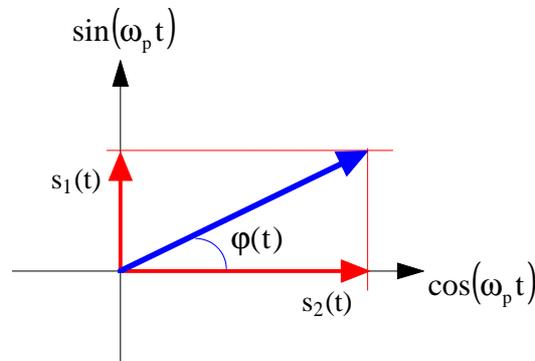
$$\text{ramo inferiore} \longrightarrow A \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right) (1 + \cos(2\omega_p t)) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right) \sin(2\omega_p t) \right]$$

Si distinguono, su entrambi i rami, termini in alta frequenza ($2\omega_p$) e termini in bassa frequenza, entrambi legati ad $s(t)$. Con un successivo filtraggio passa-basso⁴ su entrambi i rami, i termini in alta frequenza vengono eliminati:

$$\text{ramo superiore} \longrightarrow s_1(t) = \frac{A}{2} \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right)$$

$$\text{ramo inferiore} \longrightarrow s_2(t) = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right)$$

In pratica, si ottengono le due proiezioni della portante modulata sui due assi $\sin(\omega_p t)$ e $\cos(\omega_p t)$ del piano dei segnali:

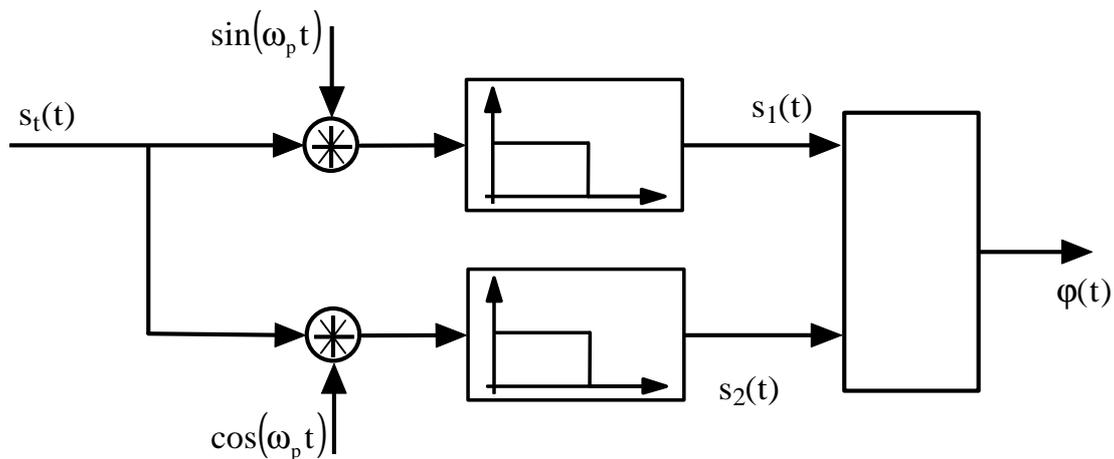


A questo punto, non resta che effettuare la seguente operazione:

$$\varphi(t) = \arctan \frac{s_1(t)}{s_2(t)} = \arctan \frac{\frac{A}{2} \sin\left(\frac{s(t)}{A}\right)}{\frac{A}{2} \cos\left(\frac{s(t)}{A}\right)} = \arctan \left[\tan\left(\frac{s(t)}{A}\right) \right] = \frac{s(t)}{A}$$

⁴ La banda del filtraggio deve essere pari a metà della banda occupata dal segnale modulato, ossia metà della banda di Carson: ad esempio, nella **trasmissione radiofonica in FM**, ogni canale ha una banda di **180 kHz**, per cui il filtraggio passa-basso deve avvenire su una banda di **90 kHz**.

Abbiamo dunque ottenuto la legge di modulazione che cercavamo, ossia appunto $s(t)$. Lo schema a blocchi del demodulatore diventa quindi il seguente:



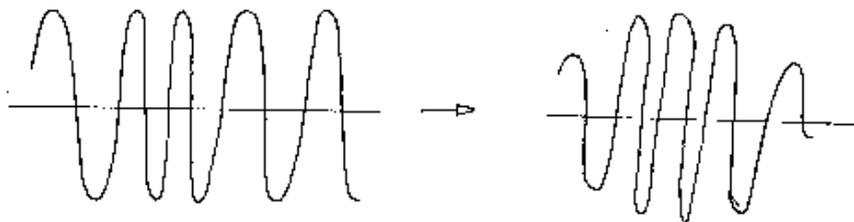
L'ulteriore blocco posto in cascata è quello che deve eseguire l'Arctan di $s_1(t)/s_2(t)$, ossia una operazione non lineare sui due segnali che gli arrivano in ingresso: si potrà trattare di un blocco di tipo analogico o, in base ai problemi che vedremo adesso, di un blocco di tipo numerico.

Osservazione

Un ricevitore di questo tipo prende il nome di **ricevitore general purpose** per un motivo evidente: la scomposizione del segnale ricevuto $s_t(t)$ come "proiezione" sull'asse $\sin(\omega_p t)$ e come "proiezione" sull'asse $\cos(\omega_p t)$ consente di effettuare sia una demodulazione di frequenza, con la tecnica appena illustrata, sia una demodulazione di ampiezza coerente sia anche altre operazioni che però non ci interessano in questo momento. Di conseguenza, se il blocco che riceve i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ è di tipo numerico, basterà programmarlo opportunamente per eseguire le operazioni desiderate.

DEMODULAZIONE INDIRETTA DI FREQUENZA

Esiste una classe di demodulatori FM analogici che si basa sul seguente concetto: con tecniche analogiche, una operazione che è possibile fare con molta facilità e bassissimo costo è la *demodulazione di ampiezza ad involuppo*; di conseguenza, potrebbe rivelarsi molto conveniente un metodo di demodulazione FM in cui la legge di modulazione di frequenza venga trasformata in una legge di modulazione di ampiezza, in quanto, in questo caso, ci basterebbe eseguire una demodulazione ad involuppo per estrarre il segnale modulante:

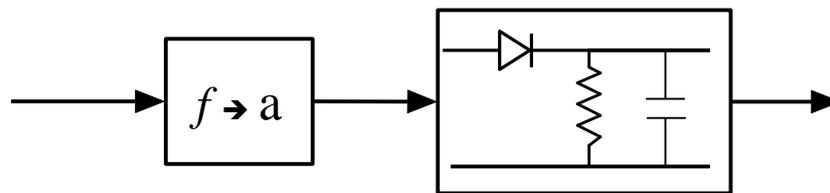


Cominciamo allora a vedere, in linea di principio, cosa dovremmo riuscire a realizzare. L'ingresso al nostro ricevitore è un segnale modulato di frequenza, che quindi ha una espressione analitica del tipo seguente:

$$s_t(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) = A_c \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right)$$

dove $\Delta\omega$ è la deviazione di frequenza (picco-picco). Si tratta dunque, come sappiamo, di una sinusoide di ampiezza costante, la cui frequenza istantanea varia nel tempo in modo proporzionale al segnale modulante. Noi vogliamo ideare un circuito che, ricevendo in ingresso questo segnale, generi in uscita una sinusoide modulata di ampiezza, dove, in particolare, la legge di modulazione di ampiezza sia proporzionale alla legge di modulazione di frequenza in ingresso. Dato che il dispositivo può essere un semplice filtro lineare, non è ragionevole attendersi che l'uscita sia una sinusoide a frequenza fissa: quindi, il segnale di uscita, pur presentando la legge di modulazione di ampiezza richiesta, conserverà comunque anche la legge di modulazione di frequenza.

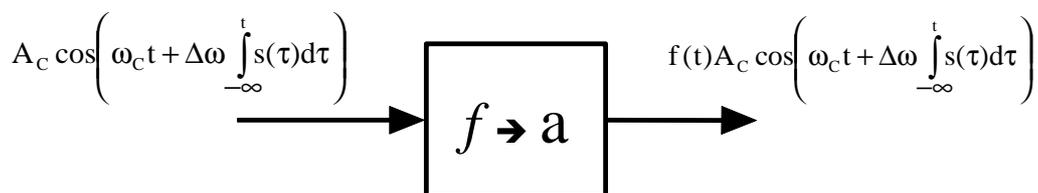
Questo fatto, però, non ci crea alcun problema, in quanto l'informazione che ci interessa (il segnale modulante) è comunque contenuta nell'ampiezza del segnale, anche se la frequenza di tale segnale non è costante. Di conseguenza, potremo comunque usare un demodulatore ad involuppo, adottando perciò uno schema del tipo seguente:



Il primo blocco consente l'estrazione della legge di modulazione di ampiezza a partire da quella di modulazione di frequenza, mentre il secondo è il classico demodulatore ad involuppo.

Il motivo per cui usiamo un demodulatore ad involuppo e non un demodulatore coerente è proprio nel fatto che, all'uscita dal primo blocco, il segnale conserva ancora una modulazione di frequenza. Possiamo renderci conto di questo con qualche passaggio analitico.

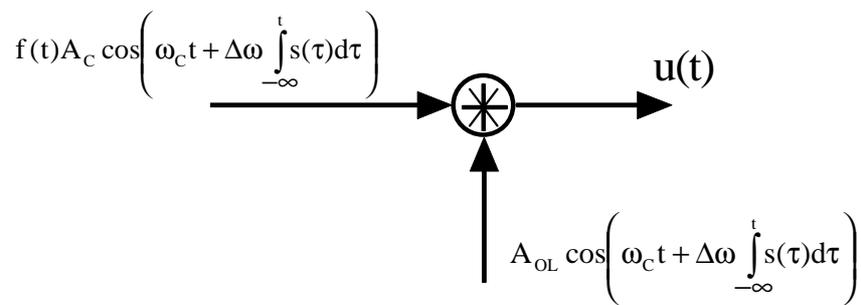
Supponiamo di aver trovato il modo di realizzare il primo blocco (conversione frequenza→ampiezza) dello schema dell'ultima figura, ossia un blocco così caratterizzato:



Il segnale in uscita è dunque del tipo

$$f(t) A_c \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right)$$

dove $f(t)$ è la legge di modulazione di ampiezza (per ora incognita) che siamo riusciti a ricavare, cui si sovrappone la legge di modulazione di frequenza che avevamo in ingresso. Per demodulare in modo coerente, avremmo la necessità di generare localmente una oscillazione sincrona in frequenza ed in fase con quella che riceviamo:



Eseguendo il prodotto di questi segnali, otterremo un termine dato dalla somma degli argomenti ed un termine dato dalla differenza tra gli argomenti:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= f(t)A_C \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) A_{OL} \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) = \\
 &= f(t) \frac{A_C A_{OL}}{2} \left[\cos\left(2\omega_c t + 2\Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) + \cos(0) \right] = f(t) \frac{A_C A_{OL}}{2} \left[\cos\left(2\omega_c t + 2\Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) + 1 \right]
 \end{aligned}$$

Il termine somma è un termine centrato a frequenza $2\omega_c$ e con deviazione di frequenza doppia: essendo alta la frequenza centrale, possiamo senz'altro eliminarlo con un filtraggio passa-basso. Il termine con argomento differenza, che invece deve passare inalterato dal filtraggio, contiene la legge di modulazione $f(t)$ che ci interessa, a meno dell'inevitabile fattore di scala.

Questo è dunque il tipico schema di demodulazione coerente: per funzionare, esso prevede che si riesca a generare localmente una sinusoide la cui fase sia $\Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$: per generare questa fase, l'unica possibilità è quella di conoscere $s(t)$, il che presupporrebbe di aver già demodulato in frequenza.

Concludiamo che *non è assolutamente possibile usare una demodulazione coerente, per cui l'unica possibilità è di ricorrere ad una demodulazione ad involuppo.*

DISCRIMINATORE DI FREQUENZA

Premesso questo, vediamo nel dettaglio come realizzare il circuito che converte la legge di modulazione di frequenza in una legge di modulazione di ampiezza.

A livello analitico, se noi consideriamo il segnale modulato FM (ricevuto dal canale) e lo deriviamo rispetto al tempo, otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds_t(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[A_C \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) \right] = -A_C \sin\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) \frac{d}{dt} \left[\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] = \\
 &= -A_C \sin\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) (\omega_c + \Delta\omega s(t))
 \end{aligned}$$

Abbiamo evidentemente ottenuto dalla derivazione una sinusoide la cui legge di modulazione angolare è la stessa della portante in ingresso e la cui legge di modulazione di ampiezza è proporzionale al segnale modulante.

Concludiamo allora che, a livello teorico, il blocco che esegue la conversione frequenza@ampiezza non è altro che un derivatore. A livello pratico, ci sono diversi problemi da considerare.

In primo luogo, ricordiamo che un derivatore ideale ha una funzione di trasferimento nella forma $H(f) = j2\pi fRC$, ossia con modulo crescente con la frequenza e fase costante sul valore $\pi/2$. Questo vale per tutte le frequenze e non è decisamente quello che a noi interessa: a noi interessa, infatti, che l'andamento di $H(f)$ sia tale solo nella banda di interesse, mentre vogliamo che altrove il modulo di $H(f)$ vada a 0, in modo da eliminare il rumore.

Consideriamo allora un filtro lineare che goda di queste particolari caratteristiche. Solo sotto queste ipotesi, si può dimostrare che è possibile calcolare facilmente l'uscita del filtro quando l'ingresso non è una semplice senoide, ma una senoide modulata angularmente. Vediamo perché.

Se il segnale in ingresso al filtro, supposto con funzione di trasferimento $H(\omega)$, è una senoide del tipo $\sin(\omega t)$, sappiamo che l'uscita del filtro stesso si può calcolare semplicemente come

$$u(t) = |H(\omega)|\sin(\omega t + \langle H(\omega) \rangle)$$

Questo in base alla teoria di Fourier ed alle proprietà dei sistemi lineari (teorema della risposta armonica visto in Controlli Automatici).

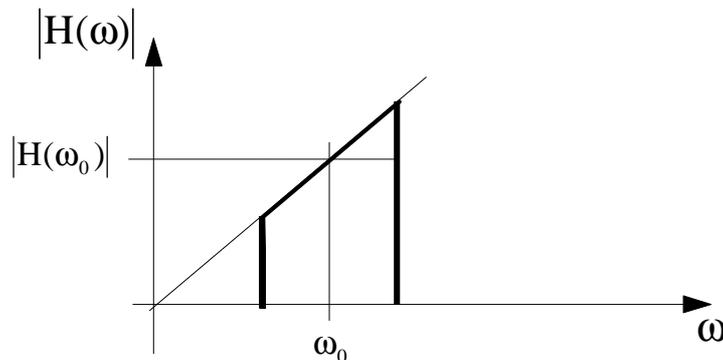
Nel nostro caso, invece, il segnale in ingresso al filtro è del tipo $\sin(\omega t + \varphi(t))$ e quindi non è una senoide; si tratta di una funzione di funzione, con andamento che non è nemmeno periodico; di conseguenza, dovremmo scomporre un segnale non periodico in una somma di sinusoidi, con notevoli complicazioni matematiche.

D'altra parte, nell'ipotesi che il modulo della funzione di trasferimento del filtro sia rettilineo con la frequenza e la fase sia costante o rettilinea anch'essa, è lecito considerare il segnale $\sin(\omega t + \varphi(t))$ come una senoide $\sin(\omega_1 t)$ di pulsazione $\omega_1 = \omega + \frac{d\varphi(t)}{dt}$. Sotto questa ipotesi, l'uscita del filtro può essere calcolata come

$$u(t) = |H(\omega_1)|\sin(\omega_1 t + \langle H(\omega_1) \rangle)$$

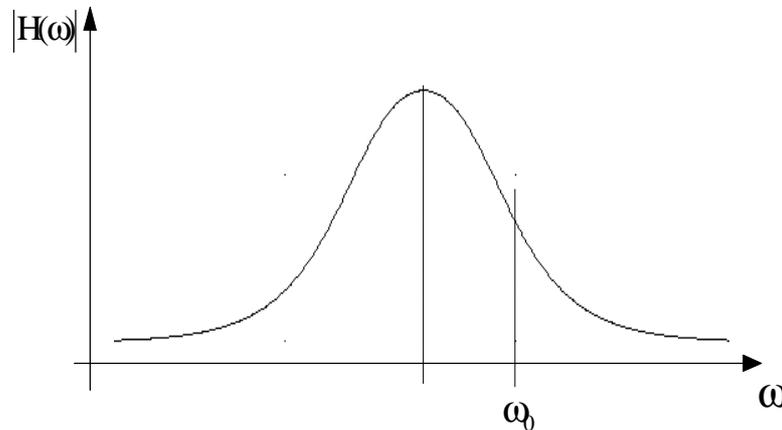
Questo è il modo di procedere in regime quasi stazionario: in pratica, se la legge $\varphi(t)$ di modulazione angolare è sufficientemente lenta, è possibile affermare che, per un certo intervallo di tempo (tanto più lungo quanto più lenta è la legge $\varphi(t)$), la senoide modulata angularmente somiglia molto ad un pezzo di senoide. Se tale intervallo di tempo è lungo rispetto alla durata della risposta all'impulso del filtro, possiamo approssimare l'uscita come risposta ad una senoide.

Fatte dunque queste premesse, a noi interessa un filtro la cui funzione di trasferimento abbia modulo del tipo seguente:

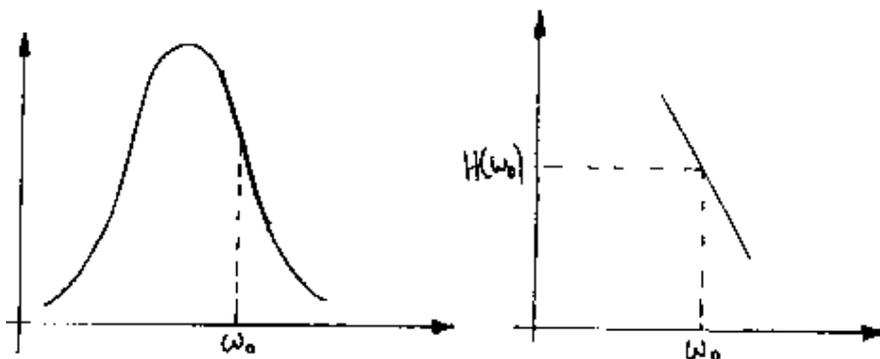


Un filtro con questo tipo di modulo della funzione di trasferimento implementa dunque la conversione da deviazione di frequenza a variazione di ampiezza. Esso consente dunque la realizzazione di un dispositivo identificato come **discriminatore di frequenza**.

D'altra parte, questo non è l'unico filtro che opera la suddetta conversione. *Un altro circuito che approssima bene l'andamento rettilineo in frequenza desiderato è un circuito risonante*. Infatti, ricordiamo che il modulo della funzione di trasferimento di un risonante ha un andamento tipico fatto nel modo seguente:



Se allora noi impostiamo la frequenza centrale ω_0 (sarebbe la frequenza della portante non modulata) in modo che si trovi in prossimità del flesso della funzione $|H(\omega)|$, otteniamo che, nell'intorno di tale frequenza, l'andamento di $|H(\omega)|$ è con buona approssimazione rettilineo:



La scelta del flesso è indifferente: possiamo scegliere sia il tratto di curva con pendenza positiva, in modo da ottenere una funzione di trasferimento del tipo visto prima (derivatore), oppure anche il tratto con pendenza negativa. Possiamo anzi renderci conto facilmente che è estremamente comodo poter prendere entrambi i flessi.

Per semplicità, supponiamo che il nostro filtro abbia l'effetto di un derivatore, per cui l'espressione teorica del segnale in uscita è quella trovata prima e qui di seguito riportata:

$$u(t) = \frac{ds_t(t)}{dt} = -A_c \sin \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) (\omega_c + \Delta\omega s(t))$$

Se il segnale fosse effettivamente questo, esso si presterebbe ad una demodulazione ad involuppo nell'ipotesi che risulti $\omega_c + \Delta\omega s(t) > 0$ per $\forall t$: sappiamo infatti che il demodulatore ad involuppo riesce a seguire il segnale solo se quest'ultimo non cambia segno. Supponiamo allora che la condizione $\omega_c + \Delta\omega s(t) > 0$ sia verificata (basta dimensionare opportunamente ω_c e $\Delta\omega$).

Nella pratica, uno schema di questo tipo presenta il problema che l'ampiezza A_C non è in realtà costante nel tempo, ma è lentamente variabile: possiamo cioè scrivere che $A_C(t) = A_{C0} + r(t)$, dove A_{C0} è il termine che ci attenderemmo, mentre $r(t)$ rappresenta le fluttuazioni (lente) rispetto a tale valore. Tali fluttuazioni sono dovute a disturbi di varia natura.

Sostituendo nell'espressione di $u(t)$, otteniamo

$$u(t) = -(A_{C0} + r(t)) \sin \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) (\omega_c + \Delta\omega s(t)) =$$

$$= -(\omega_c (A_{C0} + r(t)) + \Delta\omega s(t) (A_{C0} + r(t))) \sin \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) =$$

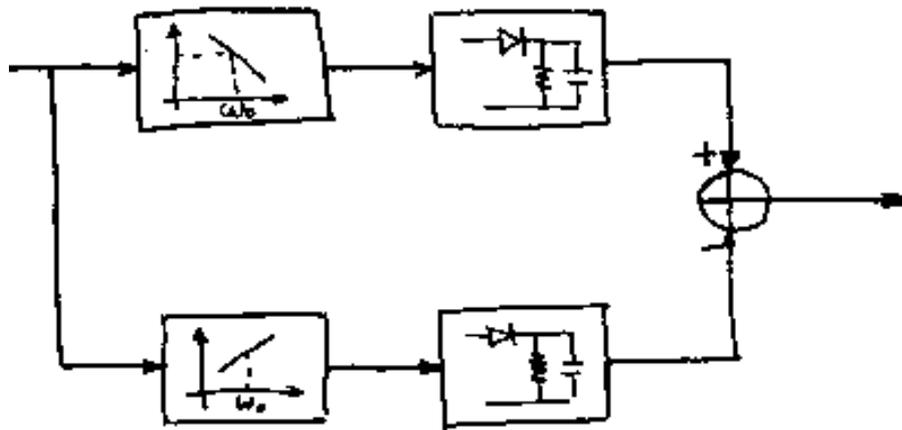
In base a questa espressione, abbiamo la somma di 2 termini: il primo di questi ha una legge di modulazione di ampiezza indipendente da $s(t)$, per cui non ci interessa, mentre l'altro ha una legge di modulazione di ampiezza che dipende sia da $s(t)$ sia anche da $r(t)$. Essendo tali due termini alla stessa frequenza, è ovviamente impossibile distinguere le due cose. Tanto per avere una idea, se il segnale in ingresso non fosse modulato, ossia se $s(t)=0$, otterremmo in uscita

$$u(t) = -A_{C0} \omega_c \sin(\omega_c t) - r(t) \omega_c \sin(\omega_c t) = -\omega_c (A_{C0} - r(t)) \sin(\omega_c t)$$

ossia ancora una legge di modulazione di ampiezza.

Mandando il segnale al demodulatore ad involuppo, esso tira dunque fuori un segnale che non è più proporzionale al segnale di interesse $s(t)$.

L'unica possibilità, quando, come in questo caso, non si può filtrare un termine indesiderato, è quella di cercare di bilanciarlo. Una struttura bilanciata che fa al caso nostro è allora la seguente:



Con questa struttura, il segnale modulato angularmente subisce due elaborazioni in qualche modo "complementari" nei due rami: le uscite dai due filtri contengono un termine comune cui è sommato o sottratto un termine legato ad $\Delta\omega s(t)$:

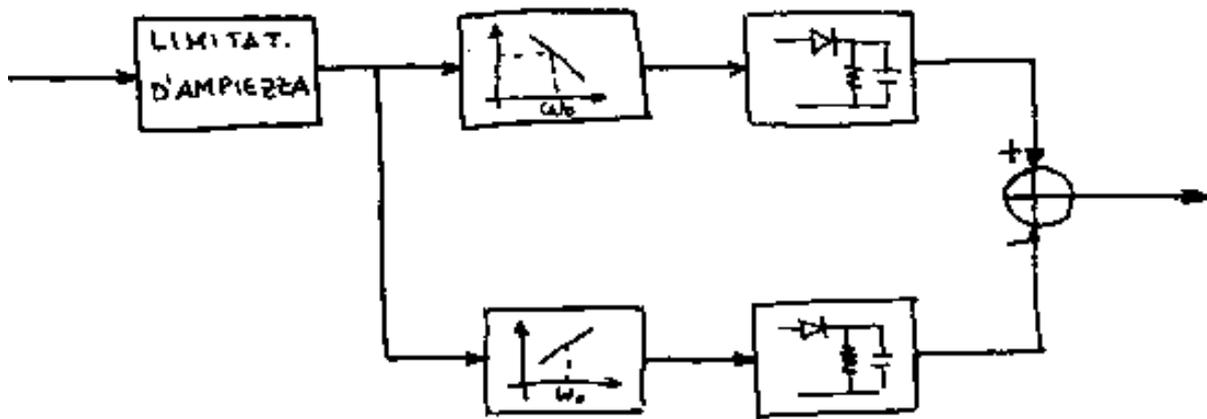
$$u_1(t) = -(\omega_c (A_{C0} + r(t)) + \Delta\omega s(t) (A_{C0} + r(t))) \sin \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right)$$

$$u_2(t) = -(\omega_c (A_{C0} + r(t)) - \Delta\omega s(t) (A_{C0} + r(t))) \sin \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right)$$

Di conseguenza, effettuando la successiva demodulazione ad inviluppo dei due segnali e facendo poi la differenza tra le uscite, il termine proporzionale a $\Delta\omega s(t)$ raddoppia, mentre l'altro termine scompare, in quanto è comune ai due rami:

$$u(t) \propto \Delta\omega s(t)(A_{C0} + r(t)) = A_{C0}\Delta\omega s(t) + r(t)\Delta\omega s(t)$$

D'altra parte, rimane comunque un contributo legato ad $r(t)$ oltre che ad $s(t)$. Generalmente, tenendo conto del valore di A_{C0} , si tratta però di un contributo piccolo rispetto all'altro, che è quello di nostro interesse. Ad ogni modo, per eliminare più o meno completamente tale ultimo contributo indesiderato, possiamo porre un **limitatore d'ampiezza** a monte di tutto l'apparato

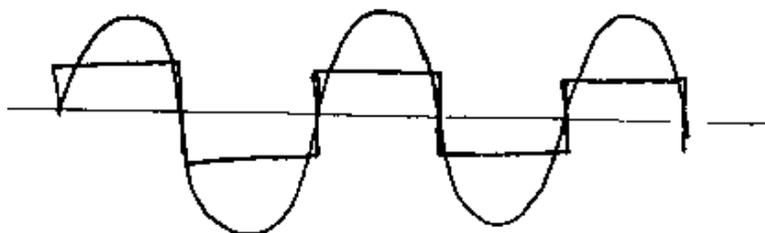


E' immediato capire l'utilizzo di questo limitatore.

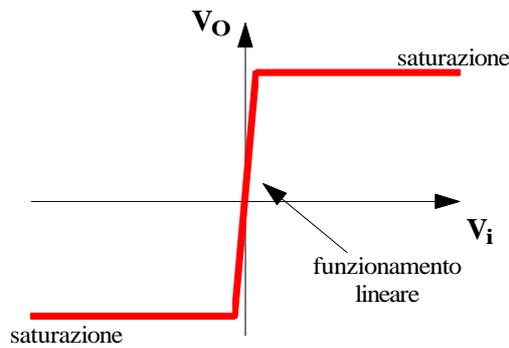
Il segnale in ingresso all'apparato è il solito segnale modulato FM, cui sono sovrapposte le fluttuazioni sull'ampiezza della portante:

$$s_t(t) = (A_{C0} + r(t)) \cos \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right)$$

L'informazione è contenuta nelle variazioni di fase di questo segnale, mentre le variazioni di ampiezza sono estranee e indesiderate. Allora, possiamo pensare di squadrare il segnale, in modo da eliminare le fluttuazioni di ampiezza, conservando allo stesso tempo gli attraversamenti per lo zero, i quali contengono le informazioni su $s(t)$ in quanto dipendono proprio da $s(t)$:



Quindi, il limitatore di ampiezza può essere visto come un semplice comparatore: ovviamente, non potendo mai disporre di un comparatore ideale, esso avrà sempre una dinamica di ingresso di ampiezza non nulla, per quanto piccola:

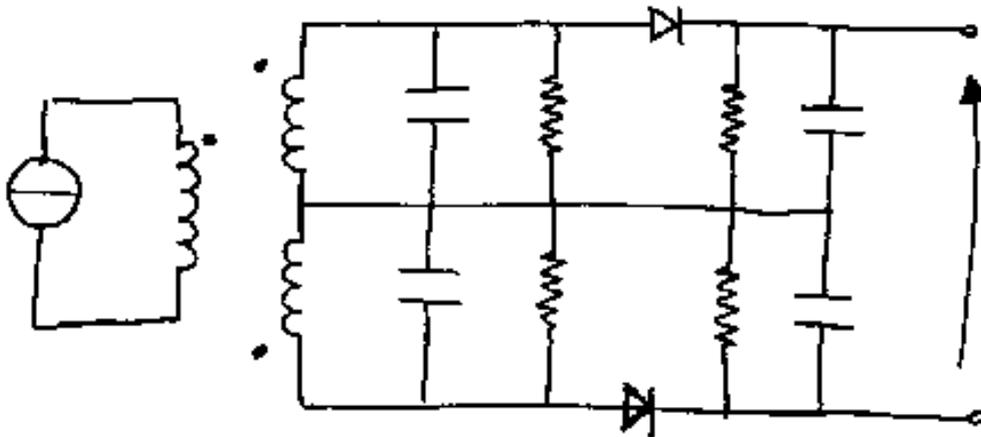


Di conseguenza, l'uscita di tale dispositivo non sarà una successione di rettangoli, ma una successione di trapezi. Non solo, ma se il segnale in ingresso è particolarmente piccolo, resteranno comunque dei residui di sinusoidi, in quanto più difficilmente il comparatore riuscirà ad andare in saturazione, per cui la forma d'onda di uscita conserverà ancora la modulazione d'ampiezza rappresentata da $r(t)$.

Demodulatore FM di Trevis

Fin qui, dunque, lo schema a blocchi di un **demodulatore FM indiretto bilanciato**. Vediamo adesso l'implementazione circuitale.

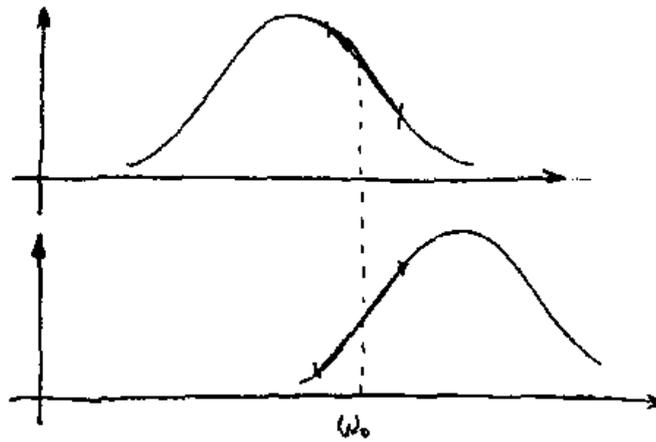
Se scegliamo di usare due risonanti per realizzare i due filtri, uno schema possibile è quello del **demodulatore di Trevis**:



Il segnale da demodulare $s_t(t)$ è applicato, come sempre, tramite un trasformatore. Se si tratta di un trasformatore a presa centrale e l'ingresso è proprio il segnale $s_t(t)$, i due rami dell'apparato ricevono ciascuno un segnale corrispondente a $s_t(t)/2$.

Il primo parallelo RLC (dove l'induttanza è quella del secondario del trasformatore) è il risonante che funge da filtro $H(f)$ con andamento rettilineo di $|H(f)|$ nella banda di interesse.

E' ovvio che i due risonanti non sono però uguali, perché abbiamo detto che la frequenza centrale ω_0 deve trovarsi in uno (ad esempio quello superiore) sul flesso con pendenza negativa e nell'altro sul flesso con pendenza positiva:



Ricordiamo inoltre che l'approssimazione di linearità, nell'intorno di ω_0 , per le curve appena riportate deve valere nella banda del segnale modulato, ossia quindi nella banda di Carson.

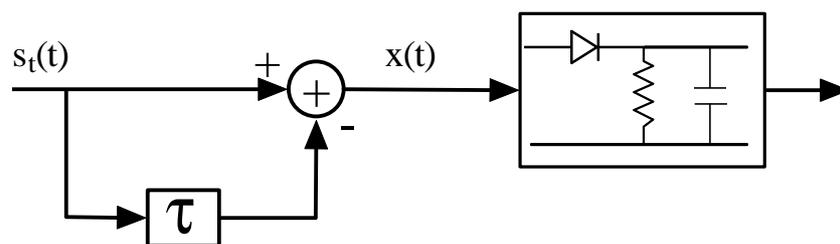
In cascata ai due risonanti ci sono due demodulatori ad involuppo classici, questa volta uguali tra loro: come è noto, si tratta di due semplici circuiti in cui il condensatore rimane caricato alla tensione di picco dell'ingresso, il che consente appunto di seguire l'involuppo dell'ingresso stesso.

Il problema fondamentale di questo circuito è nelle difficoltà di taratura: infatti, è fondamentale regolare fattore di merito e frequenza di risonanza dei due risonanti in modo tale da piazzare i flessi a pulsazione ω_0 . Una eventuale dissimetria nella taratura dei due risonanti comporta il mancato bilanciamento e quindi un deterioramento dell'esito della demodulazione.

A fronte di questo svantaggio, questo circuito ha il pregio di possedere una buona linearità ed è questo il motivo per cui, tempo fa, esso era molto utilizzato per i ponti radio analogici FM. Attualmente, si è passati invece alle più moderne ed efficaci tecniche numeriche.

Demodulatore di Foster-Seeley

Sempre tempo fa, nelle normali radio FM si usava un'altra tecnica. Sempre conservando il concetto del passaggio da legge di modulazione di frequenza a legge di modulazione di ampiezza, non si usava il fianco della funzione di trasferimento di un risonante, bensì un circuito del tipo seguente:



Questo circuito si compone dunque di un **elemento ritardatore**, di un nodo sottrattore (o comparatore) e di un classico demodulatore ad involuppo. E' facile rendersi conto che *esso cerca di realizzare ancora la derivata del segnale di ingresso, approssimandola però con un rapporto incrementale*: infatti, se consideriamo il segnale a valle del nodo sottrattore, abbiamo $s_t(t) - s_t(t - \tau)$; moltiplicando e dividendo per τ , otteniamo

$$x(t) = \tau \cdot \frac{s_t(t) - s_t(t - \tau)}{\tau}$$

Questo è appunto il rapporto incrementale di $s_t(t)$, moltiplicato per τ . Se vogliamo ottenere la derivata, dobbiamo far tendere τ a zero. Il problema è che, rendendo τ molto piccolo, è vero che il termine $\frac{s_t(t) - s_t(t - \tau)}{\tau}$ approssima bene la derivata di $s_t(t)$, ma è anche vero che il fattore moltiplicativo τ riduce il livello del segnale ottenuto, col rischio di portarlo al di sotto della soglia di rumore.

Dobbiamo perciò trovare un compromesso, sul valore di t , tra l'approssimazione con cui vogliamo realizzare la derivata ed il livello di potenza cui possiamo scendere.

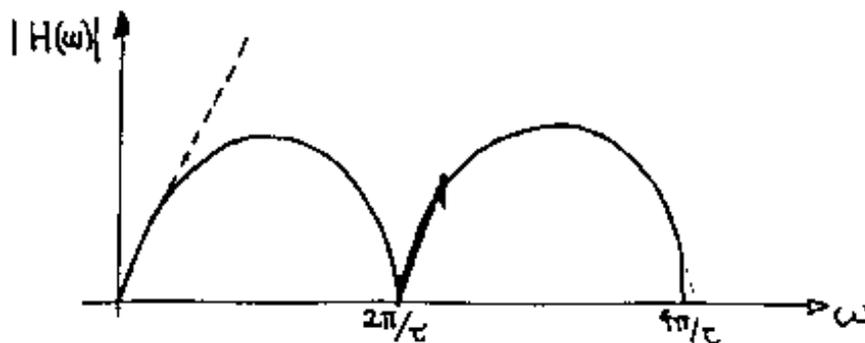
Per verificare la bontà della approssimazione della derivata, calcoliamo la funzione di trasferimento del primo blocco, ossia di ciò che c'è a monte del demodulatore ad involuppo: l'ingresso è $s_t(t)$, con spettro $S_t(f)$, mentre l'uscita è $x(t) = s_t(t) - s_t(t - \tau)$, con spettro $X(f) = S_t(f)(1 - e^{-j2\pi f\tau})$; la funzione di trasferimento è allora

$$H(f) = \frac{X(f)}{S_t(f)} = 1 - e^{-j2\pi f\tau}$$

Usando le formule di Eulero, possiamo anche scrivere che

$$H(f) = e^{j2\pi f\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f\tau} = e^{j2\pi f\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} = e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} \left(e^{j2\pi f\frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} \right) = e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} 2j \sin\left(2\pi f\frac{\tau}{2}\right)$$

Questa espressione ci è utile perché ci consente di diagrammare l'andamento del modulo di $H(f)$, che è quello che ci interessa:

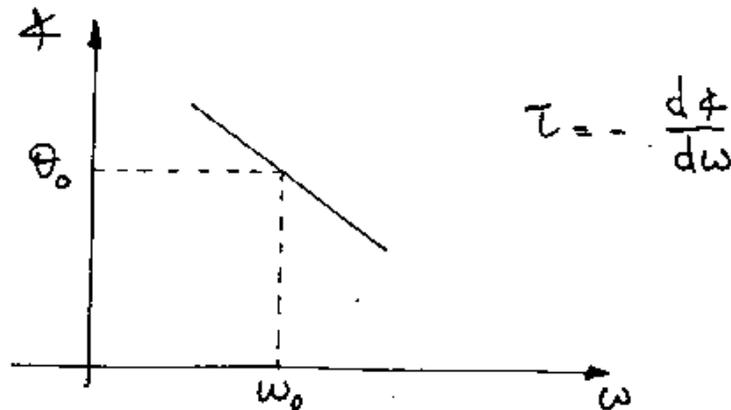


Questa funzione, come si vede, approssima molto bene un derivatore solo per frequenze basse. Per quanto riguarda l'approssimazione con cui il circuito esegue la derivata dell'ingresso, è necessario che la banda dell'ingresso sia piccola e sia allocata intorno ad una zona in cui l'andamento di $|H(\omega)|$ è praticamente rettilineo.

E' bene osservare che in questo caso, al contrario del demodulatore di Trevis, non si possono usare le zone intorno ai punti di flesso: in questi casi, infatti, ci sarebbe un cambiamento di segno della portante, il che impedirebbe la demodulazione ad involuppo, in quanto abbiamo già ribadito che il demodulatore ad involuppo, essendo non coerente, non può seguire i salti di fase di π della portante. Quindi, le zone a cavallo dello zero non sono permesse. Al contrario, si utilizza una zona adiacente ad un attraversamento dello zero, scelta in modo che l'attraversamento sia fuori della banda del segnale in ingresso, in modo da non avere problemi.

C'è adesso da fare una osservazione: un ritardatore ideale, come quello appena descritto, non è implementabile in alcun modo; allora, dato che a noi interessa solo l'operazione svolta sulla legge di

modulazione FM della portante (cioè quindi sull'argomento della portante modulata) e non sull'intera portante modulata ricevuta dal canale, può fare al caso nostro anche un qualsiasi dispositivo che abbia una caratteristica di fase del tipo seguente:



Questo non è altro che un **ritardatore di gruppo**: si tratta di un filtro che, sollecitato da una sinusoide modulata, ruota la fase della portante di una quantità θ_0 e ritarda la legge di modulazione (sia essa di ampiezza o di frequenza) di una quantità $\tau = -d\theta/d\omega$.⁵

Per comprendere meglio l'effetto di questo filtro, vediamo qualche dettaglio analitico. Consideriamo nuovamente l'espressione del generico segnale modulato di frequenza:

$$s_t(t) = A_C \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha\right)$$

dove, per il momento, supponiamo costante l'ampiezza A_C della portante non modulata. Se mandassimo questo segnale in un ritardatore ideale, del tipo considerato prima, otterremmo semplicemente lo stesso segnale, ma ritardato nel tempo di τ : l'uscita sarebbe cioè il segnale

$$s_t(t - \tau) = A_C \cos\left(\omega_c(t - \tau) + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha\right)$$

Se, invece, applichiamo il segnale $s_t(t)$ ad un ritardatore di gruppo, otteniamo un effetto diverso. Infatti, la caratteristica di fase di un ritardatore di gruppo ha la seguente espressione:

$$e^{jH(\omega)} = e^{-j[(\omega - \omega_c)\tau - \theta_0]} = e^{-j(\omega - \omega_c)\tau} e^{j\theta_0} = e^{-j\omega\tau} e^{j\omega_c\tau} e^{j\theta_0}$$

Abbiamo in pratica la cascata di 3 distinti operatori, che possiamo applicare separatamente:

⁵ Ricordiamo una definizione: un filtro con funzione di trasferimento $H(f) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ introduce, sul segnale di ingresso, un ritardo di gruppo $\tau(\omega)$ pari alla derivata, fatta rispetto ad ω e cambiata di segno, della fase $\phi(\omega)$ del filtro stesso. Se la fase $\phi(\omega)$ decresce linearmente con ω , la sua derivata è evidentemente costante, per cui è costante il ritardo di gruppo. Se, invece, la fase $\phi(\omega)$ è genericamente variabile con ω , la sua derivata non è una costante e quindi anche il ritardo di gruppo è variabile con ω . A livello pratico, un filtro che introduce un ritardo di gruppo costante è sostanzialmente un filtro attraverso cui il segnale passa subendo semplicemente un ritardo temporale. Ad esempio, un filtro passa-tutto è caratterizzato da modulo unitario ($M(\omega)=1$) e fase lineare: un eventuale segnale $s(t)$ in ingresso al filtro esce dal filtro stesso semplicemente con un ritardo ($s(t-\tau)$).

- l'operatore $e^{-j\omega\tau}$ è un ritardatore ideale, che quindi introduce solo la traslazione temporale di τ : questo ci dà nuovamente il segnale

$$A_C \cos\left(\omega_C(t-\tau) + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha)d\alpha\right)$$

- l'operatore $e^{j\omega_C\tau}$, essendo ω_C una costante, è invece uno sfasatore, che ruota tutte le componenti di un angolo $\omega_C\tau$: esso ci dà dunque il segnale

$$A_C \cos\left(\omega_C(t-\tau) + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha)d\alpha + \omega_C\tau\right)$$

- infine, l'operatore $e^{j\theta_0}$ è un ulteriore sfasatore, che però ruota le componenti di un angolo θ_0 : possiamo allora concludere che l'uscita del filtro è data dal segnale

$$x(t) = A_C \cos\left(\omega_C(t-\tau) + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha)d\alpha + \omega_C\tau + \theta_0\right)$$

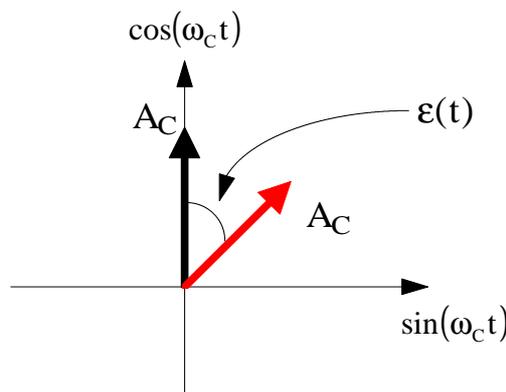
Si osserva che l'argomento del Coseno contiene due termini $\omega_C\tau$ con segno opposto, che quindi si eliminano, per cui concludiamo che il ritardatore di gruppo tira fuori il segnale

$$x(t) = A_C \cos\left(\omega_C t + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha)d\alpha + \theta_0\right)$$

Confrontando questo segnale con quello in uscita dal ritardatore ideale, osserviamo quanto segue: *mentre il ritardatore ideale ritarda di t sia il segnale modulante (cioè l'integrale) sia la portante, il ritardatore di gruppo, pur generando ancora un ritardo t del segnale modulante, non ritarda la portante della stessa quantità t , ma della quantità θ_0 . Questo vale, evidentemente, quale che fosse la legge di modulazione della portante.*

Cerchiamo allora di capire in cosa questa operazione ci è utile per i nostri scopi. A tal proposito, facciamo riferimento ai vettori rotanti.

Consideriamo perciò un piano rotante con la stessa velocità angolare ω_C della portante da demodulare. Su questo piano, la portante da demodulare è quindi rappresentata da un vettore di ampiezza A_C disposto sull'asse Coseno:



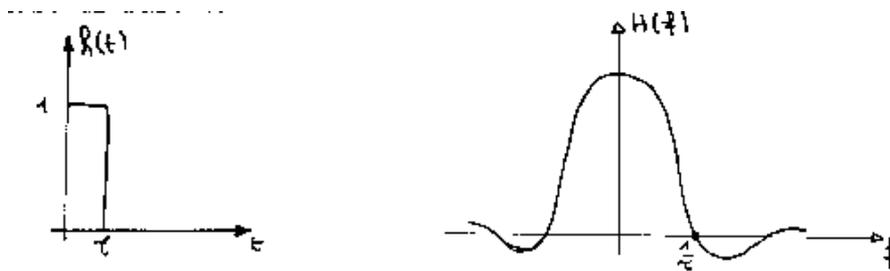
L'uscita del ritardatore di gruppo è invece un altro vettore, ancora di ampiezza A_C , ma che differisce dalla portante modulata di un argomento $\varepsilon(t)$ legato appunto al ritardo introdotto: analiticamente, $\varepsilon(t)$ è cioè la differenza tra gli argomenti del segnale in ingresso e di quello in uscita, ossia

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= (\text{ingresso}) - (\text{uscita}) = \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha \right) - \left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha + \theta_0 \right) = \\ &= \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha - \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha - \theta_0 = \Delta\omega \int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha - \theta_0\end{aligned}$$

Il termine $\varepsilon(t)$ risulta dunque pari alla somma di un termine costante e di un termine che dipende dalla differenza tra le leggi di modulazione di fase in ingresso ed in uscita. Cerchiamo allora di trovare una espressione più significativa (per i nostri scopi) di $\varepsilon(t)$: il termine $\int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha$ può essere visto come il prodotto di convoluzione del segnale modulante $s(t)$ con una funzione $h(t)$ che vale 1 per $0 \leq t \leq \tau$ e vale 0 altrove: infatti

$$s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha = \int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha$$

In altre parole, è come se stessimo mandando $s(t)$ in ingresso ad un filtro con una risposta all'impulso di tipo rettangolare, come quella indicata nella figura seguente (insieme al suo spettro):



Se ragioniamo in frequenza, abbiamo il solito andamento del modulo della funzione di trasferimento del tipo $\sin(f)/f$, con il primo zero in $1/\tau$. Allora, facciamo la seguente ipotesi:

$$\frac{1}{\tau} \gg \text{banda di } s(t)$$

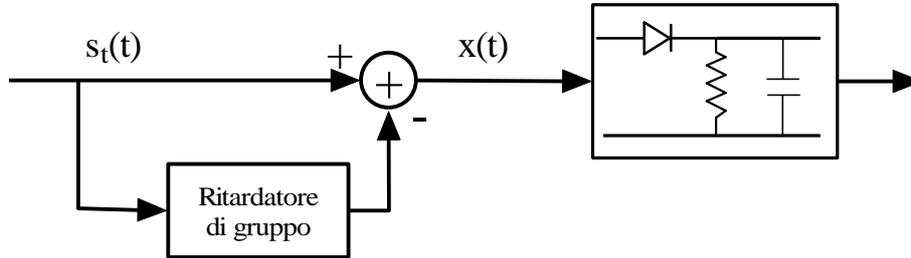
Sotto questa ipotesi, possiamo approssimativamente affermare che l'uscita di questo filtro sia proprio il segnale modulante, moltiplicato per un fattore di scala τ (sarebbe l'altezza del $\sin(f)/f$ in corrispondenza di $f=0$) e traslato nel tempo di $\tau/2$ (visto che il rettangolo non è centrato su $t=0$, ma è traslato verso destra di $\tau/2$, per cui la funzione di trasferimento $H(f)$ ha il modulo indicato in figura, ma anche una fase $e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}$): possiamo cioè scrivere che

$$\int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha \cong \tau s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Tornando allora all'espressione di $\varepsilon(t)$, scriviamo che

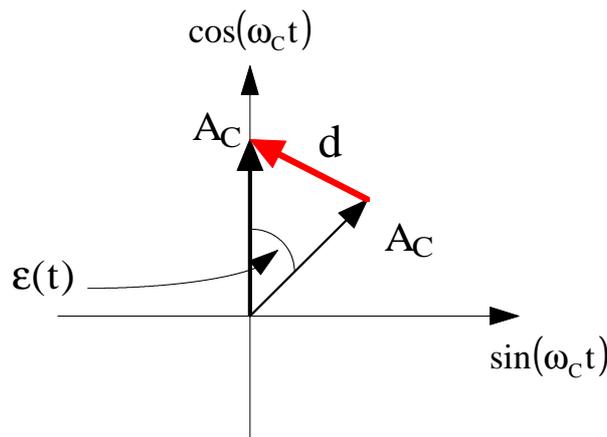
$$\epsilon(t) = \Delta\omega \int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha - \theta_0 \cong \Delta\omega\tau s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \theta_0$$

Questo risultato è molto importante, in quanto dobbiamo tener conto che noi stiamo considerando uno schema del tipo seguente:



All'uscita del nodo sottrattore, abbiamo la differenza tra il segnale modulato ed il segnale in uscita dal ritardatore di gruppo. Si tratta allora adesso di calcolare l'ampiezza di questo segnale: quello che ci serve è infatti che l'involuppo di $x(t)$ si possa rendere in qualche modo proporzionale ad $\epsilon(t)$, che è a sua volta proporzionale al segnale modulante, in modo da estrarre, con il demodulatore ad involuppo, quello che ci serve.

Torniamo allora al piano dei segnali:



Dobbiamo eseguire la differenza tra il segnale modulato $s_t(t)$ ed il segnale in uscita dal ritardatore di gruppo: ciò significa considerare una sinusoide di argomento $\epsilon(t)$ e di ampiezza d , dove d (con riferimento alla figura precedente) è la corda, sottesa da un angolo $\epsilon(t)$, di un cerchio di raggio A_c : sappiamo allora di poter scrivere che

$$|x(t)| = d(t) = \left| 2A_c \sin \frac{\epsilon(t)}{2} \right|$$

Essendo $x(t)$ il segnale in ingresso al demodulatore ad involuppo, deduciamo che $|x(t)|$ è, in pratica, l'uscita del demodulatore ad involuppo: verificiamo allora se tale uscita è proporzionale al segnale modulante $s(t)$.

Sostituendo l'espressione trovata prima per $\epsilon(t)$, abbiamo che

$$u(t) = |x(t)| = \left| 2A_c \sin \frac{\epsilon(t)}{2} \right| = 2A_c \left| \sin \left[\frac{1}{2} \left(\Delta\omega\tau s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \theta_0 \right) \right] \right| = 2A_c \left| \sin \left(\frac{\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - \frac{\theta_0}{2} \right) \right|$$

Esplicitando in modo completo il Seno, abbiamo che

$$u(t) = 2A_c \left| \sin\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cos\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) \sin\left(-\frac{\theta_0}{2}\right) \right|$$

Notiamo allora che il termine $s(t-\tau/2)$ desiderato appare, sia pure scalato di un termine $\Delta\omega\tau/2$, come argomento delle funzioni Seno e Coseno. Se $s(t)$ assume valori positivi e negativi, come accade in generale, l'argomento delle funzioni Seno e Coseno è sia positivo sia negativo: però, mentre il valore del Coseno non dipende dal segno del suo argomento, in quanto il Coseno è una funzione pari, il valore del Seno dipende dal segno del suo argomento, essendo il Seno una funzione dispari. Da questo punto di vista, quindi, il Coseno è la funzione che può darci più problemi.

Ad ogni modo, facciamo una ulteriore ipotesi circa l'argomento del Seno e del Coseno:

$$\frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \text{ piccolo}$$

Affinché questa ipotesi sia verificata, è sufficiente, quali che siano i valori di $s(t)$, che risulti $\frac{\Delta\omega\tau}{2} \ll 1$, ossia che $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \frac{1}{\tau}$, ipotesi che è perfettamente congruente con quella fatta prima sulla quantità $1/\tau$.

Sotto questa ipotesi, possiamo approssimare il Coseno con 1 ed il Seno con il suo argomento, per cui scriviamo che

$$u(t) \cong 2A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\theta_0}{2}\right) \right| = 2A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right|$$

In base a questa espressione, l'uscita del nostro demodulatore segue il modulo di una funzione proporzionale ad $s(t)$. Ma a noi serve che l'uscita segua l'andamento di $s(t)$, per cui dobbiamo risolvere il problema del modulo: dobbiamo fare in modo che la quantità entro il modulo assuma sempre valore o positivo o negativo. Si tratta di scegliere il valore di θ_0 .

Una scelta che sicuramente non possiamo fare è prendere $\theta_0 = k\pi$: in questo caso, infatti, il Seno scompare, il Coseno diventa unitario e otteniamo in uscita il modulo di $s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$.

Possiamo invece scegliere $\theta_0 = \pi/2$: otteniamo infatti

$$\begin{aligned} u(t) &= 2A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = 2A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 1 \right| \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 1 \right| = \\ &= \sqrt{2}A_c \left(1 - \frac{\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) = \sqrt{2}A_c - A_c \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2}s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

Il risultato è analogo a quello ottenuto per il demodulatore di Trevis: l'uscita presenta un termine proporzionale al segnale modulato, come volevamo che fosse, ma presenta anche un termine costante ($\sqrt{2}A_c$) di ampiezza maggiore. Si ripresenta allora lo stesso problema visto in quel caso, a proposito dell'eventualità che A_c non sia costante, ma sia una funzione del tempo:

$$u(t) = \sqrt{2}(A_{c0} + r(t)) \left(1 - \frac{\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) = \sqrt{2}(A_{c0} + r(t)) - (A_{c0} + r(t)) \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Eventuali fluttuazioni di ampiezza di A_C avrebbero banda inclusa in quella di $s(t)$ e quindi renderebbero indistinguibile tale segnale, che è di ampiezza molto minore.

Non potendo filtrare il termine $\sqrt{2}(A_{c0} + r(t))$, dato che il suo spettro è sovrapposto a quello del segnale, dobbimo necessariamente pensare ad un bilanciamento. La cosa si presenta abbastanza semplice: infatti, se anziché prendere $\theta_0 = \pi/2$, prendiamo $\theta_0 = -\pi/2$, otteniamo

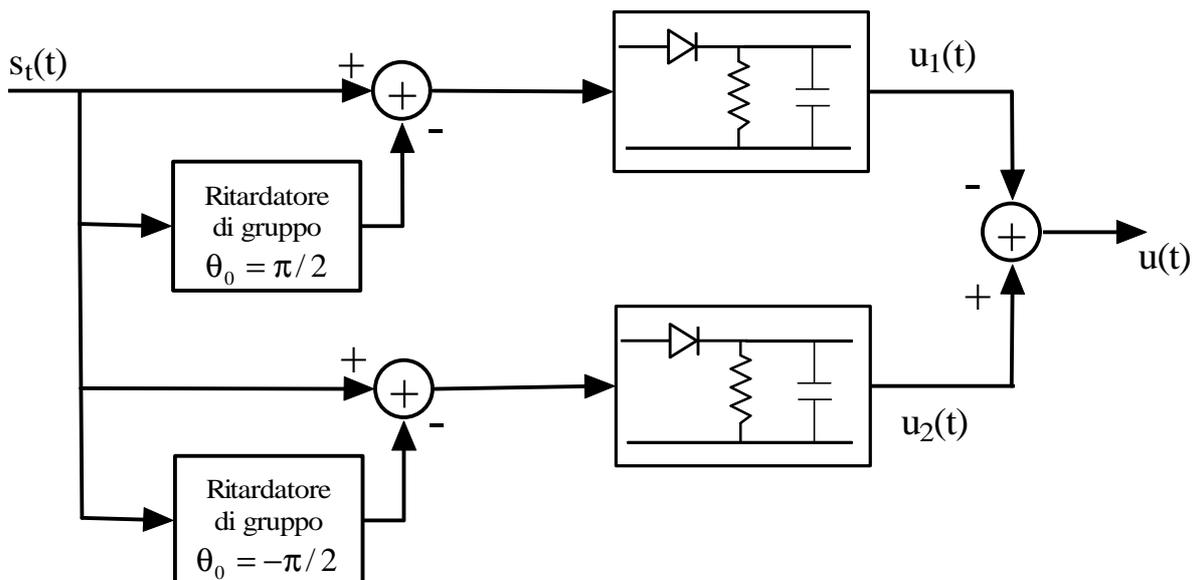
$$\begin{aligned} u(t) &= 2A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| = 2A_c \left| \frac{\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + 1 \right| \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}A_c \left(1 + \frac{\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) = \\ &= \sqrt{2}A_c + A_c \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

dove, in pratica, abbiamo ancora una volta sfruttato la parità della funzione Coseno e la disparità della funzione Seno.

Quindi, se usiamo due strutture identiche in parallelo, scegliendo in una $\theta_0 = \pi/2$ e nell'altra $\theta_0 = -\pi/2$, otteniamo, in uscita dai due demodulatori ad involuppo, due segnali che hanno un termine in comune e un termine con segno cambiato. Facendo la differenza, il termine comune scompare, mentre il termine con segno opposto, che poi è quello di interesse, raddoppia:

$$\begin{cases} u_1(t) = \sqrt{2}A_c - A_c \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ u_2(t) = \sqrt{2}A_c + A_c \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \end{cases} \longrightarrow u(t) = u_2(t) - u_1(t) = 2A_c \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

La struttura è la seguente:



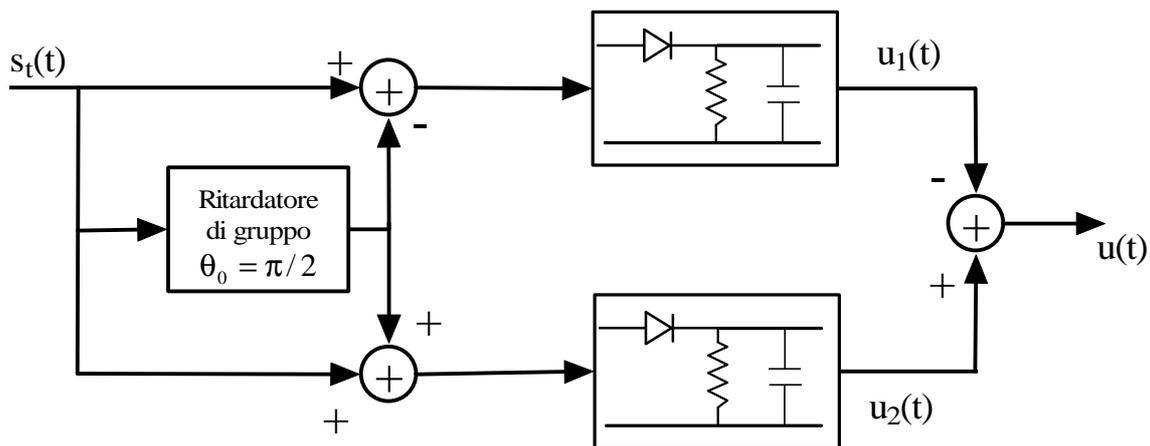
Nel segnale di uscita, così come accadeva anche nel demodulatore di Trevis, permane comunque una dipendenza anche da $r(t)$: infatti, si ha che

$$u(t) = 2A_{c0} \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + 2r(t) \frac{\sqrt{2}\Delta\omega\tau}{2} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

Tuttavia, bisogna considerare che $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \frac{1}{\tau}$ e che $A_{c0} \gg r(t)$, per cui il secondo termine, che è quello indesiderato, dà sicuramente poco danno.

Osserviamo che la scelta di $\theta_0 = \pm\pi/2$ presenta un altro importante vantaggio oltre quelli illustrati poco fa: infatti, con tecniche analogiche, una struttura come quella dell'ultima figura non è realizzabile, in quanto la struttura presuppone di poter realizzare due filtri (i ritardatori di gruppo) che, alla pulsazione della portante, sfasino il segnale uno di $+\theta_0$ e l'altro di $-\theta_0$, ed abbiano inoltre la stessa pendenza. Al contrario, avendo preso $\theta_0 = \pm\pi/2$, noi possiamo realizzare un unico sfasatore di $\pi/2$, in quanto lo sfasamento di $-\pi/2$ si potrà ottenere da questo semplicemente cambiando segno, proprio perché la differenza di fase tra uno e l'altro è pari a π .

Uno schema più appropriato della struttura è allora il seguente:



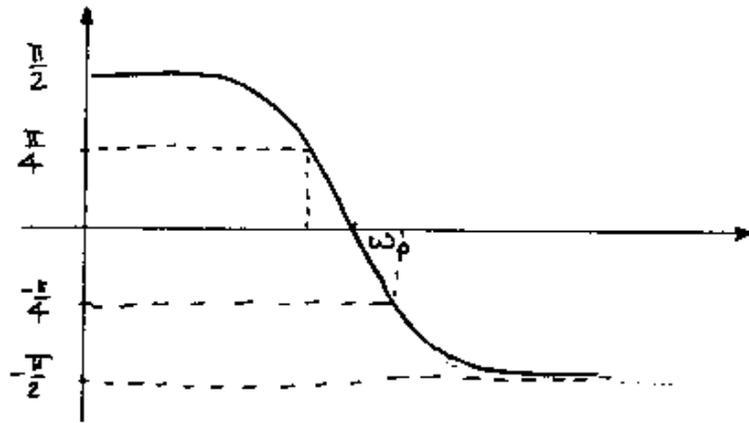
Ricordiamo infine le due condizioni di base che devono essere verificate perché questo tipo di demodulatore funzioni:

$$\frac{\Delta\omega}{2} \ll \frac{1}{\tau} \qquad \frac{1}{\tau} \gg \text{banda di } s(t)$$

Realizzazione circuitale del ritardatore di gruppo

L'aspetto essenziale, per la realizzazione circuitale di un ritardatore di gruppo, è quello di fare in modo che il ritardo θ_0 introdotto, alla frequenza ω_0 della portante, abbia un valore ben preciso.

Possiamo ancora una volta pensare di utilizzare un circuito risonante, il quale, come sappiamo, ha una caratteristica di fase (in funzione di ω) del tipo Arctan, come nella figura seguente:

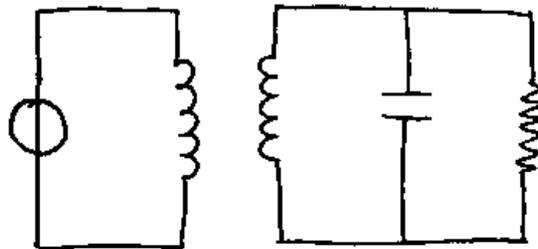


In corrispondenza della pulsazione di risonanza, l'impedenza del risonante è puramente resistiva, il che significa che è nullo lo sfasamento introdotto sull'uscita rispetto all'ingresso. Nell'intorno della frequenza di risonanza, invece, la pendenza della caratteristica di fase si può approssimare con la derivata della caratteristica, il che equivale in pratica a linearizzare la curva mediante la sua tangente: analiticamente, se la caratteristica di fase ha espressione $\langle H(\omega) = -\arctan(2RC(\omega - \omega_0)) \rangle$, è facile verificare che la sua derivata, ossia la pendenza ricercata, vale

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \langle H(\omega) \rangle = -2RC$$

Allora, se il risonante ha un fattore di merito sufficientemente basso da far sì che, nella banda occupata dal segnale da demodulare, le variazioni della caratteristica di ampiezza siano abbastanza piccole, possiamo effettivamente realizzare il ritardatore di gruppo che ci interessa.

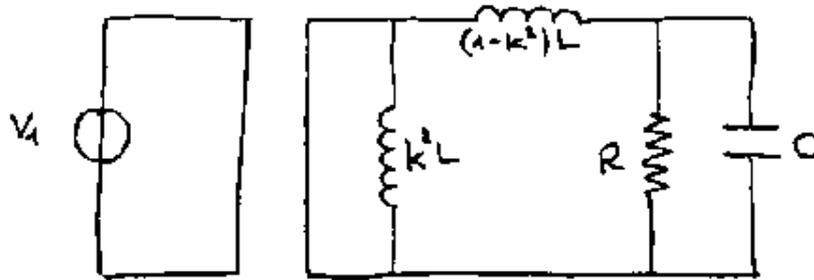
Dal punto di vista circuitale, dobbiamo dunque accoppiare un generatore di tensione, rappresentativo del segnale da demodulare, ad un risonante, secondo lo schema seguente:



Stiamo facendo riferimento, ovviamente, ad uno schema non bilanciato, mentre successivamente passeremo allo schema bilanciato.

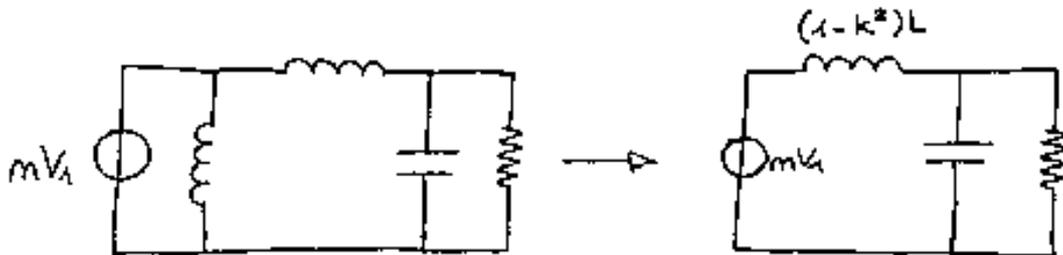
Bisogna stare attenti ad una cosa: se il trasformatore ha un rapporto spire unitario, ossia se l'accoppiamento del trasformatore è unitario, il trasformatore stesso diventa inutile e quindi non abbiamo più il risonante RLC che ci serve. Generalmente, si considera un accoppiamento tra primario e secondario che sia minore di 1.

A questo punto, con lo schema disegnato, otteniamo che, alla frequenza di risonanza, il risonante fornisce fase 0, mentre noi abbiamo prima verificato la necessità di avere fase $\pi/2$. Questo ritardo viene realizzato mediante il trasformatore stesso usato per l'accoppiamento: infatti, il circuito equivalente del trasformatore visto dai morsetti del secondario è il seguente:

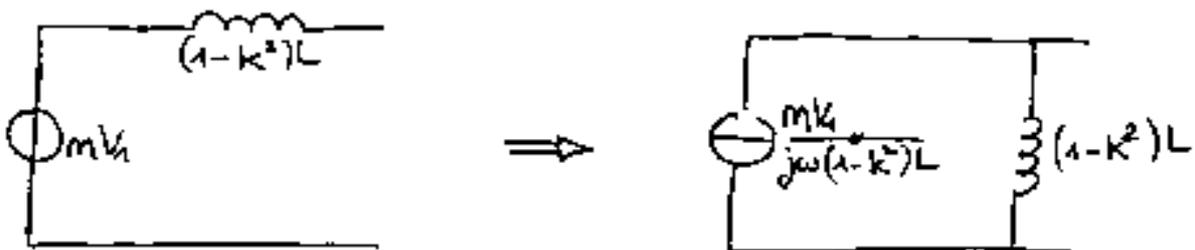


Abbiamo cioè un trasformatore ideale che, con un opportuno rapporto spire, descrive semplicemente l'accoppiamento tra primario e secondario, e poi due induttanze, una in parallelo al secondario (k^2L) ed una in serie ($(1-k^2)L$) che tiene conto semplicemente del flusso disperso.

Volendo semplificare il circuito, possiamo anche eliminare il trasformatore ideale, sostituendolo con un generatore di tensione di valore nV_1 , se V_1 è la tensione applicata al primario e n il rapporto spire prescelto. Con questa trasformazione, otteniamo che il generatore di tensione nV_1 va in parallelo all'induttanza k^2L , il che rende inutile quest'ultima per una ben nota legge dell'Elettrotecnica:



Ci accorgiamo allora che è venuto meno il risonante RLC parallelo, mentre ci troviamo con qualcosa di ibrido: abbiamo infatti una induttanza in serie ad un parallelo RC. D'altra parte, possiamo applicare il teorema di Norton, trasformando la serie tra induttanza e generatore di tensione in un parallelo tra induttanza e generatore di corrente:

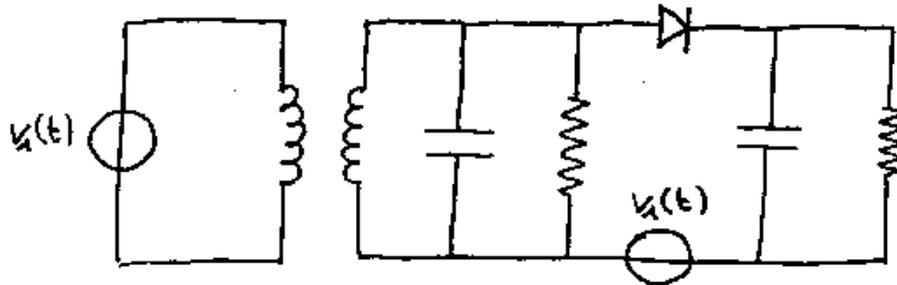


In questo modo, abbiamo un tipico risonante RLC parallelo alimentato in corrente: tale corrente, come si osserva dalle espressioni indicate in figura, è proporzionale al segnale V_1 applicato in ingresso; il coefficiente di proporzionalità è evidentemente $\frac{n}{j\omega(1-k^2)L}$: in questo coefficiente,

compare una dipendenza inversa dalla pulsazione ω , ma la possiamo trascurare in quanto stiamo trattando segnali passa-banda con banda relativa stretta; molto più importante è invece la presenza dell'operatore j a denominatore: tale operatore garantisce infatti la desiderata rotazione di $\pi/2$ di tutte le componenti del segnale. Oltre a questo, la presenza di j a denominatore non dipende in alcun modo dalla regolazione dei parametri reattivi del circuito: esso viene fuori, come si è visto, solo dal

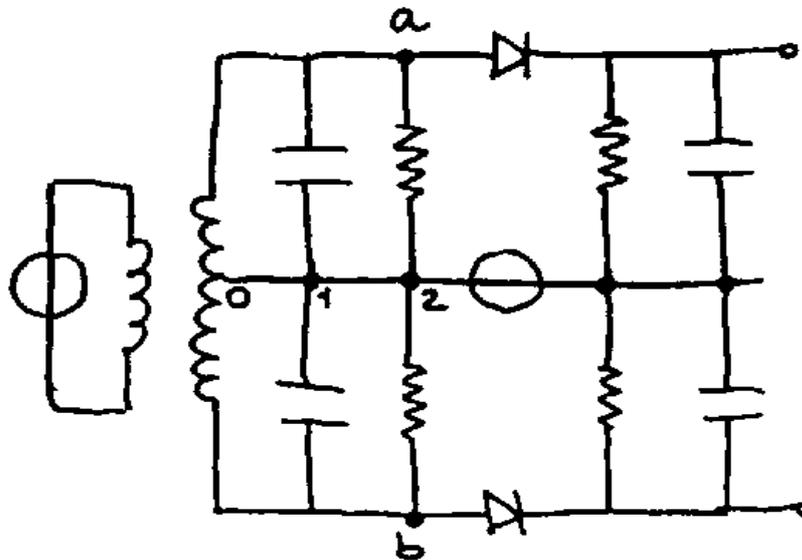
fatto che l'accoppiamento del trasformatore non è stretto, ossia dal fatto che il trasformatore presenta un flusso disperso⁶.

A questo punto, abbiamo trovato il modo di effettuare il ritardo di gruppo. Il passo successivo è quello di fare la differenza tra il segnale così ottenuto e il segnale modulato ricevuto e di mandare il tutto ad un demodulatore ad involuppo: il segnale che ha subito il ritardo di gruppo è la tensione ai capi del risonante, per cui il demodulatore ad involuppo può essere posto subito in cascata secondo lo schema seguente:



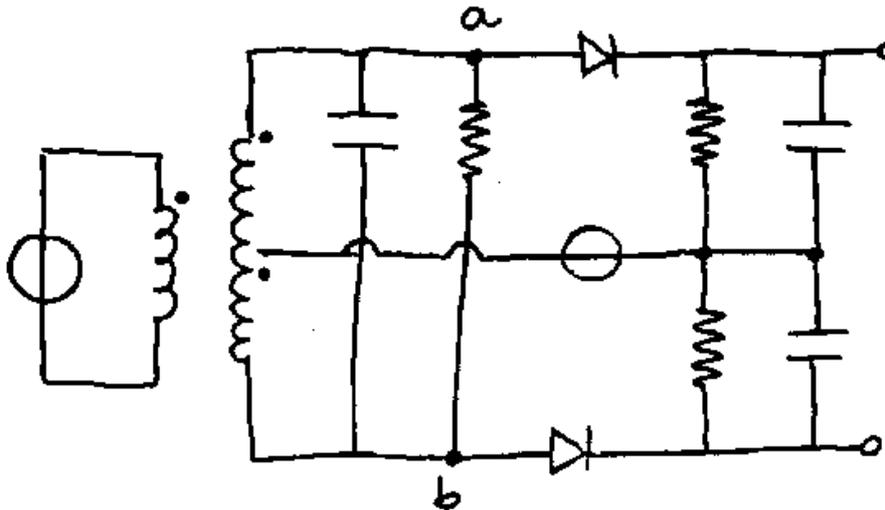
Il generatore pilotato presente tra la resistenza e la capacità serve a far in modo che il demodulatore ad involuppo sia alimentato dalla differenza tra il segnale modulato ed il segnale modulato ritardato.

Questa è dunque la struttura del demodulatore non bilanciato. Sappiamo, però, che i problemi legati alle fluttuazioni dell'ampiezza A_C della portante non modulata impongono la realizzazione di una struttura bilanciata. Questa può essere derivata direttamente dalla struttura non bilanciata: a livello teorico, dovremmo realizzare due strutture non bilanciate e poi fare la differenza; questo è possibile con lo schema seguente:



In questo schema, l'applicazione del segnale modulato alle due strutture non bilanciate avviene tramite un trasformatore a presa centrale, mentre il generatore pilotato che consente di generare il segnale per i due demodulatori è unico. D'altra parte, la struttura si può anche semplificare realizzando, anziché due filtri RC parallelo, un unico filtro RC, come nella figura seguente:

⁶ Se il trasformatore fosse ideale, risulterebbe $k=1$, ossia niente flusso disperso, per cui il circuito non servirebbe allo scopo che ci siamo prefissi.



La possibilità di adottare questo schema è data dal fatto che, se il secondario del trasformatore è perfettamente bilanciato, la tensione sulla presa centrale del secondario si trova esattamente a metà tra i punti a e b, per cui i nodi 0,1,2 sono equipotenziali e quindi non attraversati da corrente.

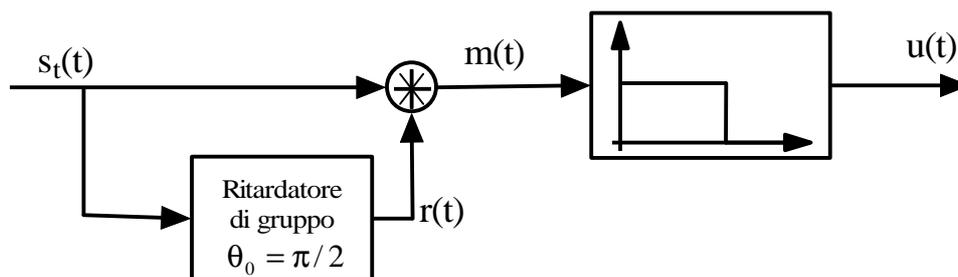
Il pregio di questa struttura è nel fatto che bisogna preoccuparsi solo del bilanciamento del secondario del trasformatore.

Infine, per quanto riguarda il generatore pilotato, lo si può realizzare aggiungendo un ulteriore avvolgimento al trasformatore.

Strutture autobilanciate

Lo schema appena descritto trae dunque i principali vantaggi dalla presenza del trasformatore. Il problema è che, volendo implementare il circuito in forma integrata, il trasformatore crea grossi problemi. Allora, si ricorre ad una struttura diversa, sfruttando il fatto che, in forma integrata, è molto più facile (e quindi più economico) realizzare un moltiplicatore.

La struttura utilizzata è la seguente:



Il segnale modulato subisce ancora una volta una diramazione: nel ramo derivato, c'è un ritardatore di gruppo che realizza il ritardo di $\theta_0 = \pi/2$. Nel nodo moltiplicatore viene poi effettuato il prodotto del segnale modulato, che sarà una funzione Coseno, e del segnale in uscita dal ritardatore, che sarà una funzione Seno dato lo sfasamento di $\pi/2$. Il prodotto tra una funzione Seno ed una funzione Coseno fornisce notoriamente due Seni, uno di argomento somma e uno di argomento differenza:

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)$$

Nel nostro caso, il segnale modulato è

$$s_i(t) = A_C \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha\right)$$

mentre l'uscita del ritardatore, per quanto visto in precedenza, è

$$r(t) = A_C \sin\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha\right)$$

Il moltiplicatore realizza il prodotto tra questi due segnali:

$$\begin{aligned} m(t) &= s_i(t) \cdot r(t) = A_C \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha\right) \cdot A_C \sin\left(\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha\right) = \\ &= \frac{A_C^2}{2} \cos\left(2\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha + \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha\right) + \frac{A_C^2}{2} \sin\left(\Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha - \Delta\omega \int_{-\infty}^{t-\tau} s(\alpha) d\alpha\right) = \\ &= \frac{A_C^2}{2} \cos\left(2\omega_c t + \Delta\omega \int_{-\infty}^t s(\alpha) d\alpha\right) + \frac{A_C^2}{2} \sin\left(\Delta\omega \int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha\right) \end{aligned}$$

Il primo termine è evidente un termine di alta frequenza, mentre l'altro è in banda base: di conseguenza, con il successivo filtro passa-basso, di banda opportuna, tiriamo fuori solo il termine in banda base. L'uscita è dunque

$$u(t) = \frac{A_C^2}{2} \sin\left(\Delta\omega \int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha\right) \cong \frac{A_C^2}{2} \Delta\omega \int_{t-\tau}^t s(\alpha) d\alpha \cong \frac{A_C^2}{2} \Delta\omega s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

dove le approssimazione fatte, in questi ultimi due passaggi, sono dovute all'ipotesi di una bassa deviazione di frequenza $\Delta\omega$ (per la sostituzione del Seno con il suo argomento) ed alle considerazioni fatte precedentemente circa il valore di quell'integrale (l'ipotesi è che la quantità $1/\tau$ sia molto maggiore della banda del segnale modulante).

Il risultato ottenuto evidenzia due cose:

- in primo luogo, la mancanza del termine additivo direttamente proporzionale ad A_C , per cui la struttura è intrinsecamente bilanciata; si parla infatti di **struttura autobilanciata**;
- in secondo luogo, il segnale modulante $s(t)$ compare direttamente e non sotto l'operatore modulo, per cui non è necessaria la successiva demodulazione ad involuppo.

Per quanto riguarda l'implementazione circuitale, il moltiplicatore dovrà essere un modulatore bilanciato, come ad esempio la cella di Gilbert.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>