

Appunti di Comunicazioni Elettriche

Capitolo 11

Esercizi di dimensionamento

Esempio numerico: trasmissione numerica del segnale TV a colori su cavo coassiale	1
Esempio: trasmissione numerica del segnale TV su ponte radio	8
Trasmissione analogica di segnali televisivi mediante satellite	12
<i>Diffusione televisiva domestica</i>	17
<i>Altri sviluppi dei sistemi mediante satellite</i>	17
Esempio numerico: trasmissione numerica del segnale TV in un sistema via satellite	18
Esempio su un sistema di trasmissione numerico via satellite	20
Esempio numerico: trasmissione del segnale radiofonico in un mezzo passa-banda	21

ESEMPIO NUMERICO: TRASMISSIONE NUMERICA DEL SEGNALE TV A COLORI SU CAVO COASSIALE

Vogliamo mettere in piedi un sistema di trasmissione numerico, su cavo coassiale, del **segnale televisivo** e, in particolare, consideriamo quello **a colori**. La differenza con il segnale bianco/nero è nel fatto che dobbiamo trasmettere 3 distinti segnali: il *segnale di luminanza* (che indichiamo con Y), comune al segnale bianco/nero, e i due *segnali di cromaticità* (U e V).

Il primo passo è quello di convertire il segnale analogico da trasmettere in forma numerica. I segnali analogici da trasmettere sono in questo caso 3: si procede, allora, prima passando in forma numerica i 3 segnali e poi facendone la *multiplazione a divisione di tempo*¹ (**TDM**), in modo da ottenere un'unica sequenza di bit da trasmettere.

La numerizzazione, come è noto, si svolge secondo una precisa sequenza di operazioni: prima si effettua un *filtraggio passa-basso* del segnale da digitalizzare (necessario per prevenire fenomeni di aliasing), poi una operazione di *campionamento* (a frequenza almeno doppia della massima frequenza del segnale considerato) e poi una *quantizzazione* (scegliendo un numero opportuno di bit per ogni campione).

Cominciamo dal segnale di luminanza Y . Sappiamo che esso presenta una banda **$B = 5$ MHz**: di conseguenza, il *filtraggio anti-aliasing* viene fatto proprio con banda di 5 MHz. Il successivo *campionamento*, che deve essere fatto ad una frequenza di almeno 10 MHz, viene effettuato, in base agli standard internazionali, a **13.5 MHz** (cioè prelevando 1 campione ogni 74 nsec). Si procede, quindi, ad una quantizzazione uniforme con **8 bit** per campione (il che significa che vengono quantizzate $2^8=256$ ampiezze diverse).

¹ Ricordiamo che esistono due diverse tecniche con cui trasmettere più segnali, sia in formato analogico sia in formato digitale, in un unico mezzo trasmissivo: la multiplazione a divisione di tempo (**TDM** - Time Division Multiplexing) e la multiplazione a divisione di frequenza (**FDM** - Frequency Division Multiplexing). Entrambe queste tecniche sono realizzabili sia in analogico sia in digitale, con differenti difficoltà: è molto più facile realizzare la tecnica TDM in digitale (basta inviare, in ogni unità di tempo, un campione per ogni segnale da trasmettere, sfruttando i *tempi morti* della conversione analogico→digitale) così come è molto più facile realizzare la tecnica FDM in analogico (basta modulare opportunamente i segnali, in modo da affiancarle i rispettivi spettri e lasciare lo *spazio* necessario a distinguerli).

Questi numeri servono a valutare la velocità di trasmissione dei bit sul canale: infatti, associando 8 bit a ciascun campione e avendo un campione ogni 1/13.5(MHz) secondi, il numero di bit da trasmettere ogni secondo è

$$N = 8(\text{bit}) * 13.5 * 10^6 \left(\frac{1}{\text{sec}} \right) = 108 * 10^6 \left(\frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right) = 108 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right)$$

La frequenza di campionamento di 13.5 MHz e gli 8 bit per la quantizzazione sono valori appartenenti allo **standard CCIR 4:4:2**. Questo prevede una ulteriore specifica, relativa alla risoluzione: *viene infatti richiesto che il segnale di luminanza venga descritto con una risoluzione doppia rispetto ad entrambe le componenti di cromaticanza*. Di conseguenza, per la numerizzazione di tali segnali di luminanza non avremo più 108 Mbit/sec, ma qualcosa in meno.

Eseguendo la numerizzazione dei segnali di cromaticanza così come per il segnale di luminanza, otteniamo, per ciascuno di essi, una sequenza di bit: per dimezzare la risoluzione, ci basta scartare un bit ogni due sia per la risoluzione orizzontale sia per la risoluzione verticale. Di conseguenza, *ciascuno dei segnali di cromaticanza fornirà un tasso di bit al secondo pari ad un quarto di quello ottenuto per il segnale di luminanza*:

$$\begin{aligned} \text{luminanza} &\longrightarrow 108 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) \\ \text{cromaticanza U} &\longrightarrow \frac{108}{4} \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) = 27 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) \\ \text{cromaticanza V} &\longrightarrow \frac{108}{4} \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) = 27 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) \end{aligned}$$

A questo punto, avendo a disposizione tutti e tre i segnali da trasmettere in forma in numerica, va effettuata la moltiplicazione a divisione di tempo: anziché inviare 1 bit ogni unità di tempo, ne dovremo inviare 3. Ciò significa che la frequenza di cifra (cioè appunto il numero di bit inviati ogni secondo) è

$$f_s = 108 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) + 27 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) + 27 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right) = 162 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right)$$

Abbiamo dunque ottenuto una frequenza di cifra **$f_s=162(\text{Mbit/sec})$** .

Fissata la frequenza di cifra, la successiva specifica da conoscere è la *probabilità di errore*, ossia la probabilità $p(\epsilon)$ che l'utente finale riceva un bit diverso da quello effettivamente trasmesso. Possiamo valutare $p(\epsilon)$ fissando la qualità delle immagini da visualizzare sul nostro ipotetico televisore; in particolare, possiamo decidere qual è il numero massimo di bit sbagliati che possiamo tollerare per ogni quadro. Generalmente, si accetta **1 bit sbagliato per quadro**. Fissata questa indicazione, per giungere a $p(\epsilon)$ abbiamo bisogno di conoscere quanti quadri vediamo in 1 secondo e questo dipende dallo *standard televisivo* utilizzato: se, per esempio, scegliamo il **sistema PAL**, la frequenza di quadro è di **25 Hz**, vale a dire 25 quadri al secondo². Noto il numero di quadri in 1 secondo, possiamo calcolare il numero di bit per ogni quadro:

² Ricordiamo che, invece, nel sistema **NTSC** adottato negli Stati Uniti, la frequenza di quadro è di 30 Hz.

$$\frac{162 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}} \right)}{25 \left(\frac{\text{quadri}}{\text{sec}} \right)} = 6.5 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{quadro}} \right)$$

A questo punto abbiamo concluso, in quanto accettare un bit sbagliato per ogni quadro significa accettare una probabilità di errore

$$p(\epsilon) = \frac{1 \left(\frac{\text{bit sbagliato}}{\text{quadro}} \right)}{6.5 * 10^6 \left(\frac{\text{bit}}{\text{quadro}} \right)} = 1.538 * 10^{-7}$$

Possiamo dunque arrotondare, richiedendo una probabilità di errore **$p(\epsilon)=10^{-7}$** .

Abbiamo dunque le specifiche che il nostro sistema deve rispettare. Possiamo perciò passare al dimensionamento. Tra l'altro, possiamo anche dimenticarci, a questo punto, del tipo di segnale che stiamo trasmettendo, in quanto le uniche informazioni che d'ora in poi utilizzeremo sono $p(\epsilon)$ ed f_s .

Per prima cosa, dobbiamo passare dalla $p(\epsilon)$ a valle del decisore al rapporto segnale-rumore a valle del campionatore: ipotizzando che il rumore sovrapposto sia quello termico e decidendo subito di porre la soglia a metà, sappiamo che la formula cui fare riferimento è

$$p(\epsilon) = P(\epsilon | 1) = P(\epsilon | 0) = Q(\gamma) = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Il passaggio avviene dunque fondamentalmente da $p(\epsilon)$ alla quantità γ , che ricordiamo essere, in generale, pari a $\frac{V_1 - V_0}{2\sigma_n}$: il termine $\frac{V_1 - V_0}{2}$ rappresenta la distanza dalla soglia del generico valore atteso all'uscita dal campionatore; il termine σ_n rappresenta invece la varianza del rumore campionato.

Fissata $p(\epsilon)$, dobbiamo calcolare γ : ci ricordiamo, allora, che per ottenere un cambiamento di 1 ordine di grandezza (in più o in meno) di $Q(\gamma)$ è necessario variare γ di 1 dB (rispettivamente in meno o in più).

A noi interessa il valore di γ tale che $Q(\gamma)=p(\epsilon)=10^{-7}$: dalle apposite tabelle, si trova che, per ottenere $p(\epsilon)=10^{-6}$, è necessario prendere $\gamma=13.5$ dB, per cui, per ottenere $p(\epsilon)=10^{-7}$, dobbiamo prendere **$\gamma=14.5$ dB**.

Noto γ (che in pratica rappresenta il rapporto segnale/rumore a valle del campionatore), possiamo associare questo parametro al rapporto segnale/rumore $\left. \frac{S}{N} \right|_U$ a valle del filtro di ricezione. Qui, però, dobbiamo operare una ulteriore scelta, scegliendo che tipo di codifica di linea utilizzare per le forme d'onda trasmesse:

$$\begin{aligned} \text{antipodale} &\longrightarrow \left. \frac{S}{N} \right|_U = \frac{P_{S,p}}{P_{N,m}} = \gamma^2 \\ \text{ortogonale} &\longrightarrow \left. \frac{S}{N} \right|_U = \frac{P_{S,p}}{P_{N,m}} = 4\gamma^2 \end{aligned}$$

dove $P_{S,p}$ rappresenta la potenza di picco del segnale all'uscita del filtro di ricezione e $P_{N,m}$ rappresenta la potenza media del rumore all'uscita dello stesso filtro.

Optiamo, ad esempio, per una **codifica antipodale**, per cui la definizione da considerare è la prima delle due appena elencate. Per passare all'ingresso del filtro di ricezione, dobbiamo scegliere il tipo di filtro, ossia la funzione di trasferimento. Optiamo per il solito **filtro adattato**, per il quale sappiamo che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \frac{E_R}{h_n / 2} = \frac{P_R}{h_n \frac{f_s}{2}}$$

dove E_R è l'energia della forma d'onda ricevuta, T il periodo di cifra e h_n la densità spettrale di potenza del rumore che, all'uscita del mezzo trasmissivo, si sovrappone al segnale utile). Al numeratore abbiamo dunque la potenza media (di segnale) ricevuta, mentre $h_n \frac{f_s}{2}$ è la potenza media di rumore valutata in una banda convenzionale pari a metà della frequenza di cifra f_s .

Possiamo dunque scrivere, con riferimento a quanto trovato prima, che

$$\frac{P_R}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2 \longrightarrow \boxed{P_R = \gamma^2 h_n \frac{f_s}{2}}$$

Nota f_s e fissata h_n (cioè fissata la rumorosità delle apparecchiature riceventi), siamo dunque in grado di calcolare la minima³ potenza media necessaria in ricezione. Esprimendoci in unità logaritmiche, possiamo scrivere che

$$P_R [\text{dB}] = (\gamma^2)_{\text{dB}} + (h_n)_{\text{dB}} + \left(\frac{f_s}{2} \right)_{\text{dBHz}} = 10 \log_{10} \gamma^2 + 10 \log_{10} h_n + 10 \log_{10} \frac{f_s}{2}$$

Ricordiamo adesso che $h_n = FkT_0$: fissando un fattore di rumore $F=10\text{dB}$ per le apparecchiature riceventi e una temperatura ambiente $T_0=293^\circ\text{K}$, risulta $(h_n)_{\text{dB}} = -174 + 10 = -164[\text{dB}]$.

Possiamo dunque concludere che

$$P_R [\text{dB}] = (14.5[\text{dB}]) + (-164[\text{dB}]) + \left(10 \log_{10} \frac{162 \cdot 10^6}{2} \right)_{\text{dBHz}} = 14.5 - 164 + 79 \cong -70.5[\text{dB}]$$

Osserviamo che la quantità γ^2 , espressa in dB, vale ancora 14.5dB, ossia è pari a $\gamma[\text{dB}]$ calcolato prima. Il motivo, come si deduce dai passaggi effettuati, è che γ^2 è un rapporto tra tensioni al quadrato, ossia tra potenze, per cui il passaggio da unità naturali a unità logaritmiche è

$$(\gamma^2)_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \gamma^2 = 20 \log_{10} \gamma = 14.5[\text{dB}]$$

Adesso, per risalire alla potenza da trasmettere, ci basta conoscere l'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo: supponiamo, allora, di effettuare un collegamento lungo **$L = 100 \text{ km}$** , utilizzando un cavo⁴ con attenuazione specifica **$\alpha=2\text{dB/km @ } 1 \text{ MHz}$** .

³ Minima nel senso che, ovviamente, un eventuale suo aumento può portare nient'altro che un miglioramento delle prestazioni, ossia quindi una riduzione di $p(\epsilon)$.

Nota l'attenuazione specifica (cioè i dB/km) alla frequenza di 1 MHz, per ottenere l'attenuazione specifica complessiva α_T (e quindi l'attenuazione complessiva α_{tot} da sommare alla potenza P_R per ottenere la potenza P_T da trasmettere) dobbiamo conoscere la massima frequenza del segnale da trasmettere sul mezzo considerato. Questo perché, ipotizzando di effettuare una **equalizzazione passiva** del mezzo, l'*attenuazione specifica complessiva*, nota quella relativa ad una particolare frequenza di riferimento, si ottiene dalla formula

$$\alpha_T = \alpha \sqrt{\frac{f_{max}}{f_{rif}}} \quad (\text{unità logaritmiche})$$

La frequenza massima del segnale da trasmettere dipende dalle forme d'onda che intendiamo trasmettere. Avendo stabilito che il filtro deve essere adattato, sappiamo che tali forme d'onda dipendono da cosa vogliamo ottenere all'uscita del filtro stesso: come sappiamo, è importante ottenere, all'uscita del filtro, *forme d'onda ad intersimbolo nullo*. Supponiamo, allora, si effettuare un **progetto alla Nyquist**, imponendo cioè che l'uscita del filtro di ricezione siano forme d'onda appartenenti alla *famiglia di Nyquist*. Questa famiglia presenta diverse forme d'onda, tutte ad intersimbolo nullo, ciascuna delle quali caratterizzata da un proprio *roll off* δ (che quantifica lo smorzamento dello spettro dal valore alto al valore nullo). Scegliere, allora, una particolare forme d'onda significa sceglierne il δ .

Questo δ diventa importante, ai nostri fini, in quanto abbiamo visto che è legato alla banda $B_{Nyquist}$ dello spettro della corrispondente forma d'onda mediante la relazione

$$B_{Nyquist} = \frac{f_s}{2}(\delta + 1)$$

La minima banda si ottiene con $\delta=0$ (cui corrisponde uno spettro rettangolare e quindi una forma d'onda Seno Cardinale), mentre la massima banda si ottiene per $\delta=1$ (cui corrisponde uno spettro a forma di Cos^2 , detto *Coseno rialzato*). Scegliamo questa seconda possibilità, per cui la massima frequenza del segnale in uscita dal filtro di ricezione è

$$B_{Nyquist} = f_s$$

In definitiva, quindi, la massima frequenza del segnale trasmesso è numericamente pari alla frequenza di cifra, per cui poniamo **$f_{max}=162 \text{ MHz}$** . Sostituendo questo valore nella formula per il calcolo dell'attenuazione specifica complessiva, deduciamo che quest'ultima vale

$$\alpha_T = \alpha \sqrt{\frac{f_{max}}{f_{rif}}} = 2(\text{dB}) \cdot \sqrt{\frac{162(\text{MHz})}{1(\text{MHz})}} = 25.5 \left(\frac{\text{dB}}{\text{km}} \right)$$

A questo punto, avendo supposto un collegamento di 100 km, l'attenuazione complessiva è

$$\alpha_{tot} = \alpha_T \cdot 100 = 2550[\text{dB}]$$

⁴ Visto che parliamo di "cavo", stiamo considerando un mezzo trasmissivo passa-basso e quindi un **sistema di trasmissione numerico in banda base**: ciò significa che non abbiamo bisogno di alcuna modulazione (numerica) prima della trasmissione. Se, al posto del cavo, avessimo ipotizzato un mezzo passa-banda, allora avremmo dovuto considerare una preventiva modulazione, argomento del quale parleremo più avanti.

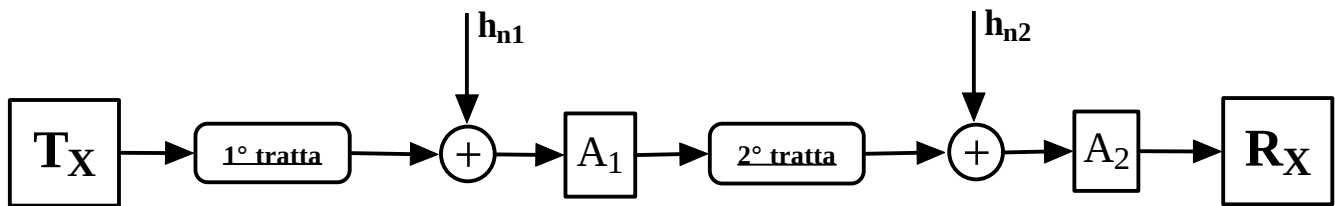
Si tratta, chiaramente, di una attenuazione enorme, per compensare la quale sarebbe necessario trasmettere una potenza pari a

$$P_T[\text{dB}] = P_R[\text{dB}] + \alpha_{\text{tot}}[\text{dB}] = 2479.5[\text{dB}]$$

E' decisamente impensabile trasmettere una simile potenza. Non c'è altro rimedio, allora, che usare un *sistema multitratta*.

Facciamo una osservazione riguardo i calcoli appena effettuati: quando abbiamo risolto un esercizio analogo (cioè sempre trasmissione del segnale televisivo con le stesse specifiche sul mezzo trasmissivo), ma nel caso analogico, abbiamo trovato una attenuazione complessiva di 450 dB; il motivo per cui l'attenuazione, in quel caso, era minore di quella trovata poco fa è che la massima frequenza del segnale da trasmettere coincideva con la banda del segnale televisivo, ossia 5 MHz, mentre in questo caso abbiamo visto che la massima frequenza da trasmettere è 162 MHz. Questo è dunque un sicuro svantaggio dei sistemi di trasmissione numerica: la numerizzazione del segnale analogico da trasmettere comporta un notevole allargamento della banda da utilizzare.

Il modo più semplice di realizzare un **sistema numerico multitratta** è quello di predisporre, dopo ogni *spezzone* di cavo, *apparecchiature di pura amplificazione*, che cioè amplifichino (in potenza) il segnale ricevuto e lo ritrasmettano così com'è:



(la figura si riferisce evidentemente ad un sistema a 2 tratte).

L'obiettivo è quello di calcolare il numero N di tratte necessario per ottenere, in ricezione, la potenza P_R desiderata, scegliendo di trasmettere un valore massimo di potenza per ogni trasmettitore.

La determinazione del numero N di tratte si fa in maniera identica a quella valida nel caso analogico ed il motivo è che questa parte del sistema è assolutamente identica nel caso numerico e in quello analogico: supponendo che le tratte siano tutte uguali tra loro (incluso il fatto che la potenza trasmessa su ciascuna di esse è sempre pari a P_T), sappiamo che il rapporto rumore/segnale totale è la somma dei singoli rapporti rumore/segnale, da cui si ricava che la relazione da considerare è

$$10 \log_{10} N + 14.5[\text{dB}] \leq \left(P_T[\text{dBm}] - \frac{\alpha_{\text{tot}}}{N}[\text{dBm}] \right) - \left(h_n \frac{f_s}{2} \right)_{\text{dB}}$$

Il primo membro dell'equazione corrisponde al rapporto segnale/rumore richiesto all'uscita della generica singola tratta (pari alla somma, divisa per N, dei singoli rapporti S/N); il secondo membro è il rapporto S/N ottenibile da ciascuna tratta. Quella relazione fornisce il valore di N necessario per ottenere, all'uscita da ogni singola tratta, il rapporto S/N di 14.5 dB trovato nell'esempio numerico di prima. Scegliendo una potenza in trasmissione pari a $P_T=100\text{mW}$ e risolvendo per tentativi, si trova **N=35**.

L'altra possibilità è quello di usare delle **apparecchiature rigenerative** al posto delle apparecchiature di pura amplificazione: questo significa che, all'uscita di ogni tratta, dobbiamo effettuare tutte le operazioni che permettono di tornare ai simboli binari, in modo che, una volta riottenuta la sequenza binaria teoricamente⁵ trasmessa, essa possa essere nuovamente codificata e trasmessa.

Con una scelta di questo tipo, ogni tratta diventa sostanzialmente un sistema di trasmissione numerico a sé stante: di conseguenza, su ciascuna tratta si potranno verificare degli errori. D'altra parte, è praticamente impossibile che su più tratte si sbagli lo stesso bit. Di conseguenza, gli errori sulle varie tratte si vanno sommando gli uni agli altri, il che significa che si vanno sommando le probabilità di errore:

$$P_{\text{tot}}(\epsilon) = \sum_{i=1}^N P_i(\epsilon)$$

Questa formula è l'analogo della formula in base alla quale, nei sistemi analogici multitratta su cavo, il rapporto rumore/segnale complessivo è pari alla somma dei singoli rapporti segnale/rumore.

Ovviamente, la probabilità di errore complessiva $P_{\text{tot}}(\epsilon)$ coincide con la $p(\epsilon)$ considerata nei sistemi a singola tratta: allora, supponendo che le $P_i(\epsilon)$ siano tutte uguali tra loro, è chiaro che alla singola tratta è richiesta una probabilità di errore N volte più piccola di quella complessiva richiesta in ricezione:

$$P_{\text{tot}}(\epsilon) = N \cdot P_{\text{singola tratta}}(\epsilon) \longrightarrow P_{\text{singola tratta}}(\epsilon) = \frac{P_{\text{tot}}(\epsilon)}{N}$$

Di conseguenza, il dimensionamento di ogni tratta va effettuato così come nell'esempio di prima, considerando però due differenze: la prima, in base a quanto appena visto, è che la probabilità di errore richiesta è N volte più piccola di $p(\epsilon)$; la seconda è che la lunghezza (e quindi l'attenuazione) di ogni singola tratta è N volte più piccola della lunghezza complessiva L .

La formula da applicare, a questo punto, è la seguente:

$$\log_{10} N + 14.5[\text{dB}] \leq \left(P_T[\text{dBm}] - \frac{\alpha_{\text{tot}}}{N}[\text{dBm}] \right) - \left(h_n \frac{f_s}{2} \right)_{\text{dB}}$$

dove il termine $\log_{10} N$ a primo membro manca adesso del fattore moltiplicativo 10, che invece era presente nel caso delle apparecchiature di pura amplificazione, in quanto bisogna tener conto di come varia la funzione $Q(\gamma)$ al variare di $p(\epsilon)$. Il guadagno di usare tratte rigenerative risiede proprio nell'assenza dell'assenza del fattore moltiplicativo 10 al primo membro.

Risolvendo ancora una volta l'equazione per tentativi, si trova **N=29**, ossia una riduzione di ben 6 tratte rispetto al caso precedente.

Quindi, *il motivo per cui, in un sistema su cavo coassiale, conviene notevolmente l'uso delle tratte rigenerative è che la probabilità di errore dipende in maniera molto critica dal rapporto segnale-rumore.*

⁵ "teoricamente" in quanto ci sono sempre da considerare gli eventuali errori

ESEMPIO: TRASMISSIONE NUMERICA DEL SEGNALE TV SU PONTE RADIO

Supponiamo nuovamente di voler trasmettere il segnale televisivo a colori in formato numerico. Come mezzo di trasmissione scegliamo questa volta un **ponte radio** e, in particolare, supponiamo che la distanza tra trasmettitore e ricevitore sia $L=100$ km. In base ai noti problemi di visibilità tra le antenne, sappiamo che una distanza di 100 km non si può coprire con una sola tratta, mentre sicuramente ne bastano 2, lunghe ciascuna 50 km.

Le specifiche da rispettare sono come al solito 3:

- in primo luogo, abbiamo visto, in un esercizio precedente, che la frequenza di cifra necessaria alla trasmissione numerica del segnale TV a colori, secondo lo standard **CCIR 4:4:2**, è $f_s = 162$ Mbit/sec;
- in secondo luogo, sempre in accordo allo stesso esercizio, abbiamo stabilito che la probabilità di errore accettabile è $p(\epsilon)=10^{-7}$ (derivante dal tollerare 1 solo bit sbagliato per ogni quadro);
- infine, supponiamo di avere a disposizione, per la trasmissione, una banda complessiva $B_{RF}=40$ MHz, che sarà ovviamente centrata su una frequenza centrale f_0 dell'ordine dei GHz.

L'obiettivo è di dimensionare il sistema, determinando sostanzialmente la potenza da trasmettere, per rispettare queste specifiche.

La prima considerazione da fare riguarda proprio la banda a nostra disposizione sul mezzo trasmissivo: non essendo un sistema passa-basso, abbiamo la necessità di effettuare una modulazione, che dovremo scegliere essenzialmente tra PSK, QAM e FSK (non consideriamo la ASK in quanto sappiamo che, usando forme d'onda modulanti di tipo rettangolare antipodale, essa è del tutto equivalente alla PSK). Se la banda a disposizione non è una risorsa che possiamo scegliere a piacimento, il parametro discriminante è sicuramente la potenza, nel senso che conviene scegliere la modulazione più efficiente in termini di potenza da trasmettere: scegliamo allora la **modulazione PSK**. Questo significa, se usiamo forme d'onda modulanti di tipo rettangolare antipodale, che effettuiamo una modulazione di ampiezza della portante sinusoidale (e una demodulazione coerente in ricezione), per cui lo spettro del segnale modulato occupa banda doppia rispetto alla banda B del segnale modulante. Ciò significa, che la banda del segnale modulante dovrà essere metà di quella a disposizione sul mezzo trasmissivo:

$$B = \frac{B_{RF}}{2} = 20 \text{ MHz}$$

Dobbiamo quindi ragionare con un sistema di trasmissione equivalente, in banda base, di banda pari a 20 MHz.

In questi 20 MHz noi dobbiamo trasmettere ad una velocità di **162 Mbit/sec**: usando un sistema binario, anche nell'ipotesi di scegliere roll off $\delta=0$ in uscita dal filtro di ricezione, avremmo bisogno di una banda numericamente pari alla metà di 162 MHz, ossia 81 MHz, mentre invece abbiamo a disposizione solo 20 MHz. Non possiamo far altro che usare un sistema multilivello.

Supponiamo, allora, di prendere $\delta=0$ (il che, nella realtà, non è fattibile): con 20 MHz di banda a disposizione, il baud rate, con un normale sistema PSK binario, è 40 Mbit/sec; se usiamo un sistema a 4-PSK (cioè un sistema a 4 livelli, ossia con 2 bit per ciascun livello), otteniamo invece 80 Mbit/sec; se usiamo allora un sistema 16-PSK (16 livelli, 4 bit per ognuno), arriviamo a 160 Mbit/sec. Per trasmettere a 162 Mbit/sec, l'unica possibilità è allora la seguente: dobbiamo ricorrere

ad un sistema a 32 livelli⁶, con il quale potremmo trasmettere a 200 Mbit/sec, nel quale però non consideriamo $\delta=0$, ma un opportuno valore di δ maggiore di 0. Abbiamo quanto segue:

$$B = \frac{f_B}{2}(\delta+1) \longrightarrow \delta = \frac{2B}{f_B} - 1 = \frac{f_{B,\max}}{f_{B,\text{desiderato}}} - 1 = \frac{200 \cdot 10^6}{162 \cdot 10^6} - 1 = 0.23$$

Quindi, per trasmettere a 162 Mbit/sec, in una banda base (equivalente) di 20 MHz, dobbiamo considerare un sistema 16-QAM e adottare $d=0.23$ all'uscita del filtro di ricezione.

A questo punto possiamo fare i normali conti per il dimensionamento di un sistema numerico, partendo dalla probabilità di errore $p(\epsilon)$ a valle del decisore.

Per passare da valle a monte del decisore, ci basta considerare la relazione $Q(\gamma)=p(\epsilon)$, dove $\gamma = \frac{V_1 - V_0}{2\sigma_n}$, avendo indicato con V_1 e V_0 i livelli che si misurerebbero, in uscita dal campionatore, in assenza di rumore (caratterizzato da una deviazione standard σ_n , uguale sia all'uscita sia all'ingresso del campionatore).

Se fosse $p(\epsilon)=10^{-6}$, sappiamo che si otterrebbe $(\gamma)_{\text{dB}} = 20\log_{10} \gamma = 13.5 \text{ dB}$. Dato che, invece, vogliamo $p(\epsilon)=10^{-7}$, dobbiamo considerare $(\gamma)_{\text{dB}} = 14.5 \text{ dB}$.

Possiamo adesso passare al rapporto segnale/rumore $\left. \frac{S}{N} \right|_U$ a valle del filtro di ricezione, definito come rapporto tra la potenza di picco $P_{S,p}$ del segnale e la potenza media $P_{N,m}$ di rumore: optando ancora una volta per una codifica antipodale, abbiamo che γ^2 è numericamente uguale ad $\left. \frac{S}{N} \right|_U$, per cui

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \frac{P_{S,p}}{P_{N,m}} = \gamma^2$$

Per passare all'ingresso del filtro di ricezione, scegliendo il solito filtro adattato, sappiamo che il rapporto S/N all'uscita del filtro è numericamente pari al rapporto S/N in ingresso, a patto di definire quest'ultimo come rapporto tra la potenza media di segnale e la potenza di rumore che cade nella banda convenzionale $f_s/2$:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{IN}} = \frac{P_R}{h_n \frac{f_s}{2}}$$

dove P_R è la potenza media (di segnale) ricevuta. Questa potenza media, dato che le forme d'onda trasmesse sono pezzi di sinusoidi modulata da rettangoli di tipo antipodale, coincide con la potenza di picco. Di conseguenza, se indichiamo con a l'ampiezza dei rettangoli, la potenza di picco sarà a^2 , per cui possiamo scrivere che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{IN}} = \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}}$$

⁶ Ricordiamo che, quando il numero di livelli sale oltre 16, il sistema M-PSK diventa decisamente poco conveniente, per cui si passa ad un sistema M-QAM, cioè un sistema dove si sfrutta il multilivello sia sulla fase, come nell' M-PSK, sia sull'ampiezza.

In base a quanto detto prima, questo rapporto è numericamente pari al rapporto S/N in uscita dal filtro, cioè al γ^2 ; se però consideriamo il disadattamento del filtro, adottando un **fattore di forma** di 0.5dB, abbiamo che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} = \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2 + 0.5\text{dB} = 15\text{dB}$$

A questo punto, dobbiamo passare a monte del **demodulatore coerente**, valutando come cambiano la potenza di segnale e quella di rumore: ci ricordiamo, allora, da quanto visto a suo tempo nel caso della demodulazione analogica, che la potenza media di segnale raddoppia dall'ingresso all'uscita, mentre rimane invariata la potenza media di rumore: infatti, mentre raddoppia la densità spettrale di potenza del rumore (se h_n è quella in uscita, in ingresso è $h_n/2$), allo stesso tempo si dimezza la banda in cui pesare il rumore, in quanto il segnale modulato occupa una banda doppia rispetto al segnale modulante. Indicato allora con $\left. \frac{S}{N} \right|_{MEZZO}$ il rapporto S/N a monte del demodulatore (e quindi all'uscita del mezzo trasmissivo), abbiamo che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{MEZZO} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{h_n}{2} f_s} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} = \frac{1}{2} \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} \xrightarrow{\text{in unità logaritmiche}} \left. \frac{S}{N} \right|_{MEZZO} = \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} - 3\text{dB} = 12\text{dB}$$

A questo punto, avendo stabilito quanto deve valere il rapporto S/N in uscita dal mezzo, ci basta valutare h_n per calcolare la potenza a^2 necessaria in ricezione, ossia quindi il valore di a .

Nota la potenza minima necessaria in ricezione, per passare alla potenza minima da trasmettere su ogni tratta in trasmissione dobbiamo considerare l'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo. A questo proposito, sappiamo che, nel caso del ponte radio, le attenuazioni sono due: *attenuazione in spazio libero*, dovuta alla divergenza sferica delle onde, e *attenuazione equivalente complessiva*, dovuta essenzialmente ai cammini multipli.

Supponiamo di rigenerare il segnale tra una tratta e l'altra. Se estraiamo la sequenza di bit tra una tratta e l'altra, ci riconduciamo, in pratica, ad un sistema formato da due sistemi numerici in cascata, ciascuno dei quali relativo ad un collegamento di lunghezza 50 km. Se ogni tratta diventa sostanzialmente un sistema di trasmissione numerico a sé stante, su ciascuna tratta si potranno verificare degli errori, ma, così come nel caso del multitratta su cavo coassiale, è praticamente impossibile che su più tratte si sbagli lo stesso bit, il che porta a dire che la probabilità di errore complessiva è pari alla somma delle probabilità di errore sulle singole tratte:

$$P_{\text{tot}}(\epsilon) = \sum_{i=1}^N p_i(\epsilon)$$

(ovviamente, nel nostro caso è $N=2$)

Ovviamente, la probabilità di errore complessiva $P_{\text{tot}}(\epsilon)$ coincide con la $p(\epsilon)$ considerata nei sistemi a singola tratta, cioè con la $p(\epsilon)=10^{-7}$ che noi richiediamo all'uscita del sistema complessivo:

$$\sum_{i=1}^N p_i(\epsilon) = 10^{-7}$$

Subentra a questo punto una differenza sostanziale con un multitratta su cavo coassiale: nel caso del cavo, infatti, abbiamo visto che è lecito richiedere che la probabilità di errore $p_i(\epsilon)$ di ogni tratta sia N volte più piccola della probabilità di errore totale $P_{\text{tot}}(\epsilon)$; questo perché si può assumere che tutte le tratte abbiano un uguale comportamento dal punto di vista del rumore. Al contrario, *nel caso di un ponte radio, in cui ogni tratta si comporta diversamente dalle altre a causa dei cammini multipli, non ha senso richiedere che risulti $p_i(\epsilon) = P_{\text{tot}}(\epsilon)/N$.*

E' molto più sensato, invece, pensare che, in ciascun intervallo di tempo di osservazione, ci possa essere 1 sola tratta particolarmente svantaggiata rispetto alle altre, ossia affetta da una attenuazione di gran lunga superiore rispetto alle altre. Questo comporta che la probabilità di errore complessiva venga praticamente a coincidere con la probabilità di errore della tratta più svantaggiata.

Ovviamente, dato che la tratta più svantaggiata non è sempre la stessa, bisogna dimensionare il sistema in modo tale che su ciascuna tratta sia garantita la stessa probabilità di errore, pari alla probabilità di errore $p(\epsilon)$ complessiva:

$$p(\epsilon) = P_{\text{tot}}(\epsilon) = p_i(\epsilon)$$

Quindi, nel caso di apparecchiature rigenerative, la probabilità di errore resta la stessa sia che si consideri una sola tratta sia che si considerino più tratte.

E' chiaro che l'evento "fuori servizio della singola tratta" si può definire per tutte le tratte. Non solo, ma è anche chiaro che il sistema va fuori servizio se almeno una delle tratte è fuori servizio: in termini probabilistici, questo significa l'evento "fuori servizio del sistema" è dato dall'unione degli eventi "fuori servizio dell' i -sima tratta":

$$P_{\text{F.S.T}} = \sum_{i=1}^N P_{\text{F.S.i}}$$

dove chiaramente $P_{\text{F.S.T}}$ è la probabilità di fuori servizio dell'intero sistema, cioè il dato che ci viene fornito per eseguire il progetto.

A questo punto, si può fare una ulteriore ipotesi: è ragionevole assumere che la statistica degli affievolimenti profondi sia la stessa per tutte le tratte, il che significa che anche le $P_{\text{F.S.i}}$ sono tutte uguali e quindi che

$$P_{\text{F.S.T}} = N \cdot P_{\text{F.S.i}}$$

La conclusione è che, *mentre la probabilità di errore su ogni singola tratta è uguale a quella di tutto il sistema, la probabilità di fuori servizio di ogni singola tratta è N volte più piccola della probabilità di fuori servizio di tutto il sistema.* Vediamo a quali calcoli ci portano queste considerazioni.

Intanto, se $p_i(\epsilon) = p(\epsilon)$, è evidente che i calcoli sulla potenza minima da ricevere su ogni tratta sono identici a quelli fatti nel caso della singola tratta, per cui diciamo immediatamente che in uscita da ogni "pezzo" di mezzo trasmissivo, cioè in ingresso ad ogni demodulatore, abbiamo bisogno di un rapporto S/N di **12 dB**, cui corrisponde un certo valore $P_{\text{R,min}}$ di potenza da ricevere (valore che dipende dall'entità del rumore sovrapposto).

La potenza minima in trasmissione, necessaria a ricevere $P_{\text{R,min}}$, si calcola ragionando su una sola tratta, per la quale dobbiamo perciò considerare una attenuazione supplementare e una attenuazione in spazio libero; l'attenuazione supplementare α_s è il reciproco della probabilità di fuori servizio $P_{\text{F.S.i}}$; questa però non è pari a $P_{\text{F.S.T}}$, ma è N volte più piccola: nel nostro caso, $N=2$, per cui

$P_{F.S.i} = 0.5 \cdot 10^{-3}$ e quindi $\alpha_s = 33\text{dB}$ (essendosi dimezzata la probabilità di fuori servizio, l'attenuazione è raddoppiata, ossia è aumentata di 3dB).

Possiamo dunque scrivere che

$$P_{T,\min} = P_{R,\min} + \alpha_s + \alpha_{SL,i} = P_{R,\min} + 33[\text{dB}] + \alpha_{SL,i}$$

Dobbiamo adesso valutare l'attenuazione in spazio libero $\alpha_{SL,i}$ della generica tratta: dato che la lunghezza è $L=50\text{km}$, l'attenuazione $\alpha_{SL,i}$ è pari ad $1/4$ di α_{SL} , che è relativa ad una distanza di 100km : se supponiamo $\alpha_{SL}=100\text{dB}$, sarà $\alpha_{SL,i}=94\text{dB}$, per cui

$$P_{T,\min} = P_{R,\min} + 33[\text{dB}] + 94[\text{dB}] = P_{R,\min} + 127[\text{dB}]$$

Quindi, su ogni tratta dobbiamo trasmettere una potenza che sia 127 dB superiore alla potenza minima richiesta per ottenere l'assegnata probabilità di errore $p(\epsilon)$.

TRASMISSIONE ANALOGICA DI SEGNALE TELEVISIVI MEDIANTE SATELLITE

Ricordiamo subito che *in un sistema di trasmissione via satellite, il dimensionamento deve essere condotto basandosi solo sulla tratta di discesa*, ossia sulla tratta che va dal satellite verso terra: questo perché la tratta di salita viene generalmente sovradimensionata, in modo che i problemi dovuti al rumore sovrapposto al segnale siano essenzialmente solo quelli provenienti appunto dalla tratta di discesa.

I requisiti di qualità del segnale televisivo nei riguardi del rumore prevedono, per un collegamento a grande distanza, un rapporto segnale/rumore, in uscita dal sistema (cioè quindi all'ingresso del televisore) di **52dBp**. Questo valore si riferisce, però, ad un *rumore pesato*: va infatti ricordato che il *filtro videometrico* (che modella, in pratica, la sensibilità dell'occhio umano alle variazioni di colore) dà minor peso al rumore di alta frequenza rispetto al rumore in bassa frequenza. Per esempio, si può dimostrare che una stessa potenza di rumore, nella banda di 5 MHz, viene attenuata di 8 dB se il rumore ha densità spettrale costante e viene invece attenuata di 16 dB se il rumore ha densità spettrale crescente in modo proporzionale al quadrato della frequenza (sarebbe il tipico rumore in uscita da un sistema con modulazione di frequenza).

Per maneggiare, quindi, questi 52dBp, dobbiamo individuare le caratteristiche della densità spettrale di rumore sovrapposto al segnale in uscita dal sistema: se supponiamo che il sistema considerato usi una *modulazione di frequenza*, sappiamo che il rumore viene sagomato, dal demodulatore FM, verso le alte frequenze, il che significa che la suddetta pesatura del rumore porta ad una riduzione di 16dB della potenza di rumore, il che significa che il rapporto S/N minimo tollerabile all'uscita del sistema è pari a

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\min}^{\text{OUT}} [\text{dB}] = 52\text{dBp} - 16\text{dB} = 36\text{dB}$$

Dobbiamo adesso ricordare che i 52dBp iniziali e quindi i **36dB** appena calcolati sono relativi al rapporto tra il quadrato della tensione bianco-nero $V_{S,B/N}$ del segnale televisivo (escludendo cioè i *segnali di sincronismo*) e il quadrato della tensione efficace $v_{N,\text{eff}} = \sqrt{v_N^2}$ di rumore ad esso sovrapposto: se invece ci riconduciamo alla tensione picco-picco $V_{S,PP}$ del segnale televisivo (incluso cioè i sincronismi), sappiamo che essa è pari a quella bianco-nero divisa per 0.7, per cui la corrispondente potenza è pari al doppio della potenza bianco-nero:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{min}}^{\text{OUT}} [\text{dB}] = 20 \log_{10} \frac{V_{S,PP}^2}{V_{N,eff}^2} = 36\text{dB} + 3\text{dB} \xrightarrow{\text{in unità naturali}} \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{min}}^{\text{OUT}} = \frac{V_{S,PP}^2}{V_{N,eff}^2} = 10^{\frac{39}{10}} = 7943$$

In base a questi calcoli, la potenza picco-picco del segnale deve essere 7943 volte la potenza media di rumore.

Adesso, ricordando quanto visto a proposito del rapporto segnale/rumore in uscita da un demodulatore di frequenza, possiamo riferirci alla formula seguente:

$$4000 = \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{min}}^{\text{OUT}} = \frac{V_{S,PP}^2}{V_{N,eff}^2} = 3 \left(\frac{\Delta f_{PP}}{f_2} \right)^2 \frac{P_R}{h_n f_2}$$

A questo punto, l'altra relazione da considerare viene dal fatto che dobbiamo garantire il funzionamento sopra-soglia del demodulatore di frequenza: la condizione di soglia da imporre è notoriamente data da

$$\frac{P_R}{h_n B} \geq 10$$

dove P_R è la potenza ricevuta dal mezzo trasmissivo e il prodotto $h_n B$ è la potenza di rumore (supponendo una densità spettrale costante sul valore $h_n = kT$) nella banda del segnale modulato. Possiamo anche metterci in condizioni migliori di funzionamento, prevedendo sin da ora un adeguato margine al di sopra della soglia, ossia richiedendo, per esempio, che risulti

$$\frac{P_R}{h_n B} \geq 20$$

Infine, dobbiamo ricordarci che, in base all'approssimazione di Carson, la banda occupata dal segnale sul mezzo trasmissivo è

$$B = \frac{\Delta f_{B/N}}{0.7} + 2 f_2 = \Delta f_{PP} + 2 f_2$$

In questa espressione, il coefficiente 0.7 tiene conto del fatto che l'ampiezza picco-picco del segnale televisivo comprende per il 70% il segnale di luminanza e per il restante 30% i segnali di sincronismo, per cui il rapporto $\Delta f_{PP} = \frac{\Delta f_{B/N}}{0.7}$ rappresenta la totale deviazione di frequenza tra picco positivo e picco negativo, mentre invece $\Delta f_{B/N}$ rappresenta solo la deviazione di frequenza tra bianco e nero.

Il sistema da risolvere è dunque il seguente:

$$\begin{cases} 3 \left(\frac{\Delta f_{PP}}{f_2} \right)^2 \frac{P_R}{h_n f_2} = 4000 \\ \frac{P_R}{h_n B} \geq 20 \\ B = \Delta f_{PP} + 2 f_2 \end{cases}$$

E' ovvio che la soluzione del sistema avviene usando il segno di uguaglianza nella seconda equazione. Allora, sostituendo la seconda e la terza relazione nella prima, si trova una equazione in cui l'incognita è il rapporto $\Delta f_{pp} / f_2$:

$$P_R = 20h_n B = 20h_n (\Delta f_{pp} + 2f_2) \longrightarrow 3 \left(\frac{\Delta f_{pp}}{f_2} \right)^2 \frac{20h_n (\Delta f_{pp} + 2f_2)}{h_n f_2} = 7943$$

⇓

$$\left(\frac{\Delta f_{pp}}{f_2} \right)^2 \left(20 \frac{\Delta f_{pp}}{f_2} + 220 \right) \cong 2648$$

Risolvendo questa equazione, si trova $\frac{\Delta f_{pp}}{f_2} = 3.2$.

Assumendo che la banda del segnale televisivo (cioè del segnale modulante) sia $f_2 = 5$ MHz (consideriamo perciò solo il segnale di luminanza, escludendo i segnali di cromaticità ed il segnale audio), si trova allora che la deviazione picco-picco di frequenza vale $\Delta f_{pp} = 16$ MHz, cui corrisponde una banda del segnale modulato pari a $B = 26$ MHz.

Con questi valori, possiamo infine calcolare quanto deve valere il rapporto P_R/h_n affinché sia soddisfatta la condizione di soglia:

$$\frac{P_R}{h_n B} \geq 20 \longrightarrow \frac{P_R}{h_n} \geq 20 \cdot B = 656 \cdot 10^6 \xrightarrow{\text{in unità logaritmiche}} P_R - h_n \geq 88 \text{ dB}$$

Con questo risultato si potrebbe ad esempio effettuare un confronto tra la trasmissione via satellite del segnale televisivo (in bianco/nero) e la trasmissione via satellite di un segnale telefonico multiplo. Per fare il confronto, dobbiamo ovviamente metterci nello stesso contesto per i due sistemi:

- in primo luogo, dobbiamo supporre che i due sistemi utilizzino la stessa banda in banda base: ad esempio, se consideriamo una banda base comune di 5 MHz, andiamo in pratica a confrontare la trasmissione del segnale televisivo in B/N con la trasmissione di un segnale telefonico multiplo con 1200 canali (ognuno dei quali occupa una banda $5 \text{ MHz} / 1200 \cong 4 \text{ kHz}$, che è il valore imposto dagli standard).
- in secondo luogo, dobbiamo considerare definizioni congruenti del rapporto S/N in uscita dal sistema complessivo: per quanto riguarda il segnale telefonico, se si considera il rapporto tra potenza media di segnale e potenza media di rumore, si richiede un valore minimo di 32dB, mentre questo valore diventa di **48dB** se si considera la tensione picco-picco del segnale. Questi valori, d'altra parte, sono riferiti al caso di un rumore bianco, per cui dobbiamo considerare l'analogo caso per il segnale televisivo: quindi, dai 52dBp iniziali, passiamo a 52dBp-8dB=44dB, cui però dobbiamo sommare altri 3dB se vogliamo passare al valore picco-

picco. Quindi, i 48dB per il segnale telefonico vanno confrontati con **47dB** del segnale televisivo.

I valori appena trovati mostrano, in pratica, che i due sistemi garantiscono praticamente le stesse prestazioni, nel caso in cui sia trasmessa la stessa potenza picco-picco, se si trasmette in banda base (o anche in modulazione di ampiezza). Se invece trasmettiamo con modulazione di frequenza, come nel caso considerato prima, otteniamo un certo vantaggio nella trasmissione del segnale televisivo, proprio perché, come visto prima, la distribuzione spettrale del rumore in uscita è più favorevole, determinando un aumento di circa 8 dB del rapporto S/N in uscita, o, a parità di rapporto S/N, una diminuzione di 8 dB della potenza da trasmettere.

Dobbiamo adesso proseguire nel dimensionamento del sistema, in quanto siamo per ora riusciti solo a stabilire quale deve essere il rapporto, all'ingresso del ricevitore a terra, tra potenza media ricevuta e densità spettrale di rumore sovrapposto. A noi interessa calcolare la potenza da trasmettere, per cui dobbiamo necessariamente calcolare la densità spettrale di potenza h_n del rumore. Dato che consideriamo il solito rumore additivo bianco con distribuzione gaussiana delle ampiezze, la densità spettrale avrà espressione del tipo $h_n = k(T_0 + T_{eq})$, dove T_{eq} (*temperatura equivalente di rumore*) è il fattore che tiene conto della rumorosità interna del ricevitore, mentre T_0 è la temperatura del generatore di rumore in ingresso al ricevitore⁷. Per quanto riguarda il rumore all'ingresso, possiamo assumere che T_0 sia la temperatura ambiente, per cui $T_0 = 293^\circ\text{K}$; per quanto riguarda, invece, la temperatura equivalente di rumore, si è stimato che il valore massimo ottenibile è $T_{eq} = 65^\circ\text{C}$. Considerando questi valori, la densità spettrale di potenza di rumore all'ingresso del ricevitore vale

$$h_n = k(T_0 + T_{eq}) = 8.7 \cdot 10^{-21} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

L'equivalente in dB di questa quantità è -200 dB, da cui deduciamo che la potenza media di segnale di cui necessitiamo in ricezione è

$$P_R \geq 88\text{dB} + h_n = -112 \text{ dB} \xrightarrow{\text{in unità naturali}} 1.5 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

A questo punto, per calcolare la potenza da trasmettere dal satellite, ci serve calcolare l'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo, che è costituito in gran parte dallo spazio ed in minima parte dall'atmosfera. Ciò significa che possiamo assimilare il sistema ad un ponte radio, ad un'unica tratta, in cui l'unica attenuazione presente è quella di spazio libero (dovuta cioè alla divergenza sferica delle onde). Tale attenuazione ha la seguente espressione generale:

$$\alpha_{SL} = \frac{4\pi d^2}{G_T A_{eq}}$$

⁷ A questo proposito, ricordiamo quanto segue: se il ricevitore (cioè il demodulatore di frequenza) fosse ideale, cioè non rumoroso, esso avrebbe semplicemente l'effetto di amplificare il rumore kT_0 ricevuto in ingresso della stessa quantità con cui amplifica il segnale utile in ingresso; al contrario, essendo il ricevitore intrinsecamente rumoroso, esso fornisce in uscita due contributi di rumore: uno è quello ideale, cioè il risultato della amplificazione del rumore in ingresso; l'altro è dovuto appunto al rumore che il ricevitore introduce di suo sul segnale. Allora, al fine di portare in ingresso tutto il rumore sovrapposto al segnale, non si considera solo un termine di rumore kT_0 , ma si considera anche in termine kT_{eq} , dove T_{eq} è un parametro del ricevitore (che va quindi misurato).

Questa attenuazione cresce notoriamente con il quadrato della distanza, mentre è inversamente proporzionale al guadagno direttivo G_T dell'antenna trasmittente (sul satellite) ed all'area efficace A_{eq} dell'antenna ricevente (a terra).

Cominciamo proprio da A_{eq} : assumendo che gli utenti a terra ricevano il segnale del satellite tramite una antenna parabolica di diametro $R=1m$, l'area geometrica di tale antenna $\pi R^2=\pi=3.14$. Se assumiamo che l'efficienza di captazione⁸ delle antenne sia $\eta=0.65$, otteniamo per l'area efficace dell'antenna ricevente un valore $A_{eq}\cong 2$.

Per quanto riguarda la distanza d tra satellite e stazione ricevente, assumiamo il valore di 36000 km, pari alla distanza dell'orbita geostazionaria dall'equatore; nel fare questa assunzione, stiamo in pratica facendo due ipotesi: la prima è che l'area da servire si trovi esattamente a cavallo dell'equatore, il che può ovviamente non essere vero; la seconda è che ci stiamo riferendo ad una ipotetica stazione ricevente situata al centro della zona coperta dal satellite, ossia nel punto in cui il satellite concentra la potenza trasmessa. Successivamente, dovremo tener conto di queste ipotesi al fine di aumentare opportunamente la potenza che ci verrà fuori dai calcoli.

Tornando proprio ai calcoli, in base ai valori ottenuti per A_{eq} e per d , si trova che

$$\alpha_{SL} G_T = \frac{4\pi d^2}{A_{eq}} = 8 \cdot 10^9 (\Leftrightarrow 99dB)$$

Tenendo adesso conto che $\frac{P_T}{P_R} = \alpha_{SL} = \frac{4\pi d^2}{G_T A_{eq}}$, deduciamo che

$$G_T P_T = \frac{4\pi d^2}{A_{eq}} P_R$$

In unità logaritmiche, abbiamo dunque che

$$G_T P_T [dB] = P_R [dB] + \frac{4\pi d^2}{A_{eq}} [dB] = -112[dB] + 99[dB] = -13[dB]$$

Abbiamo cioè trovato che il prodotto $G_T P_T$, espresso in unità logaritmiche, deve avere valore -13dB. Il dimensionamento si fa allora scegliendo l'opportuna coppia di valori (G_T, P_T) che soddisfi questo vincolo: se si vuole trasmettere poca potenza, bisogna rassegnarsi ad usare una antenna molto direttiva (e quindi generalmente abbastanza grande), mentre, viceversa, se si vuole una antenna non molto direttiva, bisogna necessariamente trasmettere più potenza.

Una volta calcolato il valore di P_T , l'ultimo passo consiste nel tener conto sia della distanza della zona da coprire rispetto all'equatore sia del fatto che gli utenti situati ai bordi della zona stessa ricevono meno potenza di quelli situati al centro del fascio. Per garantire a tutti gli utenti il minimo rapporto S/N imposto dai requisiti di qualità (ossia i famosi 52 dBp), dobbiamo necessariamente sovradimensionare il valore di P_T : in generale, se l'area coperta ha un diametro non troppo elevato, basta prevedere un raddoppio della potenza (cioè un aumento di 3dB) per tener conto degli utenti situati ai bordi dell'area stessa. Analogo incremento è sufficiente per tener conto della distanza dall'area coperta dal satellite rispetto all'equatore.

⁸ pari al rapporto tra area efficace e area geometrica: se fosse $\eta=1$, l'antenna sarebbe in grado di captare tutta l'energia incidente su di essa, mentre ciò nella realtà non è possibile, per cui $\eta < 1$

Diffusione televisiva domestica

Tornando adesso ai concetti generali circa la trasmissione televisiva via satellite, abbiamo finora considerato il caso di una semplice trasmissione a grande distanza realizzata tramite satellite. E' invece interessante domandarsi come si modificherebbero i parametri del sistema se si volessero distribuire i programmi (ricevuti e trasmessi dal satellite) direttamente ai *trasmettitori circolari terrestri* per la **diffusione televisiva** o addirittura ai ricevitori domestici. La prima cosa che risulta evidente, in questo nuovo contesto, è che l'economia del sistema richiede stazioni riceventi di terra molto più semplici. Ad esempio, volendo operare con una antenna con diametro 30 volte più piccolo di quella ipotetica che potevamo utilizzare nel caso analizzato prima, si otterrebbe un aumento della potenza da trasmettere dal satellite di 1000 volte; a questo, bisognerebbe anche aggiungere che le stazioni di terra presentano un rumore molto maggiore, del quale si può tenere in conto aumentando ancora di un fattore 10 la potenza trasmessa dal satellite. Si arriva allora a valori di potenza dell'ordine di 10 kW e più. Questo valore, però, è relativo al caso in cui si voglia servire tutta l'area della terra coperta dal satellite. Se invece volessimo servire una regione più limitata, ad esempio l'Italia, dovremmo tener conto del fatto che essa è vista dal satellite sotto un certo angolo medio, del valore di pochi gradi: nel caso dell'Italia, tale angolo vale circa 1.5° . In questo caso, si ottiene una riduzione della potenza da trasmettere di circa 21 dB, per cui si scende a valori di tale potenza dell'ordine del centinaio di W.

Le cose si complicano ulteriormente se consideriamo la trasmissione del segnale televisivo a colori, nel qual caso dovremmo tener conto dell'intermodulazione tra il segnale di luminanza e i due segnali di cromaticità.

Altri sviluppi dei sistemi mediante satellite

Come per tutti i sistemi che usano onde irradiate, col passare del tempo e quindi col crescere del traffico radio, diventa sempre più importante usare nel modo più efficiente quella basilare risorsa che è lo spettro delle radiofrequenze disponibili. D'altra parte, data la prevedibile saturazione di tale spettro, diventa inevitabile una continua spinta verso l'utilizzo di frequenze più elevate: nel caso specifico dei satellite, sono diventate di grande interesse le frequenze oltre i 10 GHz. Tali frequenze presentano lo svantaggio di subire una maggiore attenuazione da parte della pioggia, ma hanno anche diversi vantaggi: consentono una maggiore direttività delle antenne e hanno minori problemi di interferenza con i ponti radio terrestri, data la disponibilità di bande esclusive per i satelliti.

Per quanto riguarda l'uso efficiente delle frequenze, un modo è sicuramente quello di ridurre la banda occupata dai segnali modulati, riducendo ad esempio la deviazione nel caso di modulazione angolare oppure, nel caso della trasmissione numerica, usando una modulazione a tante fasi. Questi procedimenti, però, diventano particolarmente onerosi quando si lavora a frequenze molto alte.

Una procedura che può risultare più conveniente della riduzione di banda è quella di usare una cosiddetta **antenna multifascio** al posto di una antenna a copertura globale: in pratica, l'antenna copre la stessa regione complessiva, ma la copertura è effettuata suddividendo la regione in più aree (*celle*) e servendo ognuna di esse con un apposito fascio di radiazione. In questo modo, la potenza per fascio, a parità di capacità trasmessa, si riduce in proporzione all'area servita. Non solo, ma se i fasci sono sufficientemente direttivi e disaccoppiati, si potrebbero anche usare le stesse frequenze per ogni fascio. In questo modo, adoperando le stesse frequenze e trasmettendo grossomodo la stessa potenza complessiva rispetto ad una antenna a copertura globale, si potrebbe moltiplicare per N la capacità di trasmissione, se N sono i fasci.

E' chiaro che, nella pratica, la tecnica del **riuso delle frequenze** non può essere così completo, ma il vantaggio di potenza che si consegue a bordo ed a terra è di grande importanza, in quanto favorisce l'uso di stazioni di terra più piccole.

Altro metodo, sia pure meno efficace, per usare più volte le stesse frequenze è quello di usare più satelliti sufficientemente spazati angolarmente, in modo da consentire la discriminazione da parte delle antenne di terra.

ESEMPIO NUMERICO: TRASMISSIONE NUMERICA DEL SEGNALE TV IN UN SISTEMA VIA SATELLITE

Nel primo esercizio considerato in questo capitolo (trasmissione numerica del segnale televisivo su cavo coassiale), abbiamo esaminato la trasmissione numerica del segnale televisivo in un sistema su cavo coassiale lungo $L=100$ km. In questo caso, sfruttando una parte dei risultati ottenuti in quel caso, vogliamo considerare la trasmissione numerica del segnale televisivo in un sistema via satellite.

Per le considerazioni fatte nel precedente esercizio (trasmissione analogica via satellite del segnale televisivo), dobbiamo semplicemente dimensionare la tratta di discesa, che va cioè dal satellite alla stazione ricevente di terra.

Per fare questo, partiamo dalle specifiche sul nostro sistema: ripetendo gli stessi ragionamenti fatti nell'esercizio prima citato, ci interessa garantire una probabilità di errore $p(\epsilon)=10^{-7}$ (corrispondente ad 1 bit sbagliato per quadro) ed una frequenza di cifra $f_s=162$ Mbit/sec.

La sostanziale differenza tra un sistema di trasmissione via satellite ed uno su cavo coassiale è nel fatto che, mentre quest'ultimo è un sistema di trasmissione passa-basso, il sistema via satellite è di tipo passa-banda. Ciò significa che, per trasmettere e ricevere, dobbiamo operare, rispettivamente, una modulazione ed una demodulazione.

Dobbiamo dunque scegliere che tipo di modulazione usare: se fossimo in analogico, sceglieremmo sicuramente una modulazione di frequenza, in quanto sappiamo che il demodulatore di frequenza ha l'effetto di concentrare il rumore alle alte frequenze, dove esso da meno fastidio in quanto l'occhio umano è meno sensibile alle variazioni rapide di colore. Dato che, invece, siamo in un sistema di trasmissione numerico, optiamo per il sistema di modulazione più efficiente, che è il **PSK**: dobbiamo cioè considerare rettangoli antipodali per codificare i bit e usare tali rettangoli per modulare di ampiezza la portante sinusoidale. La frequenza f_c di tale portante è pari alla frequenza centrale della banda a noi assegnata: possiamo supporre, dato che stiamo considerando un sistema via satellite, che sia $f_c=10$ GHz.

Cominciamo, come al solito, dal ricevitore: dobbiamo passare dalla probabilità di errore $p(\epsilon)$ in uscita dal ricevitore al rapporto S/N all'ingresso del ricevitore stesso, ossia all'ingresso del demodulatore coerente.

Possiamo allora ripetere pari pari gli stessi discorsi visti nel caso della trasmissione numerica del segnale TV su ponte radio.

Ad un valore $p(\epsilon)=10^{-7}$ corrisponde $(\gamma)_{db}=14.5$ dB. Avendo scelto una codifica antipodale, il rapporto segnale/rumore $\left. \frac{S}{N} \right|_U$ a valle del filtro di ricezione, definito come rapporto tra la potenza di picco $P_{s,p}$ del segnale e la potenza media $P_{N,m}$ di rumore, risulta essere

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \frac{P_{s,p}}{P_{N,m}} = \gamma^2$$

Per passare all'ingresso del filtro di ricezione, scegliendo il solito filtro adattato, sappiamo che il rapporto S/N all'uscita del filtro è numericamente pari al rapporto S/N in ingresso, a patto di definire quest'ultimo come rapporto tra la potenza media di segnale e la potenza di rumore che cade nella banda convenzionale $f_s/2$:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} = \frac{P_R}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2$$

dove P_R è la potenza media (di segnale) ricevuta. Questa potenza media, dato che le forme d'onda trasmesse sono pezzi di senoide modulata da rettangoli di tipo antipodale, coincide con la potenza di picco. Di conseguenza, se indichiamo con a l'ampiezza dei rettangoli, la potenza di picco sarà a^2 , per cui possiamo scrivere che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} = \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2$$

Se consideriamo il disadattamento del filtro, adottando un fattore di forma di 0.5dB, abbiamo in conclusione che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_U = \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} = \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} = \gamma^2 + 0.5\text{dB} = 15\text{dB}$$

A questo punto, per passare da valle a monte del demodulatore coerente, ci basta considerare che la potenza di rumore rimane invariata, mentre la potenza media di segnale è doppia in uscita rispetto all'ingresso, data la presenza in ingresso dell'oscillazione sinusoidale: indicato allora con $\left. \frac{S}{N} \right|_{MEZZO}$ il rapporto S/N a monte del demodulatore (e quindi all'uscita del mezzo trasmissivo), abbiamo che

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{MEZZO} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{h_n}{2} f_s} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} = \frac{1}{2} \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} \xrightarrow{\text{in unità logaritmiche}} \left. \frac{S}{N} \right|_{MEZZO} = \left. \frac{S}{N} \right|_{IN} - 3\text{dB} = 12\text{dB}$$

A questo punto, avendo stabilito quanto deve valere il rapporto S/N in uscita dal mezzo, ci basta valutare h_n per calcolare la potenza a^2 necessaria in ricezione. Con riferimento agli stessi discorsi fatti nell'esercizio precedente, possiamo assumere che

$$h_n = k(T_0 + T_{eq}) = k(293^\circ\text{K} + 338^\circ\text{K}) = 8.7 * 10^{-21} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

Possiamo dunque calcolare la potenza di rumore $h_n \frac{f_s}{2}$ sovrapposto al segnale: in dB, tale potenza risulta essere di -122 dB, per cui deduciamo che ci serve ricevere dal mezzo trasmissivo una potenza media

$$P_R [\text{dB}] = 12\text{dB} - h_n [\text{dB}] = -110\text{dB}$$

A questo punto, per calcolare la potenza da trasmettere dal satellite, ci serve calcolare l'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo. Valgono allora gli stessi discorsi fatti nell'esercizio precedente: assumendo $A_{eq} \cong 2$ e $d = 36000 \text{ km}$, otteniamo

$$\alpha_{SL} G_T = \frac{4\pi d^2}{A_{eq}} = 8 \cdot 10^9 (\Leftrightarrow 99\text{dB})$$

Tenendo poi conto che $\frac{P_T}{P_R} = \alpha_{SL} = \frac{4\pi d^2}{G_T A_{eq}}$, deduciamo che

$$G_T P_T = \frac{4\pi d^2}{A_{eq}} P_R$$

In unità logaritmiche, abbiamo dunque che

$$G_T P_T [\text{dB}] = P_R [\text{dB}] + \frac{4\pi d^2}{A_{eq}} [\text{dB}] = -110 [\text{dB}] + 99 [\text{dB}] = -11 [\text{dB}]$$

Con questo valore siamo in grado di dimensionare il satellite.

ESEMPIO SU UN SISTEMA DI TRASMISSIONE NUMERICO VIA SATELLITE

Ci poniamo adesso un problema leggermente diverso da quello dei paragrafi precedenti. Supponiamo di avere un sistema di trasmissione numerico via satellite, del quale sono note le seguenti specifiche:

- massima potenza di picco trasmissibile dal satellite: $P_{T,\max}=1\text{W}$;
- probabilità di errore richiesta all'uscita del sistema: $p(\epsilon)=10^{-7}$;
- area equivalente dell'antenna ricevente: $A_{eq}=2$;
- guadagno direttivo dell'antenna trasmittente: $G_T=2$;
- fattore di rumore del ricevitore: $F=6\text{dB}$.

In base a queste specifiche, vogliamo sapere qual è la massima velocità di trasmissione che possiamo raggiungere. Il motivo per cui ha senso porsi una domanda del genere è che, in un sistema di trasmissione numerico, la frequenza di cifra determina la banda occupata dal segnale utile e tale banda determina anche quanto rumore viene ingurgitato dal ricevitore.

Passiamo allora i conti. I passaggi sono assolutamente identici a quelli seguiti nel paragrafo precedente, per cui scriviamo direttamente che il rapporto S/N in ingresso al demodulatore coerente, cioè in uscita dal mezzo trasmissivo, è

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{MEZZO}} = \left. \frac{1}{2} \frac{S}{N} \right|_{\text{IN FILTRO}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{h_n \frac{f_s}{2}} = \frac{a^2}{h_n f_s} = 12\text{dB}$$

dove a è l'ampiezza dei rettangoli che si suppone siano stati trasmessi dal satellite. In termini di unità logaritmiche, questa relazione ci dice dunque che

$$a^2 [\text{dB}] - h_n [\text{dB}] - f_s [\text{dB}_{\text{Hz}}] = 12\text{dB}$$

A questo punto, avendo stabilito quanto deve valere il rapporto S/N in uscita dal mezzo, ci basta valutare h_n per calcolare la potenza a^2 necessaria in ricezione. La traccia ci dice che il ricevitore ha un fattore di rumore di 6dB, per cui la densità spettrale di potenza di rumore vale

$$h_n = FkT_0 \longrightarrow h_n [\text{dB}] = 6 + (-204[\text{dBm}]) = -198[\text{dB}]$$

Possiamo perciò scrivere, sempre in unità logaritmiche, che

$$f_s[\text{dB}_{\text{Hz}}] = a^2[\text{dB}] - (-198[\text{dB}]) - 12[\text{dB}] = a^2[\text{dB}] + 180[\text{dB}]$$

La quantità $a^2[\text{dB}]$ è la potenza media (o di picco, data l'antipodalità) ricevuta, per cui è pari alla potenza media (o di picco) trasmessa diminuita dell'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo:

$$P_R = \frac{P_T}{\alpha_{\text{SL}}} \longrightarrow P_R [\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_T}{\alpha_{\text{SL}}} = 10 \log_{10} \frac{P_T / 1\text{mW}}{\alpha_{\text{SL}} / 1\text{mW}} = P_R [\text{dBm}] - \alpha_{\text{SL}} [\text{dBm}]$$

Dato che sul satellite possiamo trasmettere massimo 1 W di picco, cioè anche 1 W di potenza media, deduciamo che $P_T[\text{dBm}] = 30[\text{dBm}]$, per cui

$$P_R [\text{dB}] = P_T [\text{dBm}] - \alpha_{\text{SL}} [\text{dBm}] = 30[\text{dBm}] - 126[\text{dBm}] = -96[\text{dB}]$$

Sostituendo nella relazione $f_s[\text{dB}_{\text{Hz}}] = a^2[\text{dB}] + 180[\text{dB}]$, dove $a^2[\text{dB}] = P_R [\text{dB}]$, otteniamo dunque che

$$f_s[\text{dB}_{\text{Hz}}] = -96[\text{dB}] + 180[\text{dB}] = 84[\text{dB}_{\text{Hz}}]$$

In unità naturali, questi 84dB_{Hz} corrispondono ad una frequenza 245.6 MHz, ossia 245.6 Mbit/sec.

ESEMPIO NUMERICO: TRASMISSIONE DEL SEGNALE RADIOFONICO IN UN MEZZO PASSA-BANDA

Supponiamo di voler trasmettere, su un mezzo trasmissivo passa-basso, il **segnale radiofonico**: tale segnale è in tutto e per tutto assimilabile al segnale musicale, per cui possiamo assumere che si tratti di un segnale passa-basso di banda $B=15$ kHz. Essendo il mezzo trasmissivo di tipi passa-banda, la modulazione si rende necessaria per allocare il segnale nella banda passante del mezzo stesso.

Nella **trasmissione del segnale radiofonico in FM** (quindi in modulazione di frequenza), ad ogni canale viene riservata una banda passante di **180 kHz**. Ciò significa che la banda del segnale modulato, che sappiamo essere data da $B_{\text{RF}} = \Delta f_{\text{pp}} + 2B$ in base all'approssimazione di Carson, dovrà essere di 180kHz: quindi abbiamo che

$$B_{\text{RF}} = \Delta f_{\text{pp}} + 2B = 180\text{kHz} \longrightarrow \Delta f_{\text{pp}} = 180\text{kHz} - 2B = 180\text{kHz} - 2 \cdot 15\text{kHz} = 150\text{kHz}$$

Abbiamo cioè trovato che la massima deviazione di fase Δf_{pp} picco-picco a nostra disposizione è di 150 kHz. Se supponiamo che il segnale musicale abbia valor medio nullo, possiamo ritenere che la

deviazione di frequenza sia simmetrica rispetto al valor medio (pari alla frequenza f_c della portante), il che significa che la deviazione di frequenza di picco vale $\Delta f_p = \Delta f_{pp} / 2 = 75 \text{ kHz}$.

Adesso modifichiamo leggermente le specifiche del problema, supponendo che la trasmissione sia in forma numerica: ciò significa che, avendo a disposizione il segnale analogico da trasmettere, dobbiamo prima campionarlo, poi quantizzarlo ed infine usarlo per modulare di frequenza la portante. I calcoli sono abbastanza semplici:

- in primo luogo, se il segnale analogico ha banda 15 kHz, per il **campionamento** dobbiamo scegliere, in base al *teorema del campionamento*, una frequenza di campionamento pari almeno a $2 \cdot 15 \text{ kHz} = 30 \text{ kHz}$; nella pratica, se si vuole ad esempio trasmettere il segnale con **qualità CD**, la frequenza di campionamento è di **44.1 kHz**; ciò significa che l'uscita del campionatore genera 44100 campioni al secondo;
- il secondo passo è la **quantizzazione** e dobbiamo perciò scegliere il numero di bit da associare a ciascun campione: non vanno bene 8 bit per campione, in quanto questo è quello che si fa per la trasmissione in forma numerica del segnale telefonico, il quale ha notoriamente una qualità abbastanza scadente; gli standard della *qualità CD* indicano invece un quantizzazione di **16 bit** per campione. Da ciò consegue che il numero di bit in uscita dal quantizzatore nell'unità di tempo è

$$f_s = 44100 \left(\frac{\text{campioni}}{\text{secondo}} \right) \cdot 16 \left(\frac{\text{bit}}{\text{campione}} \right) = 705600 \left(\frac{\text{bit}}{\text{secondo}} \right)$$

Questa è dunque la **frequenza di cifra** che dobbiamo ottenere dal nostro sistema di trasmissione numerico. Se trasmettessimo in banda base e scegliessimo un progetto alla Nyquist (forme d'onda ad intersimbolo nullo all'uscita del filtro di ricezione), la banda occupata dal segnale (passa-basso) sarebbe data dalla nota formula

$$B = (\delta + 1) \frac{f_s}{2}$$

Nell'ipotesi di poter raggiungere i limiti ideali di funzionamento, il che significa prendere $\delta=0$, la banda occupata sarebbe $f_s/2$ Hz, ossia **$B=352.8 \text{ kHz}$** .

Al contrario, il mezzo trasmissivo ci mette a disposizione una banda passante di 180 kHz a cavallo di una portante ad una data frequenza f_c (ad esempio 100 MHz), per cui dobbiamo modulare.

Non possiamo evidentemente scegliere né una modulazione d'ampiezza in doppia banda laterale, in quanto necessiterebbe di una banda $2B=705.6 \text{ kHz}$ a cavallo della portante, né una modulazione d'ampiezza in singola banda laterale, che necessiterebbe di una banda B . Se non va bene la modulazione d'ampiezza in DSB, significa che non va bene una modulazione **PSK a 2 livelli** (cioè una modulazione di fase a 2 livelli), che si ottiene modulando d'ampiezza una portante mediante un segnale formato da rettangoli antipodali di ampiezza +1 e -1. E' facile accorgersi che non possiamo nemmeno usare una modulazione di frequenza come nel caso precedente di trasmissione analogica: infatti, dovremmo scrivere che

$$180 \text{ kHz} = B_{RF} = \Delta f_{pp} + 2B = \Delta f_{pp} + 2 \cdot 352.8 \text{ kHz}$$

e questa relazione porta ad una deviazione di frequenza Δf_{pp} negativa, il che non ha senso.

Ci rendiamo allora conto che l'unica possibilità è quella di usare un sistema multilivello. Scegliamo ad esempio una modulazione **PSK multilivello**, dato che la modulazione PSK è comunque quella più efficiente rispetto alla modulazione ASK e alla modulazione FSK.

Scegliamo un sistema M-PSK, cioè un PSK ad M livelli: ciò significa che, nel *piano dei segnali*, le informazioni corrispondono a vettori tutti di uguale ampiezza (il che significa che i vertici di tali vettori sono disposti lungo una circonferenza con centro nell'origine), ma di fase diversa. In questo caso, la formula da considerare per valutare la banda occupata dal segnale modulato è ancora

$$B = (\delta + 1) \frac{f_B}{2}$$

dove però alla frequenza di cifra abbiamo sostituito il **baud-rate**, ossia la velocità con cui trasmettiamo non più i bit, ma le forme d'onda: ricordiamo infatti che, in un sistema multilivello, ogni forma d'onda corrisponde a più bit. Se per esempio il sistema ha M=4 livelli, ogni forma d'onda corrisponde a 2 bit; se i livelli sono M=8, ogni forma d'onda corrisponde a 3 bit e così via sempre per potenze di 2.

Imponendo, ad esempio, che risulti B=90 kHz (*banda base equivalente*) e $\delta=0$, si ottiene $f_B=180$ kbaud/sec. Allora, se vogliamo raggiungere la velocità di 705600 bit/sec, dobbiamo usare un sistema a **16 livelli**: infatti, in questo caso, ogni forma d'onda porta con sé 4 bit, il che significa che la frequenza di cifra è

$$f_s = 4 f_B = 4 \cdot 180k = 720 \text{ kbit/sec}$$

Riusciamo così a raggiungere una velocità di trasmissione superiore a quella desiderata. D'altra parte, questo risultato è valido nell'ipotesi di aver scelto $\delta=0$, il che nella realtà non è fattibile. Allora, possiamo scegliere il valore di $\delta>0$ che ci consente di ottenere, con un sistema 16-PSK, una velocità di trasmissione esattamente pari a quella richiesta:

$$B = (\delta + 1) \frac{f_B}{2} \longrightarrow \delta = \frac{2B}{f_B} - 1 = \frac{180 \cdot 10^3}{705600} - 1 = 0.02$$

Abbiamo ottenuto un valore di δ comunque molto piccolo, abbastanza difficile da ottenere nella pratica. Dovremmo allora ridurre la velocità di trasmissione: un modo per ottenere questo potrebbe essere quello di ridurre la frequenza di campionamento del segnale musicale, ad esempio scendendo al valore di 40 kHz. In questo caso, adottando sempre una quantizzazione a 16 bit, la velocità da raggiungere sarebbe

$$f_s = 4000 \left(\frac{\text{campioni}}{\text{secondo}} \right) \cdot 16 \left(\frac{\text{bit}}{\text{campione}} \right) = 64000 \left(\frac{\text{bit}}{\text{secondo}} \right)$$

e quindi, con un sistema ancora a 16 livelli, avremmo

$$\delta = \frac{2B}{f_B} - 1 = \frac{180 \cdot 10^3}{64000} - 1 = 0.125$$

Questo valore, ancora piccolo, è sicuramente più accettabile del precedente. Abbiamo quindi scelto una peggiore qualità del segnale pur di rendere realizzabile il sistema.

Possiamo infine osservare che i conti appena fatti, circa l'occupazione di banda, valgono anche se scegliamo un sistema **16-QAM**, che però presenta una fondamentale differenza rispetto al sistema 16-PSK: infatti, mentre i punti della costellazione del 16-PSK sono disposti lungo una circonferenza, i punti del 16-QAM sono disposti ai vertici ed all'interno di un *quadrato*, il che consente un più efficiente sfruttamento della potenza trasmessa. A fronte di questo, d'altra, parte, il sistema 16-QAM, per mantenere la stessa probabilità di errore ottenibile con il 16-PSK, comporta la trasmissione di una maggiore potenza di picco, a causa dei punti situati ai vertici del citato *quadrato*. Ricordiamo anche che il sistema 16-QAM presenta, rispetto al 16-PSK, lo svantaggio di non poter usare, in trasmissione, amplificatori in saturazione: infatti, mentre il segnale modulato PSK è un segnale *ad inviluppo costante* (dato che l'informazione è portata dalla fase e non dall'ampiezza della portante modulata), il segnale modulato QAM è un segnale ad inviluppo non costante, che quindi manderebbe in saturazione l'amplificatore di trasmissione solo in corrispondenza di alcuni livelli e non di tutti.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>