

# Appunti di Comunicazioni Elettriche

## **Richiami vari sulla *Teoria dei Segnali***

Trasformata di Fourier .....	2
Definizione.....	2
Proprietà generali .....	3
Trasformate di alcuni segnali notevoli.....	5
Proprietà di traslazione nel tempo .....	6
Proprietà di traslazione in frequenza.....	6
Proprietà di modulazione.....	7
Proprietà energetica.....	7
Proprietà di derivazione nel tempo .....	7
Proprietà di derivazione in frequenza .....	8
Proprietà di integrazione nel tempo .....	8
Proprietà: segnale coniugato.....	9
Proprietà di dualità.....	9
Trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac .....	9
<i>Applicazione: trasformata di Fourier della funzione Coseno</i> .....	10
<i>Applicazione: trasformata di Fourier della funzione Seno</i> .....	10
Trasformata di Fourier di segnali periodici.....	11
Trasformata di Fourier dell'impulso gaussiano.....	12
Teorema di Parseval .....	13
Spettri bilateri e spettri unilateri .....	14
Relazione tra banda e durata di un segnale .....	17
Funzione di autocorrelazione .....	22
funzione di autocorrelazione per segnali di energia .....	22
Proprietà della funzione di autocorrelazione.....	22
<i>Esempio: rettangolo traslato</i> .....	23
Importanza della funzione di autocorrelazione per i sistemi continui.....	24
Autocorrelazione per segnali di potenza .....	26
Caratteristiche sistemiche delle antenne .....	27
Guadagno di antenna .....	27
Lunghezza efficace di una antenna .....	28
Area efficace .....	29
Varie sui segnali .....	30
Richiami sulla distorsione armonica .....	30
Segnale musicale .....	31
<b>Richiami di probabilità e statistica.....</b>	<b>32</b>
Variabili aleatorie .....	32
Aspettazione di una variabile aleatoria .....	32
<i>Proprietà della media di una variabile aleatoria</i> .....	33
Varianza e deviazione standard di una variabile aleatoria.....	33
<i>Proprietà della varianza di una variabile aleatoria</i> .....	33
Variabili aleatorie con distribuzione gaussiana .....	34

Definizione di distribuzione gaussiana .....	34
Funzione densità di probabilità congiunta .....	34
Indipendenza di due variabili aleatorie con distribuzione gaussiana .....	35
Funzione densità di probabilità condizionata .....	35
Combinazione lineare di variabili aleatorie gaussiane .....	36
Processi stocastici stazionari .....	36
Caratteristiche statistiche delle variabili aleatorie estratte da un processo stocastico stazionarietà in senso lato e in senso stretto .....	36
Ergodicità dei processi stocastici .....	39
<i>Ergodicità in media</i> .....	39
Processi stocastici stazionari e sistemi lineari .....	40
Introduzione .....	40
Potenza statistica .....	40
Proprietà dello spettro di potenza $S_X(f)$ .....	42

## Trasformata di Fourier

### DEFINIZIONE

Dato un segnale  $x(t)$ , reale o complesso, PERIODICO, è possibile rappresentarlo, oltre che con la sua normale espressione analitica in forma chiusa, mediante il seguente **sviluppo in serie di Fourier**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove i coefficienti hanno espressione generica

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Si tratta cioè di esprimere  $x(t)$  come somma di infiniti segnali esponenziali del tipo  $x_n e^{j2\pi f_n t}$ .

Sia adesso  $s(t)$  un generico segnale (reale o complesso) che non sia PERIODICO. Si definisce **trasformata di Fourier** di  $s(t)$  (o semplicemente **spettro**) la funzione

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

In generale, si tratta di una funzione complessa.

Nota la trasformata di Fourier  $S(f)$  di un segnale  $s(t)$ , è possibile determinare  $s(t)$  mediante una operazione di **antitrasformazione di Fourier**:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Quest'ultimo concetto proviene da un risultato fondamentale (che non dimostriamo): se esiste, la trasformata di Fourier di un certo segnale, essa è unica. Esiste cioè una corrispondenza biunivoca tra ciascun segnale e la sua trasformata di Fourier (se esiste).

E' subito chiaro che le condizioni di esistenza della trasformata di Fourier sono quelle necessarie per la convergenza dei due integrali forniti nelle definizioni date prima. Più nel dettaglio, *condizione sufficiente (anche se non necessaria) affinché una funzione  $s(t)$  sia trasformabile secondo Fourier è che  $s(t)$  sia assolutamente integrabile*, ossia che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

Dire che  $s(t)$  è assolutamente integrabile equivale anche a dire che esso sia *ad energia finita*, dove ricordiamo che l'energia di  $s(t)$  è data da

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

Quindi, il fatto che un segnale sia ad energia finita è condizione sufficiente perché esista la sua trasformata di Fourier. Ovviamente, il fatto che si tratti di una condizione sufficiente e non necessaria significa che, nel caso il segnale non sia ad energia finita, è comunque possibile che ammetta la trasformata. Questo accade per i segnali periodici, che sono notoriamente segnali ad energia nulla (e potenza finita).

## PROPRIETÀ GENERALI

Applicando le *formule di Eulero* alla definizione di trasformata di Fourier di  $s(t)$ , otteniamo che

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt}_{\text{Re}(S(f))} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt}_{\text{Im}(S(f))} \quad (*)$$

Abbiamo cioè suddiviso la trasformata di  $s(t)$  come somma di una parte reale e di una parte complessa. Il termine  $\text{Im}(S(f))$  risulta evidentemente nullo quando la funzione integranda è dispari (in quanto l'intervallo di integrazione è simmetrico): dato che la funzione Seno è già dispari, perché il suo prodotto con  $s(t)$  sia dispari, è necessario che  $s(t)$  sia reale e pari. Possiamo dunque

concludere affermando che la trasformata di Fourier di un segnale  $s(t)$  REALE e PARI è una funzione reale:

$$s(t) \text{ reale e pari} \longrightarrow S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Al contrario, la trasformata di Fourier di un segnale  $s(t)$  che non sia REALE e PARI è certamente una funzione complessa.

Con ragionamenti analoghi, è evidente che la trasformata di Fourier di un segnale  $s(t)$  REALE e DISPARI è puramente immaginaria e precisamente vale

$$s(t) \text{ reale e dispari} \longrightarrow S(f) = j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

Infatti, in queste ipotesi, si annulla il primo integrale della relazione (\*), visto che risulta dispari la sua funzione integranda.

Ancora in base alla relazione (\*) e in base al fatto che la funzione Coseno è pari, mentre la funzione Seno è dispari, si nota subito che, se  $s(t)$  è reale, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[S(f)] &= \operatorname{Re}[S(-f)] \\ \operatorname{Im}[S(f)] &= -\operatorname{Im}[S(-f)] \end{aligned}$$

Queste relazioni dicono in pratica che la parte reale della trasformata di Fourier di un segnale reale è una funzione pari, mentre il coefficiente della parte immaginaria è una funzione dispari (ovviamente rispetto alla variabile  $f$ ).

Queste due proprietà possono essere sintetizzate scrivendo che

$$S(-f) = S^*(f)$$

dove il simbolo \* indica ovviamente il complesso coniugato.

Ancora, questa stessa proprietà si può esprimere in termini di modulo e fase della trasformata di Fourier: è infatti evidente che

$$\begin{aligned} |S(f)| &= |S(-f)| \\ \angle S(f) &= -\angle S(-f) \end{aligned}$$

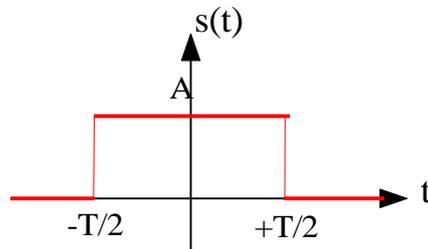
I segnali con cui abbiamo a che fare nella pratica sono, ovviamente, tutti segnali reali, per cui le proprietà appena elencate sono di notevole importanza. Tuttavia, la considerazione di funzioni del tempo  $s(t)$  che siano complesse consente, in certi casi (come quello delle onde modulate), una più comoda rappresentazione dei segnali.

## TRASFORMATE DI ALCUNI SEGNALE NOTEVOLI

Consideriamo il segnale

$$s(t) = \text{Arect} \frac{t}{T}$$

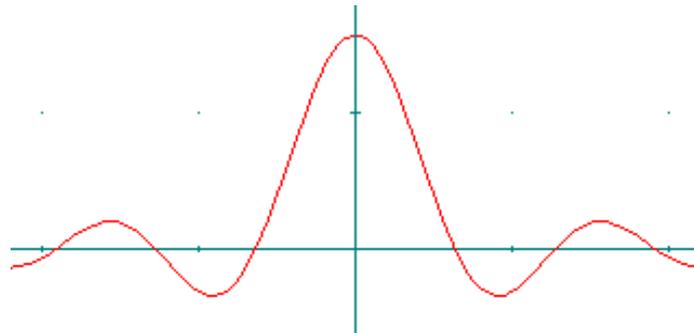
il cui andamento è quello rappresentato in figura:



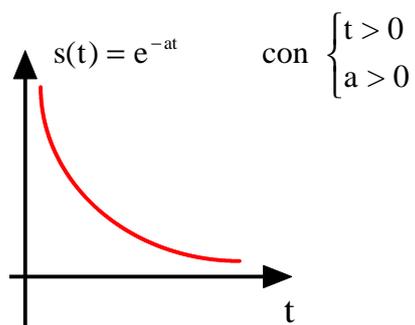
Si tratta di un segnale ad energia finita (che vale  $A^2T$ ), per cui possiamo calcolarne la trasformata di Fourier. Applicando semplicemente la definizione, si trova

$$S(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

L'andamento qualitativo di questa funzione è il seguente:



Adesso consideriamo il segnale esponenziale:



Nonostante il segnale sia di durata infinita, esso risulta essere ad energia finita (la quale vale  $1/2a$ ). La trasformata di Fourier risulta essere

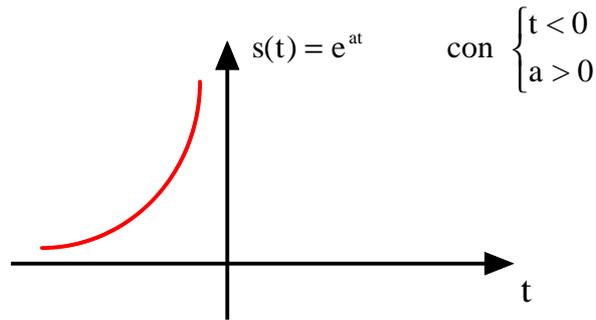
$$S(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Possiamo razionalizzare, in modo da separare la parte reale da quella immaginaria:

$$S(f) = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Si tratta quindi di una funzione complessa, in accordo al fatto per cui  $s(t)$  è una funzione reale ma NON è pari.

Consideriamo adesso un altro tipo di segnale esponenziale e precisamente quello della figura seguente:



Anche in questo caso, ovviamente, il segnale risulta ad energia finita (pari sempre a  $1/2a$ ): è facile verificare che la sua trasformata è

$$S(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

### PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE NEL TEMPO

Sia  $x(t)$  un segnale di cui si conosca la trasformata di Fourier  $X(f)$ . Consideriamo il segnale  $z(t)$  che si ottiene traslando  $x(t)$  di una quantità  $\alpha$ : quindi  $z(t) = x(t - \alpha)$ . Si dimostra che anche  $z(t)$  ammette trasformata di Fourier e, in particolare, che essa vale

$$Z(f) = X(f)e^{-j2\pi f\alpha}$$

### PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE IN FREQUENZA

Sia  $x(t)$  un segnale del quale supponiamo di conoscere la trasformata di Fourier  $X(f)$ . Considerando il segnale  $z(t) = x(t)e^{j2\pi\alpha t}$ , esso ha come trasformata di Fourier la funzione

$$Z(f) = X(f - \alpha)$$

Questa proprietà dice dunque che una traslazione di  $\alpha$  nel dominio della frequenza equivale ad una moltiplicazione per il termine esponenziale  $e^{j2\pi\alpha t}$  nel dominio del tempo.

## PROPRIETÀ DI MODULAZIONE

Sia  $s(t)$  un segnale con spettro  $S(f)$ . Consideriamo il nuovo segnale  $z(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t)$ . Vogliamo determinare il suo spettro.

Per prima cosa, possiamo applicare le formule di Eulero per modificare l'espressione del segnale  $z(t)$ : possiamo infatti scrivere che

$$z(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t) = s(t) \left[ \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right] = \frac{s(t)}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{s(t)}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Così facendo abbiamo ottenuto che il segnale  $z(t)$  è la somma di due segnali, per cui, posto

$$x(t) = \frac{s(t)}{2} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = \frac{s(t)}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

possiamo intanto applicare la proprietà di linearità e scrivere che

$$Z(f) = X(f) + Y(f)$$

Ora, sia  $x(t)$  e sia  $y(t)$  consistono nel prodotto di una costante,  $1/2$ , per il segnale  $s(t)$  per un termine esponenziale: applicando allora la proprietà di traslazione in frequenza, abbiamo che

$$Z(f) = X(f) + Y(f) = \frac{1}{2} S(f - f_0) + \frac{1}{2} S(f + f_0)$$

Lo spettro di  $Z(f)$  consta di due repliche traslate (in  $f_0$  e  $-f_0$ ) e attenuate (di 2) dello spettro di  $s(t)$ .

## PROPRIETÀ ENERGETICA

Sia  $s(t)$  un segnale che ammette trasformata di Fourier e sia  $S(f)$  tale trasformata: si dimostra che l'energia assegnata a questi due segnali è la stessa, ossia che

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

## PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE NEL TEMPO

Consideriamo un segnale  $s(t)$  che ammetta trasformata di Fourier e sia  $S(f)$  tale trasformata. Consideriamo anche il segnale che si ottiene derivando  $s(t)$  rispetto al tempo, ossia  $z(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ . Si dimostra che anche questo segnale ammette trasformata di Fourier, che vale

$$Z(f) = (j2\pi f)S(f)$$

Si può anche generalizzare il risultato a derivate di ordine qualsiasi della funzione  $s(t)$ :

$$\text{Fourier}[s^{(n)}(t)] = (j2\pi f)^n \text{Fourier}[s(t)]$$

### PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE IN FREQUENZA

Consideriamo sempre il nostro segnale  $s(t)$  e la sua trasformata di Fourier  $S(f)$ . Considerata inoltre la funzione che si ottiene da  $S(f)$  derivando rispetto a  $f$ , ossia la funzione  $Z(f) = \frac{dS(f)}{df}$ , essa è la trasformata del segnale

$$z(t) = (-j2\pi t)s(t)$$

Generalizzando anche in questo caso, si dimostra che la trasformata del segnale  $z(t) = (-j2\pi t)^n s(t)$  è la funzione

$$Z(f) = \frac{d^n S(f)}{df^n}$$

### PROPRIETÀ DI INTEGRAZIONE NEL TEMPO

Consideriamo un generico segnale  $s(t)$  che ammetta trasformata di Fourier e indichiamo con  $S(f)$  tale trasformata. Consideriamo anche il segnale

$$z(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$

Si dimostra che, nell'ipotesi che sia  $S(0)=0$ , anche  $z(t)$  ammette trasformata di Fourier e questa ha espressione

$$Z(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f}$$

Facciamo notare come l'ipotesi per cui deve essere  $S(0)=0$  equivale a dire che

$$S(f=0) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi(f=0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

ossia che il segnale  $s(t)$  deve sottendere un'area nulla.

Nel caso in cui  $S(0) \neq 0$ , si trova invece quanto segue:

$$\boxed{Z(f) = \frac{S(f)}{2j\pi f} + \frac{1}{2} S(0)}$$

Appare subito ovvio che, se  $S(0)=0$ , si ottiene quanto ricavato in precedenza.

## PROPRIETÀ: SEGNALE CONIUGATO

Siano dati sempre il segnale  $s(t)$  e la sua trasformata di Fourier  $S(f)$ . Consideriamo il nuovo segnale  $z(t) = s^*(t)$ . Si dimostra che anche  $z(t)$  ammette trasformata di Fourier e questa vale

$$Z(f) = S^*(-f)$$

## PROPRIETÀ DI DUALITÀ

Consideriamo il solito segnale  $s(t)$  e il suo spettro  $S(f)$ . E' ovvio che  $S(f)$  è una normale funzione nella variabile  $f$ : se noi allora cambiamo il nome di questa variabile da  $f$  a  $t$ , otteniamo una nuova funzione  $z(t) = S(t)$  che ha la stessa struttura di  $S(f)$  ma è funzione del tempo.

Si dimostra che anche  $z(t)$  ammette trasformata di Fourier e, in particolare, che tale trasformata ha espressione

$$Z(f) = s(-f)$$

ossia si tratta di una funzione che ha la stessa struttura del segnale  $s(t)$  ma dipende dalla frequenza anziché dal tempo.

## TRASFORMATA DI FOURIER DELL'IMPULSO DI DIRAC

Dato l'**impulso di Dirac**  $\delta(t)$ , il suo spettro, applicando la normale definizione, è

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

In base alla nota *proprietà di setaccio*<sup>1</sup> di  $\delta(t)$ , quell'integrale è pari al termine esponenziale calcolato nel punto di applicazione dell'impulso, ossia  $t=0$ : quindi

$$\delta(f) = \left[ e^{-j2\pi ft} \right]_{t=0} = 1$$

Quindi *la trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac vale 1*.

E' chiaro che, se l'impulso è  $A\delta(t)$ , la sua trasformata vale  $A$ : questa proprietà dice dunque che ad un impulso nel dominio del tempo corrisponde una costante nel dominio della frequenza. Per la proprietà di dualità prima dimostrata, vale anche il viceversa.

<sup>1</sup> La **proprietà di setaccio** dell'impulso di Dirac afferma quanto segue: l'integrale definito, tra  $-\infty$  e  $+\infty$ , di una funzione qualsiasi  $s(t)$  moltiplicata per l'impulso di Dirac  $\delta(t-t_0)$  applicato nell'istante  $t_0$  è pari semplicemente alla funzione  $s(t)$  calcolata nell'istante  $t_0$  di applicazione dell'impulso.

### Applicazione: trasformata di Fourier della funzione Coseno

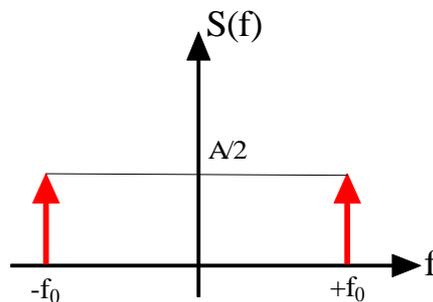
Consideriamo il segnale

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

Si tratta di un segnale di potenza (e quindi ad energia infinita) come tutti i segnali periodici. E' possibile sfruttare le proprietà dell'impulso di Dirac per calcolare lo spettro di  $s(t)$  senza ricorrere alla *formula generale per il calcolo della trasformata di Fourier di segnali periodici* (di cui si parlerà più avanti): si trova che

$$S(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

Questa funzione è REALE, in accordo al fatto che il segnale  $s(t)$  è reale e pari. Da un punto di vista grafico la funzione  $S(f)$  è la seguente:



Proprio il fatto per cui lo spettro del segnale Coseno sia rappresentato da due impulsi conferisce alla variabile  $f$  il significato di frequenza e, conseguentemente, alla trasformata di Fourier il significato di rappresentazione della funzione  $s(t)$  mediante somma di infinite componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima.

### Applicazione: trasformata di Fourier della funzione Seno

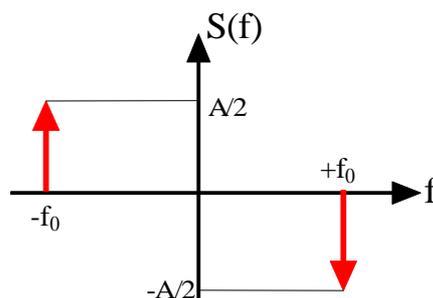
In modo analogo a prima, possiamo calcolare la trasformata del segnale  $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ .

Si trova che

$$S(f) = \frac{A}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} \delta(f + f_0)$$

In questo caso, la funzione che si ottiene è puramente immaginaria, in accordo al fatto che  $s(t)$  è questa volta reale e dispari.

Graficamente, abbiamo qualcosa di diverso da prima:



## TRASFORMATA DI FOURIER DI SEGNALI PERIODICI

Quando abbiamo introdotto il concetto di trasformata di Fourier, abbiamo detto che, dato un segnale  $s(t)$ , condizione sufficiente perché esso possa ammettere trasformata è che sia ad energia finita. Evidentemente, non sono ad energia finita i segnali periodici e questo è il motivo per cui, fino ad ora, ci siamo occupati solo di segnali a-periodici. Tuttavia, sempre in quella sede, abbiamo sottolineato come la condizione di avere energia finita sia sufficiente ma comunque non necessaria perché un segnale possa ammettere trasformata di Fourier. Ecco allora che è possibile avere anche dei segnali ad energia infinita (cioè segnali di potenza) che ammettono trasformata di Fourier: questo è, per esempio, quello che accade per i segnali  $\text{Sen}(t)$  e  $\text{Cos}(t)$ , le cui trasformate sono state calcolate in precedenza sfruttando le proprietà dell'impulso di Dirac.

I segnali Seno e Coseno sono due tipici segnali periodici. Sia dato perciò un segnale  $g(t)$  periodico, tale cioè che  $g(t) = g(t + nT)$ , dove  $n$  è un numero intero, mentre  $T$  è una quantità reale positiva. Esprimendo tale segnale mediante lo sviluppo in serie di Fourier, si trova che

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove ricordiamo che  $f_n = n/T$  e che i coefficienti dello sviluppo hanno espressione generale

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Considerando la restrizione  $g_R(t)$  del segnale  $g(t)$  all'intervallo  $[-T/2, T/2]$ , si dimostra che i coefficienti dello sviluppo in serie sono

$$c_n = \frac{1}{T} G_R\left(\frac{n}{T}\right)$$

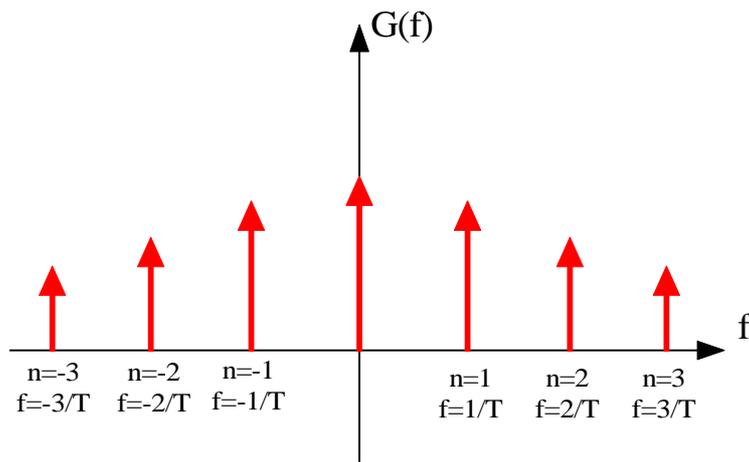
e quindi che lo sviluppo in serie di Fourier di  $s(t)$  è

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} G_R\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi f_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_R\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi f_n t}$$

A questo punto, si può calcolare  $G(f)$  come trasformata del secondo membro di quest'ultima relazione: il risultato cui si perviene è

$$G(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_R\left(\frac{n}{T}\right) \delta(f - f_n)$$

*La trasformata di Fourier di un segnale periodico è una successione di impulsi posizionati su frequenze multiple della frequenza fondamentale  $n/T$ :*

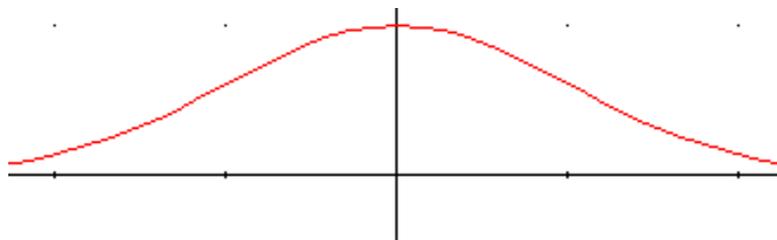


## TRASFORMATA DI FOURIER DELL'IMPULSO GAUSSIANO

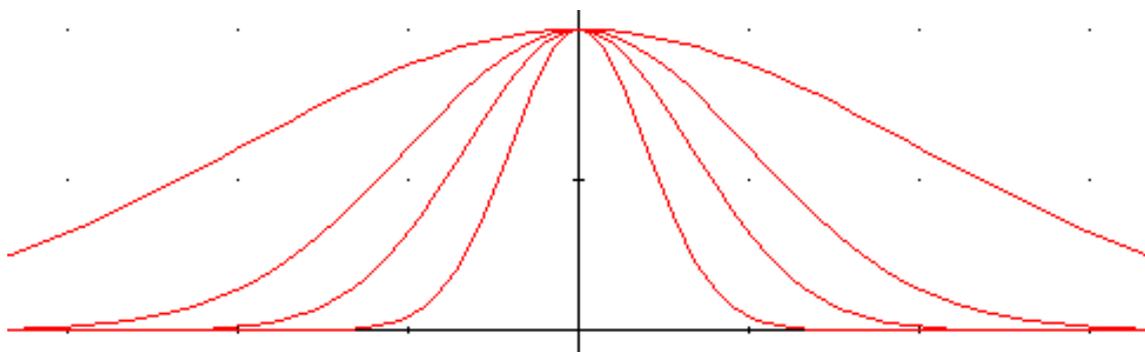
Si definisce **impulso gaussiano** il seguente segnale:

$$s(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}$$

L'andamento di questo segnale è il seguente:



Quando maggiore è  $\sigma_t$ , tanto più la campana si assottiglia attorno al suo valore medio:



La trasformata di Fourier di questo segnale risulta essere la seguente:

$$S(f) = Ae^{-\frac{(2\pi\sigma_t f)^2}{2}}$$

A ben guardare, anche  $S(f)$ , graficamente, è una campana: infatti, se noi poniamo  $2\pi\sigma_t = \frac{1}{\sigma_f}$ , otteniamo una espressione del tipo

$$S(f) = Ae^{-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}}$$

e questa è la stessa espressione di  $s(t)$ . Naturalmente, dato che  $\sigma_f$  è il reciproco, a meno del termine  $2\pi$ , di  $\sigma_t$ , è chiaro che quanto più schiacciata è la campana di  $s(t)$ , tanto più appiattita sarà quella di  $S(f)$  e viceversa. Ad ogni modo, ad una campana nel dominio del tempo corrisponde una campana anche nel dominio della frequenza.

## TEOREMA DI PARSEVAL

Consideriamo un segnale  $u(t)$  dato dal prodotto di due segnali  $s(t)$  e  $g(t)$ :

$$u(t) = s(t) \cdot g(t)$$

Applicando la proprietà di convoluzione nel tempo, si può verificare che lo spettro di questo segnale  $u(t)$  è la convoluzione in frequenza degli spettri di  $s(t)$  e  $g(t)$ :

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f - \alpha)G(\alpha)d\alpha$$

Ricordando adesso la proprietà generale della trasformata di Fourier in base alla quale  $S(-f) = S^*(f)$ , si può anche scrivere che

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\alpha - f)G(\alpha)d\alpha$$

Se calcoliamo  $U(f)$  in  $f=0$ , otteniamo

$$U(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\alpha)G(\alpha)d\alpha$$

Possiamo anche fare il cambio di variabile  $f=\alpha$ :

$$U(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f)G(f)df$$

D'altra parte, applicando la definizione di trasformata di Fourier del segnale  $u(t)$ , abbiamo che

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt \xrightarrow{\text{per } f=0} U(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t)dt$$

Uguagliando allora le due espressioni ottenute per  $U(0)$ , abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\alpha)G(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t)dt$$

Questa è la formulazione più generale del **teorema di Parseval**. Esso assume però un significato di particolare importanza fisica quando  $g(t)=s(t)$ : in questo caso, infatti, dall'uguaglianza si ricava che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt$$

Entrambi i membri di questa uguaglianza rappresentano l'energia del segnale  $s(t)$ . La quantità  $|S(f)|^2$  è la **densità spettrale di energia** di  $s(t)$ .

## SPETTRI BILATERI E SPETTRI UNILATERI

L'estensione dello spettro di un segnale a frequenze negative non aggiunge alcuna informazione alla conoscenza del segnale stesso. Il perché è nella nota proprietà della trasformata di Fourier in base alla quale  $S(-f)=S^*(f)$ : questa proprietà dice, in pratica, che, noto lo spettro per frequenze positive, quello per frequenze negative si ottiene semplicemente come suo complesso coniugato.

Il motivo per cui si usa l'estensione a frequenze negative è che sommando degli esponenziali con esponente immaginario si ottiene un risultato reale (formule di Eulero):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Se, invece di ricorrere alla somma degli esponenziali, si ricorre alla somma di coseni e seni, lo spettro viene definito soltanto per frequenze positive, incluso lo zero. Infatti, considerando che, in base alle formule di Eulero, risulta  $e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)$ , possiamo scrivere che

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Inoltre, se tiriamo fuori dalle due sommatorie il termine che si ottiene per  $n=0$  otteniamo

$$x(t) = [x_0 \cos(2\pi f_0 t) + x_0 \sin(2\pi f_0 t)] + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Ma, ricordando che  $f_n = n/T$ , è evidente che  $f_0 = 0$ , per cui

$$x(t) = x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Questa è un'altra espressione, detta **trigonometrica**, dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico.

Da questa espressione si arriva ad un'altra che conferma le considerazioni fatte prima: se infatti poniamo

$$c_n = \frac{2}{T} \left| S\left(\frac{n}{T}\right) \right| \quad \text{e} \quad \varphi_n = \text{ph} \left[ S\left(\frac{n}{T}\right) \right]$$

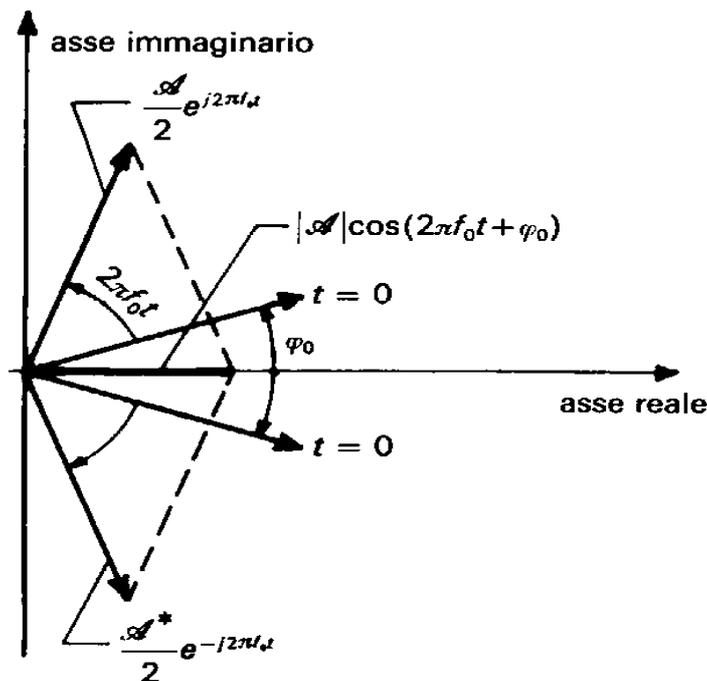
si dimostra che lo sviluppo può essere espresso come

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

Come detto prima, abbiamo una somma di componenti sinusoidali a tutte e sole le frequenze positive, inclusa quella nulla (la *continua*).

*L'uso delle funzioni esponenziali (e quindi delle frequenze negative) è più comodo nei calcoli, che risultano più semplici, ma ha l'inconveniente citato di richiedere, per ogni effettiva frequenza (cioè per ogni effettiva oscillazione sinusoidale), due punti sull'asse delle frequenze, simmetricamente allocati rispetto all'origine.*

L'uso delle funzioni esponenziali conduce anche ad una semplice rappresentazione grafica delle grandezze sinusoidali:

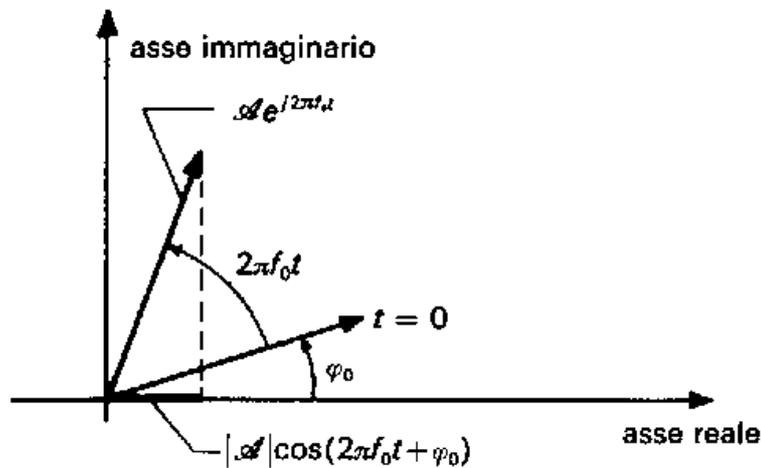


In un piano complesso, in cui l'asse orizzontale è l'asse dei segnali reali, una funzione sinusoidale del tipo

$$s(t) = |A| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A^*}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

viene rappresentata da due vettori simbolici ruotanti. All'istante  $t=0$ , i due vettori rappresentano, semplicemente,  $A/2$  e  $A^*/2$  rispettivamente; per gli istanti  $t>0$ , i due vettori rappresentano invece  $\frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t}$  e  $\frac{A^*}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$ . Il vettore risultante è reale ed ha appunto il valore  $|A| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ .

L'inconveniente di dover usare gli esponenziali, e quindi due vettori, si supera, nella normale pratica, usando un solo vettore, precisamente  $Ae^{j2\pi f_0 t}$ , con la convenzione che il segnale da esso rappresentato sia la proiezione del vettore medesimo sull'asse reale, ossia appunto il suo valore reale:



Questa operazione equivale, in pratica, a scrivere che

$$s(t) = |A| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \text{Re} [Ae^{j2\pi f_0 t}]$$

Questa rappresentazione è, per la sua comodità, quella generalmente più diffusa.

A questo punto, ci possiamo chiedere se la rappresentazione delle grandezze sinusoidali nella forma  $\text{Re} [Ae^{j2\pi f_0 t}]$  sia estendibile anche alla serie di Fourier ed alla trasformata di Fourier di un segnale arbitrario (periodico nel caso della serie di Fourier). La risposta è ovviamente positiva: in particolare, con riferimento alla antitrasformata di Fourier di uno spettro  $S(f)$ , possiamo scrivere che

$$s(t) = \text{Re} \left[ 2 \int_{0^+}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \right]$$

Notiamo subito che l'estremo inferiore di integrazione è  $0^+$ : questo è dovuto alle cautele con cui si deve trattare la componente continua ( $f=0$ ), che è infatti l'unica frequenza che non ha, in  $S(f)$ , due componenti simmetriche rispettivamente a destra ed a sinistra dell'origine.

Se, per ovviare all'inconveniente, si ipotizza che anche a frequenza 0 si abbiano due componenti (rispettivamente a frequenze  $0^+$  e  $0^-$ ), allora si può anche prendere direttamente 0 come estremo di integrazione:

$$s(t) = \text{Re} \left[ 2 \int_0^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \right]$$

A questo punto, possiamo definire uno **spettro monolatero** del segnale  $s(t)$ , intendendolo come il doppio dello spettro bilatero. Per questioni di comodità, indichiamo con  $\check{S}(f)$  lo spettro bilatero considerato fino ad ora e con  $S(f)$  quello monolatero appena introdotto: risulterà dunque

$$S(f) = 2\check{S}(f) \quad f \in [0^+, +\infty[$$

Facendo questa convenzione di simbologia, la formula circa l'antitrasformata di Fourier diventa la seguente:

$$s(t) = \text{Re} \left[ \int_0^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right]$$

In conclusione, l'uso degli spettri bilateri  $\check{S}(f)$  è comodo ai fini dei calcoli e consente di procedere con sicurezza, in particolare quando ci si riferisce ad operazione non lineari come ad esempio il prodotto. Al contrario, lo spettro unilatero  $S(f)$  ha il vantaggio di una notevole semplificazione grafica e di una maggiore evidenza fisica, dato che mostra direttamente quello che accade alle effettive frequenze fisiche. In virtù di questi fatti, nei nostri discorsi useremo principalmente gli spettri e le densità spettrali monolatero nelle formule e nelle figure, mentre invece faremo i calcoli generalmente con spettri e densità bilatero.

## RELAZIONE TRA BANDA E DURATA DI UN SEGNALE

Scopo di questo paragrafo è definire la durata di un segnale reale continuo ad energia finita e la larghezza di banda del suo spettro, nonché quello di trovare una legame tra queste grandezze.

Diciamo subito che queste definizioni sono largamente arbitrarie, per cui considereremo una **durata efficace** ed una **banda efficace**, precisando che analoghe conclusioni si ottengono qualsiasi definizione di scelta, purché consistente.

Consideriamo un generico segnale  $s(t)$  continuo; la sua potenza istantanea è per definizione  $s^2(t)$ , mentre invece la sua energia totale è

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s^2(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt$$

dove l'operatore *modulo* è stato eliminato visto che il segnale è reale.

Consideriamo allora la **potenza istantanea** normalizzata rispetto all'energia totale:

$$G_E(t) = \frac{s^2(t)}{E_s} = \frac{s^2(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt}$$

Questa funzione  $G_E(t)$  ha alcune importanti proprietà: si tratta di una funzione reale non negativa e, soprattutto, sottende area unitaria, essendo tale area data da

$$\text{Area}_p = \int_{-\infty}^{+\infty} G_E(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^2(t)}{E_s} dt = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{E_s} E_s = 1$$

$G_E(t)$  rappresenta allora la cosiddetta **densità temporale di energia**: per ogni prefissato istante  $t$ , la frazione di energia contenuta nell'intervallo  $[t, t+dt]$  vale

$$E_{t, t+dt} = G_E(t)dt = \frac{s^2(t)}{E_s} dt = \frac{s^2(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt} dt$$

Si definisce **ascissa baricentrica** della densità temporale di energia l'istante  $t_0$  che si ricava dalla seguente relazione:

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ts^2(t)dt}{E_s}$$

Questa ascissa baricentrica serve a definire la cosiddetta **durata efficace** del segnale: si tratta della quantità  $D_{\text{eff}}$  tale che

$$D_{\text{eff}}^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^2 s^2(t)dt}{E_s}$$

Cerchiamo adesso di capire, mediante qualche esempio concreto, a cosa corrispondono le definizioni appena riportate.

Partiamo dal caso semplice di un segnale rettangolare di durata da 0 a  $T$  e altezza  $A$  (la cui energia è notoriamente  $A^2T$ ): l'ascissa baricentrica di tale segnale è

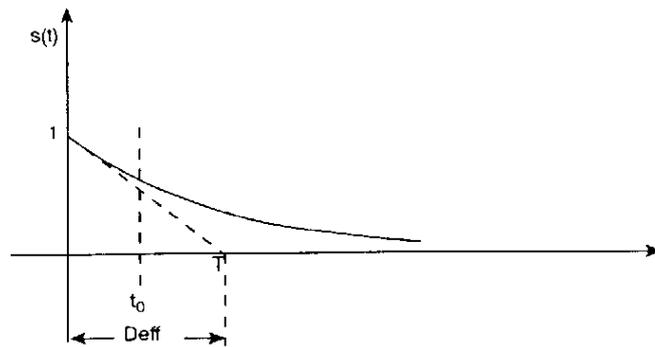
$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ts^2(t)dt}{E_s} = \frac{\int_0^T tA^2 dt}{E_s} = \frac{A^2 \int_0^T t dt}{E_s} = \frac{A^2 \frac{T^2}{2}}{E_s} = \frac{A^2 \frac{T^2}{2}}{A^2 T} = \frac{T}{2}$$

mentre il quadrato della durata efficace è

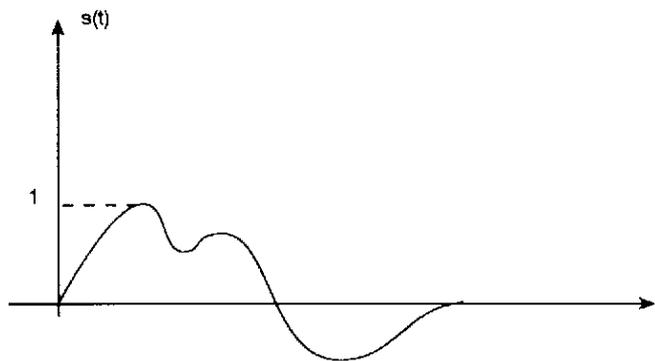
$$D_{\text{eff}}^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^2 s^2(t)dt}{E_s} = \frac{4 \int_0^T (t-t_0)^2 A^2 dt}{E_s} = \frac{4A^2 \int_0^T (t-t_0)^2 dt}{E_s} = \frac{4A^2 (T-t_0)^3}{3E_s} = \frac{T^2}{6}$$

da cui concludiamo che  $D_{\text{eff}} = \frac{T}{\sqrt{3}}$ .

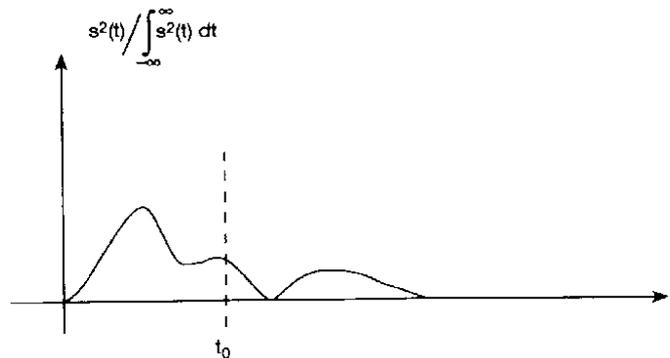
In modo del tutto analogo, se considerassimo (figura seguente) un segnale esponenziale  $s(t) = e^{-t/T}$  (ovviamente per  $t > 0$ ), troveremmo una ascissa baricentrica  $T/2$  e una durata efficace  $D_{\text{eff}} = T$ :



Consideriamo infine un segnale  $s(t)$  avente la forma d'onda riportata nella figura seguente:



La corrispondente densità temporale di energia risulta avere l'andamento riportato nella figura seguente, dove viene anche riportata l'ascissa baricentrica:



Consideriamo a questo punto un segnale  $s(t)$  che sia passa-basso, ossia con componenti spettrale nulli a partire da una certa frequenza in poi. Così come abbiamo definito prima la *durata efficace*, vogliamo qui definire una *banda efficace*. Consideriamo allora lo spettro  $S(f)$  del segnale e in particolare la sua energia, che notoriamente vale

$$E_{S(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |S^2(f)| df$$

Successivamente, consideriamo adesso la funzione  $|S^2(f)|$  normalizzata all'energia di  $S(f)$ :

$$G_E(f) = \frac{|S^2(f)|}{E_{S(f)}} = \frac{|S^2(f)|}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S^2(f)| df}$$

Questa funzione  $G_E(f)$ , analogamente alla funzione  $G_E(t)$  definita nel dominio del tempo, è reale, non negativa e sottende area unitaria. Essa rappresenta allora la **densità temporale di energia**: per ogni prefissata frequenza  $f$ , la frazione di energia contenuta nell'intervallo  $[f, f+df]$  vale

$$E_{f, f+df} = G_E(f)df = \frac{|S^2(f)|}{E_{S(f)}} df = \frac{|S^2(f)|}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S^2(f)| df} df$$

Si definisce allora **banda efficace** (o anche larghezza efficace dello spettro) di un segnale  $s(t)$  la grandezza  $B_{\text{eff}}$  tale che

$$B_{\text{eff}}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S^2(f)| df}{E_S} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S^2(f)| df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S^2(f)| df}$$

Non è detto che la banda efficace esista: dipende dalla convergenza o meno dell'integrale a numeratore.

A questo punto, si dimostra che per un segnale ad energia finita, con segnale derivato a sua volta ad energia finita, sussiste la seguente relazione:

$$\boxed{B_{\text{eff}} D_{\text{eff}} \geq \frac{1}{2\pi}}$$

Questa relazione, nota come **principio di indeterminazione**, stabilisce la proporzionalità inversa tra durata e banda di un segnale: non è possibile ridurre arbitrariamente la durata di un segnale senza aumentare della stessa quantità la sua banda e viceversa.

In altre parole, segnali di breve durata hanno uno spettro ampio e segnali di lunga durata hanno invece spettro ristretto.

E' bene precisare che il principio di indeterminazione si ottiene anche adottando definizioni di durata e banda diverse da quelle introdotte<sup>2</sup>, per cui ha validità assolutamente generale.

Consideriamo a questo punto un segnale  $s(t)$  ad energia finita che sia rigorosamente limitato nel tempo (il fatto che sia limitato nel tempo consente di assumere come durata efficace quella effettiva, che indichiamo con  $T$ ). Possiamo facilmente mostrare che esso non può avere banda rigorosamente limitata: infatti,  $s(t)$  può essere sicuramente espresso come prodotto tra un rettangolo  $H(t-T/2)$  ed segnale  $s_a(t)$  che nell'intervallo  $[0, T]$  coincide con  $s(t)$ , mentre è del tutto arbitrario al di fuori di tale intervallo; se calcoliamo lo spettro di tale segnale, sarà la convoluzione tra lo spettro di  $s_a(t)$  e lo

<sup>2</sup> Queste definizioni sono numerose e dipendono dal particolare problema trattato, per cui non le prendiamo in esame.

spettro del rettangolo: allora, a prescindere da come sia fatto lo spettro di  $s_a(t)$ , sappiamo bene che lo spettro del rettangolo è illimitato in frequenza, per cui lo stesso vale per  $S(f)$  <sup>(3)</sup>.

In conclusione, *un segnale a durata rigorosamente limitata non può avere banda rigorosamente limitata* e, per il teorema di dualità, vale anche il viceversa, ossia che *un segnale a banda rigorosamente limitata non può avere durata rigorosamente limitata*.

D'altra parte, abbiamo in precedenza osservato che lo spettro di un segnale ad energia finita è praticamente nullo al di fuori di un opportuno intervallo di frequenze, nel senso che il contributo di energia dato dalle componenti esterne a detto intervallo è del tutto trascurabile. Di conseguenza, non è inappropriato, dal punto di vista applicativo, parlare di un segnale limitato sia nel tempo sia in banda.

La relazione  $B_{\text{eff}} D_{\text{eff}} \geq \frac{1}{2\pi}$  fornisce d'altra parte solo un limite inferiore al prodotto durata\*banda.

Come ultima osservazione, ricordiamo che la definizione di banda efficace presenta una sostanziale differenza nel caso in cui il segnale considerato, anziché essere passa-basso come considerato prima, è passa-banda, per cui è esteso in un intervallo di frequenza  $[f_1, f_2]$  dove  $f_1 \neq 0$ . In questo caso, si definisce prima la cosiddetta frequenza media  $f_0$ , che vale

$$f_0 = \frac{\int_0^{+\infty} f |S^2(f)| df}{\int_0^{+\infty} |S^2(f)| df}$$

e successivamente si definisce la banda efficace  $B_{\text{eff}}$  in modo tale che

$$B_{\text{eff}}^2 = \frac{\int_0^{+\infty} (f - f_0)^2 |S^2(f)| df}{\int_0^{+\infty} |S^2(f)| df}$$

Per segnali che siano a potenza finita anziché ad energia finita, la banda efficace può essere definita in modo analogo a quello visto per i segnali ad energia finita: basta fare riferimento alla densità spettrale di potenza anziché alla densità spettrale di energia.

---

<sup>3</sup> La convoluzione tra segnali ad energia finita dà un segnale a durata non limitata quando anche uno solo dei segnali ha durata non limitata

## Funzione di autocorrelazione

### FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER SEGNALI DI ENERGIA

Consideriamo un segnale tempo-continuo  $x(t)$  e il suo spettro  $X(f)$  (nell'ipotesi, ovviamente, che la ammetta). Sappiamo che, per definizione, l'energia associata a questo segnale è

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

pari, tra l'altro, all'energia associata a  $X(f)$ .

La quantità  $|X(f)|^2$  prende il nome di **spettro di energia** del segnale  $x(t)$  (mentre ricordiamo che  $X(f)$  è lo spettro di frequenza di  $x(t)$ ). Vogliamo trovare la rappresentazione nel dominio del tempo di questo spettro di energia, ossia, in definitiva, l'antitrasformata di Fourier della funzione  $|X(f)|^2$ .

Intanto, possiamo scrivere che

$$|X(f)|^2 = X(f)(X(f))^*$$

Antitrasformando, abbiamo

$$\text{Fourier}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] = \text{Fourier}^{-1}\left[X(f)(X(f))^*\right] = \text{Fourier}^{-1}[X(f)] * \text{Fourier}^{-1}\left[(X(f))^*\right]$$

L'antitrasformata del complesso coniugato di  $X(f)$  è  $x(-t)$ , per cui

$$\text{Fourier}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] = x(t) * (x(-t))^*$$

Chiamando con  $R_x(\tau)$  l'antitrasformata dello spettro di energia e applicando la semplice definizione di *prodotto di convoluzione* tra due segnali, abbiamo dunque trovato che

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t+\tau))^* dt$$

La funzione  $R_x(\tau)$  prende il nome di **funzione di autocorrelazione** del segnale  $x(t)$  considerato.

### PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

La funzione di autocorrelazione di un segnale  $x(t)$  gode di alcune importanti proprietà. La prima proprietà è che  $R_x(0)$  rappresenta l'energia del segnale  $x(t)$ , ossia

$$E_x = R_x(\tau = 0)$$

Un'altra proprietà si verifica quando il segnale  $x(t)$  è reale: *per  $x(t)$  reale,  $R_X(t)$  è una funzione pari*, ossia, in formule, si ha che

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t+\tau))^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(\tau-t))^* dt$$

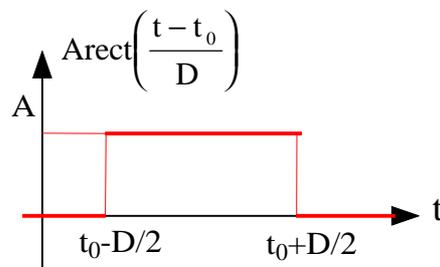
L'ultima proprietà, sempre per  $x(t)$  reale, è la seguente:

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$

Essa dice che il valore massimo di questa funzione si ha per  $t=0$ .

### ***Esempio: rettangolo traslato***

Calcoliamo la funzione di correlazione per il seguente segnale:



Si tratta di un impulso rettangolare, di durata  $D$  e ampiezza  $A$ , traslato di  $t_0$  rispetto all'origine dei tempi.

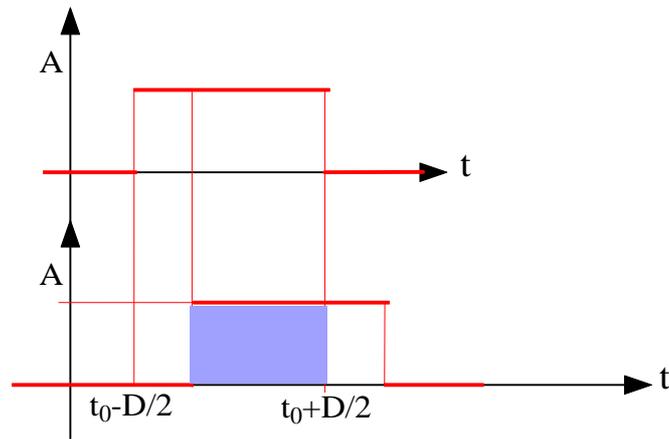
Applicando la normale definizione, abbiamo che

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t+\tau))^* dt$$

Il segnale  $x(\tau)$  considerato è reale, per cui il complesso coniugato non ha alcun effetto:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{D}\right)\text{rect}\left(\frac{\tau+(t-t_0)}{D}\right)dt$$

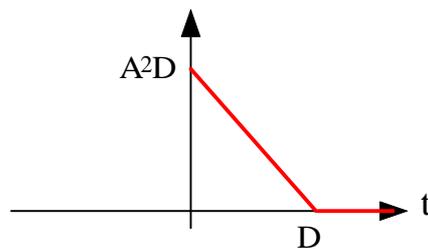
La funzione integranda è il prodotto di due rettangoli uguali (uno traslato rispetto all'altro di un tratto  $t$ ), per cui è a sua volta un rettangolo. Tuttavia, questo rettangolo dipende da come sono risposti gli altri due uno rispetto all'altro: supponendo per il momento  $t>0$ , la situazione è



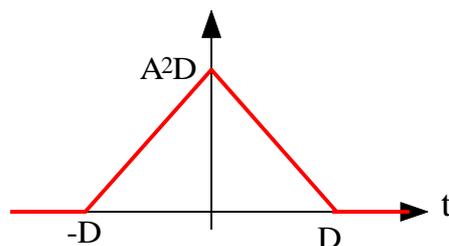
Si nota, dunque, che  $R_X(\tau)$  è nulla quando  $t_0 - \frac{D}{2} + \tau > t_0 + \frac{D}{2}$ , ossia quando  $\tau > D$ , mentre, quando  $0 < \tau < D$  si ha che

$$\underbrace{R_X(\tau)}_{0 < \tau < D} = A^2 \int_{t_0 - \frac{D}{2} + \tau}^{t_0 + \frac{D}{2}} dt = A^2 \left( t_0 + \frac{D}{2} + \tau - t_0 + \frac{D}{2} \right) = A^2(D + \tau)$$

Quindi l'andamento di  $R_X(\tau)$  per  $\tau > 0$  è il seguente:



Tuttavia, ci ricordiamo che la funzione di correlazione per segnali reali è una funzione pari, per cui possiamo subito disegnare la parte per  $\tau < 0$ :



## IMPORTANZA DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER I SISTEMI CONTINUI

Consideriamo un generico sistema tempo-continuo, caratterizzato da una risposta all'impulso  $h(t)$ : l'uscita  $y(t)$  del sistema in corrispondenza del generico ingresso  $x(t)$  si può ricavare mediante la nota relazione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Supponendo che sia  $x(t)$  sia  $y(t)$  ammettano trasformata di Fourier, possiamo riscrivere quella relazione nella forma  $Y(f) = X(f)H(f)$ , dove  $H(f)$  è la cosiddetta *risposta in frequenza* del sistema.

L'energia associata al segnale  $y(t)$  è

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

La funzione  $|H(f)|^2$  prende il nome di **funzione di trasferimento dell'energia** del sistema considerato.

Per quanto riguarda l'uscita  $y(t)$ , la sua funzione di autocorrelazione  $R_Y(t)$  è evidentemente l'antitrasformata della funzione  $|Y(f)|^2$ . Ma, essendo  $|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$ , l'antitrasformata vale

$$R_Y(\tau) = \text{Fourier}^{-1} \left[ |X(f)|^2 |H(f)|^2 \right]$$

Ricordando che l'antitrasformata di un prodotto è pari al prodotto di convoluzione delle antitrasformate, possiamo scrivere che

$$R_Y(\tau) = \text{Fourier}^{-1} \left[ |X(f)|^2 \right] * \text{Fourier}^{-1} \left[ |H(f)|^2 \right]$$

Il primo termine a secondo membro non è altro che  $R_X(\tau)$ , per cui

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \text{Fourier}^{-1} \left[ |H(f)|^2 \right]$$

Ricordando che il modulo quadro di una qualsiasi quantità è pari al prodotto tra la quantità stessa ed il suo complesso coniugato, abbiamo poi che

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \text{Fourier}^{-1} \left[ H(f)(H(f))^* \right] = R_X(\tau) * \text{Fourier}^{-1} [H(f)] * \text{Fourier}^{-1} \left[ (H(f))^* \right]$$

Ricordando infine che l'antitrasformata di Fourier del complesso coniugato di una funzione è pari all'antitrasformata della funzione stessa, calcolata però in  $-t$ , concludiamo che

$$\boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \left[ h(\tau) * (h(-\tau))^* \right]}$$

Nel caso in cui la funzione di risposta all'impulso  $h(t)$  sia reale (il che significa che il sistema è almeno idealmente realizzabile), possiamo fare un ulteriore passaggio: infatti, in questo caso, l'operatore di complesso coniugato non ha alcun effetto su  $h(t)$ , per cui

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(t) * h(-\tau)$$

## AUTOCORRELAZIONE PER SEGNALI DI POTENZA

Sia dato un segnale  $x(t)$  generico: sappiamo che questo segnale sarà un segnale di potenza (o anche segnale a potenza finita) se risulta essere un numero finito non nullo la quantità

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Sappiamo anche che un segnale di potenza è sempre un segnale ad energia nulla, per cui ci troviamo in una situazione diversa da quella esaminata in precedenza, dove invece era  $E_x$  finito non nullo e  $P_x=0$ .

Mentre per i segnali di energia del tipo  $s(t)$  abbiamo chiamato *funzione di autocorrelazione* la funzione

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(x(t+\tau))^* dt$$

ottenuta come antitrasformata di Fourier dello *spettro di energia*  $|X(f)|^2$ , qualcosa di molto simile si ha anche per i segnali di potenza: in particolare, dato  $x(t)$  segnale di potenza, si definisce **funzione di autocorrelazione temporale** la funzione

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)(x(t-\tau))^* dt$$

La trasformata di Fourier di questa funzione si indica col simbolo  $S_x(f)$  e prende il nome di **spettro di potenza** del segnale  $x(t)$ .

La principale proprietà da notare è che l'area sottesa da  $S_x(f)$  è pari esattamente alla potenza associata al segnale  $x(t)$ , ossia che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = P_x$$

## Caratteristiche sistemiche delle antenne

### GUADAGNO DI ANTENNA

Le proprietà di una **antenna** (o di una *schiera di antenne*) di concentrare la potenza irradiata in una data direzione (o, in caso di antenna ricevente, di assorbire la potenza effettivamente incidente da quella direzione) viene caratterizzata da diversi parametri: noi ci interessiamo essenzialmente al cosiddetto **guadagno di antenna**.

Per definire questo guadagno di antenna, il discorso da fare è il seguente: in primo luogo, data l'antenna in esame, la potenza da essa irradiata, per unità di superficie, in ogni direzione, è data dal *vettore di Poynting*  $\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$ . Facendo riferimento al **campo lontano**, ossia al *campo di radiazione*, il campo elettrico ed il campo magnetico sono ortogonali tra di loro e anche ortogonali alla direzione del raggio di propagazione: questo perché, a grande distanza, l'onda che si propaga è una tipica *onda piana*, caratterizzata perciò da  $E = \eta H$  e quindi anche da un modulo del vettore di Poynting dato semplicemente da

$$P = \frac{E^2}{\eta} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Considerata inoltre, una sfera di raggio  $r$ , sappiamo che l'*angolo solido* da essa sotteso è

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

(dove  $4\pi r^2$  è la superficie della sfera stessa).

Si definisce, allora, **funzione intensità di irradiazione**, in una data direzione  $(\theta, \varphi)$ , la potenza irradiata, per unità di angolo solido, in quella direzione: questa funzione si indica con  $\Phi(\theta, \varphi)$  e, in base alla definizione appena data, è valutabile come

$$\Phi(\theta, \varphi) = Pr^2 = \frac{E^2}{\eta} \cdot \frac{4\pi r^2}{4\pi} = \frac{E^2 r^2}{\eta} \left[ \frac{W}{\text{steradiani}} \right]$$

Possiamo subito osservare che  $\Phi(\theta, \varphi)$  risulta indipendente dalla distanza  $r$ , visto che il campo elettrico di radiazione è inversamente proporzionale a  $1/r$ , per cui il suo quadrato è proporzionale ad  $1/r^2$ .

Al fine di ottenere la **potenza totale irradiata**, basta integrare  $\Phi(\theta, \varphi)$  sull'angolo solido complessivo sotteso dalla superficie considerata:

$$W_{\text{irr}} = \int_{\Omega} \Phi(\theta, \varphi) d\Omega$$

A questo punto, possiamo definire la **potenza media irradiata per unità di angolo solido**, pari al rapporto tra la potenza totale irradiata e l'angolo solido di  $4\pi$  corrispondente alla generica sfera di raggio  $r$ :

$$\Phi_m = \frac{W_{\text{irr}}}{4\pi}$$

La quantità  $\Phi_m$  rappresenta praticamente l'intensità di irradiazione che sarebbe prodotta da un *radiatore isotropo* che irradia la stessa potenza  $W_{\text{irr}}$

Si definisce, a questo punto, **guadagno direzionale**, in una assegnata direzione  $(\theta, \varphi)$ , il rapporto tra l'intensità di irradiazione in quella direzione e la potenza media irradiata sempre nella stessa direzione:

$$g(\theta, \varphi) = \frac{\Phi(\theta, \varphi)}{\Phi_m}$$

E' evidente che questo guadagno dipende dalla direzione  $(\theta, \varphi)$  in quanto da essa dipende l'intensità di radiazione: il valore massimo di questo guadagno prende allora il nome di **direttività** dell'antenna e si indica generalmente con  $g_d$ :

$$g_d = \left( \frac{\Phi(\theta, \varphi)}{\Phi_m} \right)_{\text{MAX}}$$

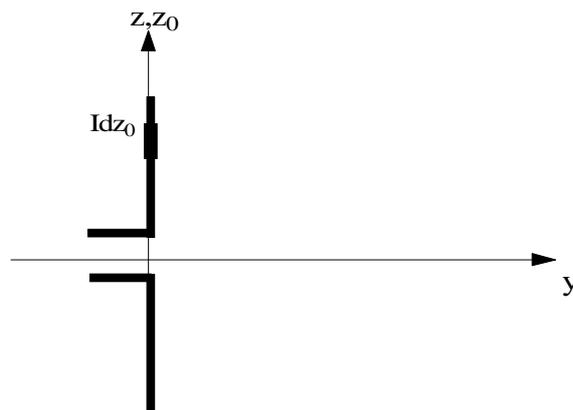
Chiaramente, quindi, mentre  $g(\theta, \varphi)$  è sempre funzione di  $\theta$  e di  $\varphi$ , la direttività  $g_d$  è invece una costante.

Facciamo infine osservare che, nonostante le precedenti definizioni siano state riferite ad antenne trasmettenti, esse sono applicabili ad ogni antenna con riferimento alla sua particolare funzione: ciò significa che una antenna, quando è usata come ricevente, ha lo stesso guadagno di quanto è usata come trasmittente. Ovviamente, il guadagno così definito può essere realizzato, su una antenna ricevente, solo quando essa è propriamente *adattata* ed il campo elettrico incidente su di essa è inoltre opportunamente polarizzato.

## LUNGHEZZA EFFICACE DI UNA ANTENNA

Al fine di quantificare l'efficienza di una antenna come radiatore o ricevitore di energia elettromagnetica, è possibile usare un parametro che prende il nome di **lunghezza efficace** dell'antenna stessa: si definisce **lunghezza efficace** di una antenna trasmettente *reale* la lunghezza di una *antenna equivalente*, lineare, che ha la corrente  $I(0)$  costante lungo la sua lunghezza e che irradia lo stesso campo  $\vec{E}$  dell'antenna reale nella direzione normale alla sua lunghezza.

Per comprendere il significato di questa definizione, consideriamo una antenna trasmettente come quella illustrata nella figura seguente:



L'antenna è lineare, lunga  $L$ , ed è alimentata al centro da una corrente  $I(0)$  che possiamo ritenere costante lungo tutta l'antenna. In base alla definizione prima riportata, la lunghezza efficace  $L_{\text{eff},T}$  deve essere tale da verificare la relazione

$$I(0) \cdot L_{\text{eff},T} = \int_{-L/2}^{L/2} i(z_0) dz_0$$

Questo vale per una antenna trasmittente. Al contrario, per una antenna reale ricevente, la lunghezza efficace è definita in termini della tensione  $V_{\text{OC}}$  a circuito aperto sviluppata ai terminali dell'antenna per una data ampiezza del campo elettrico incidente  $\vec{E}$  (ritenuto uniforme e parallelo all'antenna):

$$L_{\text{eff},R} = \frac{|V_{\text{OC}}|}{|\vec{E}|}$$

E' possibile verificare l'uguaglianza tra  $L_{\text{eff},T}$  e  $L_{\text{eff},R}$  mediante l'applicazione del teorema di reciprocità ad un caso semplice di antenna trasmittente e antenne ricevente.

## AREA EFFICACE

Il termine *area efficace* ha un significato particolare quando applicato ad antenne a superficie, che cioè hanno una ben definita *apertura fisica*. Per queste antenne, il rapporto tra l'area efficace e l'area geometrica del radiatore è una misura diretta dell'*efficienza* dell'antenna nell'irradiare (o nel ricevere) energia elettromagnetica nella (o dalla) direzione desiderata.

La definizione dell'area efficace di una antenna ricevente è la seguente: considerato il vettore di Poynting  $P$  disponibile nel punto ricevente, l' **area efficace** è tale che sia soddisfatta la relazione  $\boxed{W_{\text{RIC}} = PA_{\text{eff}}}$ , dove  $W_{\text{RIC}}$  è la potenza captata dall'antenna. E' possibile dimostrare che l'area efficace di una antenna è legata alla direttività dell'antenna stessa dalla relazione

$$\boxed{A_{\text{eff}} = g_d \frac{\lambda^2}{4\pi}}$$

In base a questa relazione,  $A_{\text{eff}}$  è il rapporto tra la potenza disponibile ai terminali dell'antenna e la potenza per unità di superficie di un'onda incidente propriamente polarizzata.

Facciamo comunque osservare che, nell'utilizzare la formula  $A_{\text{eff}} = g_d \frac{\lambda^2}{4\pi}$ , occorre supporre che tutta la potenza disponibile sia assorbita dal carico (*carico adattato*). Questo è il caso di una efficienza del 100% e di un adattamento corretto per l'antenna ricevente con le proprie caratteristiche di polarizzazione. Per antenne con perdite, nella relazione  $A_{\text{eff}} = g_d \frac{\lambda^2}{4\pi}$  bisogna introdurre il guadagno  $g_p$  e l'area efficace che ne viene fuori determina la potenza utile fornita al carico. Per antenne elettricamente piccole, questa potenza utile può essere molto minore di quella calcolata usando il guadagno direttivo.

## Varie sui segnali

### RICHIAMI SULLA DISTORSIONE ARMONICA

Vediamo rapidamente quali conseguenze derivano dal fatto che un determinato sistema sia non lineare.

Indichiamo con  $s(t)$  il segnale (ad esempio una tensione) in ingresso al sistema considerato; in particolare, supponiamo che si tratti di una tensione sinusoidale del tipo  $s(t) = A \sin(\omega t)$ . Se il sistema avesse un comportamento lineare, l'uscita (a regime e a meno di uno sfasamento) sarebbe uguale semplicemente al prodotto di una costante  $k$  per l'ingresso:

$$u(t) = kA \sin(\omega t)$$

Si tratterebbe perciò di un segnale isofrequenziale con l'ingresso.

Vediamo, invece, che cosa succede se il sistema presenta, oltre ad un comportamento lineare, anche uno quadratico: l'uscita sarebbe del tipo

$$u(t) = ks(t) + k_1 s^2(t) = kA \sin(\omega t) + k_1 A^2 \sin^2(\omega t)$$

Applicando adesso una nota formula trigonometrica, possiamo anche scrivere che

$$u(t) = kA \sin(\omega t) + k_1 A^2 \left( \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) = kA \sin(\omega t) + \frac{k_1 A^2}{2} - \frac{k_1 A^2}{2} \cos(2\omega t)$$

La cosa fondamentale che ricaviamo da questa relazione è che, oltre al termine  $ks(t)$ , il quale ha la stessa frequenza dell'ingresso, l'uscita presenta un termine costante  $\frac{k_1 A^2}{2}$  ed anche un termine  $\frac{k_1 A^2}{2} \cos(2\omega t)$  a frequenza doppia rispetto a quella in ingresso. Questo ci mostra, dunque, che

*andando oltre i limiti della linearità dei dispositivi, otteniamo delle armoniche a frequenza multipla rispetto a quella di ingresso.*

Se, per esempio, noi considerassimo, oltre al termine quadratico, anche quello cubico, avremmo sia l'armonica a frequenza doppia sia una armonica a frequenza tripla e così via per leggi via via più complesse.

Questo fatto a volte è deleterio, ma a volte viene anche sfruttato: il caso più classico è quello della moltiplicazione di frequenza, ossia di quelle tecniche in cui è necessario, dato un segnale ad una certa frequenza, produrre un identico segnale, ma con frequenza diversa.

Adesso ripetiamo lo stesso discorso nell'ipotesi che il segnale d'ingresso sia la somma di due distinti segnali sinusoidali: poniamo perciò

$$s(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$$

La corrispondente uscita, ottenuta considerando sempre il contributo lineare e quello quadratico, è allora

$$\begin{aligned}
 u(t) &= ks(t) + k_1 s^2(t) = kA_1 \sin(\omega_1 t) + kA_2 \sin(\omega_2 t) + k_1 [A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)]^2 = \\
 &= kA_1 \sin(\omega_1 t) + kA_2 \sin(\omega_2 t) + k_1 [A_1^2 \sin^2(\omega_1 t) + A_2^2 \sin^2(\omega_2 t) + 2A_1 A_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)] = \\
 &= kA_1 \sin(\omega_1 t) + kA_2 \sin(\omega_2 t) + k_1 \left[ A_1^2 \frac{1 - \cos(2\omega_1 t)}{2} + A_2^2 \frac{1 - \cos(2\omega_2 t)}{2} + 2A_1 A_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \right] = \\
 &= kA_1 \sin(\omega_1 t) + kA_2 \sin(\omega_2 t) + \\
 &+ k_1 \left[ A_1^2 \frac{1 - \cos(2\omega_1 t)}{2} + A_2^2 \frac{1 - \cos(2\omega_2 t)}{2} + A_1 A_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + A_1 A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \right]
 \end{aligned}$$

In questo caso, abbiamo ottenuto un risultato ancora diverso rispetto al caso precedente: infatti, oltre ai termini aventi la stessa frequenza dei segnali in ingresso, oltre ai termini aventi frequenza doppia rispetto ai segnali in ingresso, compaiono anche altri due termini  $\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$  e  $\cos((\omega_1 + \omega_2)t)$  aventi frequenze ancora diverse. Questi termini prendono il nome di **prodotti di intermodulazione**: a volte essi vengono sfruttati (come nelle tecniche di modulazione di frequenza), mentre a volte sono estremamente deleteri.

## SEGNALE MUSICALE

Per il **segnale musicale** si adotta, nei *sistemi di trasmissione*, una banda variabile a seconda della fedeltà desiderata: nei sistemi di radiodiffusione a modulazione di frequenza e in quelli di filodiffusione, la larghezza di banda adottata è quella compresa tra 50 Hz e 15 kHz. La banda di un segnale musicale ad alta fedeltà è assunta essere di **15 kHz**.

Per una buona qualità, il **rapporto segnale-rumore in ricezione** (definito come rapporto tra *potenza di picco del segnale*, pari al quadrato del valore di picco del segnale, e *potenza media di rumore*, pari al quadrato del valore efficace del processo di rumore<sup>4</sup>) deve essere compreso tra 70 dB e 75 dB.

<sup>4</sup> Quando si calcola un rapporto segnale-rumore, è sempre importante specificare quale potenza si adotti per il segnale (mentre generalmente non è necessario specificare niente per il rumore, in quanto si adotta quasi sempre la *potenza media*): il motivo è che la grandezza (valore efficace, valore di picco, ...) cui associare la potenza di segnale ha senso fisico o meno a seconda del segnale (telefonico, musicale, televisivo,...) considerato. Nel caso del segnale musicale, ad esempio, si considera la potenza di picco, mentre, nel caso del segnale telefonico, si considera la potenza media.

# Richiami di probabilità e statistica

## Variabili aleatorie

### ASPETTAZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Supponiamo di avere una variabile aleatoria  $X$  continua, che cioè può assumere un qualsiasi valore reale all'interno di un dato intervallo oppure tra  $-\infty$  e  $+\infty$ . La funzione **densità di probabilità** di  $X$  fornisce una descrizione statistica completa di  $X$  in quanto consente di determinare la probabilità di ogni evento  $x_1 < X < x_2$ . Tuttavia, in molte applicazioni si ha interesse a conoscere non tanto la legge di distribuzione, quanto alcuni indici caratteristici di una variabile aleatoria che riassumano gli aspetti principali della legge di distribuzione. Introduciamo allora alcuni parametri che forniscono delle informazioni aggiuntive circa una variabile aleatoria.

Sia data una generica variabile aleatoria continua  $X$  e sia  $f_X(x)$  la sua densità: si definisce **aspettazione** o **media** o **momento del 1° ordine** o **valor medio** o **valore atteso** di  $X$  il numero reale

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Si definisce, in generale, **momento del  $k^{\circ}$  ordine** di  $X$  il numero reale

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$$

dove  $k=1,2,3,..$

Facciamo osservare come la media (o momento del 1° ordine) esista finita nell'ipotesi che dia un valore finito il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx$$

Possiamo dire che la media fornisce una indicazione sulla posizione attorno alla quale si raggruppano i valori della  $X$ : in questo senso, essa è un indice di posizione della variabile.

### ***Proprietà della media di una variabile aleatoria***

Vediamo velocemente alcune proprietà della media:

1. Se  $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$
2.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
3.  $E(cX) = cE(X) \quad \forall c \in \mathbb{R}$
4.  $E(c) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$
5. Se  $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

### **VARIANZA E DEVIATIONE STANDARD DI UNA VARIABILE ALEATORIA**

Sia data la variabile aleatoria continua  $X$ . Si definisce **varianza di  $X$**  il numero reale

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Si definisce invece **deviazione standard di  $X$**  il numero reale

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

In analogia a quanto vale e a come viene indicata la deviazione standard, talvolta la varianza di  $X$  si indica con il simbolo  $\sigma_X^2$ .

L'interpretazione fisica concreta della deviazione standard di una variabile aleatoria, in accordo a quanto detto circa la media della stessa variabile, è la seguente: se  $E(X)$  è valore intorno al quale di dispongono i valori della  $X$ ,  $\text{Var}(X)$  indica di quanto tali valori si discostano mediamente da  $E[X]$ .

La varianza, invece, offre una indicazione circa l'addensamento dei valori della variabile attorno al valor medio: in questo senso si dice che essa costituisce una *indice di dispersione*.

### ***Proprietà della varianza di una variabile aleatoria***

Vediamo anche qui velocemente qualche proprietà della varianza:

1.  $\text{Var}(X) \geq 0$
2.  $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
3.  $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X) \quad \forall c \in \mathbb{R}$
4.  $\text{Var}(X) = \text{Var}(-X)$
5.  $\text{Var}(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

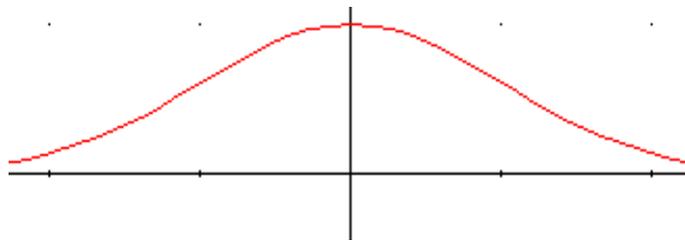
# Variabili aleatorie con distribuzione gaussiana

## DEFINIZIONE DI DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Si dice che una variabile aleatoria continua  $X$  ha una **distribuzione gaussiana con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$**  quando la sua funzione densità di probabilità è

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'andamento grafico di questa funzione, supposta  $\mu=0$ , è il seguente:



Questa specie di campana è tanto più larga quanto maggiore è la varianza.

## FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

Supponiamo adesso che  $X$  ed  $Y$  siano due variabili aleatorie continue, entrambe con distribuzione gaussiana, la prima con media  $\mu_X$  e varianza  $\sigma_X^2$  e la seconda con media  $\mu_Y$  e varianza  $\sigma_Y^2$ . E' possibile dimostrare che la funzione densità di probabilità congiunta di tali variabili aleatorie è la seguente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

dove  $\rho = \frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sigma_X\sigma_Y}$  è il cosiddetto **coefficiente di correlazione** di  $X$  ed  $Y$ .

E' subito ovvio che quella espressione si semplifica notevolmente quando sia  $X$  sia  $Y$  hanno media nulla e deviazione standard unitaria: infatti, ponendo

$$\begin{cases} \mu_X = \mu_Y = 0 \\ \sigma_X = \sigma_Y = 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2+y^2-2\rho xy]}$$

## INDIPENDENZA DI DUE VARIABILI ALEATORIE CON DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Ricordiamo che due generiche variabili aleatorie continue  $X$  ed  $Y$ , con funzione densità rispettivamente  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$ , si dicono **indipendenti** quando la *funzione di densità congiunta* è pari al prodotto delle funzioni densità, ossia quando

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

E' possibile dimostrare che, se  $X$  ed  $Y$  hanno entrambe distribuzione gaussiana, quella condizione avviene quando  $\rho = 0$ , ossia quando le due variabili sono tra loro *incorrelate*.

Quindi, *l'indipendenza di due variabili aleatorie gaussiane equivale alla incorrelazione tra le due stesse variabili*.

## FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Siano sempre  $X$  ed  $Y$  due variabili aleatorie entrambe con distribuzione gaussiana. Si definisce **funzione densità di probabilità condizionata** la funzione

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

dove

$$F_{X|Y}(x,y) = F_X(X \leq x | Y = y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} F_X(X \leq x | y \leq Y \leq y + \Delta y)$$

E' possibile dimostrare che anche la variabile aleatoria  $Z = X|Y$ , la cui funzione densità è  $f_{X|Y}(x,y)$ , ha distribuzione gaussiana.

Anzi, se  $\mu_X$  e  $\sigma_X^2$  sono media e varianza di  $X$  e  $\mu_Y$  e  $\sigma_Y^2$  sono media e varianza di  $Y$ , è possibile dimostrare che la media e la varianza di  $Z$  sono le seguenti:

$$\begin{cases} \mu_Z = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y) \\ \sigma_Z = \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2} \end{cases}$$

## COMBINAZIONE LINEARE DI VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE

Sia  $X$  una variabile aleatoria continua avente distribuzione gaussiana con media  $\mu_X$  e varianza  $\sigma_X^2$ . Consideriamo inoltre la variabile aleatoria  $Y = aX + b$ , dove  $a$  e  $b$  sono due qualsiasi numeri reali.

Si può dimostrare che, se  $Y$  è definita in quel modo, la sua funzione densità di probabilità, a prescindere dalla natura di  $X$ , è

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

In questo caso particolare, questa formula ci dice che, essendo  $X$  gaussiana, anche  $Y$  risulta essere gaussiana: anzi, sapendo che

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

possiamo subito scrivere che

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu_X\right)^2}{2\sigma_X^2}}$$

Conseguenza di questa proprietà è che, se  $X$  ed  $Y$  sono due variabili aleatorie entrambe con distribuzione gaussiana, risulta gaussiana anche la variabile aleatoria  $Z = aX + bY$ .

In generale, quindi, *una qualsiasi combinazione lineare di distribuzioni gaussiane è a sua volta una distribuzione gaussiana.*

## Processi stocastici stazionari

### CARATTERISTICHE STATISTICHE DELLE VARIABILI ALEATORIE ESTRATTE DA UN PROCESSO STOCASTICO

Supponiamo di avere un certo fenomeno, il cui spazio degli eventi sia  $S$ , e supponiamo di avere un *processo stocastico* associato a tale fenomeno: questo significa che noi, secondo un certo criterio, abbiamo associato a ciascun campione appartenente ad  $S$  una funzione reale di variabile reale. Supponiamo anche che tali funzioni siano continue nel tempo e a valori continui.

E' chiaro che, se noi fissiamo  $N$  istanti di tempo generici  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , otteniamo, a partire dalle realizzazioni scelte,  $N$  diverse variabili aleatorie estratte dal processo e le indichiamo con  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ . Per ciascuna di queste variabili aleatorie valgono ovviamente tutte le considerazioni relative ad una variabile aleatoria generica: tanto per citarne una, data la variabile aleatoria  $X(t)$  estratta dal processo all'istante  $t$ , essa avrà una certa funzione densità di probabilità  $f_{X(t)}(x)$ ; a partire da tale funzione, noi possiamo definire il valor medio di  $X(t)$ , che sarà

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

Naturalmente, essendo  $t$  generico, il valore di  $E[X(t)]$  sarà, in generale, funzione di  $t$ , come qualsiasi altro parametro associato a  $X(t)$ .

Inoltre, noi sappiamo che, dato un certo numero di variabili aleatorie, è possibile associare ad esse la cosiddetta *funzione di distribuzione congiunta*: date  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ , si definisce **funzione di distribuzione congiunta** delle  $N$  variabili aleatorie estratte dal processo la funzione

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_N) \leq x_N)$$

Per semplificarci i ragionamenti, consideriamo solo due variabili aleatorie  $X(t_1), X(t_2)$  estratte dal processo; possiamo definire le seguenti funzioni:

distribuzione congiunta:  $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2)$

densità congiunta:  $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$

correlazione:  $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

covarianza:  $C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - E[X(t_1)]] [X(t_2) - E[X(t_2)]]\}$

In particolare, facciamo notare che la covarianza e la correlazione sono legate dalla seguente relazione:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

Questa relazione indica evidentemente che *se le due variabili  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  sono a media nulla, la loro correlazione corrisponde alla loro covarianza.*

## STAZIONARIETÀ IN SENSO LATO E IN SENSO STRETTO

Per caratterizzare un generico processo stocastico, noi dobbiamo conoscere la funzione di distribuzione congiunta:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_N) \leq x_N)$$

dove  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$  sono  $N$  variabili aleatorie estratte dal processo nei generici istanti  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .

*Un processo stocastico si dice **stazionario in senso stretto** quando la funzione di distribuzione congiunta risulta invariante rispetto alle traslazioni temporali.* In termini matematici, questo significa che, fissata una generica quantità reale  $\tau$ , deve essere verificata la seguente relazione:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = F_{X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_N+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

In altri termini, *un processo stocastico è stazionario in senso stretto se le sue caratteristiche statistiche non variano al variare del tempo.*

La relazione appena citata vale per qualsiasi valore di  $N$ : allora, prendendo alcuni valori particolari di  $N$ , possiamo vedere quali implicazioni essa abbia.

Cominciamo col prendere  $N=1$ : in questo caso, la relazione si riduce a

$$F_{X(t_1)}(x_1) = P(X(t_1) \leq x_1) = F_{X(t_1+\tau)}(x_1) = P(X(t_1 + \tau) \leq x_1)$$

Questa relazione dice in pratica che, *dato un processo stocastico stazionario in senso stretto, dati due istanti qualsiasi di tempo e date le corrispondenti variabili aleatorie estratte dal processo, tali due variabili sono identiche dal punto di vista statistico, ossia*

$$f_{X(t_1)}(x) = f_{X(t_1+\tau)}(x)$$

Passiamo adesso a  $N=2$ . In questo caso, è possibile dimostrare due risultati:

- la distribuzione congiunta delle variabili aleatorie  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  non dipende in modo assoluto da  $t_1$  e  $t_2$  ma solo dalla loro differenza  $t_2-t_1$ ;
- la correlazione tra le due variabili aleatorie non dipende in modo assoluto da  $t_1$  e  $t_2$  ma solo dalla loro differenza  $t_2 - t_1$ .

Diamo adesso una seconda definizione circa la stazionarietà di un processo stocastico:

**Def.** Un processo stocastico si dice **stazionario in senso lato** quando sono verificate le seguenti due condizioni:

1. presa la variabile aleatoria  $X(t)$  estratta dal processo al generico istante  $t$ , la sua media risulta indipendente dal tempo

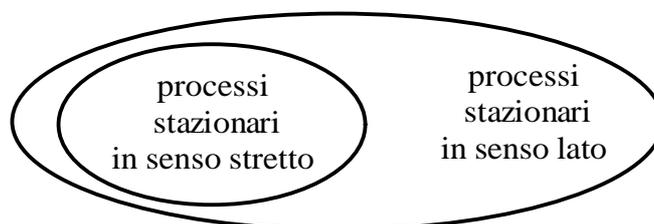
2. prese due variabile aleatorie estratte dal processo negli istanti generici  $t_1$  e  $t_2$ , la loro funzione di correlazione non dipende in modo assoluto da  $t_1$  e  $t_2$  ma solo dalla loro differenza  $t_2 - t_1$ .

In termini matematici, quindi, perché il processo sia stazionario in senso lato, deve accadere che

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_x & \forall t \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

In base alle due proprietà trovate prima, per  $N=1$  e  $N=2$ , per un processo stazionario in senso stretto, appare ovvio che *un processo stazionario in senso stretto è senz'altro un processo stazionario in senso lato*.

In generale, invece, non vale l'implicazione inversa, ossia non è detto che un processo stazionario in senso lato sia anche stazionario in senso stretto.



## ERGODICITÀ DEI PROCESSI STOCASTICI

Riprendiamo la definizione di processo stocastico: un *processo stocastico* consiste nell'associare, a ciascun campione di un certo spazio degli eventi, anziché un numero reale come accade per le variabili aleatorie, una certa funzione, che nei casi da noi considerati è generalmente una funzione continua del tempo (sia a valori continui sia a valori discreti). Fissando un certo istante  $t$  e considerando i valori assunti in questo istante da tutte le funzioni scelte (dette *realizzazioni*), noi non facciamo altro che definire una variabile aleatoria  $X(t)$  (che si dice *estratta* dal processo all'istante  $t$ ): per  $t$  generico, tale variabile aleatoria descrive in pratica le caratteristiche statistiche del processo stesso nell'istante  $t$ .

Supponiamo allora di avere un certo processo stocastico e supponiamo di considerarne una particolare realizzazione: il problema che ci poniamo è di verificare quando e, eventualmente, come è possibile risalire a tutte o parte delle caratteristiche statistiche del processo conoscendo solo tale realizzazione. Quando questo è possibile, si dice il processo in questione è **ergodico**: quindi *un processo stocastico si dice ergodico quando è possibile risalire alle sue caratteristiche statistiche conoscendo solo una delle realizzazioni di cui il processo stesso si compone*.

### Ergodicità in media

E' possibile che un dato processo sia ergodico solo RELATIVAMENTE ad una sola caratteristica statistica: è possibile cioè che, a partire dall'unica realizzazione conosciuta, si possa risalire solo ad 1 caratteristica statistica del processo stesso.

Ad esempio, si dicono **ergodici in media** quei processi stocastici per i quali è possibile conoscere la media a partire dalla conoscenza di 1 sola realizzazione.

Consideriamo perciò una generica realizzazione del processo: trattandosi di una funzione continua del tempo, la indichiamo con  $f(t, s_i)$ , dove  $s_i$  indica il campione al quale la realizzazione è stata associata. Trattandosi di una funzione del tempo, è possibile calcolare la sua **media temporale**, che è così definita:

$$\langle f(t, s_i) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t, s_i) dt$$

Per non appesantire troppo le notazioni, possiamo anche eliminare  $s_i$ , con l'accortezza però di ricordare sempre che la realizzazione  $f(t)$  è quella associata ad un determinato campione dello spazio degli eventi di partenza. Possiamo perciò riscrivere la relazione di prima nella forma

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt$$

Allora diremo che un processo stocastico è **ergodico in media** se si verifica la seguente condizione:

$$P(\langle f(t) \rangle = E[X(t)]) = P\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt = E[X(t)]\right) = 1$$

ossia se la media temporale della realizzazione considerata coincide con la media del processo, detta **media di insieme**, con probabilità 1.

Possiamo anche perfezionare meglio quella relazione sulla base della seguente considerazione: infatti, si può dimostrare che un processo stocastico può essere ergodico solo se è stazionario; allora,

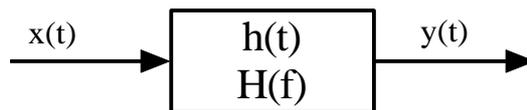
sapendo che, per definizione, la media di un processo stazionario è indipendente dal tempo, possiamo porre  $E[X(t)] = m_x$ , per cui la relazione di prima diventa

$$P\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt = m_x\right) = 1$$

## Processi stocastici stazionari e sistemi lineari

### INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un sistema lineare tempo-invariante, la cui azione sul segnale  $x(t)$  ricevuto in ingresso è sintetizzata dalla convoluzione con  $h(t)$  nel dominio del tempo e/o dal prodotto con  $H(f)$  nel dominio della frequenza.



Il segnale che giunge in ingresso al sistema non necessariamente è un segnale determinato, nel senso che noi non necessariamente ne conosciamo la struttura. Di conseguenza, possiamo pensare di applicare in ingresso al nostro sistema una variabile aleatoria  $X(t)$  estratta da un processo stocastico al generico istante  $t$ . In pratica, ciò significa che noi poniamo in ingresso al sistema il processo stocastico.

Si può dimostrare che, se il sistema è lineare e tempo-invariante e se il processo stocastico considerato è stazionario in senso lato, l'uscita  $Y(t)$  del sistema rappresenta anch'essa la generica variabile aleatoria estratta da un processo stocastico stazionario in senso lato. In altre parole, quindi, la linearità e la tempo-invarianza del sistema garantiscono la conservazione della proprietà di stazionarietà in senso lato.

In termini analitici, la dimostrazione consiste semplicemente nel far vedere che valgono le seguenti due relazioni relative all'uscita:

$$\begin{cases} E[Y(t)] = m_Y & \forall t \\ R_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_2 - t_1) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

### POTENZA STATISTICA

Quando abbiamo studiato il concetto di autocorrelazione per segnali di potenza, abbiamo detto che, dato il generico segnale di potenza  $x(t)$  e indicata con  $P_X$  la sua potenza, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = P_X$$

ossia che tale potenza è pari all'area sottesa dalla funzione  $S_X(f)$ ; questa funzione è lo **spettro di potenza** di  $x(t)$  ed è pari alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di  $x(t)$ .

Applicando  $x(t)$  in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante, l'uscita ha spettro di potenza  $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$  (dove  $H(f)$  è la funzione di trasferimento del sistema), per cui la potenza ad esso associata è

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df$$

Discorsi del tutto analoghi valgono nel caso in cui in ingresso al sistema tempo-invariante venga posta la variabile aleatoria  $X(t)$  estratta da un processo stocastico.

Le ipotesi di partenza sono dunque le seguenti:

- $X(t)$  è la variabile aleatoria estratta da un processo stocastico all'istante generico  $t$ ;
- il processo in ingresso è stazionario in senso lato;
- il sistema è lineare tempo-invariante;
- la funzione  $h(t)$  di risposta all'impulso del sistema è reale;

Sotto queste ipotesi, si può intanto dimostrare che la funzione di correlazione di  $Y(t)$  è data da

$$R_Y(t, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) R_X(\tau - r + s) ds dr$$

Si definisce inoltre **potenza statistica** di una variabile aleatoria  $Y(t)$  la quantità  $R_Y(0)$ : se  $Y(t)$  è estratta da un processo stazionario in senso lato, sussiste la relazione

$$R_Y(0) = R_Y(t, t + \tau)|_{\tau=0} = E[Y^2(t)]$$

Mettendo insieme queste ultime due relazioni e facendo gli opportuni passaggi, si dimostra che la potenza statistica di  $Y(t)$  è legata allo **spettro di potenza**  $S_Y(f)$  mediante la relazione

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df$$

Questa relazione ci dice anche che continuano a valere le corrispondenze

$$R_X(t) \xleftrightarrow{\text{Fourier}} S_X(f)$$

$$R_Y(t) \xleftrightarrow{\text{Fourier}} S_Y(f)$$

Naturalmente, avendo detto che  $R_Y(0) = E[(Y(t))^2]$  è la potenza statistica di  $Y(t)$ , si capisce per quale motivo  $S_Y(f)$  è una **densità di potenza** di  $Y(t)$ : infatti, quella relazione indica che la potenza di  $Y(t)$  si ottiene integrando  $S_Y(f)$ , la quale quindi non può essere che una densità di potenza.

## **PROPRIETÀ DELLO SPETTRO DI POTENZA $S_X(f)$**

Ci interessano due proprietà dello spettro di potenza  $S_X(f)$  della variabile aleatoria  $X(t)$ .

Intanto, se il processo da cui si estrae  $X(t)$  è un processo stazionario in senso lato, la funzione di correlazione  $R_X(\tau)$  risulta essere una funzione pari, ossia tale che  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ . Sulla base di ciò, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier, si può verificare che anche  $S_X(f)$ , nell'ipotesi che  $X(t)$  sia a valori reali, è una funzione pari, ossia

$$S_X(f) = S_X(-f)$$

La seconda proprietà è che lo spettro di potenza è una funzione non-negativa, ossia tale che

$$S_X(f) \geq 0$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**  
e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)  
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>  
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>