Appunti di Comunicazioni Elettriche
Appendice 1 - Varie sui sistemi di trasmissione

CENNI GENERALI SUI RADIORICEVITORI

Un **radioricevitore** è un apparato elettronico predisposto per ricevere, filtrare, amplificare e rendere intelligibili le informazioni contenute nelle radioonde captate tramite antenna.

Schematicamente, un generico ricevitore è costituito da una antenna e da una serie di circuiti che svolgono funzioni di amplificazione, rivelazione, cambiamento di frequenza e altre ausiliarie.

L'**antenna** ha il compito di captare le onde irradiate dalle **stazioni radiotrasmittenti**. L'onda modulata che si desidera ricevere[1] viene separata dalle altre onde inevitabilmente captate dall'antenna (rumore e segnali di altre stazioni) per mezzo di opportuni **circuiti di sintonia**, nei quali è inserito un condensatore variabile (elettronicamente).

L'onda così separata viene poi amplificata mediante **transistor** (in principio, si usavano invece i *tubi termoelettrici*, detti anche *valvole*).

[1] E' ovvio che si parli di onda *modulata*, in quanto ci riferiamo alla trasmissione via radio (o via ponte radio), ossia alla trasmissione attraverso un mezzo trasmissivo di tipo passa banda, nel quale i normali segnali come quello telefonico, quello radiofonico o quello televisivo, possono essere trasmessi solo se, appunto in trasmissione, vengono fatti passare attraverso un apparato di modulazione.

Per amplificare l'onda a radiofrequenza, esistono due metodi:

- con il metodo della **amplificazione diretta**, l'antenna è subito seguita da un **amplificatore ad alta frequenza**, cui poi segue il processo di demodulazione, ossia la separazione, effettuata da opportuni **circuiti rilevatori**, del segnale di interesse; il segnale demodulato viene poi amplificato negli stadi amplificatori di bassa frequenza ed è infine applicato ad un trasduttore (ad esempio un altoparlante nel caso della *trasmissione radiofonica*);
- decisamente prevalente, al giorno d'oggi, è invece il metodo della **conversione di frequenza**: i ricevitori a conversione di frequenza (detti anche **ricevitori a supereterodina**) convertono la frequenza dei segnali captati in una più bassa, esterna alla gamma di ricezione, detta **frequenza intermedia**; successivamente, è in corrispondenza di questa frequenza che si effettua l'amplificazione e la successiva demodulazione; dopo la demodulazione, si procede come nel caso precedente, ossia riamplificando il segnale modulato e inviandolo al trasduttore.

La differenza sostanziale tra i due metodi sta dunque nella frequenza alla quale si sceglie di effettuare l'amplificazione: nel primo caso, si lavora ad alta frequenza (quella del segnale modulato che è stato captato), mentre nel secondo caso si lavora ad una frequenza intermedia (quella alla quale i dispositivi di amplificazione e successiva demodulazione funzionano meglio, cioè con il minimo di distorsione e quindi il massimo di fedeltà).

Caso particolare: Radiotelescopio

Il **radiotelescopio** è uno strumento usato nella **radioastronomia** per determinare la posizione, sulla volta celeste, delle *radiosorgenti cosmiche*. Esso consiste, schematicamente, in un radioricevitore dotato di una antenna fortemente direttiva.

L'intensità dei segnali ricevuti diventa massima quando il massimo del *lobo principale* di radiazione dell'antenna è nella direzione della radiosorgente: la posizione di quest'ultima viene pertanto determinata in base alle *coordinate altazimutali* dell'asse dell'antenna in condizioni di massima intensità di ricezione.

I segnali emessi dalle radiosorgenti cosmiche hanno fase ed ampiezza variabili a caso e sono generalmente molto deboli. Di conseguenza, è fondamentale, ai fini della sensibilità del complesso, la larghezza di banda ed il rumore internamente generato del ricevitore. D'altra parte, sono state sviluppate tecniche di misurazione estremamente raffinate, che permettono di misurare segnali la cui intensità sia solo 1/100 di quella del rumore di fondo del ricevitore.

La precisione con cui può essere determinata la direzione d'arrivo dei segnali, e quindi la posizione della radiosorgente, dipende invece esclusivamente dalle caratteristiche dell'antenna. Quest'ultima è costituita da un allineamento di dipoli o da una antenna ad elementi parassiti (la cosiddetta **antenna Yagi**), oppure, più spesso, da un dipolo posto nel fuoco di uno specchio metallico paraboloidico: in quest'ultimo caso, il dispositivo è del tutto analogo ad un classico *telescopio a riflettore*.

L'antenna è generalmente montata in modo da poter essere agevolmente diretta verso un qualsivoglia punto della volta celeste.

Come misura del *poter risolutivo* di un radiotelescopio si assume la minima distanza angolare θ alla quale possono trovarsi due radiosorgenti perché possano essere ricevute ancora separatamente (come nel caso del *radar*). Dato che θ è all'incirca uguale, in radianti, al rapporto tra la lunghezza d'onda del segnale e il diametro dello specchio, per ottenere un poter risolutivo abbastanza alto si è costretti ad usare specchi di diametro molto grande, dell'ordine di decime di metri. Tra i più grandi radiotelescopi attualmente operanti c'è quello di Jodrell Bank, in Inghilterra, la cui antenna ha uno specchio di 76 m. Cambiando opportunamente il dipolo posto nel fuoco dello specchio, questo radiotelescopio consente di ricevere segnali nel campo da 30 a 1500 MHz, con un poter risolutivo massimo di circa 13'.

CENNI GENERALI SUI RADIOTRASMETTITORI

Un **radiotrasmettitore** è un apparato elettronico che genera correnti ad alta frequenza, le quali, inviate ad una **antenna trasmittente**, determinano, da parte di questa, l'irraggiamento di radioonde, per la trasmissione di informazioni o anche per altri scopi (come nel caso del *radar* o del *radiofaro* degli aeroporti).

I radiotrasmettitori hanno diverse qualificazione, in base ad una serie di parametri:

- campo di *lunghezza d'onda* (o di frequenza) di lavoro: radiotrasmettitore a onde lunghissime, medie, corte, a microonde e così via;
- tipo di *servizio* esplicato: radiotrasmettitore telegrafico, telefonico, televisivo, per radiocomandi e così via;
- tipo di *modulazione* utilizzato: radiotrasmettitore a modulazione di ampiezza, di fase o di frequenza;
- alla *potenza*: radiotrasmettitore di piccola, media o alta potenza;
- particolarità costruttive e di funzionamento: radiotrasmettitore per installazione fissa, mobile, radiotrasmettitore portabile a transistor e così via.

In generale, negli attuali radiotrasmettitori si possono distinguere 3 parti fondamentali:

- l'**eccitatore** (o *pilota*), il quale genera il segnale sinusoidale alla radiofrequenza desiderata, molto stabile, con basso contenuto di armoniche e ad un basso livello di potenza;
- l'**amplificatore di potenza**, che eleva al desiderato livello (in certi casi fino ai MW) la potenza del segnale da trasmettere e lo trasferisce all'antenna trasmittente;
- il modulatore, che, in un punto opportuno della catena, imprime, al segnale sinusoidale prodotto dall'eccitatore, le informazioni da trasmettere.

Caso particolare: radiotrasmettitore a modulazione di frequenza

Il tipico uso di questi radiotrasmettitori è nella **radiodiffusione**, includendo sia la trasmissione di segnali fonici ad alta qualità musicale (nel campo delle *onde metriche* e, in particolare in Italia, nella gamma di frequenze comprese tra **87.5 MHz** e **108 MHz**) sia la *trasmissione televisiva* (in Italia, per il canale audio televisivo, su varie frequenze, comprese tra 68 MHz e circa 216 MHz nonché tra 470 MHz e 890 MHz).

Ricordiamo che, nella modulazione di frequenza, l'ampiezza del segnale modulato resta costante, mentre la sua frequenza istantanea si scosta da quella della portante di una quantità (che prende il nome di **deviazione di frequenza**) proporzionale all'ampiezza del segnale modulante. Nel caso dei **trasmettitori radiofonici**, la deviazione di frequenza è di **±75 kHz**, mentre la potenza va da qualche W a qualche kW. Si tratta di una potenza decisamente inferiore a quella dei *trasmettitori radiofonici a modulazione di ampiezza*: il motivo è essenzialmente che la portata delle stazioni che operano su onde metriche è limitata all'incirca all'orizzonte sensibile dell'antenna).

Un problema notevole, in questi apparati, è che, per quanto ben realizzati siano l'oscillatore (che genera l'onda portante) ed il modulatore (che imprime le informazioni nella portante), la frequenza dell'oscillatore è comunque sempre soggetta a variazioni (lente) nel tempo; allora, per correggere queste **derive di frequenza**, è messo in atto un controllo automatico della frequenza, sul quale però non ci soffermiamo.

Il radiosegnale modulato, prima di essere inviato all'antenna (sotto forma di corrente di eccitazione) viene amplificato in potenza da un amplificatore lineare su tutta la banda di modulazione. Sempre con riferimento alla radiodiffusione di segnali audio, tale banda è ampia **180 kHz**. Ovviamente, particolari attenzioni sono volte a che l'*amplificatore ad audiofrequenza*[2], il modulatore ed i successivi stadio a radiofrequenza siano esenti da distorsione. Al fine di migliorare la qualità della trasmissione, si provvede, con appositi filtri ad audiofrequenza, ad esaltare le audiofrequenze più elevate, secondo un processo detto di **pre-enfasi**. Ovviamente, in ricezione, deve essere attuato il processo inverso, che sarà cioè una **de-enfasi**.

CENNI ALLA TRASMISSIONE DI DATI SU CANALI ANALOGICI

Per lo scambio di informazioni tra calcolatori, e tra calcolatori e utilizzatori, è necessario utilizzare mezzi per la trasmissione di segnali in forma numerica[3]. Occorre tuttavia, per molte applicazioni, sfruttare, per la trasmissione di dati, sistemi e canali di trasmissione già esistenti per altri scopi: in modo particolare, occorre sfruttare l'esistente rete per la trasmissione analogica dei segnali telefonici. Rientra, in questo quadro, l'importante problema della trasmissione di dati su singolo canale telefonico. Per questa applicazione, le difficoltà principali scaturiscono dal fatto che il canale telefonico presenta generalmente forti distorsioni di fase (cui però il segnale telefonico è praticamente insensibile) e anche disturbi impulsivi (che, entro certi limiti, non hanno grande rilievo nella trasmissione telefonica, data la tendenza dell'utente a integrare il rumore su tempi relativamente lunghi). Quest'ultimo tipo di disturbo è presente, in modo particolare, sulle linee commutate, per le quali si ha anche l'inconveniente che il percorso tra due utenti cambia ad ogni collegamento e quindi cambiano anche le caratteristiche del canale[4] (in particolare quella di fase).

In ogni caso, i canali telefonici devono essere equalizzati se si desidera adoperarli per una efficiente trasmissione di dati.

[2] Questo dispositivo serve ad amplificare il segnale modulante prima che venga usato per la modulazione di frequenza della portante.

[3] Ricordiamo, a questo proposito, che un segnale numerico può rappresentare, in modo unico, tutti i segnali che interessano in pratica, eventualmente associandoli tra loro, a seconda della necessità, con la tecnica della divisione di tempo: questo costituisce una delle ragioni principali per cui la trasmissione in forma numerica è tanto importante per gli sviluppi di reti di comunicazione capaci di soddisfare a tutte le esigenze di servizio.

[4] Quando invece si affitta permanentemente una linea, le variazioni delle caratteristiche di trasmissione sono soltanto quelle che avvengono nel tempo, a causa, ad esempio, delle variazioni di temperatura.

Segnali multipli

INTRODUZIONE

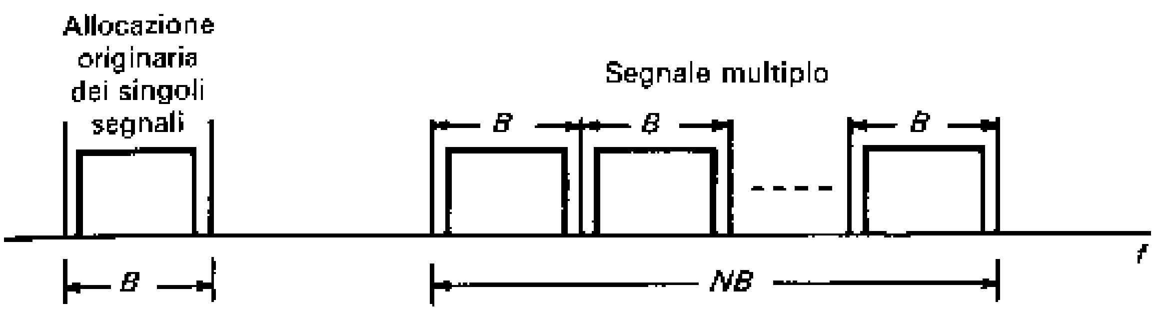
Nella pratica delle telecomunicazioni accade spesso di dover inviare, sulla stessa direttrice di comunicazione, molti segnali simultanei: tipico è il caso delle conversazioni telefoniche tra numerosi utenti che comunicano a due a due contemporaneamente. In casi come questo si dice che sulla predetta direttrice viene trasmesso un **segnale multiplo**.

Il caso più semplice è quello in cui ad ogni segnale semplice (per esempio ad ogni conversazione telefonica) è assegnato un mezzo trasmissivo indipendente, come ad esempio una particolare linea di un cavo con molte linee: in questo caso, il segnale multiplo può dirsi del tipo a divisione di spazio (**SDM**, *space division multiplex*), il che indica appunto che la distinzione tra i singoli segnali avviene spazialmente. Si tratta, d'altra parte, di un tipo estremamente semplice di segnale multiplo, che non aggiunge molto alla nozione di segnale semplice. Per questo motivo, l*a denominazione di* ***segnale multiplo*** *viene generalmente riservata a quei segnali compositi che utilizzano uno stesso mezzo trasmissivo*: ad esempio, è possibile trasmettere più di 10000 segnali telefonici sulla stessa linea coassiale. Nel seguito ci riferiremo dunque solo a questo tipo di segnale multiplo.

Quando dobbiamo formare un segnale multiplo, abbiamo un evidente vincolo di fondo da rispettare: dobbiamo essere sempre in grado di riconoscere e separare i singoli segnali componenti. Esistono allora due tecniche fondamentali atte a soddisfare questa condizione.

TECNICA DELLA DIVISIONE DI FREQUENZA

Nella tecnica della **divisione di frequenza** (**FDM**, *frequency division multplex*): in questa tecnica, il segnale multiplo è ottenuto semplicemente allocando i singoli segnali semplici in differenti intervalli di frequenza, modulando ciascuno di essi con differenti onde portanti. La larghezza di banda minima che può essere occupata da ciascun segnale trasposto in frequenza è pari alla larghezza di banda occupata dal segnale originario: questo risultato è ottenuto praticamente usando una modulazione di ampiezza a banda laterale unica (SSB). Il segnale multiplo viene perciò indicato, in questo caso, con la sigla **FDM-SSB**, proprio per indicare la divisione di frequenza e la tecnica con cui è stata ottenuta. Se B è la banda assegnata al singolo segnale semplice, la banda occupata dal segnale multiplo sarà approssimativamente NB, dove N è il numero di segnali semplici associati. La situazione è illustrata nella figura seguente:



In ricezione, si dovranno predisporre N filtri (oppure un unico filtro sintonizzabile a seconda dei casi), ciascuno con banda B, che dovrà selezionare solo il segnale di interesse, eliminando gli altri.

Metodi con cui realizzare un segnale FDM

Abbiamo dunque detto che un segnale multiplo FDM è ottenuto allocando i singoli segnali semplici in differenti intervalli di frequenza: questo lo si ottiene facendo in modo che ogni segnale moduli una determinata portante. Per N segnali, ci saranno cioè N portanti.

A seconda del tipo di modulazione adottata, si ottengono chiaramente segnali multipli con diverse caratteristiche, più o meno favorevoli a seconda delle applicazioni:

- **sistema con modulazione di ampiezza**: quando il singolo segnale modula d'ampiezza una portante, ma non viene trasmessa la portante stessa (si realizza cioè una modulazione *AM standard*), lo svantaggio è nella necessità di usare un demodulatore coerente, mentre il vantaggio è quello di non caricare inutilmente, con la presenza delle portanti, gli amplificatori: infatti, questo ulteriore carico richiederebbe un comportamento lineare su un più ampio intervallo di ampiezze, al fine di evitare le distorsioni armoniche (di cui si parlerà più avanti) e i conseguenti problemi dovuti all'intermodulazione. Non solo, ma se la portante non viene trasmessa, la potenza del segnale modulato diventa proporzionale alla potenza del segnale modulante e non si trasmette niente quando il canale è a riposo: questo reca un ulteriore grosso vantaggio in termini di carico degli amplificatori, specialmente nel caso di segnali caratterizzati da considerevoli pause o, comunque, da notevoli variazioni di potenza, come il segnale telefonico.
  Le 3 possibili tecniche di modulazione sono le seguenti:

  - **modulazione di ampiezza con banda laterale unica** (SSB): questa tecnica è quella che minimizza l'occupazione di banda, in quanto ogni segnale modulato occupa una banda pari a quella del segnale modulante; lo svantaggio è invece quello di richiedere una elevata selettività dei filtri in ricezione, specie nel caso in cui il segnale modulante abbia un elevato rapporto tra frequenza massima e frequenza minima[5] (in questi casi, può essere preferibile un sistema con **banda laterale parzialmente soppressa)**;
  - **modulazione di ampiezza in doppia banda laterale e portante soppressa** (DSB-SC): rispetto alla modulazione SSB, in questo caso occupiamo una banda doppia (ogni segnale modulato ha banda pari al doppio della banda del segnale modulante), ma possiamo usare filtri meno selettivi e quindi più semplici; la selettività potrà inoltre essere tanto minore quanto maggiore è la distanza tra le varie portanti. Infine, si può anche pensare di trasmettere due segnali in quadratura, occupando la stessa banda necessaria a trasmettere uno solo dei due: dato però che questa tecnica è più sensibile al rumore, essa è consigliabile solo quando i due segnali modulanti sono di tipo numerico, dato che i segnali di tipo numerico sono più immuni ai disturbi ed alle interferenze;

[5] A rigore, un segnale che non contiene la continua è, per definizione, un segnale passa-banda; tuttavia, un segnale passa-banda in cui la frequenza massima è molto maggiore della frequenza minima, si può in prima approssimazione vedere come un segnale passa-basso. Per esempio, consideriamo la differenza che c'è quando bisogna campionare un segnale passa-basso o un segnale passa-banda: nel primo caso, la minima frequenza di campionamento è il doppio della frequenza massima del segnale (che poi coincide con la banda), mentre nel secondo caso è il doppio della banda passante, cioè della differenza tra frequenza massima e frequenza minima; se però la frequenza massima è molto maggiore della minima, allora si considererà una frequenza di campionamento doppia della frequenza massima, intendendo quest'ultima come banda del segnale.

- **modulazione di ampiezza in doppia banda laterale e portante trasmessa** (AM-standard): in questo caso, abbiamo ancora il problema della occupazione di banda doppia rispetto alla SSB ed abbiamo anche il problema della maggiore potenza da trasmettere, in quanto, anche quando i segnali modulanti sono nulli (si parla di *canali inattivi*), vanno comunque trasmesse le portanti; d'altra parte, il grosso pregio è nella possibilità di effettuare in ricezione una demodulazione non coerente, il che semplifica la realizzazione degli apparati riceventi;

- **modulazione angolare**: anche la modulazione angolare (di frequenza o di fase) consente di spostare in frequenza un segnale, modificandone però le caratteristiche; la banda occupata è maggiore rispetti ai casi precedenti e viene trasmessa sempre la stessa potenza, quale che si la potenza del segnale modulante. Questo tipo di modulazione viene usata più di frequente per la trasmissione di segnali di tipo numerico.

TECNICA DELLA DIVISIONE DI TEMPO

Nella tecnica della **divisione di tempo** (**TDM**, *time division multiplex*), l'informazione relativa ai diversi segnali semplici viene inviata in tempi diversi. In pratica, il canale di trasmissione viene messo a disposizione dei singoli canali in successione di tempo.

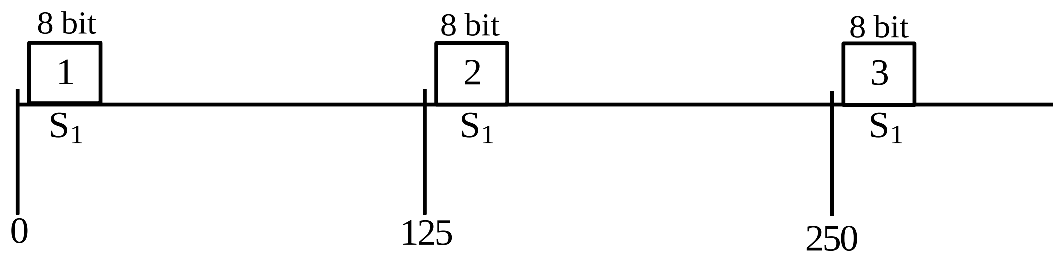
Per comprendere come funziona questa tecnica, facciamo riferimento ad un caso concreto, che è quello della trasmissione numerica del segnale telefonico. A questo proposito, cominciamo col dire che lo standard internazionale prevede, per la trasmissione numerica dei segnali telefonici, una frequenza di campionamento di 8000(Hz)[6] ed una quantizzazione effettuata con 8 bit. Questi valori indicano, in pratica, che il segnale binario in uscita al quantizzatore, ossia il segnale che deve essere trasmesso (a meno di ulteriori bit di controllo aggiunti dal codificatore di canale) attraverso il canale, consiste di 64000 bit emessi al secondo: infatti, una frequenza di 8000(Hz) implica che vengano prelevati 8000 campioni al secondo e, se a ciascun campione vengono associati 8 bit, si ha che la "sorgente complessiva", ossia l'insieme di sorgente-campionatore-quantizzatore, emette un segnale composto da 64000 bit al secondo.

Di conseguenza, il canale usato per la trasmissione del singolo segnale telefonico deve avere una "capacità" di almeno 64000 bit al secondo, ossia deve poter trasmettere almeno 64000 bit al secondo.

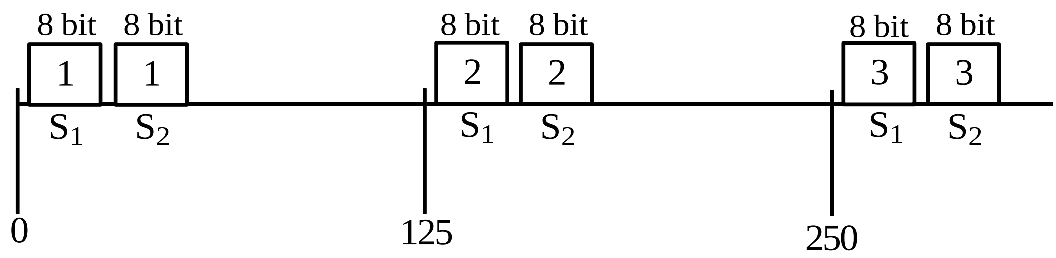
Dato che i canali utilizzati consentono di ottenere delle capacità di gran lunga maggiori, è possibile usarli per trasmettere "*più conversazioni in parallelo*". Vediamo come.

Se la frequenza di campionamento usata nello standard PCM è di 8000(Hz), il periodo di campionamento è di 125μsec: questo significa che, una volta prelevato, quantizzato e trasmesso un campione, sono necessari 125μsec perché venga prelevato, quantizzato e trasmesso il campione successivo. Quindi, tra l'invio di un campione e l'invio del successivo, il canale risulta "inattivo" per 125μsec:

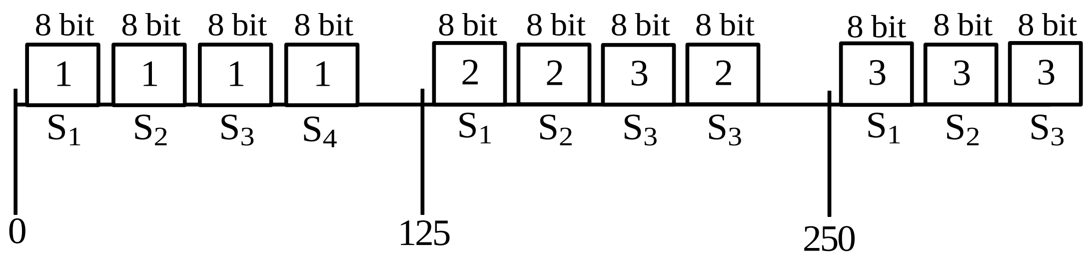
[6] Questi 8000 Hz per la frequenza di campionamento derivano dall'applicazione del teorema del campionamento: il segnale telefonico (o, meglio, il **segnale vocale di qualità telefonica**) è un segnale con banda compresa tra 300 Hz e 3400 Hz, cioè un segnale praticamente passa-basso (anche se non contiene la continua, vi è comunque abbastanza vicino); allora, in base al teorema del campionamento, per conservare le informazioni contenute nel segnale è sufficiente una frequenza di campionamento di 6800 Hz, pari cioè al doppio della banda occupata. Gli 8000 Hz derivano allora dalla necessità di sovracampionare, cioè di andare ben al di sopra del limite minimo teorico, al fine di prevenire le limitazioni fisiche dei dispositivi utilizzati.



In questo schema, abbiamo rappresentato i tempi di invio del 1° campione, del 2° campione e del 3° campione prelevati dalla generica sorgente S_1. Risulta allora evidente il tempo durante il quale il canale rimane inattivo. Allora, possiamo pensare di impiegare il tempo che intercorre tra il primo e il secondo campione della S_1, per inviare il primo campione di un'altra sorgente, che indichiamo con S_2; stesso discorso per l'intervallo di tempo che intercorre tra il secondo ed il terzo campione di S_1 e così via per tutti gli intervalli di tempo:



Se poi avanza ancora tempo, possiamo inviare anche i campioni emessi da una terza sorgente e così via, finche il tempo a disposizione non si esaurisce:



In tal modo quindi, noi riusciamo a trasmettere, contemporaneamente, più di una conversazione, ossia riusciamo ad implementare, su un unico canale fisico, più di un canale logico.

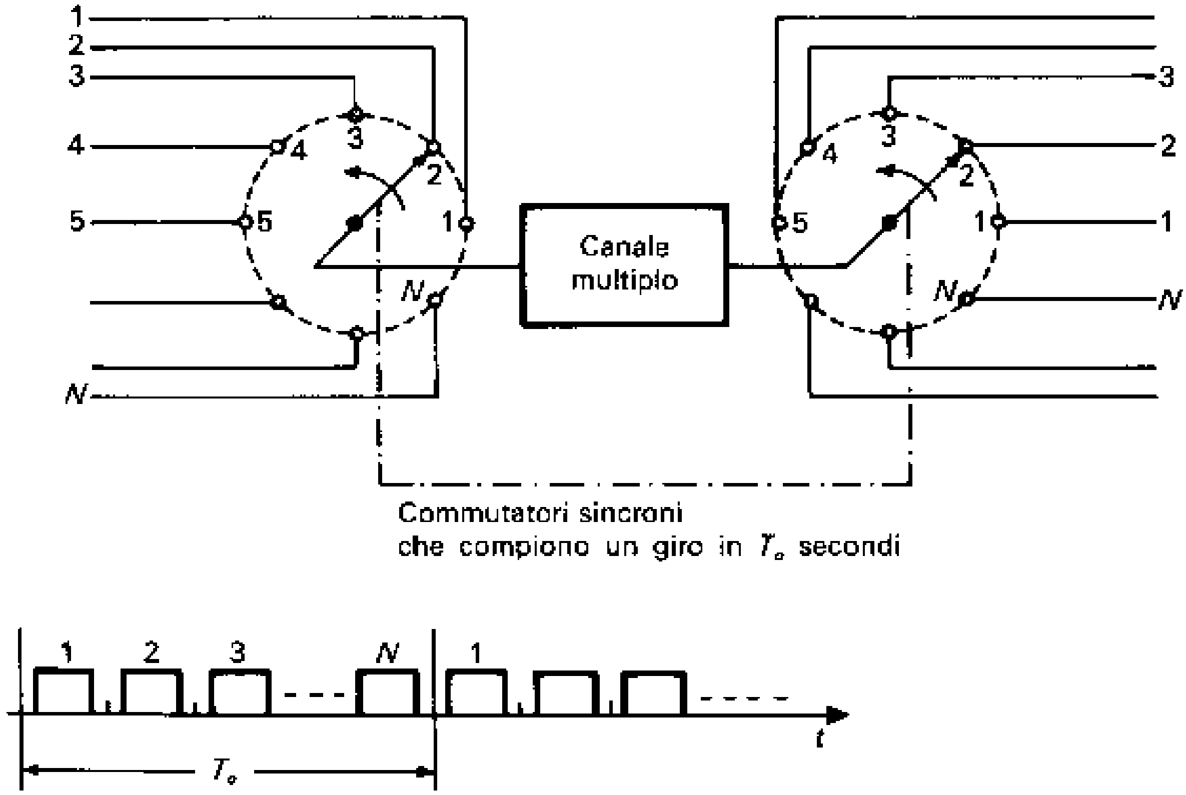
E' subito ovvio che il numero di canali logici che noi possiamo realizzare con un unico canale fisico dipende dalla capacità di tale canale fisico: considerando che ogni canale logico, secondo lo standard, necessita di 64000 bit al secondo, avremo bisogno di un canale fisico di almeno 128000 bit/secondo per realizzare due canali logici, di un canale fisico di almeno 192000 bit/secondo per realizzare 3 canali logici e così via.

A seconda di quanti canali logici noi realizziamo, si parla di un diverso "**livello**": per esempio, si parla di "**gerarchia del 1° livello**" quando i canali logici realizzati sono 32.

E' bene inoltre sottolineare come non tutti i canali logici sono utilizzati per trasmettere comunicazioni telefoniche, in quanto alcuni di essi vengono utilizzati per comunicazioni di servizio, ossia per inviare informazioni necessarie a far funzionare l'apparato di comunicazione; in particolare, ci sono fondamentalmente informazioni necessarie per la "sincronizzazione" degli apparati e scambi di comunicazioni varie tra le varie centrali. Per esempio, nella gerarchia del 1° livello, il canale numero 1 viene usato per la sincronizzazione, mentre il canale 17 viene usato per mettere in comunicazione le varie centrali.

Vengono inoltre trasmesse alcune oscillazioni, con livello accuratamente stabilizzato, dette **frequenze pilota**: queste oscillazioni servono sia per la regolazione ed il controllo del sistema di trasmissione, sia anche per misurare il livello relativo di un certo segnale multiplo in quei punti dove tale misura interessa (per questa operazione, il segnale telefonico non va bene, in quanto esso ha un livello variabile al variare del parlatore).

Dobbiamo adesso capire come si possa realizzare uno schema di trasmissione di questo tipo. Lo si fa secondo lo schema della figura seguente:

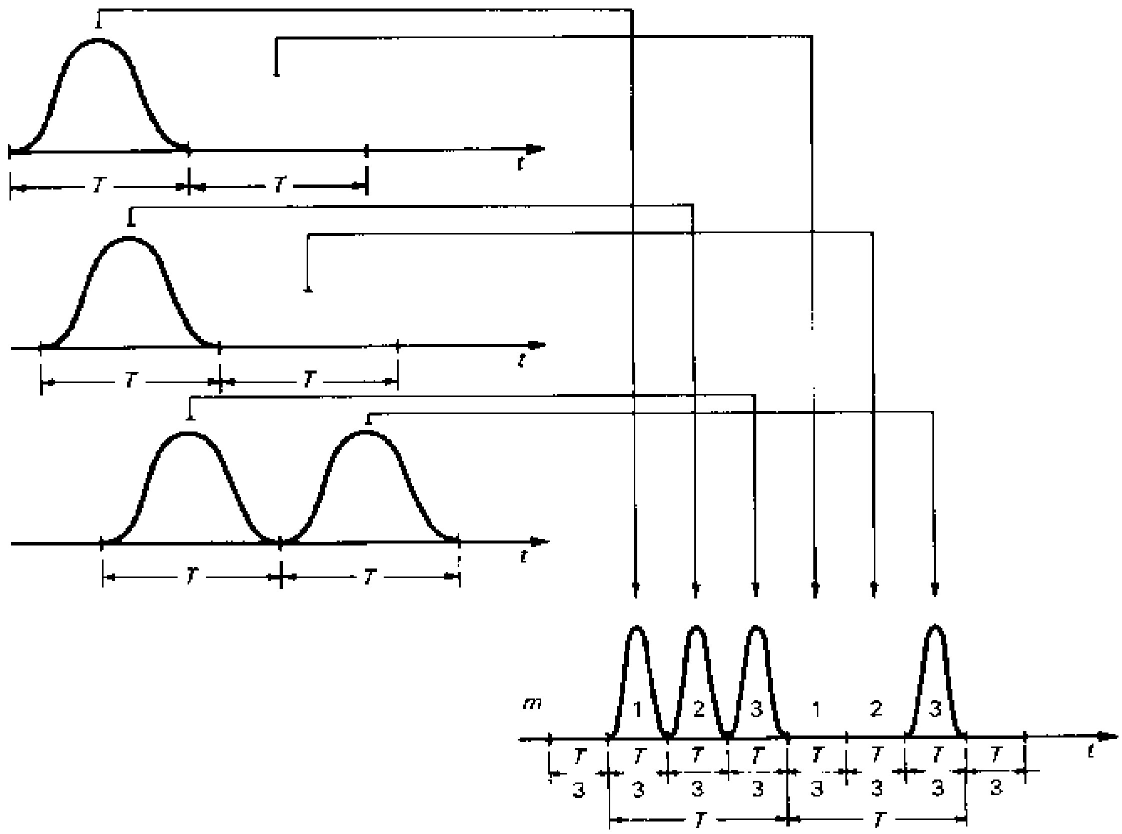


A sinistra ci sono le N sorgenti (per esempio N utenti che stanno telefonando) che inviano le proprie informazioni verso il mezzo trasmissivo (indicato con la dicitura **canale multiplo**). Tale mezzo trasmissivo, tramite un apposito **commutatore sincrono**, viene reso disponibile, per ciascun canale, non in modo continuativo, ma solo in intervalli di tempo discreti, equispaziati tra loro di un tempo pari a T_0/N, dove T_0 è il tempo necessario al commutatore per compiere un intero giro. In pratica, quindi, il commutatore campiona le informazioni di ciascun canale con un periodo di campionamento pari a T_0/N.

E' ovvio, allora, che il meccanismo funziona senza inconvenienti solo se i segnali singoli sono temporalmente discontinui, rappresentati cioè da una successione di simboli temporalmente distinti: in caso contrario, si perderebbero tutte le informazioni che il singolo segnale trasporta mentre il commutatore si sta dedicando agli altri segnali. Il caso più semplice è ovviamente quello, descritto prima, della trasmissione numerica: in questo caso, ogni segnale singolo è costituito dagli impulsi rappresentanti dei bit, per cui si tratta di segnali tutti con la stessa frequenza di cifra. Se i singoli segnali sono di tipo numerico, si può pensare sia di prelevare un bit per volta da ognuno di essi, sia anche gruppi di bit per volta, nel caso in cui la frequenza di cifra sia molto maggiore della frequenza con cui il commutatore rende disponibile il canale per ciascun segnale.

Se i singoli segnali sono invece tempo-continui, allora vanno necessariamente campionati e in qualche modo è il commutatore stesso che fa da campionatore: dopo di esso, andrà quindi predisposto un opportuno sistema che operi la quantizzazione dei campioni e la successiva trasmissione sul mezzo trasmissivo unico.

A questo punto, dobbiamo capire quanto sia estesa la banda necessaria a trasmettere un segnale TDM comprendente N segnali semplici: si può dimostrare che *la banda minima richiesta è la stessa richiesta da un segnale di tipo FDM, cioè è pari ad N volte la banda B dei singoli segnali*. Una giustificazione intuitiva di questo è rappresentata nella figura seguente, riferita al caso di un segnale multiplo TDM (indicato con m) composto da N=3 canali:



Il generico segnale numerico singolo di partenza è formato da impulsi di durata T: data l'azione del commutatore, nel segnale TDM il tempo riservato a ciascun impulso è diviso per N rispetto al tempo T, per cui ciascun impulso dura adesso un tempo T/N. Si è cioè ottenuto un nuovo segnale di tipo numerico, dove però il tempo di ripetizione degli impulsi è diventato T/N. La corrispondente banda occupata sarà allora N volte la banda del segnale di partenza, ossia appunto BN.

Questo quando i singoli segnali componenti sono già numerici. Se invece si tratta di segnali tempo-continui, bisogna per prima cosa campionarli: se B è la banda occupata dal generico di questi segnali, la minima frequenza di campionamento sarà 2B, il che significa che avremo 2B campioni al secondo per ogni segnali. Multiplando questi campioni, si ottiene un segnale TDM che prevede 2NB campioni al secondo: allora, la banda minima necessaria, per non avere interferenza tra i vari campioni, è ancora una volta NB.

Abbiamo dunque visto che è basilare il funzionamento del commutatore, che consente la separazione di ciascun canale dagli altri, in quanto effettua un "prelievo" temporale dei campioni relativi a ciascun canale. Lo stesso commutatore deve essere presente in ricezione, dove si comporterà nello stesso modo: esso deve prelevare un campione per volta dal segnale TDM che riceve dal mezzo trasmissivo e deve inviare ogni campione al corrispondente ricevitore. E' ovvio, quindi, che i due commutatori in trasmissione ed in ricezione devono essere perfettamente sincroni, in modo che ogni ricevitore riceva solo i campioni che gli competono. Data la criticità della sincronizzazione, nel segnale multiplo trasmesso viene inserito un apposito **segnale di sincronismo di trama**: esso comunica all'apparecchiatura ricevente dove è stata convenzionalmente fissata l'origine dei tempi in trasmissione, a partire dalla quale è quindi possibile effettuare la numerazione dei canali 1,2,3,.....N.

Osservazione: caratteristiche statistiche del segnale telefonico multiplo FDM

Un segnale telefonico multiplo realizzato con tecnica FDM è, in pratica, un segnale dato dalla somma di tanti segnali statisticamente indipendenti tra di loro. Allora, invocando il famoso *teorema del limite centrale*, la distribuzione statistica delle ampiezze del segnale, per un grande numero di canali multiplexati, tende ad essere di tipo gaussiano. Allora, possiamo interpretare un segnale telefonico multiplo FDM con grande numero di canali come un rumore termico (quindi con distribuzione gaussiana delle ampiezze), con densità spettrale di potenza costante in una banda pari a quella del segnale composito . Questo consente di fare i calcoli su un sistema di questo tipo: all'uscita del mezzo trasmissivo, infatti, si può assumere che arrivi un segnale con densità spettrale di potenza $h_S(f)$ che è quella di un rumore gaussiano equivalente ed al quale si sovrapporrà un rumore in ricezione (comprensivo del solito rumore fornito dal mezzo trasmissivo e da quello fornito dalla successiva apparecchiatura ricevente) con densità spettrale di potenza $h_S(f)$. Il rapporto segnale-rumore all'ingresso dell'apparato ricevente è dunque

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{IN} = \frac{h_S(f)}{h_N(f)} \cong \frac{kT_{eq,S}}{FkT_{eq,N}}$$

dove abbiamo supposto che le due densità spettrali siano praticamente costanti su tutta la banda considerata (il che non necessariamente è vero, almeno per $h_S(f)$, dato che la banda occupata potrebbe essere particolarmente ampia), dove F tiene conto della rumorosità dell'apparato di ricezione (ricordiamo che $h_N(f)$ è il rumore dell'apparato riportato però a monte dell'apparato stesso, da cui appunto la necessità di considerare il fattore di rumore) e dove $T_{eq,S}$ e $T_{eq,N}$ sono le temperature equivalenti di rumore, la prima da calcolarsi e la seconda che si può ritenere pari alla temperatura ambiente di 293°K.

Segnali di tipo numerico multiplati a divisione di frequenza

I segnali soggetti a multiplazione con divisione di frequenza non sono solo quelli analogici, ma anche quelli di tipo numerico. In questo caso, ci sono notevoli differenze.

In primo luogo, bisogna affrontare la scelta della modulazione da adottare per allocare in frequenza in vari spettri: bisogna allora ricordarsi che i segnali numerici sono molto sensibili alle distorsioni di fase, per cui non si può pensare, come nel caso analogico con modulazione SSB, di usare in ricezione una oscillazione locale non coerente con la portante.

Inoltre, i segnali numerici presentano molto spesso uno spettro che comincia da frequenza zero, nel qual caso sappiamo che il sistema SSB non è utilizzabile, in quanto non si possono realizzare filtri che separino perfettamente la banda laterale superiore da quella inferiore. In questi casi, è necessario o modificare opportunamente lo spettro del segnale numerico elementare[7] o ricorrere almeno ad una modulazione di tipo VSB.

[7] Ricordiamo che un segnale numerico non è altro che una sequenza di segnali elementari, uguali tra loro ma moltiplicati per un coefficiente che porta di fatto l'informazione binaria: ad esempio, nel caso di una codifica ortogonale, il segnale elementare è un rettangolo e viene moltiplicato per un coefficiente +1 o 0 a seconda che si voglia trasmettere l'1 logico o lo 0 logico; nella codifica antipodale, invece, si usa ancora il rettangolo, ma i coefficienti sono +1 e -1.

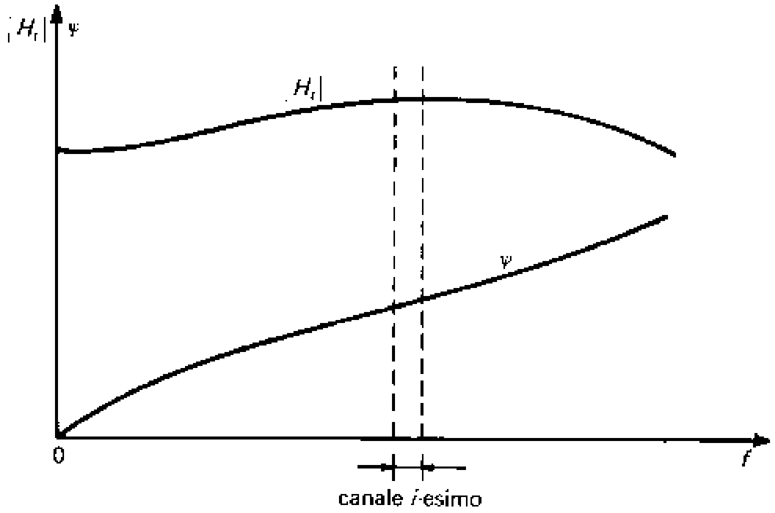
D'altra parte, i segnali numerici sono più resistenti ai disturbi, per cui i problemi dell'*intermodulazione* sono meno gravi.

Un tipico segnale numerico multiplo FDM si ottiene quando si trasmettono più segnali telegrafici (che sono segnali numerici) in un unico canale telefonico: in questo caso, si adotta una modulazione di frequenza, che è particolarmente vantaggiosa per la sua semplicità.

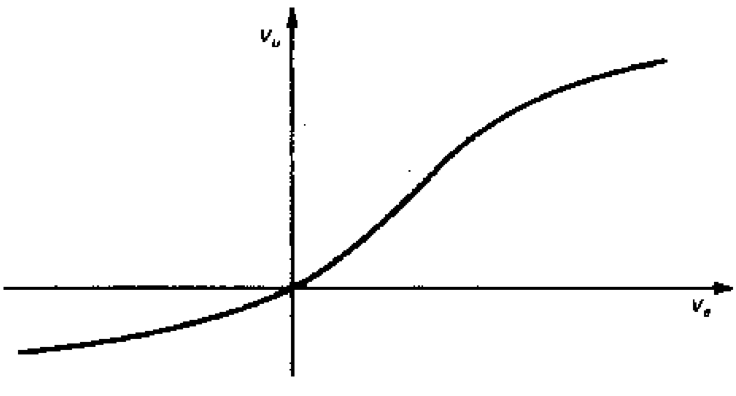
CARATTERISTICHE RICHIESTE AL MEZZO TRASMISSIVO

Per quanto riguarda i requisiti sulle caratteristiche del mezzo trasmissivo, il segnale TDM ed il segnale FDM hanno proprietà notevolmente diverse.

Nel caso del segnale FDM, distorsioni di ampiezza e di fase producono degli effetti che possono essere valutati separatamente per ciascun canale componente, in funzione evidentemente della porzione della caratteristica di ampiezza e della porzione della caratteristica di fase che cadono entro la banda del segnale considerato:



Nel caso semplice in cui le caratteristiche del mezzo varino così lentamente con la frequenza da potersi ritenere che in ciascun canale l'ampiezza sia costante e la fase lineare, l'effetto delle distorsioni predette è minimo, in quanto provoca semplicemente una differenza di livello (**distorsione di ampiezza**) ed una differenza di ritardo (**distorsione di fase**) tra i vari canali. Più problemi ci sono invece, sempre per un segnale FDM, per eventuali **distorsioni armoniche**, dovute ad esempio ad una caratteristica di trasferimento del tipo seguente:



Queste non linearità producono frequenze spurie (da cui appunto il termine di distorsione armonica), che determinano interferenza tra vari canali: infatti, una frequenza che inizialmente apparteneva ad un certo canale, passa attraverso la non linearità e viene spostata su un altro canale, dando appunto interferenza tra i due.

Nel caso del segnale TDM, invece, la situazione è in un certo senso complementare. Ad esempio, le distorsioni armoniche appena considerate producono conseguenze che possono essere valutate separatamente per ciascun canale: infatti, la non linearità del sistema agisce in successione sui singoli segnali, modificandone l'ampiezza in modo non lineare. Al contrario, le distorsioni di ampiezza e di fase producono deformazioni dei segnali trasmessi, per esempio producendo delle code di un canale che cadono in corrispondenza dei tempi riservati ad altri canali: si genera in questo caso delle interferenze, che poi non sono altro, con riferimento alla trasmissione numerica, che delle interferenze intersimbolo[8].

E' bene fare anche una osservazione a proposito di un segnale FDM: se questo segnale comprende un numero elevato di segnali singoli e la banda di tali segnali è ampia, la banda occupata sul mezzo trasmissivo è a sua volta piuttosto ampia, il che fa si che le caratteristiche del mezzo differiscano anche notevolmente dai segnali in bassa frequenza a quelli in alta frequenza. Per evitare che ci sia una differenza eccessiva, spesso si fa in modo che il segnale FDM complessivo non inizi ad una frequenza molto bassa, in modo che il rapporto tra la massima frequenza e la minima frequenza non sia troppo elevato.

Il segnale FDM ebbe in passato una applicazione molto maggiore del segnale TDM, principalmente perché le operazioni più delicate venivano effettuate, per il sistema FDM, da filtri, ossia da dispositivi realizzabili essenzialmente con elementi passivi. Questo consentiva di ottenere una alta affidabilità, un piccolo ingombro e un basso consumo. Quando poi sono comparsi il transistore e successivamente i circuiti integrati, la situazione è profondamente cambiata, per cui i sistemi TDM sono diventati sempre più numerosi, dato anche il contemporaneo e rapido progresso delle tecniche di elaborazione numerica dei segnali e quindi della trasmissione numerica.

CONSIDERAZIONI GENERALI SUI FILTRI IN RICEZIONE

Abbiamo ormai capito che un componente fondamentale di un qualsiasi sistema di trasmissione è il **filtro**, il quale, a prescindere da dove si trova (trasmissione o ricezione), deve presentare caratteristiche di buona selettività. Facciamo allora una serie di considerazioni qualitative sulla realizzazione concreta dei filtri.

In primo luogo, un filtro costituito da un doppio bipolo reattivo chiuso su resistenze ha, a parità di attenuazione desiderata nella **banda attenuata**, una complicazione (ossia un numero di componenti) tanto maggiore quanto più l'intervallo di transizione tra **banda passante** e banda attenuata è piccolo rispetto alla banda passante; in altre parole, non conta l'intervallo di transizione in sé, quanto il suddetto intervallo confrontato con la banda passante.

Inoltre, a parità di filtro, quanto più elevata è la **frequenza centrale** della banda passante, tanto più stabili devono essere i vari componenti, in modo che le variazioni dei loro parametri siano percentualmente piccole.

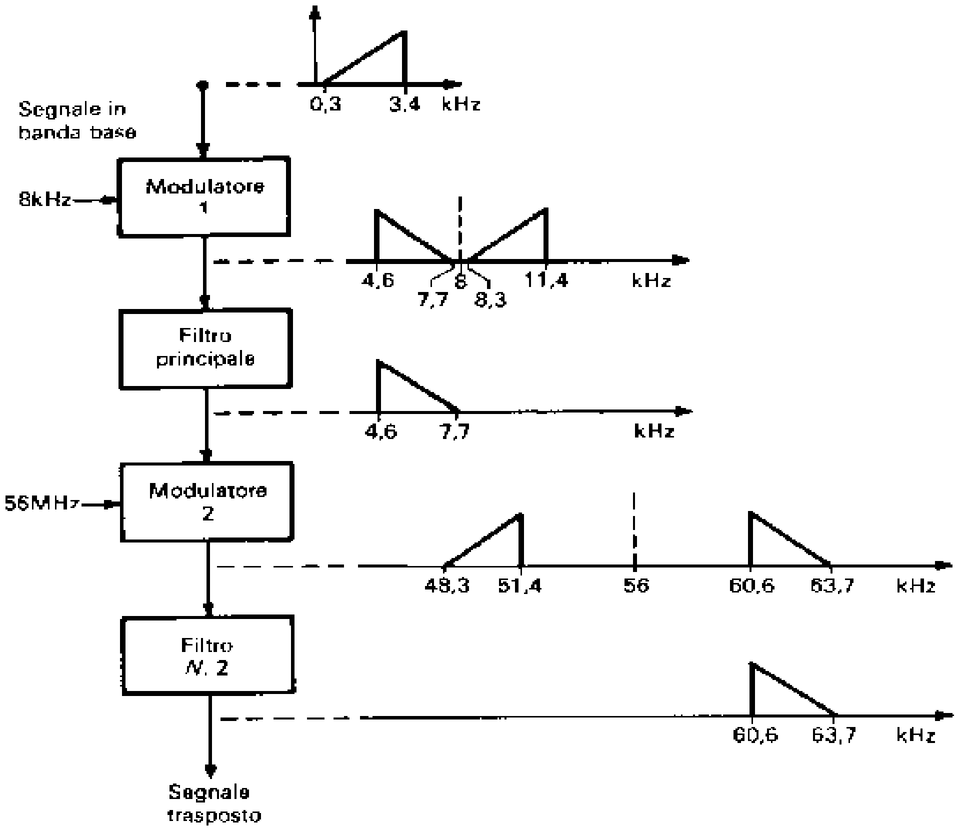
Ancora, le perdite inevitabilmente associate agli elementi reattivi producono degli effetti maggiori in quei filtri con intervallo di transizione piccolo rispetto alla banda passante. Inoltre, al variare della frequenza centrale, l'effetto delle perdite si manterrebbe costante se il fattore di qualità degli induttori ($Q_L=\omega L/R$) e dei condensatori ($Q_C=\omega RC=\omega C/G$) si mantenesse proporzionale alla frequenza. Nella pratica, invece, ciò non accade, in quanto i parametri R, L e C variano anch'essi con la frequenza: si riscontra che, oltre una certa frequenza di lavoro, il fattore di qualità non è costante,

[8] La differenza con l'interferenza da intersimbolo vista nel capitolo sulla trasmissione numerica era che, in quel caso, erano i simboli dello stesso segnale che interferivano gli uni con gli altri; nel caso del segnale TDM, a questa interferenza si aggiunge invece quella dovuta a simboli appartenenti ad altri segnali, il che rende più critica la cosa.

mentre lo è il cosiddetto **fattore di perdita**, che vale R/L per un induttore e G/C per un condensatore.

Per questa serie di motivi, i filtri sono spessi realizzati usando non tanto risonatori elettrici (circuiti RLC parallelo o, meno di frequente, RLC serie), ma risonatori di tipo meccanico, con i quali è più facile ottenere la stabilità e le basse perdite richieste. L'accoppiamento elettromeccanico necessario in queste applicazioni è ottenuto sfruttando tipicamente il fenomeno della **piezoelettricità**: lo sfruttamento di questo fenomeno ha portato all'attuazione di **filtri a quarzo**, che usano appunto **risonatori a quarzo** al posto dei risonatori elettrici, con connessioni elettriche tra i vari risonatori e l'aggiunta di opportuni induttori per consentire l'attuabilità dei filtri per le bande richieste.

Nel caso in cui si usino invece **filtri elettrici** (si tratta, in generale, di doppi bipoli reattivi chiusi su resistenze, come un LC parallelo con resistenza di carico), gli inconvenienti di cui abbiamo parlato prima si possono superare con metodi cosiddetti a **doppia modulazione**. Consideriamo ad esempio un segnale modulante di tipo telefonico, cioè con frequenze tra 300 Hz e 3.4kHz:



In questo schema, il segnale modulante entra in un primo modulatore, che effettua una modulazione DSB-SC con una portante ad 8 kHz; il segnale di uscita occupa quindi una banda di 6800 kHz centrata sugli 8 kHz. Il successivo filtro (indicato come *filtro principale*) è quello che deve possedere la selettività maggiore, in quanto deve filtrare una delle due bande laterali (nel caso considerato, esso filtra la banda laterale superiore). Il segnale così ottenuto è dunque un segnale SSB che va però ancora traslato in frequenza, il che si ottiene con una successiva modulazione DSB-SC, usando questa volta una portante a 56MHz. Il segnale così ottenuto presenta una notevole spaziatura tra le due bande laterali, per cui il filtro che deve eliminare una delle due (quella inferiore nel caso considerato) può presentare una selettività senz'altro minore rispetto al filtro precedente.

Con questo schema, abbiamo cioè ottenuto una modulazione SSB con due successive modulazioni e due filtraggi, di cui però il primo molto selettivo ed il secondo molto meno.

Complementi sulla trasmissione numerica

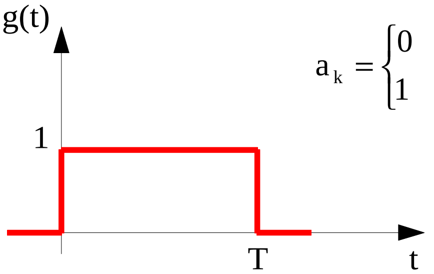
ESPRESSIONE GENERALE DI UN SEGNALE NUMERICO

Abbiamo visto che un generico segnale numerico non è altro che una sequenza temporale di segnali elementari, ripetuti a passo T (detto **periodo di cifra** o *periodo di segnalazione* e *periodo di simbolo*), pari all'inverso della frequenza di cifra f_S. Per esprimere analiticamente questo concetto, possiamo allora esprimere il generico segnale numerico nel modo seguente:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

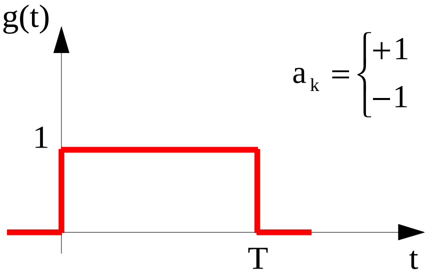
Abbiamo in pratica considerato una sequenza infinita di segnali elementari g(t), ripetuti a passo T, ciascuno moltiplicato per un coefficiente a_k. Dato che g(t) è sempre lo stesso, è ovvio che l'informazione binaria viene a questo punto portata proprio dai coefficienti a_k. Vediamo allora qualche esempio con riferimento alle codifiche precedentemente considerate:

- il caso più semplice è quello di una **codifica ortogonale**: in questo caso, il segnale elementare g(t) è semplicemente un rettangolo di ampiezza unitaria e durata T, mentre i coefficienti a_k valgono 0 quando si trasmettere lo 0 logico oppure 1 quando si trasmesse l'1 logico:



$$a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

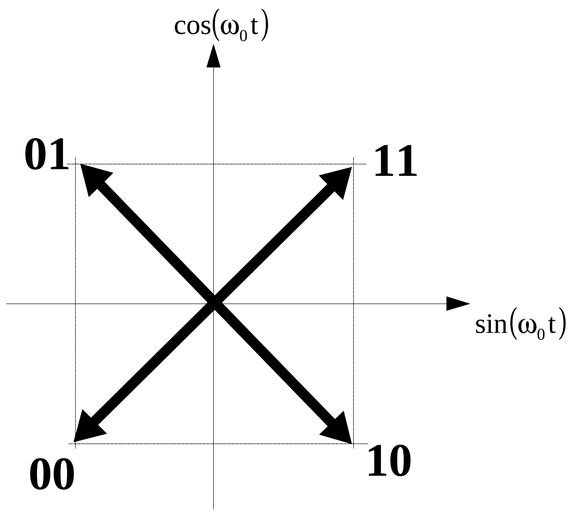
- nel caso, invece, di una **codifica antipodale**, il segnale elementare g(t) è lo stesso di prima, ma i coefficienti a_k valgono adesso -1 quando si trasmettere lo 0 logico oppure +1 quando si trasmesse l'1 logico:



$$a_k = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Questi sono due casi semplici, validi nel caso di un sistema a due soli livelli. Se, invece, consideriamo per esempio un sistema a 4 livelli, allora avremo ancora lo stesso segnale elementare rettangolare, ma i coefficienti assumono 4 valori, come ad esempio -3,-1,+1,+3.

In generale, i coefficienti a_k sono coefficienti complessi, che cioè intervengono a modificare sia il modulo sia la fase del segnale elementare g(t). Consideriamo per esempio un sistema di trasmissione con modulazione PSK a 4 livelli. In questo caso, sfruttando il metodo delle due portanti isofrequenziali in quadratura, trasmettiamo, in ogni periodo di cifra, una tra 4 possibili forme d'onda, corrispondenti a 4 vettori rappresentati nella figura seguente (dove si è ipotizzata anche la codifica binaria associata ai 4 segnali):



Se assumiamo che i vettori abbiano tutti lunghezza unitaria, questi 4 segnali sono tutti di modulo 1 e differiscono per la fase (di multipli di π/4); ciò significa che possono essere visti come il prodotto di un segnale rettangolare per uno tra i seguenti 4 coefficienti:

$$e^{j\frac{\pi}{4}}, e^{j\frac{3\pi}{4}}, e^{j\frac{5\pi}{4}}, e^{j7\frac{\pi}{4}}$$

Infatti, questi coefficienti non modificano il modulo del segnale elementare g(t), che vale sempre 1, ma ne modificano la fase.

SPETTRO DI POTENZA DI UN SEGNALE NUMERICO

La rappresentazione analitica di un segnale numerico così come è stata fornita nel paragrafo precedente consente di calcolare facilmente lo spettro del segnale numerico, in base alla codifica di linea utilizzata, e quindi anche lo spettro di potenza dello stesso segnale.

Consideriamo dunque nuovamente il generico segnale numerico nella forma

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

Vogliamo calcolarne direttamente lo spettro di potenza. Possiamo allora procedere con due passaggi: prima ne calcoliamo la funzione di autocorrelazione e poi ne facciamo la trasformata, visto che lo spettro di potenza di un segnale aleatorio è definito proprio come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale stesso.

Applichiamo allora la definizione di funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio:

$$R_S(t_1, t_2) = E\left[s^*(t_1)s(t_2)\right] \qquad \text{con } t_2 > t_1.$$

dove ovviamente $s^*(t)$ è il complesso coniugato di s(t).

Questa definizione è valida, però, per un segnale aleatorio generico: noi facciamo invece l'ipotesi che la sorgente simbolica che stiamo codificando sia una sorgente stazionaria, il che significa che mantiene inalterate nel tempo le proprie caratteristiche di emissione. Sotto questa ipotesi, è ovvio che anche il segnale v(t) mantiene costanti nel tempo le proprie caratteristiche statistiche, il che, come sappiamo, implica che l'autocorrelazione non dipenda dai due istanti t_1 e t_2 in assoluto, ma solo dalla loro differenza. In termini analitici, possiamo allora ridefinire l'autocorrelazione nel modo seguente:

$$R_S(\tau) = E\left[s^*(t)s(t+\tau)\right]$$

In base alla stazionarietà, l'autocorrelazione non dipende dal particolare istante t considerato, ma dal valore di τ. Sostituendo l'espressione di s(t) e considerando la linearità dell'operatore media e dell'operatore sommatoria, abbiamo quanto segue:

$$R_S(\tau) = E\left[s^*(t)s(t+\tau)\right] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* g^*(t-kT) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i g(t+\tau-iT)\right] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_k^* g^*(t-kT) a_i g(t+\tau-iT)\right] =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} E\left[a_k^* a_i g^*(t-kT)g(t+\tau-iT)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} E\left[a_k^* a_i\right] g^*(t-kT)g(t+\tau-iT)$$

In base a questa espressione, $R_S(\tau)$ viene a dipendere dalla media $E\left[a_k^* a_i\right]$ del prodotto dei coefficienti a_k ed a_i, ed è abbastanza ovvio che sia così, visto che, come sottolineato in precedenza, l'informazione del segnale numerico è trasportata proprio dai coefficienti e non dai vari g(t-kT).

Allora, possiamo sin da ora distinguere due casi:

- il primo caso è quello in cui l'emissione di un bit non dipende dall'emissione dei bit precedenti: questo significa che i coefficienti a_k sono tra loro indipendenti, il che comporta che

$$E\left[a_k^* a_i\right] = E\left[a_k^*\right] E\left[a_i\right] \qquad \text{per } i \neq k$$

- il secondo caso è invece quello in cui i bit sono tra loro correlati e quindi lo sono anche i coefficienti a_k: in questo caso, l'ultima relazione non è valida.

A proposito della relazione $E\left[a_k^* a_i\right] = E\left[a_k^*\right] E\left[a_i\right]$, è inoltre importante fare due osservazioni:

- in primo luogo, essa vale, oltre che nel caso di indipendenza di simboli, solo quando $i \neq k$: in caso contrario, infatti, risulta

$$E\left[a_k^* a_k\right] = E\left[|a_k|^2\right]$$

- in secondo luogo, data ancora la stazionarietà, si può scrivere, per $i \neq k$, che

$$E\left[a_k^* a_i\right] = E\left[a_k^*\right] E\left[a_i\right] = \mu^* \mu = |\mu|^2$$

dove ovviamente abbiamo genericamente posto $E\left[a_i\right] = \mu$ per $\forall i$.

Fatte queste precisazioni, consideriamo un primo caso particolare, che è quello in cui *i coefficienti sono a valor medio nullo*: ciò significa che μ=0 e quindi che

$$E\left[a_k^* a_i\right] = E\left[a_k^*\right]E\left[a_i\right] = \begin{cases} |\mu|^2 = 0 & i \neq k \\ E\left[|a_k|^2\right] = \sigma_a^2 \neq 0 & i = k \end{cases}$$

Si verifica cioè che tutti i termini della doppia sommatoria valgono zero, tranne quelli che si ottengono per i=k: possiamo allora restringere l'espressione di $R_S(\tau)$ ad una sola sommatoria, che sarà

$$R_S(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E\left[a_k^* a_i\right] g^*(t-kT)g(t+\tau-iT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_a^2 g^*(t-kT)g(t+\tau-kT) =$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^*(t-kT)g(t+\tau-kT) =$$

Quella ottenuta è evidentemente una funzione periodica di periodo T. Ne possiamo allora fare la media sul periodo T, in modo da ottenere la **funzione di autocorrelazione media** del segnale s(t) di partenza:

$$R_{S,media}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_S(\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^*(t-kT)g(t+\tau-kT)dt = \frac{\sigma_a^2}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-T/2}^{T/2} g^*(t-kT)g(t+\tau-kT)dt$$

Possiamo adesso porre per comodità t-kT=θ, per cui abbiamo che

$$R_{S,media}(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-kT-T/2}^{-kT+T/2} g^*(\theta)g(\theta+\tau)d\theta$$

A questo punto, abbiamo ottenuto la somma di infiniti integrali: questi integrali hanno tutti la stessa funzione integranda, ma diversi estremi di integrazione; tuttavia, al variare di k, si nota che gli intervalli di integrazione sono tra loro adiacenti e coprono tutto l'asse reale, da -∞ e + ∞. Di conseguenza, possiamo senz'altro eliminare la sommatoria e estendere l'integrazione a tutto l'asse reale:

$$R_{S,media}(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\theta)g(\theta+\tau)d\theta$$

L'integrale che ci rimane da calcolare non è altro che la funzione di autocorrelazione del segnale elementare g(t): indicandola con $R_g(\tau)$, possiamo concludere che

$$\boxed{R_{S,media}(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T} R_g(\tau)}$$

A questo punto, non ci rimane che trovare la trasformata di Fourier di questa funzione per individuare lo spettro di potenza del segnale numerico s(t): applicando la linearità della trasformata, ci serve conoscere la trasformata di $R_g(\tau)$, ossia lo spettro di energia[9] di g(t); tale spettro, se G(*f*) è la trasformata di g(t), non è altro che $|G(f)|^2$, per cui deduciamo che

$$\boxed{S_S(f)=\frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2}$$

Quindi, la conclusione che possiamo trarre da questo ragionamento è che, ***nell'ipotesi di coefficienti a_k indipendenti e a valor medio nullo, lo spettro di potenza del generico segnale numerico coincide, a meno di un fattore di scala, con lo spettro di energia del segnale elementare di cui è una ripetizione periodica.***

Se i coefficienti non sono più indipendenti, invece, la cosa si complica leggermente: infatti, in questo caso, non possiamo fare molte semplificazioni sull'espressione

$$R_S(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}E\left[a_k^*a_i\right]g^*(t-kT)g(t+\tau-iT)$$

Intanto, possiamo scrivere che

$$E\left[a_k^*a_i\right]=E\left[a_k^*a_{k+\nu}\right]=R_a(\nu)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva ancora dalla stazionarietà. Con questa posizione, l'espressione di $R_S(\tau)$ diventa

$$R_S(\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)g^*(t)g(t+\tau+\nu T)$$

Facendo allora nuovamente la media temporale, abbiamo che

$$R_{S,media}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}R_S(\tau)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)g^*(t)g(t+\tau+\nu T)dt=$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int_{-T/2}^{T/2}R_a(\nu)g^*(t)g(t+\tau+\nu T)dt=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int_{-\nu T-T/2}^{-\nu T+T/2}R_a(\nu)g^*(\theta-\nu T)g(\theta+\tau)d\theta=$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)\int_{-\nu T-T/2}^{-\nu T+T/2}g^*(\theta-\nu T)g(\theta+\tau)d\theta=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)\int_{-\nu T-T/2}^{-\nu T+T/2}g^*(\theta-\nu T)g(\theta+\tau)d\theta=...=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)R_g(\tau-\nu T)$$

Abbiamo dunque trovato che

$$R_{S,media}(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)R_g(\tau-\nu T)$$

Facendo adesso la trasformata di Fourier, otteniamo facilmente che

$$S_S(f)=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)|G(f)|^2e^{-j2\pi f\nu T}=\frac{1}{T}|G(f)|^2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}$$

[9] Ricordiamo che il segnale elementare g(t) è un segnale di durata temporale finita, per cui è anche ad energia finita. Si tratta cioè di un segnale di energia e quindi di potenza nulla, per cui ha senso parlare solo di spettro di energia.

Abbiamo dunque trovato il prodotto di un termine $\frac{1}{T}|G(f)|^2$, coincidente (a meno del fattore di scala 1/T) con lo spettro di energia g(t), per la sommatoria di infiniti termini, tutti dipendenti dalla correlazione $R_a(\nu)$ dei coefficienti a_k. Separando, da questi termini, quello che si ottiene per $\nu=0$, otteniamo

$$S_S(f)=\frac{1}{T}|G(f)|^2 R_a(0)+\frac{1}{T}|G(f)|^2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}$$

Proprio per il fatto che il secondo termine a secondo membro dipende solo dalla correlazione dei dati, esso prende il nome di **spettro dei dati** e si indica con $S_a(f)$. Per inciso, esso rappresenta una trasformata di Fourier discreta (DFT) della funzione $R_a(\nu)$.

Possiamo dunque concludere che

$$\boxed{S_S(f)=\frac{1}{T}|G(f)|^2 S_a(f)}$$

L'utilità di questo spettro dei dati $S_a(f)$ è abbastanza evidente: una volta scelto il segnale elementare g(t), ossia il suo spettro $G(f)$, abbiamo automaticamente fissato anche $S_S(f)$, nel caso in cui i dati siano incorrelati; potremmo però trovarci nelle condizioni per cui tale spettro è inadatto al nostro sistema di trasmissione (ad esempio per problemi legati alla funzione di trasferimento del mezzo trasmissivo). Allora, introducendo una opportuna correlazione tra i dati, noi introduciamo il termine $S_a(f)$ per sagomare $S_S(f)$ come più ci fa comodo. In altre parole, fissato il segnale elementare g(t) (ad esempio rettangoli, in modo da massimizzare l'efficienza degli amplificatori in trasmissione) e fissato $S_S(f)$ in base alle specifiche imposte dal sistema di trasmissione, possiamo determinare il corrispondente $S_a(f)$ e quindi imporre la conseguente correlazione ai dati da trasmettere.

Vale anche un discorso opposto, più semplice: fissato g(t) e fissata la correlazione tra i dati, siamo in grado di determinare $S_a(f)$ e quindi di sapere come è fatto lo spettro di potenza $S_S(f)$ del segnale numerico da trasmettere.

Vediamo allora degli esempi concreti a proposito degli ultimi concetti espressi, al fine, soprattutto, di capire cosa sia esattamente lo spettro dei dati $S_a(f)$.

Cominciamo da un caso semplice in cui *i dati sono indipendenti*, per cui lo sono anche i coefficienti a_k. Ciò significa, in base a quanto visto prima, che

$$R_a(\nu)=E\left[a_k^* a_{k+\nu}\right]=E\left[a_k^*\right]E\left[a_{k+\nu}\right]=\begin{cases}|\mu|^2 & \nu\neq 0\\ E\left[|a_k|^2\right]=\sigma_a^2\neq 0 & \nu=0\end{cases}$$

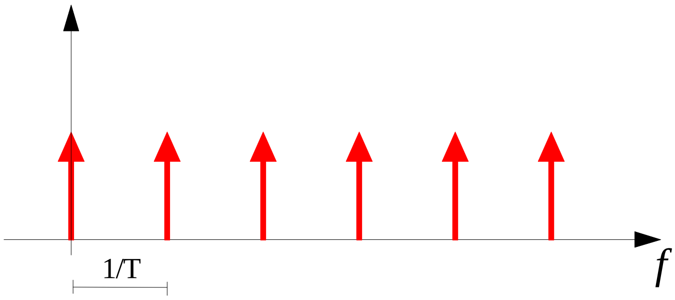
Supponiamo inoltre che i coefficienti a_k siano a *valor medio m diverso da 0*: ciò significa che lo spettro di potenza del nostro segnale ha espressione

$$S_S(f)=\frac{1}{T}|G(f)|^2 S_a(f)$$

ossia è presente lo spettro dei dati. Concentriamoci allora su tale spettro dei dati: possiamo scrivere, per quanto calcolato poco fa, che

$$S_a(f)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}=R_a(0)+\sum_{\substack{\nu=-\infty\\ \nu\neq 0}}^{+\infty}R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}=\sigma_a^2+\sum_{\substack{\nu=-\infty\\ \nu\neq 0}}^{+\infty}|\mu|^2 e^{-j2\pi f\nu T}=\sigma_a^2+|\mu|^2\sum_{\substack{\nu=-\infty\\ \nu\neq 0}}^{+\infty}e^{-j2\pi f\nu T}$$

Quella ottenuta non è altro che la serie esponenziale di Fourier : deduciamo che $S_a(f)$ è un segnale periodico. In particolare, si osserva che si tratta semplicemente di una successione di impulsi ideali, a distanza 1/T uno dall'altro e di area pari a T:



Possiamo dunque esprimere questo spettro nella forma

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + |\mu|^2 \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu\neq 0}}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{\nu}{T}\right)$$

Sostituendo nell'espressione dello spettro di potenza di s(t), abbiamo che

$$S_S(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2 + \frac{|\mu|^2}{T}|G(f)|^2 \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu\neq 0}}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{\nu}{T}\right)$$

Questa formula dice una cosa molto importante: lo spettro di potenza di s(t) è costituita da una parte continua (primo termine a secondo membro) e da una parte discreta, formata da una successione di infiniti impulsi, di area e valore opportuno, posizionati su frequenze multiple di 1/T. Questa parte discreta dello spettro generalmente dà fastidio, in quanto occupa una banda teoricamente infinita ma non porta con se alcuna informazione. Il modo con cui eliminarla è chiaramente quello di porre μ=0, ossia di fare in modo che i coefficienti a_k abbiano valor medio nullo.

Ci chiediamo allora come si possano ottenere coefficienti a_k a valor medio nullo. In generale, se i valori assumibili da a_k sono $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kN}$, con N ovviamente finito, il valor medio si calcola con la classica formula

$$\mu = E[a_k] = a_{k1} \cdot P(a_{k1}) + a_{k2} \cdot P(a_{k2}) + \ldots.. + a_{kN} \cdot P(a_{kN})$$

dove ovviamente $P(a_{k1}), P(a_{k2}), \ldots P(a_{kN})$ sono le probabilità con cui i valori compaiono nella sequenza numerica.

Consideriamo allora un caso semplice, quale quello della trasmissione binaria (2 soli coefficienti) di tipo ortogonale: in questo caso, i coefficienti sono 1 e 0, per cui

$$\mu = E[a_k] = 1 \cdot P(1) + 0 \cdot P(0) = P(1)$$

In questo caso, il valor medio non può mai essere nullo, per cui bisogna rassegnarsi ad avere una parte discreta dello spettro.

Diverso è il caso di una trasmissione binaria antipodale: in questo caso, i coefficienti sono +1 e -1, per cui

$$\mu = E[a_k] = 1 \cdot P(1) + (-1) \cdot P(-1) = P(1) - P(-1)$$

In base a questa formula, risulta $\mu=0$ se e solo se i due simboli sono equiprobabili: si ha infatti P(1)=0.5 e P(-1)=0.5.

Un’altra possibilità è quella in cui i coefficienti sono $e^{j\frac{\pi}{4}}, e^{j\frac{3\pi}{4}}, e^{j\frac{5\pi}{4}}, e^{j7\frac{\pi}{4}}$: abbiamo in questo caso che

$$\mu = E[a_k] = e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot P\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) + e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot P\left(e^{j\frac{3\pi}{4}}\right) + e^{j\frac{5\pi}{4}} \cdot P\left(e^{j\frac{5\pi}{4}}\right) + e^{j\frac{7\pi}{4}} \cdot P\left(e^{j\frac{7\pi}{4}}\right)$$

Se i 4 coefficienti sono equiprobabili, risulta

$$\mu = E[a_k] = \frac{1}{4}\left[e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{3\pi}{4}} + e^{j\frac{5\pi}{4}} + e^{j\frac{7\pi}{4}}\right] = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

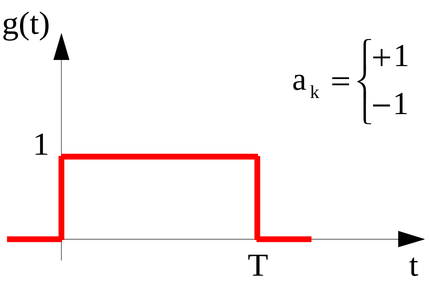
Anche in questo caso risulta dunque $\mu=0$.

Esempio: codifica binaria antipodale

Come primo caso concreto di applicazione dei concetti finora esposti, consideriamo un segnale numerico la cui codifica di linea sia di tipo binario (cioè a 2 soli livelli) e antipodale: in questo caso, abbiamo già osservato che, usando per il segnale numerico s(t) l’espressione

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT)$$

possiamo considerare, come segnale elementare g(t), la seguente forma d’onda:



I coefficienti a_k, come indicato in figura sono +1 e -1.

La prima cosa da fare è calcolare il valor medio di tali coefficienti, al fine di stabilire se lo spettro di potenza di s(t) contiene o meno lo spettro dei dati: abbiamo allora visto poco fa che, se i coefficienti sono equiprobabili, il valor medio μ è 0. Ci mettiamo allora proprio in queste ipotesi, il che ci consente di scrivere subito che lo spettro di potenza di s(t) ha espressione generale

$$S_S(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2$$

Si tratta adesso di calcolare lo spettro di energia del segnale g(t) ed il coefficienti σ_a^2. Possiamo partire proprio da quest'ultimo: ricordando come è stato definito e tenendo conto che abbiamo supposto l'equiprobabilità dei coefficienti, abbiamo che

$$\sigma_a^2 = E\left[\left|a_k\right|^2\right] = (+1)^2 \cdot P(+1) + (-1)^2 \cdot P(-1) = P(+1) + P(-1) = 0.5 + 0.5 = 1$$

Per quanto riguarda, invece, lo spettro di energia di g(t), la cosa è immediata: infatti, tenendo conto che g(t) è, in questo caso, un rettangolo di durata T posizionato a partire da t=0, abbiamo che la sua trasformata di Fourier vale

$$G(f) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j\pi f\frac{T}{2}}$$

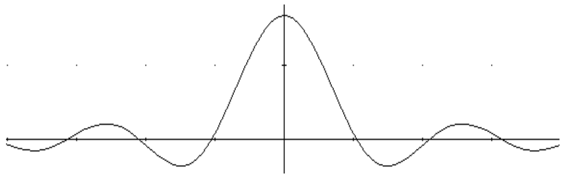
Di questa espressione dobbiamo trovare il modulo quadro, che rappresenta lo spettro di energia di g(t): abbiamo allora che

$$\left|G(f)\right|^2 = \left[T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\right]^2 = T^2\left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right]^2$$

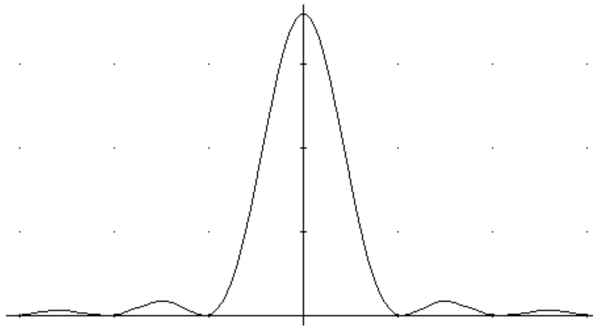
Sostituendo nell'espressione di $S_S(f)$, possiamo dunque concludere che la sua espressione è

$$S_S(f) = \frac{1}{T}T^2\left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right]^2 = T\left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right]^2$$

Questa funzione ha un andamento ben noto, dato che rappresenta il quadrato della nota funzione Seno Cardinale $\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$:



$$\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$



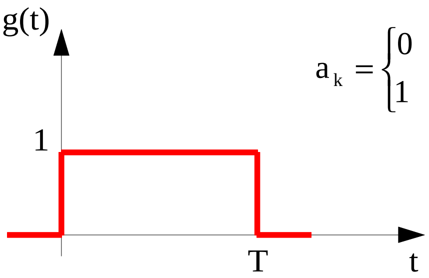
$$\left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right]^2$$

Abbiamo dunque uno spettro a banda limitata (dato che i lobi secondari si smorzano abbastanza in fretta), che vale in corrispondenza della frequenza 1/T e dei suoi multipli.

Una cosa importante da osservare è che questo spettro contiene il massimo contenuto energetico in corrispondenza delle basse frequenze, a partire dalla frequenza 0, per cui potremo usare questo segnale solo su un mezzo che abbia un ottimo comportamento in bassa frequenza.

Esempio: codifica ortogonale

Passiamo adesso al caso di una codifica binaria di tipo ortogonale: in questo caso, come già abbiamo avuto modo di osservare, il segnale elementare è lo stesso visto nel caso precedente, ma i coefficienti a_k cambiano, in quanto valgono adesso 0 e +1:



La prima cosa da fare è sempre il calcolo del valor medio μ di tali coefficienti, onde stabilire o meno la presenza dello spettro dei dati: come già calcolato in precedenza, risulta

$$\mu = E[a_k] = 1 \cdot P(1) + 0 \cdot P(0) = P(1)$$

Supponendo l'equiprobabilità dei simboli, risulta dunque μ=0.5≠0, il che ci dice che lo spettro di potenza di s(t) contiene lo spettro dei dati. Se, per semplicità, supponiamo anche l'indipendenza tra i coefficienti, sappiamo che l'espressione completa di $S_S(f)$ è la seguente:

$$S_S(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2 + \frac{|\mu|^2}{T}|G(f)|^2 \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu\neq 0}}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{\nu}{T}\right)$$

Il valore di μ è stato calcolato poco fa. Resta da calcolare σ_a^2: applicando la normale definizione, abbiamo che

$$\sigma_a^2 = E\left[|a_k|^2\right] = (+1)^2 \cdot P(+1) + (0)^2 \cdot P(0) = P(+1) = 0.5$$

Possiamo perciò scrivere che

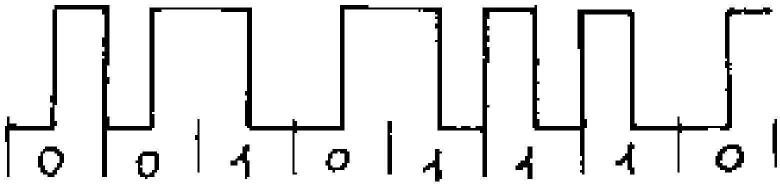
$$S_S(f) = \frac{1}{2T}|G(f)|^2 + \frac{1}{2T}|G(f)|^2 \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu\neq 0}}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{\nu}{T}\right)$$

Osservando che $|G(f)|^2$ è lo stesso del caso precedente, la struttura di $S_S(f)$ è evidente: si tratta dello stesso spettro trovato nel caso precedente, con l'aggiunta di infiniti impulsi che campionano lo stesso spettro.

Proprio la presenza di questi impulsi, che come già detto è generalmente indesiderata, fa si che una codifica di tipo ortogonale non venga praticamente mai usata.

Esempio: codice Manchester

Abbiamo parlato del **codice Manchester** a proposito del problema della sincronizzazione del campionatore: si trattava cioè di trovare dei codici di linea che permettessero di estrarre, direttamente dal segnale ricevuto, le informazioni necessarie per identificare gli istanti ottimi di campionamento. Un generico segnale con codifica di linea secondo il codice Manchester è fatto nel modo seguente:



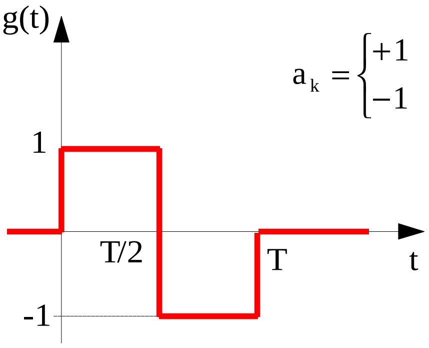
Si tratta del codice RZ (ritorno a zero) più utilizzato: esso prevede che, in ciascun periodo di cifra T, il livello alto venga mantenuto per metà del periodo e il simbolo corrispondente viene individuato a seconda che la transizione del segnale, in corrispondenza di T/2, sia in salita o in discesa: se la transizione è in salita, allora il simbolo trasmesso è 0, mentre invece, se la transizione è in discesa, allora il simbolo trasmesso è 1.

Il pregio di questa codifica è che è sempre presente una transizione di livello ogni mezzo periodo T, il che consente di estrarre con relativa facilità la sincronizzazione: basta infatti derivare il segnale per ottenere impulsi distanziati al più di T.

Premesso questo, vogliamo analizzare, con le tecniche enunciate prima, lo spettro di potenza di un segnale numerico con questa codifica di linea. E' evidente, allora, che, usando per il segnale numerico s(t) l'espressione

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t-kT)$$

possiamo considerare, come segnale elementare g(t), la seguente forma d'onda:



I coefficienti, come indicato in figura, saranno +1 per l'1 logico e -1 per lo 0 logico.

Andiamo allora a calcolare lo spettro di potenza del generico s(t). Calcoliamo subito il valor medio dei coefficienti a_k, ripetendo lo stesso calcolo valido per la codifica antipodale, abbiamo che

$$\mu = E[a_k] = 1\cdot P(1) + (-1)\cdot P(-1) = P(1) - P(-1)$$

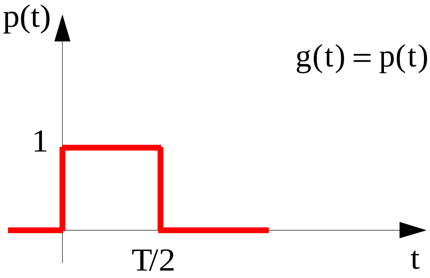
Supponiamo che tali coefficienti siano equiprobabili, il che ci dice che μ=0 e quindi anche che lo spettro di potenza non presenta la parte discreta, ossia ha espressione

$$S_S(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2$$

Si tratta allora di calcolare lo spettro di energia del segnale g(t) ed il coefficienti σ_a^2. Possiamo partire proprio da quest’ultimo: ricordando come è stato definito, abbiamo che

$$\sigma_a^2 = E\left[|a_k|^2\right] = (+1)^2 \cdot P(+1) + (-1)^2 \cdot P(-1) = P(+1) + P(-1) = 0.5 + 0.5 = 1$$

Non resta che calcolare lo spettro G(*f*) di g(t), da cui poi risalire allo spettro di energia $|G(f)|^2$. A questo scopo, ci conviene esprimere g(t) come somma di due segnali opportuni, come indicato nella figura seguente:



$$g(t) = p(t) - p\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

In base a questa rappresentazione, possiamo scrivere che

$$G(f) = \Im[g(t)] = \Im\left[p(t) - p\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \Im[p(t)] - \Im\left[p\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \Im[p(t)] - \Im[p(t)]e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} =$$
$$= \Im[p(t)]\left(1 - e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right) = \Im[p(t)]\left(1 - e^{-j\pi fT}\right)$$

Così facendo, ci siamo in pratica ricondotti a dover calcolare la trasformata del segnale p(t), che è semplicemente un rettangolo di ampiezza unitaria, durata T/2, posizionato a partire da t=0: abbiamo allora che

$$\Im[p(t)] = \frac{T}{2}\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} \quad \longrightarrow \quad G(f) = \frac{T}{2}\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}\left(1 - e^{-j\pi fT}\right)$$

A noi interessa il modulo quadro di questo spettro, che risulta essere

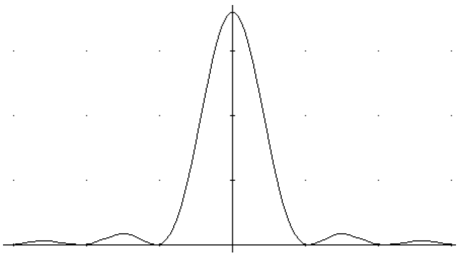
$$|G(f)|^2 = \frac{T^2}{4}\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 \left|1 - e^{-j\pi fT}\right|^2 = \frac{T^2}{4}\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 \left|1 + \cos(\pi fT) + j\sin(\pi fT)\right|^2 =$$
$$= \frac{T^2}{4}\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 \left((1 + \cos(\pi fT))^2 + \sin^2(\pi fT)\right) = \frac{T^2}{4}\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 (2 - 2\cos(\pi fT)) = T^2\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 (1 - \cos(\pi fT))$$

Tornando allora nell’espressione $S_S(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2$ e sostituendo ciò che abbiamo trovato in questi conti, deduciamo che

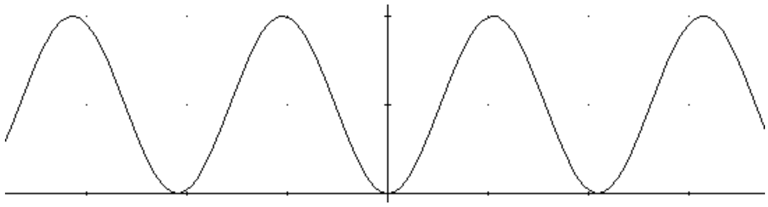
$$S_S(f) = \frac{1}{T}T^2\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 (1 - \cos(\pi fT)) = T\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2 (1 - \cos(\pi fT))$$

Vediamo come è fatto l'andamento di questa funzione con la frequenza. Si tratta del prodotto di due termini:

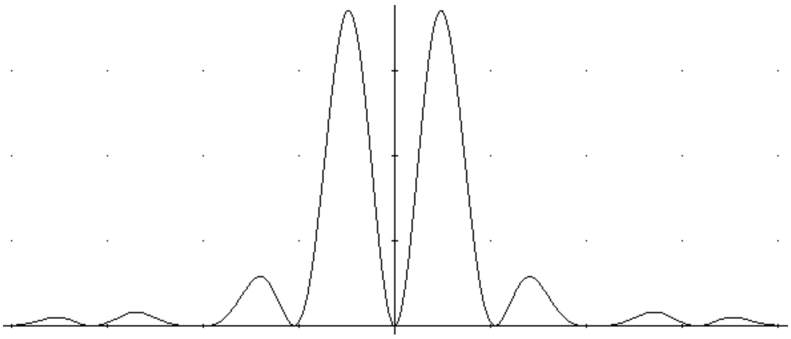
- il primo termine è il quadrato della funzione $\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$:



- il secondo termine è invece costituito dalla funzione $(1-\cos(\pi f T))$:



Il prodotto tra queste funzioni ci dà il seguente andamento di $S_S(f)$:



Si tratta di uno spettro a banda chiaramente limitata (i lobi secondari si smorzano molto rapidamente), che, con riferimento alle sole frequenze positive, presenta un picco in bassa frequenza. Il primo punto in corrispondenza del quale lo spettro di annulla è 2/T, mentre gli altri punti sono 4/T, 6/T e così via.

Si nota anche una cosa importante, ossia il fatto che lo spettro è nullo a frequenza 0: questo significa che la codifica di Manchester va bene per canali che hanno un cattivo comportamento in bassa frequenza, proprio perché il contenuto energetico del segnale a tali basse frequenze è molto basso.

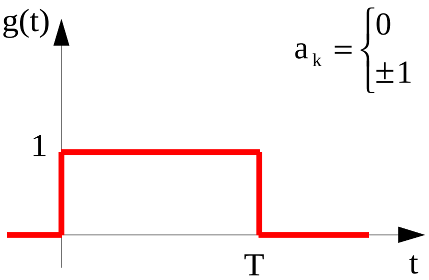
Esempio: codice AMI

Anche il **codice AMI** (detto anche *codice bipolare*) è stato introdotto a proposito del problema della sincronizzazione del campionatore. La sigla AMI sta per *Alternate Mark Inversion* e questa espressione indica la peculiarità di questo codice di linea: quando c'è da trasmettere uno 0 logico, si trasmette una forma d'onda identicamente nulla, mentre, invece, quando c'è da trasmettere un 1 logico, si trasmettono alternativamente rettangoli positivi o negativi.

In pratica, quindi, adottando la rappresentazione

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t-kT)$$

questo codice prevede che il segnale elementare g(t) sia ancora un rettangolo di durata T e che i coefficienti a_k valgano 0 per lo 0 logico e ±1 per l'1 logico:



$$a_k=\begin{cases}0\\ \pm 1\end{cases}$$

La scelta tra +1 e -1, quando c'è da trasmettere un 1 logico, va fatta in modo da garantire l'alternanza di segno. Facciamo un esempio concreto. Supponiamo che la sequenza binaria da trasmettere sia 101011101. Allora, la sequenza dei coefficienti sarà fatta nel modo seguente:

$$\begin{array}{lccccccccccc} S & \longrightarrow & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ a_k & \longrightarrow & -1 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 & +1 \end{array}$$

E' chiaro che, quando si trasmette il primo bit posto ad 1, è necessario fare una scelta[10] tra +1 e -1: nel caso considerato abbiamo scelto, come primo coefficiente per l'1 logico, il coefficiente -1, da cui quindi viene fuori la sequenza illustrata.

Procediamo allora anche in questo caso al calcolo dello spettro di potenza di s(t).

Per prima cosa, verifichiamo ancora una volta il valor medio dei coefficienti: supponendo che l'1 logico e lo 0 logico siano ancora una volta equiprobabili, è evidente che la probabilità di avere a_k=0 è 1/2, mentre le probabilità di avere a_k=+1 e a_k=-1 sono entrambe 1/4, per cui

$$\mu=E[a_k]=(+1)\cdot P(1)+(-1)\cdot P(-1)+0\cdot P(0)=P(1)-P(-1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

Abbiamo ancora una volta μ=0, per cui lo spettro di potenza non comprende la parte discreta, ma solo quella continua:

$$S_S(f)=\frac{\sigma_a^2}{T}|G(f)|^2$$

[10] Ovviamente, la scelta deve essere nota al ricevitore

C'è però una differenza rispetto ai casi considerati in precedenza: infatti, i coefficienti a_k non sono più indipendenti tra loro, visto che, nel caso di trasmissione di un 1 logico, il valore del coefficiente da considerare dipende dal valore del coefficiente dell'ultimo 1 logico trasmesso. Allora, riprendendo le formula generali trovate in precedenza, la formula da utilizzare per il calcolo dello spettro di potenza di s(t) è la seguente:

$$S_S(f)=\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)|G(f)|^2e^{-j2\pi f\nu T}=\frac{1}{T}|G(f)|^2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}$$

dove ricordiamo che $R_a(\nu)=E\left[a_k^*a_{k+\nu}\right]$ è la correlazione tra i coefficienti.

Non abbiamo quindi altra scelta che calcolare $R_A(\nu)$ per gli infiniti valori di ν:

- il caso più semplice è ovviamente quello in cui ν=0: si ha infatti che

$$R_a(0)=E\left[a_k^*a_k\right]=E\left[|a_k|^2\right]=E\left[a_k^2\right]=(+1)^2\cdot P(1)+(-1)^2\cdot P(-1)+0^2\cdot P(0)=P(1)+P(-1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

- nel caso, invece, di $\nu\neq 0$, dobbiamo scrivere in generale che

$$\begin{aligned}R_a(\nu)&=E\left[a_k^*a_{k+\nu}\right]=E\left[a_ka_{k+\nu}\right]=(+1)\cdot P\left(a_ka_{k+\nu}=+1\right)+(-1)\cdot P\left(a_ka_{k+\nu}=-1\right)+0\cdot P\left(a_ka_{k+\nu}=0\right)=\\&=P\left(a_ka_{k+\nu}=+1\right)-P\left(a_ka_{k+\nu}=-1\right)\end{aligned}$$

  Abbiamo cioè tenuto conto di tutti i possibili valori che possono essere assunti dal prodotto $a_ka_{k+\nu}$ al variare di ν. Si usano allora delle apposite tabelle per calcolare le varie probabilità: queste tabella mostrano che la funzione $R_a(\nu)$ è sempre nulla, tranne che per $\nu=\pm 1$, nel qual caso vale -1/4.

In base a questo risultato, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}S_S(f)&=\frac{1}{T}|G(f)|^2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}=\\&=\frac{1}{T}|G(f)|^2\left[R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}\Big|_{\nu=-1}+R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}\Big|_{\nu=0}+R_a(\nu)e^{-j2\pi f\nu T}\Big|_{\nu=1}\right]=\frac{1}{T}|G(f)|^2\left[-\frac{1}{4}e^{j2\pi fT}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-j2\pi fT}\right]=\\&=\frac{1}{T}|G(f)|^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{e^{j2\pi fT}+e^{-j2\pi fT}}{2}\right]=\frac{1}{T}|G(f)|^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\pi fT)\right]=\frac{1}{2T}|G(f)|^2\left(1-\cos(2\pi fT)\right)\end{aligned}$$

E' facile allora accorgersi che abbiamo ottenuto, a meno di un fattore di scala, lo stesso risultato del caso precedente: infatti, tenendo conto che g(t) è, in questo caso, un rettangolo di durata T posizionato a partire da t=0, abbiamo che il suo spettro di potenza vale

$$|G(f)|^2=\left[T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\right]^2=T^2\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2$$

per cui concludiamo che lo spettro di potenza del segnale s(t) vale

$$S_S(f)=\frac{1}{2T}T^2\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2(1-\cos(2\pi fT))=\frac{T}{2}\left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right]^2(1-\cos(2\pi fT))$$

A meno di un fattore 2 a denominatore, l’espressione di $S_S(f)$ è identica quella trovata nel caso di codice Manchester. Valgono perciò le stesse considerazioni fatte in quel caso.

OSSERVAZIONE: TRASMISSIONE NUMERICA IN BANDA TRASLATA

Consideriamo nuovamente il generico segnale numerico espresso nella forma

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k g(t-kT)$$

In questa espressione, abbiamo detto che g(t) è uno dei possibili segnali elementari (ad esempio un rettangolo) di cui s(t) è una sequenza temporale, mentre i coefficienti a_k portano l’informazione vera e propria (e come tali sono perciò delle variabili aleatorie).

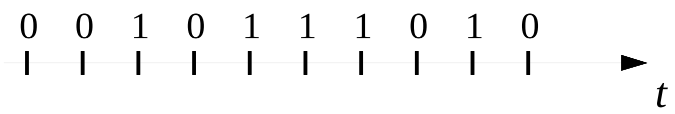
Nel caso in cui si voglia trasmettere le informazioni binarie con una tecnica di modulazione, il segnale s(t) andrà in ogni caso a modulare (in ampiezza, fase o frequenza) una portante sinusoidale del tipo $c(t)=A_C\cos(\omega_C t)$. Per esempio, nel caso di modulazione di ampiezza in DSB-SC, avremo che il segnale da trasmettere sul canale (segnale modulato) è

$$s_t(t)=s(t)c(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k g(t-kT)A_C\cos(\omega_C t)=A_C\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k g(t-kT)\cos(\omega_C t)$$

Sulla base di questa espressione possiamo allora ripetere ancora una volta gli stessi ragionamenti fatti in precedenza per il calcolo dello spettro di potenza del segnale trasmesso.

CONVENIENZA DI UNA TRASMISSIONE CON DUE PORTANTI IN QUADRATURA

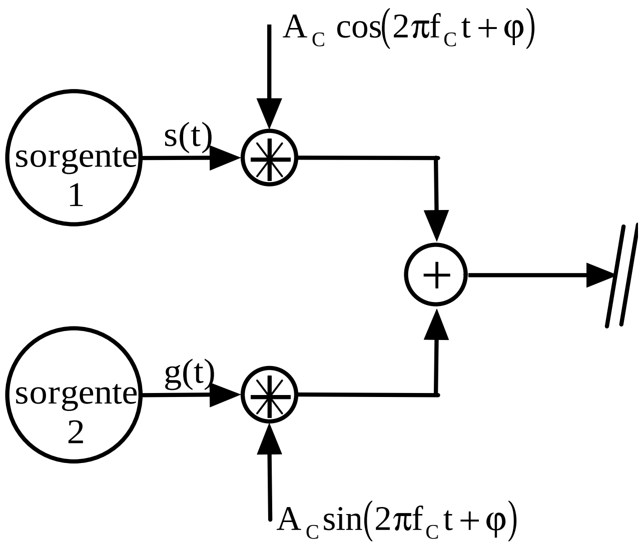
Supponiamo di voler trasmettere una sequenza binaria del tipo seguente:



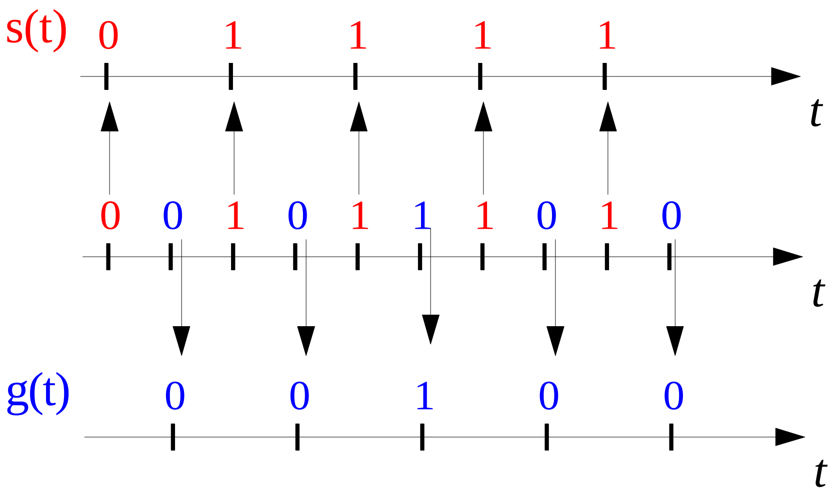
Sia T il periodo di cifra, per cui la frequenza di cifra è $f_S=1/T$. Suppongo, per semplicità, di scegliere un roll-off δ pari a 0, per cui, se B è la banda occupata dal segnale modulante, la frequenza di cifra risulta essere $f_S=2B$. Sia infine P_T la potenza da trasmettere.

E’ facile rendersi conto che, a parità di potenza trasmessa e a parità di frequenza di cifra, possiamo occupare una banda non più pari a B, ma pari a B/2.

Infatti, supponiamo di utilizzare uno schema di trasmissione con due portanti in quadratura:



Sappiamo che, se i due segnali modulanti s(t) e g(t) occupano entrambi una banda w, il segnale modulato occupa una banda pari a 2w. Nessuno ci vieta di generare i due segnali a partire dallo stesso segnale e, in particolare, dal segnale numerico considerato prima. Per ottenere questo, possiamo usare uno schema del tipo seguente:



In pratica, dato il segnale numerico di partenza, abbiamo usato i bit in posizione dispari per costruire il segnale s(t) ed i bit in posizione pari per costruire il segnale g(t). Ciò che si nota è che i due segnali s(t) e g(t) così ricavati hanno un periodo di cifra doppio rispetto al segnale di partenza, per cui occupano una banda pari a metà di quello di partenza. Trasmettendoli con le due portanti in quadratura, noi otteniamo un segnale che occupa, quindi, una banda pari a metà di quella occupata dal segnale originario. Si tratta, ovviamente, di un tipico segnale multilivello in un sistema 4-QAM.

Il fatto che si sia ridotta la banda di un fattore 2 comporta che anche la potenza, su ciascun canale, si sia ridotta di un fattore 2. Avendo due canali, quindi, trasmettiamo la stessa identica potenza che avremmo dovuto trasmettere per il segnale originario.

In conclusione, con il sistema di trasmissione delle portanti in quadratura, abbiamo ottenuto, mantenendo invariata la potenza da trasmettere e la frequenza di cifra, un dimezzamento della banda. Questo è un grosso risultato sia dal punto di vista dell'occupazione di banda sul canale sia anche dal punto di vista del rumore in ricezione: infatti, avendo un segnale utile su una banda più stretta, raccogliamo meno rumore, con conseguenti vantaggi in termini di rapporto S/N e quindi in termini di probabilità di errore finale.

Questo esempio mostra il grande vantaggio di un sistema di trasmissione con due portanti in quadratura.

VARIE

- **Preamboli nella trasmissione numerica**: per risolvere i problemi di sincronizzazione del campionatore in ricezione, ma anche per ottimizzare l'equalizzazione del mezzo trasmissivo, spesso si trasmettono, prima delle informazioni vere e proprie che si intende far giungere al ricevitore, dei **preamboli**, ossia delle sequenze binarie note al ricevitore stesso. Il ricevitore sa perfettamente quando questi preamboli vengono trasmessi e a quali configurazioni binarie essi corrispondono: basandosi allora sul segnale che viene effettivamente ricevuto e confrontandolo col segnale che si aspettava, il ricevitore è in grado di capire che tipo di distorsioni siano state introdotte dal canale e quindi ottimizza di conseguenza il funzionamento dell'**equalizzatore**. Quest'ultimo ha il compito di compensare, nel modo migliore possibile, le distorsioni introdotte dal mezzo trasmissivo sul segnale. L'equalizzazione può avvenire sia via hardware, usando appositi circuiti, sia via software, elaborando in modo opportuni i bit tirati fuori dal decisore. In generale, si effettuano entrambe le cose.

  E' bene precisare che l'equalizzatore non ha niente a che vedere con il rumore, nel senso che si occupa solo delle distorsioni introdotte dal mezzo trasmissivo. D'altra parte, l'equalizzatore, essendo nient'altro che un filtro posto in un opportuno punto della catena di ricezione, agisce sia sul segnale sia sul rumore: si verifica che l'equalizzatore ha l'effetto di aumentare la varianza del rumore, il che comporta un peggioramento del rapporto S/N rispetto al caso di assenza dell'equalizzatore stesso. Allo stesso tempo, però, lo stesso rapporto S/N migliora grazie proprio all'effetto dell'equalizzatore sul segnale ricevuto: infatti, *l'equalizzatore ha sostanzialmente l'effetto di ridurre al minimo l'interferenza di intersimbolo all'ingresso del campionatore,* il che consente sicuramente un miglioramento della probabilità di errore p(ε), ossia del rapporto S/N all'uscita del sistema.

- Nel caso di un **collegamento punto a punto** (ponte radio), l'obbiettivo è quello per cui il segnale irradiato dall'antenna trasmittente deve arrivare, con il minimo di dispersione, all'antenna ricevente: deve dunque trattarsi di un collegamento estremamente direttivo, realizzato cioè con antenne (trasmittente e ricevente) estremamente direttive, puntate una sull'altra. Ben diverso è il caso della **radio-telediffusione**: in questo caso, c'è un antenna centrale la quale irradia il segnale in tutte le direzioni, in modo che esso possa essere captato da tutte le antenne riceventi disposte nelle vicinanze. Si usa quindi, in questo caso, una antenna che irradia circolarmente il segnale, per cui è una antenna con caratteristiche del tutto opposte a quelle usate per i ponti radio. Ci sono anche differenze per quanto riguarda le frequenze di lavoro: nei ponti radio, si usano portanti a frequenze dell'ordine dei GHz, mentre nella radio-telediffusione si usano portanti a frequenze dell'ordine di decine o centinaia di MHz. A frequenze ancora maggiori (dell'ordine di 10÷30 GHz, corrispondenti a pochi cm di lunghezza d'onda) lavorano i **collegamenti terra-satellite** con satelliti geostazionari[11]. Le massime frequenze di lavoro (dell'ordine delle centinaia di THz) si raggiungono poi con i collegamenti in **fibra ottica**, dove si passa dal dominio dell'elettronica a quello dell'ottica: in questi casi, il

[11] Parlare di satellite geostazionario significa dire che l'orbita lungo cui il satellite ruota (detta appunto orbita geostazionaria) è tale che la posizione del satellite rispetto alla Terra rimane invariata nel tempo, nonostante sia la Terra sia il satellite siano in movimento.

grosso vantaggio è nella enorme larghezza di banda, mentre lo svantaggio è nella necessità di trasferire il segnale dalla banda base alle frequenze ottiche.

- Il motivo per cui, nei **sistemi di modulazione**, si usano portanti (*carrier*) di tipo sinusoidale è il fatto che una sinusoide presenta uno spettro concentrato su unica frequenza (con buona approssimazione), il che consente, come ben sappiamo di traslare lo spettro del segnale modulante dalla banda base in una banda a cavallo della suddetta frequenza portante.

- Dato un sistema di trasmissione lineare che utilizza in parte filtri in banda base e in parte filtri in banda traslata, possiamo analizzare il sistema come se fosse tutto in banda base: basta ricondursi al **sistema equivalente di banda base**. Se H(f) è la funzione di trasferimento del sistema effettivo, la funzione di trasferimento del sistema equivalente è $H_{eq}(f) = 2H(f + f_C)u(f + f_C)$, dove u(*f*) è il gradino unitario.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1