

# Appunti di Comunicazioni Elettriche

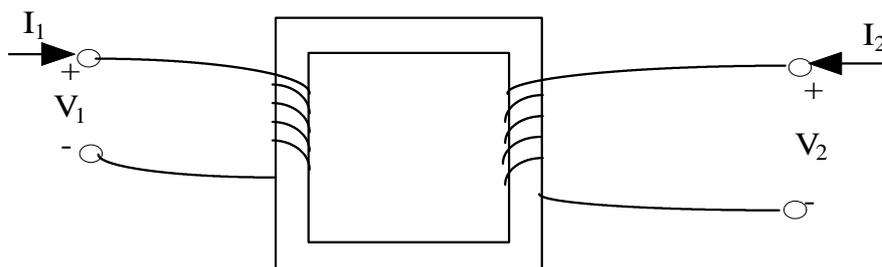
## Appendice 2 - Richiami vari

<b>Il trasformatore ideale</b> .....	<b>1</b>
Introduzione .....	1
Caratteristica del trasformatore ideale .....	3
Proprietà del trasformatore ideale .....	4
<i>Osservazione</i> .....	5
<b>Modello di Ebers-Moll per un BJT</b> .....	<b>6</b>
Circuito equivalente di Ebers-Moll.....	8
<i>Modello di Ebers-Moll per le varie condizioni di funzionamento</i> .....	9
<b>Stadio ad emettitore comune</b> .....	<b>11</b>
<i>Effetto Miller sulla capacità <math>C_m</math></i> .....	14
<b>Stadio a base comune</b> .....	<b>16</b>
<b>Circuiti RLC risonanti</b> .....	<b>18</b>
Risonanza serie.....	18
<i>Fattore di qualità serie</i> .....	21
Risonanza parallelo .....	22
<i>Fattore di qualità parallelo</i> .....	24

## Il trasformatore ideale

### INTRODUZIONE

Il **trasformatore reale** è un dispositivo biporta (o doppio bipolo) generalmente utilizzato per variare opportunamente la tensione in uscita rispetto alla tensione in ingresso. Per studiare il trasformatore reale si fa riferimento ad un suo modello astratto, che prende il nome di “**trasformatore ideale**”:



L'idealità di questo modello deriva dall'adozione delle seguenti 3 ipotesi fondamentali:

- non ci sono flussi dispersi;
- non ci sono perdite (in particolare, non ci sono correnti parassite né perdite dovute ad isteresi e inoltre i due avvolgimenti avranno resistenza nulla);
- il materiale magnetico è costituito da una permeabilità  $\mu$  infinita.

Sulla base di queste ipotesi di fondo, è possibile ritenere quanto segue:

- in primo luogo, le linee di flusso del campo magnetico generato dalle correnti nei due avvolgimenti sono tutte contenute all'interno della struttura;
- in secondo luogo, il campo magnetico è costante lungo ogni cammino chiuso scelto all'interno della struttura;
- infine, non essendoci flussi diversi, il flusso  $\phi$  del campo magnetico risultante, attraverso una generica sezione S del trasformatore ideale, è ideale sezione per sezione.

Queste tre approssimazioni consentono di scrivere che i flussi concatenati rispettivamente al primo ed al secondo avvolgimento sono

$$\begin{cases} \Phi_1 = N_1 \phi \\ \Phi_2 = N_2 \phi \end{cases}$$

Tenendo inoltre presente che i due avvolgimenti presentano resistenza nulla (il che comporta che non ci siano cadute di tensione su di essi), possiamo anche scrivere che

$$\begin{cases} V_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ V_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro tra queste due equazioni si ricava evidentemente che

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Ponendo allora  $n = \frac{N_1}{N_2}$  (*rapporto di trasformazione* o anche **rapporto spire**), possiamo concludere che sussiste la relazione

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = n}$$

Questa relazione dice dunque che *il valore della tensione in ingresso è legata al valore della tensione in uscita dall'elemento mediante il rapporto di trasformazione.*

Questo rapporto di trasformazione dipende dal numero di spire che costituiscono i due avvolgimenti: è chiaro che  $n$  può essere  $>1$  o  $<1$  a seconda di quale avvolgimento conti più spire.

## CARATTERISTICA DEL TRASFORMATORE IDEALE

La relazione  $\frac{V_1}{V_2} = n$  è una delle due equazioni che costituiscono la caratteristica del trasformatore. E' possibile trovare anche una seconda equazione che lega le due correnti di porta. Applicando il teorema di Ampere ad un cammino medio  $C$  di lunghezza  $L$ , otteniamo

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

dove  $N_1$  è il numero di spire facenti parte del 1° avvolgimento e  $N_2$  quello del secondo avvolgimento e  $I_1$  e  $I_2$  le rispettive correnti.

Dato che il campo magnetico  $\vec{H}$  è un vettore parallelo al vettore  $d\vec{l}$ , il prodotto scalare all'interno dell'integrale è pari al prodotto dei moduli: si ha dunque che

$$\oint_C H dl = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Il campo magnetico è costante sezione per sezione, per cui può essere portato fuori dall'integrale:

$$H \oint_C dl = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

L'integrale rimanente è chiaramente pari alla lunghezza della circonferenza, per cui si ha

$$HL = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Moltiplicando e dividendo il primo membro per la quantità  $\mu S$ , dove  $\mu$  è la *permeabilità magnetica* mentre  $S$  è la sezione trasversale dell'elemento, otteniamo

$$\frac{L}{\mu S} H \mu S = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Ponendo adesso  $\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S}$  = "**riluttanza magnetica**", possiamo scrivere che

$$\mathfrak{R} H \mu S = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Ma, avendo detto che  $\mu = \infty$  per il trasformatore ideale, la riluttanza magnetica risulta nulla, per cui

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$$

Da questa relazione si ricava che

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n}$$

Questa è l'altra equazione che cercavamo, per cui possiamo concludere che la caratteristica del trasformatore ideale è la seguente:

$$\begin{cases} V_1 = n V_2 \\ I_2 = -n I_1 \end{cases}$$

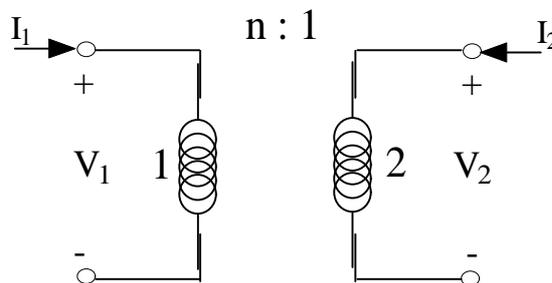
In forma matriciale, queste due equazioni diventano

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale costituisce la rappresentazione ibrida 1 di un resistore biporta: ciò significa che *il trasformatore ideale può essere considerato come un particolare resistore biporta.*

Facciamo inoltre osservare che è possibile trovare, del trasformatore ideale, sia la rappresentazione ibrida 2 sia le due rappresentazioni trasmissione 1 e trasmissione 2, mentre non esistono la rappresentazione controllata in corrente né quella controllata in tensione.

Il simbolo circuitale con cui si indica il trasformatore ideale è il seguente:



La simbologia "n : 1" indica la proporzione

$$n : 1 = V_1 : V_2$$

che rappresenta evidentemente la relazione  $V_1 = nV_2$ .

## PROPRIETÀ DEL TRASFORMATORE IDEALE

Il trasformatore ideale gode di una serie di importanti proprietà.

In primo luogo, è facile verificare che *il trasformatore ideale è un elemento non energetico (ossia trasparente alla potenza).* Infatti, si ha che

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = v_1(t)i_1(t) + \left(\frac{v_1(t)}{n}\right)(-ni_1(t)) = 0$$

La seconda proprietà è la seguente: collegando alla porta di uscita un resistore di resistenza  $R$ , la porta di ingresso si comporta come un resistore di resistenza  $n^2R$ . Infatti, si ha che

$$v_1(t) = nv_2(t) = nv_R(t) = nRi_R(t) = nR(-i_2(t)) = nR(ni_1(t)) = n^2Ri_1(t)$$

da cui si deduce che la resistenza di ingresso è  $\frac{v_1(t)}{i_1(t)} = n^2R$

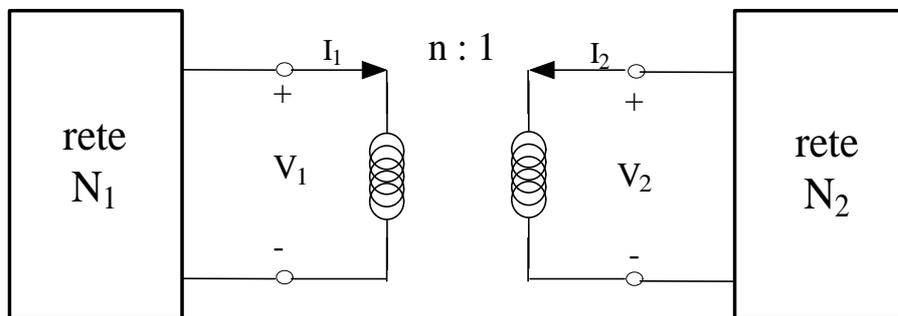
L'ultima proprietà è infine la seguente: collegando alla porta di ingresso un resistore di resistenza  $R$ , la porta di uscita si comporta come un resistore di resistenza  $R/n^2$ . Infatti, si ha che

$$v_2(t) = \frac{v_2(t)}{n} = \frac{v_R(t)}{n} = \frac{Ri_R(t)}{n} = \frac{R(-i_1(t))}{n} = \frac{R}{n} \frac{i_2(t)}{n} = \frac{R}{n^2} i_2(t)$$

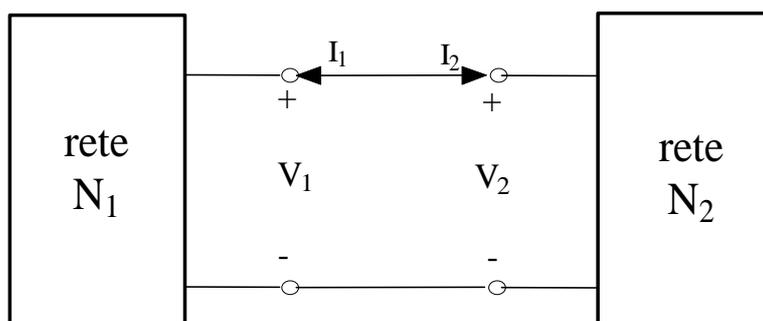
da cui l'impedenza di uscita vale  $\frac{v_2(t)}{i_2(t)} = \frac{R}{n^2}$ .

### Osservazione

Supponiamo di avere un generico circuito e di poterlo schematizzare come nella figura seguente:



Si osserva, cioè, la presenza di due distinte reti monoporta, indicate genericamente con  $N_1$  ed  $N_2$  e contenenti elementi qualsiasi, collegate tra di loro mediante un trasformatore ideale. In una situazione di questo tipo, se il rapporto di trasformazione è  $n = 1$ , il trasformatore può evidentemente essere eliminato, in quanto il circuito è del tutto equivalente al seguente:



L'equivalenza si capisce immediatamente se si considera cosa diventa la caratteristica di funzionamento del trasformatore quando  $n=1$ : si ha infatti che tale caratteristica è

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ I_2 = -I_1 \end{cases}$$

ed essa appunto equivale all'assenza del trasformatore.

Fisicamente, i trasformatori aventi rapporto di trasformazione pari ad 1 vengono impiegati al fine di separare, appunto fisicamente, parti di circuiti che si vuole tenere staccate.

## Modello di Ebers-Moll per un BJT

Il **modello di Ebers-Moll** è un *modello matematico del BJT*, ossia un insieme di equazioni (tre per la precisione) che servono a caratterizzare il comportamento elettrico di questo dispositivo. In particolare, questo modello risponde ai seguenti requisiti:

- in primo luogo, è valido per un qualsiasi BJT, sia esso di tipo n-p-n sia esso di tipo p-n-p;
- in secondo luogo, è valido per qualsiasi condizione di polarizzazione;
- in terzo luogo, è un modello matematico per grandi segnali, nel senso che si può applicare in presenza di segnali di qualsiasi ampiezza;
- infine, è un modello che tiene conto solamente dell'effetto transistorore, per cui rientra nella classe dei modelli del primo ordine, con i quali è possibile condurre una analisi solo approssimata (ma comunque corretta) del dispositivo.

Il punto di partenza, per arrivare alle equazioni finali, è quello di considerare che le correnti di emettitore e di collettore, per un BJT, sono entrambe frutto della somma di due componenti dovute alle due omogiunzioni di cui si compone il BJT. In tal senso, è possibile pensare a ciascuna di queste correnti come somma di due contributi, ciascuno dei quali dovuto appunto ad una omogiunzione. Partendo da questo principio, si trovano due equazioni che forniscono appunto i valori della corrente di collettore e di quella di emettitore:

$$\begin{cases} I_E = -\frac{I_{E0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) + \frac{\alpha_R I_{C0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right) \\ I_C = \frac{\alpha_F I_{E0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) - \frac{I_{C0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right) \end{cases}$$

In questa espressione,  $I_{C0}$  è la corrente di collettore quando la giunzione base-collettore è polarizzata inversamente e l'emettitore è aperto, mentre  $I_{E0}$  è la corrente di emettitore quando la giunzione base-emettitore è polarizzata inversamente e il collettore è aperto. Inoltre  $\alpha_F = \frac{|I_C|}{|I_E|}$  è guadagno di corrente in continua nella configurazione di base comune e in condizioni di

polarizzazione in zona attiva diretta, mentre  $\alpha_R = \frac{|I_E|}{|I_C|}$  è il guadagno di corrente in continua nella configurazione di base comune e in condizioni di polarizzazione in zona attiva inversa.

Generalmente, si pone

$$\begin{cases} I_{ES} = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \\ I_{CS} = \frac{I_{C0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \end{cases}$$

per cui le due equazioni che definiscono il modello diventano

$$\begin{cases} I_E = -I_{ES} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) + \alpha_R I_{CS} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right) \\ I_C = \alpha_F I_{ES} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) - I_{CS} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right) \end{cases}$$

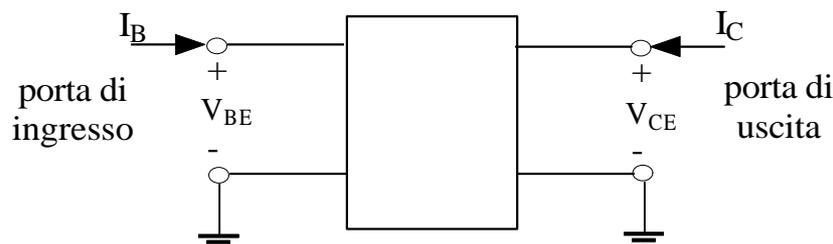
A queste equazioni potrebbe essere aggiunta una terza equazione che fornisca la corrente di base  $I_B$ : basta infatti considerare che le tre correnti di un BJT, come di un qualsiasi elemento a tre terminali, sono vincolate dalla relazione  $I_C + I_B + I_E = 0$  imposta dalla LKC.

N.B. E' possibile dimostrare una importante relazione, relativa ai parametri che compaiono in queste equazioni e nota come "condizione di reciprocità":

$$\alpha_F I_{ES} = \alpha_R I_{CS}$$

Da un punto di vista fisico, questa relazione è giustificata dal fatto che i meccanismi di conduzione della corrente, in corrispondenza delle due giunzioni di cui si compone il transistor, sono identici. Vedremo in seguito, a proposito degli HBT, che questa condizione viene meno, proprio a causa del fatto che, in quel tipo di transistor, la giunzione base-emettitore è una omogiunzione, mentre la giunzione base-collettore è una eterogiunzione.

Inoltre, mentre le due equazioni di prima sono state espresse in funzione delle tensioni  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$ , è spesso opportuno sostituire la  $V_{BC}$  con la  $V_{CE}$ : per effettuare questo "cambio" è sufficiente considerare che  $V_{BC} = V_{BE} - V_{CE}$ . Il motivo per cui facciamo questo è il seguente: la configurazione circuitale maggiormente utilizzata nelle applicazioni del BJT è quella ad emettitore comune:



In tale configurazione, allora, la porta di ingresso è base-emettitore, caratterizzata dalla coppia  $(V_{BE}, I_B)$ , mentre la porta di uscita è la porta collettore-emettitore, caratterizzata dalla coppia  $(V_{CE}, I_C)$ : di conseguenza, esprimendo la  $I_C$  e la  $I_B$  in funzione di  $V_{CE}$  e di  $V_{BE}$  otteniamo evidentemente la caratteristica di uscita  $I_C = f(V_{CE}, \bar{V}_{BE})$ , la caratteristica di ingresso  $I_B = f(V_{BE}, \bar{V}_{CE})$  e la transcaratteristica  $I_C = f(V_{BE}, \bar{V}_{CE})$ .

N.B. Con la notazione  $I_C = f(V_{CE}, \bar{V}_{BE})$  abbiamo inteso indicare le curve della  $I_C$  in funzione della  $V_{CE}$  ed al variare del valore scelto per  $V_{BE}$ .

### CIRCUITO EQUIVALENTE DI EBERS-MOLL

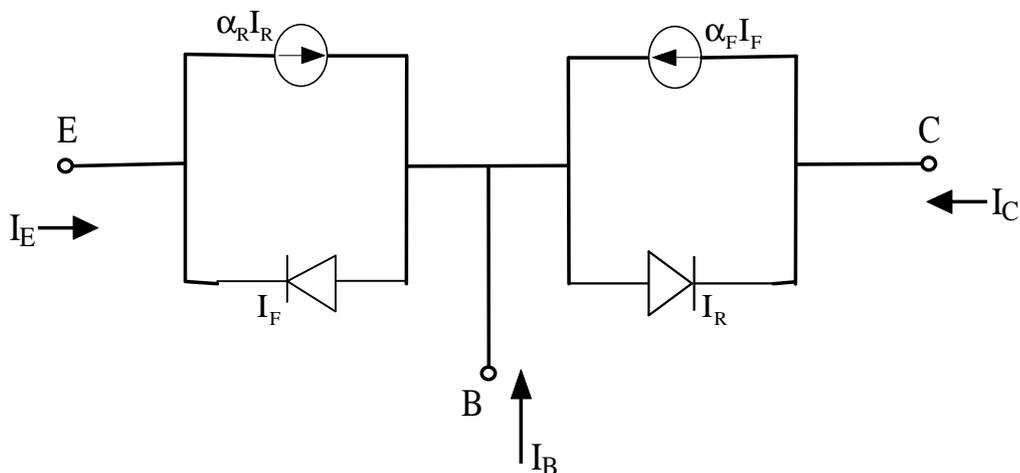
Dal modello matematico di Ebers-Moll si può arrivare al corrispondente modello circuitale. Ponendo

$$\begin{cases} I_F = I_{ES} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) \\ I_R = I_{CS} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right) \end{cases}$$

le equazioni del modello vanno nella forma

$$\begin{cases} I_E = -I_F + \alpha_R I_R \\ I_C = \alpha_F I_F - I_R \end{cases}$$

Queste due equazioni, considerando le espressioni di  $I_F$  e di  $I_R$ , possono essere considerate come quelle caratteristiche del seguente circuito:



Quindi, il modello circuitale di Ebers-Moll rappresenta il transistor n-p-n mediante due diodi ideali ciascuno connesso, in parallelo, ad un generatore di corrente pilotato proprio dalla corrente che scorre nel corrispondente diodo.

Possiamo anche capire a cosa corrispondono, da un punto di vista fisico, questi elementi circuitali.

Per esempio, cominciamo dal diodo attraversato dalla corrente  $I_F$ : in base alle posizioni fatte, l'espressione di questa corrente è

$$I_F = I_{ES} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) = \frac{I_{E0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right)$$

Dato che la corrente  $I_{E0}$  è la corrente di saturazione della giunzione base-emettitore e  $V_{BE}$  la tensione di polarizzazione di tale giunzione, si capisce come questo diodo tenga semplicemente conto del contributo alla corrente fornito dalla giunzione base-emettitore.

In modo analogo, dato che

$$I_R = I_{CS} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right) = \frac{I_{C0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - 1 \right)$$

è chiaro che il secondo diodo tiene conto del contributo alla corrente fornita dalla giunzione base-collettore.

Quindi, *le due diodi che compaiono nel circuito equivalente di Ebers-Moll tengono conto del contributo dato alla corrente (sia in polarizzazione diretta sia in polarizzazione inversa) dalle due giunzioni.*

Riguardo invece i due generatori pilotati, la presenza dei fattori  $\alpha_F$  e  $\alpha_R$ , che sono i guadagni di corrente, in continua, nella configurazione di base comune, rispettivamente in ZAD e ZAI, indica che *tali generatori tengono in conto del fenomeno del trasporto dei portatori minoritari di corrente attraverso la base.*

Quindi, riepilogando, diciamo che il modello di Ebers-Moll rappresenta il transistor n-p-n, in condizioni di polarizzazione continua e qualsiasi, mediante due diodi ideali, che rappresentano le due giunzioni di cui si compone il transistor, ciascuno connesso, in parallelo, ad un generatore di corrente pilotato proprio dalla corrente che scorre nel corrispondente diodo; tali generatori tengono in conto del fenomeno di trasporto dei portatori minoritari attraverso la base.

### **Modello di Ebers-Moll per le varie condizioni di funzionamento**

Il modello di Ebers-Moll è valido sia per qualsiasi tipo di transistor (cioè n-p-n o p-n-p) sia, soprattutto, per qualsiasi condizione di polarizzazione del transistor. E' possibile tuttavia semplificare il modello nel caso in cui si abbia una specifica condizione di funzionamento.

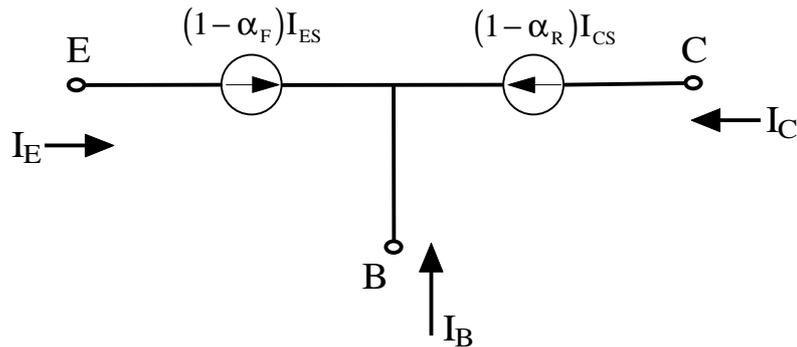
Quando il transistor è posto a funzionare in condizione di interdizione, ossia con entrambe le giunzioni polarizzate inversamente, le tensioni  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$  sono entrambe negative e, in valore assoluto, molto maggiori della tensione termica: allora, noi possiamo certamente trascurare i termini esponenziali che le contengono, ottenendo così che

$$\begin{cases} I_E = I_{ES} - \alpha_R I_{CS} \\ I_C = -\alpha_F I_{ES} + I_{CS} \end{cases}$$

In base alla condizione di reciprocità  $\alpha_F I_{ES} = \alpha_R I_{CS}$ , quelle relazioni diventano

$$\begin{cases} I_E = (1 - \alpha_F) I_{ES} \\ I_C = (1 - \alpha_R) I_{CS} \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano il seguente circuito equivalente:



Sono cioè scomparsi i due diodi e sono rimasti dei generatori di corrente pilotati dalle correnti inverse di saturazione e dipendenti anche dal trasporto degli elettroni nella base (data la presenza di  $\alpha_R$  e  $\alpha_F$ ): questo in perfetto accordo al fatto che, in condizioni di polarizzazione inversa per entrambe le giunzioni, gli unici contributi significativi di corrente vengono dalle correnti inverse di saturazione.

Passiamo alla condizione di saturazione: in questo caso, entrambe le giunzioni sono polarizzate direttamente con tensioni  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$  molto maggiori della tensione termica: in questa condizione, possiamo riscrivere le equazioni del modello nella forma

$$\begin{cases} I_E = -\frac{I_{E0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} + \frac{\alpha_R I_{C0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} \\ I_C = \frac{\alpha_F I_{E0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - \frac{I_{C0}}{1 - \alpha_F \alpha_R} e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} \end{cases}$$

Facendo una serie di passaggi puramente matematici, da queste si ottiene il modello di Ebers-Moll in condizioni di saturazione:

$$\begin{cases} I_C = -I_{C0} e^{\frac{qV_{BC}}{kT}} - \alpha_F I_E \\ I_E = -I_{E0} e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - \alpha_R I_C \end{cases}$$

Infine, vediamo il modello circuitale di Ebers-Moll per il funzionamento in zona attiva diretta: in questo caso, la tensione  $V_{BC}$  è negativa e maggiore, in valore assoluto, della tensione termica: di conseguenza, possiamo eliminare il termine esponenziale che contiene tale tensione  $V_{BC}$  e riscrivere le due equazioni del modello nella forma

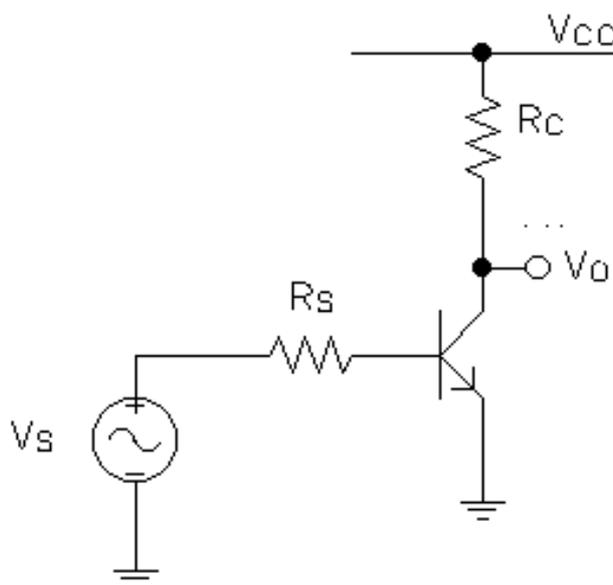
$$\begin{cases} I_E = -\frac{I_{E0}}{1-\alpha_F\alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) - \frac{\alpha_R I_{C0}}{1-\alpha_F\alpha_R} \\ I_C = \frac{\alpha_F I_{E0}}{1-\alpha_F\alpha_R} \left( e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1 \right) + \frac{I_{C0}}{1-\alpha_F\alpha_R} \end{cases}$$

Componendo in modo opportuno le due equazioni, si ottiene facilmente che

$$\boxed{I_C = -\alpha_F I_E + I_{C0}}$$

## Stadio ad emettitore comune

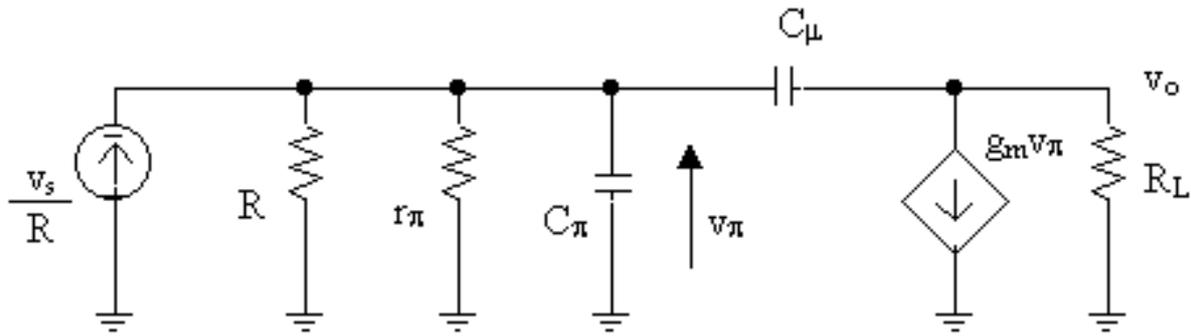
Consideriamo un classico stadio ad emettitore comune come quello della figura seguente:



Il nostro obiettivo è quello di determinare la **frequenza di taglio superiore** di questo circuito, intesa come la frequenza alla quale il guadagno di tensione  $A_v(j\omega) = \frac{V_o}{V_s}(j\omega)$  scende di

3dB rispetto al valore (sempre in dB) che assume per  $\omega=0$ .

Per prima cosa, dobbiamo dunque calcolare  $A_v(j\omega)$ , per cui consideriamo il circuito equivalente per piccoli segnali di questo stadio, nel quale teniamo conto (dato che stiamo supponendo di lavorare ad alta frequenza) delle capacità intrinseche del transistor:



Per comodità, è stato fatto l'equivalente di Norton del generatore forzante d'ingresso e nella resistenza R è stata inclusa la resistenza intrinseca di base  $r_b$ , che è in serie ad  $R_S$ .

Scrivendo le relazioni di equilibrio delle correnti ai due nodi del circuito, otteniamo quanto segue (indichiamo le rispettive ammettenze dei resistori con la lettera G) :

$$(1) \quad v_s \cdot G - v_\pi \cdot (G + g_\pi) - C_\pi \cdot \frac{dv_s}{dt} + C_\mu \cdot \frac{d(v_o - v_\pi)}{dt} = 0$$

$$(2) \quad -g_m \cdot v_\pi + C_\mu \cdot \frac{d(v_\pi - v_o)}{dt} - v_o \cdot G_L = 0$$

Trasformando le due equazioni con la trasformata di Laplace e facendo qualche semplice passaggio, si ottiene

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} = - \frac{G \cdot (g_m - sC_\mu) \cdot R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)] + C_\mu C_\pi R_L s^2}$$

La funzione di trasferimento ha evidentemente due poli, in quanto il denominatore è del 2° ordine; dato che un'equazione di 2° grado con coefficienti positivi ha le soluzioni a parte reale negativa, deduciamo che il sistema presenta due poli a parte reale negativa. Inoltre il sistema presenta uno zero reale positivo  $\frac{g_m}{C_\mu}$ .

La funzione di trasferimento è strutturalmente esprimibile allora nella forma seguente:

$$A_v(s) = A_{v0} \frac{\left(1 - \frac{s}{z}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{p_2}\right)}$$

La costante  $A_{v0}$  definisce il **guadagno statico**, che può essere ottenuto ponendo  $s=0$  nella funzione di trasferimento :

$$A_{v0} = A_v(0) = -g_m R_L \frac{r_\pi}{R + r_\pi} = -\frac{\beta_0 R_L}{R + r_\pi} = -\frac{\beta_0 R_L}{R_s + r_b + r_\pi}$$

Il sistema risulta essere asintoticamente stabile e pertanto si può applicare il **teorema di risposta armonica**, in base al quale la funzione di risposta armonica si ottiene dalla funzione di trasferimento con la semplice sostituzione di  $s$  con  $j\omega$ :

$$A_v(j\omega) = A_{v0} \frac{\left(1 - \frac{j\omega}{z}\right)}{\left(1 - \frac{j\omega}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{j\omega}{p_2}\right)}$$

Il modulo della funzione di risposta armonica ci fornisce il guadagno in tensione del circuito al variare della frequenza. I due poli del circuito si valutano risolvendo l'equazione caratteristica del sistema, ottenibile uguagliando a zero il denominatore di  $A_v(s)$ :

$$C_\mu C_\pi R_L s^2 + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)] + G + g_\pi = 0$$

Si tratta di una equazione di 2° grado, le cui soluzioni risultano essere

$$|p_1| \cong \frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{C_\pi + C_\mu \cdot \left[ (1 + g_m R_L) + \frac{R_L}{R} \right]} \quad |p_2| \cong \frac{1}{R_L C_\mu} + \frac{1}{R' C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\pi} + \frac{g_m}{C_\pi}$$

dove abbiamo posto  $R' = R // r_\pi$ .

La frequenza di taglio può essere determinata imponendo che il modulo della funzione di risposta armonica sia uguale a  $\frac{A_v(0)}{\sqrt{2}}$ . Questa operazione, però, anche in un caso semplice come questo si rivela in realtà inutile, poiché, in genere, per i circuiti si può assumere l'ipotesi di sistema a polo dominante e quindi si ha che  $w_h \cong |p_1|$  dove  $p_1$  è il polo a frequenza più piccola.

In questo caso l'ipotesi di sistema a polo dominante è ampiamente verificata: infatti, considerando che ci si trova a frequenze molto più basse di quella di

transizione del transistor, si ha che  $\omega \ll \omega_T \cong \frac{g_m}{C_\pi}$ , da cui deriva che

$$\omega C_\pi \ll g_m$$

Moltiplicando allora ambo i membri di questa disuguaglianza per  $\omega C_\mu R_L$  si ottiene

$$\omega^2 C_\mu C_\pi R_L \ll \omega C_\mu R_L g_m$$

Confrontando con le espressioni della funzione di trasferimento e della risposta armonica, deduciamo che può essere trascurato il termine di 2° grado:

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} \cong - \frac{G \cdot (g_m - sC_\mu) \cdot R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Lo zero  $z = \frac{g_m}{C_\mu}$  di questa funzione si trova al di là della frequenza di transizione del BJT, che vale notoriamente  $\omega_T = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$ , per cui si tratta di uno **zero fuori banda** che possiamo trascurare (numericamente, il termine  $C_\mu/g_m$  corrispondente a tale zero è dell'ordine di  $10^{-11}$ ), in modo da porre la funzione di trasferimento nella seguente forma approssimata:

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} \cong - \frac{Gg_mR_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica è quindi

$$\frac{v_o(j\omega)}{v_s(j\omega)} \cong - \frac{Gg_mR_L}{G + g_\pi + j\omega \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Questa funzione approssima molto bene quella esatta, ben oltre la frequenza del suo unico polo. Tale polo, in base all'espressione appena ricavata, è dunque

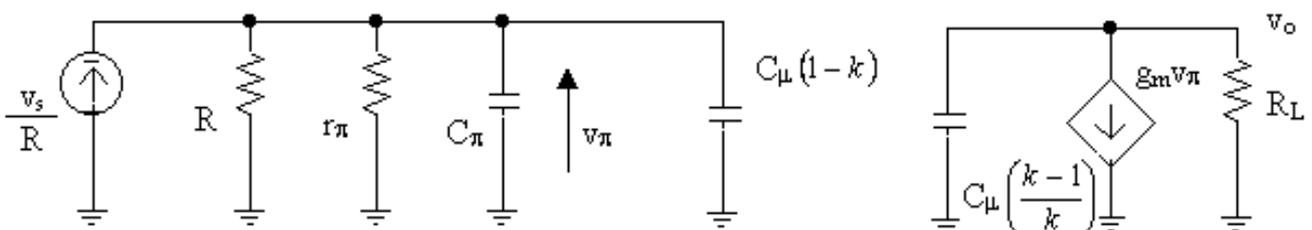
$$p = - \frac{G + g_\pi}{C_\pi + C_\mu [1 + R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Il risultato ottenuto è del tutto analogo a quello che si è ottenuto senza l'approssimazione di polo dominante, per cui concludiamo che  $\omega_h = |p|$ .

L'approssimazione a polo dominante può essere in genere fatta, senza commettere un grosso errore, quando il 2° polo dista dal 1° di almeno una decade. In caso contrario si possono ottenere errori non tollerabili.

### Effetto Miller sulla capacità $C_m$

Lo stadio ad emettitore comune suggerisce una notevole applicazione del **teorema di Miller**. Se applichiamo alla capacità  $C_\mu$  il teorema di Miller, otteniamo il seguente circuito, equivalente a quello di partenza:



dove abbiamo indicato con  $k$  il guadagno in tensione tra i due nodi a cui è collegata la capacità  $C_\mu$  nel circuito di partenza.

Consideriamo adesso il seguente *teorema sulle reti elettriche*:

*“Dato un circuito costituito da  $N$  parti tra di loro sconnesse ( $N$  può anche essere uguale ad 1), se per ognuna di esse viene scelta una porta e a quella porta viene valutata l’ammettenza (passivando tutti i generatori indipendenti), allora tutte le frequenze che soddisfano questa condizione sono frequenze naturali del circuito”<sup>1</sup>*

E’ importante evidenziare che è opportuno applicare questo teorema quando la singola parte di circuito per la quale si annulla l’ammettenza ha ordine pari ad uno, altrimenti ci si ritrova a dover fare molti conti e quindi il teorema non risulta di alcuna utilità. Diciamo, quindi, che il teorema risulta utile se si è capaci, con delle operazioni di equivalenza e/o con delle ragionevoli approssimazioni, di sconnettere dal circuito parti di ordine pari ad uno: annullando l’ammettenza in quella parte, si ottiene la frequenza di un polo del circuito.

In pratica, questo è ciò che viene fatto con il teorema di Miller applicato al circuito ad emettitore comune e quindi i due poli si possono valutare facilmente. Il problema è che il coefficiente  $k$  dipende dalla frequenza, poiché rappresenta il guadagno in tensione tra i nodi a cui è collegata  $C_\mu$ . Per calcolare l’espressione esatta di  $k$ , bisognerebbe risolvere il circuito (ma questo è proprio quello che si vuole evitare) e comunque, valutando i poli, si otterrebbero delle espressioni in funzione di  $k$  (e quindi di  $s$ ) e quindi in realtà non si determinerebbero i poli del circuito. Tuttavia, nel caso particolare della determinazione della frequenza di taglio  $\omega_h$ , se supponiamo  $k$  costante e pari al valore a centro banda, otteniamo, applicando il teorema di Miller, un circuito equivalente a quello di partenza fino alla sua frequenza di taglio. Pertanto, *possiamo calcolare la frequenza di taglio del nuovo circuito e assumere con buona approssimazione che essa sia anche la frequenza di taglio del circuito di partenza*. Questa operazione prende il nome di **approssimazione di Miller** (e si tratta di una approssimazione a polo dominante).

Oltre a semplificare notevolmente la ricerca della frequenza di taglio, l’approssimazione di Miller offre una spiegazione significativa di come il limite della risposta in frequenza dei transistor in configurazione di emettitore comune non venga dalla  $C_\pi$ , ma bensì dalla  $C_\mu$  che in genere riporta in ingresso una capacità nettamente maggiore della  $C_\pi$  (questo prende il nome di **effetto Miller**).

Adottando dunque l’approssimazione di Miller, si ottengono i seguenti poli:

$$\frac{1}{R} + s \cdot [C_\pi + C_\mu \cdot (1 - k)] = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = - \frac{1}{[C_\pi + C_\mu \cdot (1 - k)] \cdot R}$$

$$\frac{1}{R_L} + s \cdot C_\mu \cdot \left( \frac{k - 1}{k} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = - \frac{1}{C_\mu \cdot \left( \frac{k - 1}{k} \right) \cdot R_L}$$

dove  $k = -g_m R_L$  è il guadagno a centro banda tra i nodi di base e di collettore ai quali è connessa la  $C_\mu$ .

*Tra questi due poli, sarà quello a frequenza più bassa ad essere in comune con il circuito di partenza, mentre per quello a frequenza più alta l’equivalenza con l’approssimazione di Miller non è più*

<sup>1</sup> La dimostrazione del teorema può essere intuita constatando che in un circuito privo di generatori forzanti l’unica soluzione non banale è data dalla risposta naturale del circuito.

valida (per cui esso non dà alcuna indicazione). D'altra parte, il nostro scopo è trovare  $\omega_H$ , per cui, a patto che il secondo polo non sia interagente col primo, ci basta trovare quest'ultimo.

Evidenziamo, a questo punto, che l'effetto Miller non è sempre un effetto indesiderato: infatti, in alcuni casi, collocando una capacità fra due nodi dove esiste un guadagno in tensione elevato e invertente, si può simulare una capacità nettamente maggiore di quella che viene utilizzata (il caso più frequente lo si ha con la compensazione interna degli amplificatori).

### **Osservazioni**

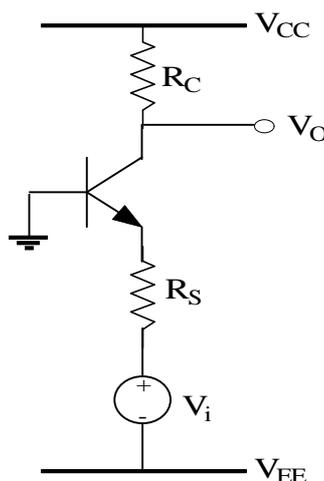
Il circuito che si ottiene con il teorema di Miller è perfettamente equivalente a quello di partenza, ma esso ha l'inconveniente di dipendere da un rapporto di tensioni. Da ciò segue che ha senso applicare il teorema solo nei casi in cui il coefficiente  $k$  è costante e cioè quando si ha un unico ingresso sinusoidale. Se cambia la frequenza del generatore forzante, cambiano i valori delle reattanze.

Inoltre, il circuito di Miller non può essere utilizzato per valutare la resistenza d'uscita, poiché questo essenzialmente comporta uno spostamento del generatore forzante e in genere un cambiamento del coefficiente  $k$ . Quindi, fatto l'equivalente di Miller, il nuovo circuito che si ottiene può essere utilizzato solo per l'analisi di funzioni di trasferimento in avanti (forward).

Infine, se si utilizza l'approssimazione di Miller, si deve aggiungere, a tutto ciò che è stato detto finora, che il nuovo circuito è equivalente a quello di partenza solo fino alla frequenza di taglio. Questo giustifica la perdita dello zero di trasmissione che nel circuito di partenza era presente.

## **Stadio a base comune**

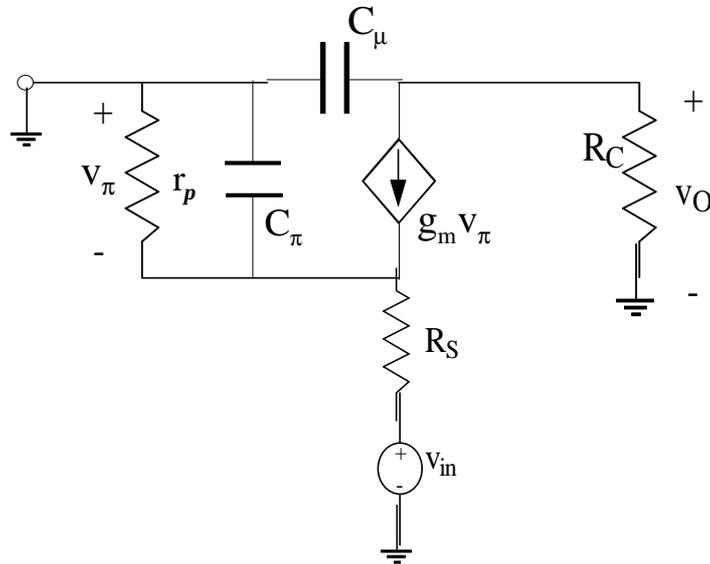
Lo schema circuitale di un classico stadio a base comune è riportato nella figura seguente:



Uno stadio a base comune presenta notoriamente una bassa impedenza di ingresso (che vale  $1/g_m$  a centro banda), un'altra impedenza di uscita (quella di uno specchio di Widlar) e un guadagno di corrente prossimo all'unità (è un inseguitore di corrente). Esso presenta una banda passante particolarmente estesa, per cui trova ampio utilizzo nelle applicazioni a larga banda e in quelle dove è richiesta una bassa impedenza di ingresso. Altre applicazioni sono come stadi di uscita ad alta

tensione e come traslatori di livello di tensione, come per esempio accade nell'amplificatore operazionale  $\mu A-741$ .

Nella figura seguente è mostrato il circuito equivalente per piccoli segnali di uno stadio a base comune, nel quale vengono incluse ovviamente le capacità intrinseche, che determinano il comportamento in alta frequenza:



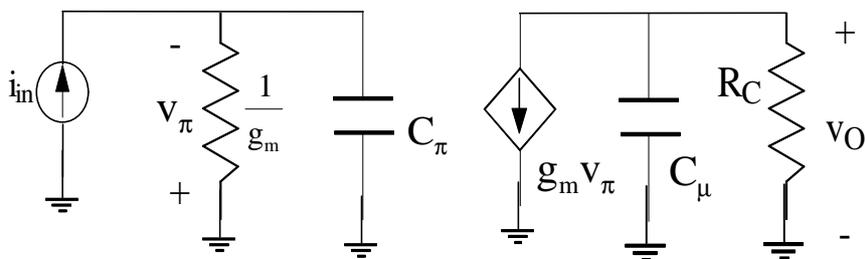
L'impedenza di ingresso è la stessa dello stadio inseguitore di emettitore: essa vale

$$Z_{IN} = r_b + \frac{r_\pi}{1 + sC_\pi r_\pi} + \left( 1 + g_m \frac{r_\pi}{1 + sC_\pi r_\pi} \right) R_E$$

Si tratta di una impedenza piccola alle basse frequenze, mentre, per frequenze più elevate e per correnti di polarizzazione del collettore di centinaia di  $\mu A$ , essa diventa induttiva per la presenza della resistenza intrinseca di base  $r_b$  (che però abbiamo trascurato nella figura di prima).

Per quanto riguarda, invece, l'impedenza di uscita, essa può essere approssimativamente stimata, a bassa frequenza, con  $\beta_0 R_O$  ed è perciò molto grande. Alle alte frequenze, invece, essa riceve un contributo notevole dalla capacità  $C_\mu$  e manifesta perciò un comportamento capacitivo.

Al fine di individuare il guadagno di tensione in funzione della frequenza, conviene ridisegnare il circuito equivalente in modo più opportuno; con opportuni passaggi sul circuito (tra cui la rappresentazione dell'ingresso mediante un generatore ideale di corrente, al posto del generatore reale di tensione usato prima) della figura precedente, si giunge a quest'altro circuito:



Questo circuito è estremamente semplice da analizzare. La tensione di uscita  $v_O(s)$  è semplicemente dovuta alla corrente  $g_m v_\pi(s)$  che fluisce nel parallelo tra  $R_C$  e  $C_\mu$ , come anche tensione  $v_\pi(s)$  è dovuta alla corrente di ingresso  $i_{in}(s)$  che fluisce nel parallelo tra  $1/g_m$  e  $C_\pi$ . Prendendo come corrente di uscita  $i_O(s)$  la corrente che scorre nella resistenza  $R_C$  e trascurando la

capacità  $C_\mu$  (che non è in questo caso soggetta ad effetto Miller), si ottiene, per il guadagno di corrente, la seguente espressione:

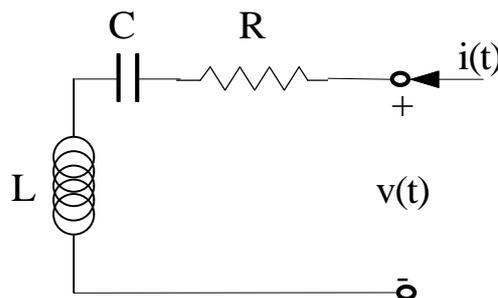
$$A_I(s) = \frac{i_o(s)}{i_{in}(s)} = \frac{\beta_0}{1 + \beta_0 \frac{C_\pi}{g_m}}$$

Questa espressione mostra che il guadagno di corrente dello stadio a base comune vale  $\frac{\beta_0}{1 + \beta_0}$  a bassa frequenza (cioè praticamente 1) ed ha un polo reale negativo  $p = -\frac{g_m}{C_\pi} = -\omega_p$  ad una frequenza prossima alla frequenza di transizione del transistor, che vale notoriamente  $\omega_T = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$ . Ciò significa, in modo analogo a quanto accade per lo stadio inseguitore di emettitore, che *lo stadio a base comune è un amplificatore (non invertente) a larga banda.*

## Circuiti RLC risonanti

### RISONANZA SERIE

Consideriamo un semplice monoporta costituito da un collegamento in serie tra un resistore, un induttore ed un condensatore:



Supponiamo di alimentare il circuito mediante una tensione sinusoidale di ampiezza costante e pulsazione  $\omega$ : avremo perciò una forma d'onda del tipo  $v(t) = V_M \cos(\omega t)$  (dove ovviamente stiamo assumendo  $\alpha_v=0$ ) cui è associato il fasore  $\bar{V} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \langle 0^\circ \rangle$ .

Ci chiediamo, allora, come varia la corrente  $i(t)$  assorbita dal carico al variare della pulsazione  $\omega$  dell'alimentazione.

Per prima cosa determiniamo il fasore  $\bar{I}$  associato alla corrente  $i(t)$  e l'angolo di sfasamento  $\varphi$ , che saranno ovviamente entrambi funzioni di  $\omega$ : per un circuito RLC di questo tipo, l'impedenza d'ingresso vale

$$z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

ed essa lega corrente e tensione mediante la relazione  $\bar{V} = z\bar{I}$ . Abbiamo allora facilmente che

$$I(\omega) = \frac{V}{z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Analizziamo nel dettaglio le espressioni ottenute, cominciando dalla corrente.

La prima cosa che risulta evidente è che esiste un valore della pulsazione  $\omega$  che annulla la reattanza all'impedenza, ossia che annulla il termine  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ . Si tratta precisamente del valore

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

che prende il nome di “**pulsazione di risonanza**”.

Il motivo del termine “*risonanza*” sarà chiaro tra un attimo. Per il momento, ci basta sottolineare che, *se alimentiamo un circuito RLC serie mediante una alimentazione con pulsazione pari a  $\omega_0$ , il circuito si comporta semplicemente come un circuito resistivo, ossia come se né l'induttore né il condensatore fossero presenti.*

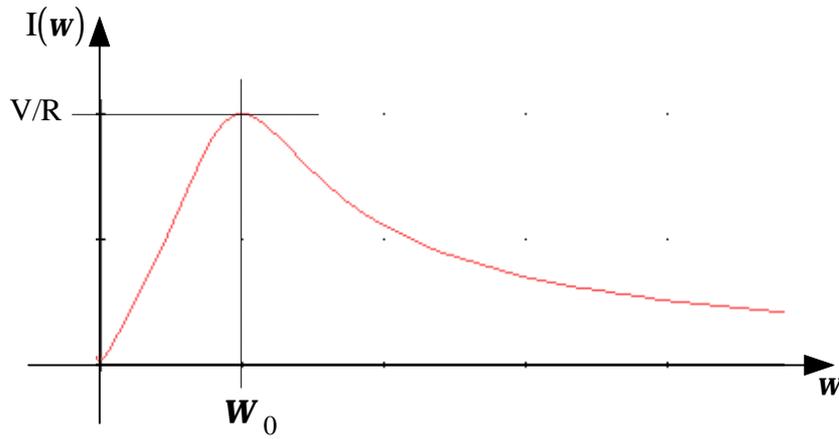
Dire che il circuito si comporta come un circuito resistivo equivale fondamentalmente a dire 3 cose:

- $z=R$  (la reattanza all'impedenza è nulla)
- $\varphi=0$  (tensione e corrente sono in fase)
- $I=V/R$  (la corrente assume il suo valore massimo)

Oltre a questo, si osservano anche altre due cose a proposito del valore assunto dal valore efficace della corrente  $i(t)$  in funzione di  $\omega$ : si ha infatti che

$$\text{se } \omega=0 \rightarrow I(0)=0 \quad \text{se } \omega \rightarrow \infty \rightarrow I(\infty) \rightarrow 0$$

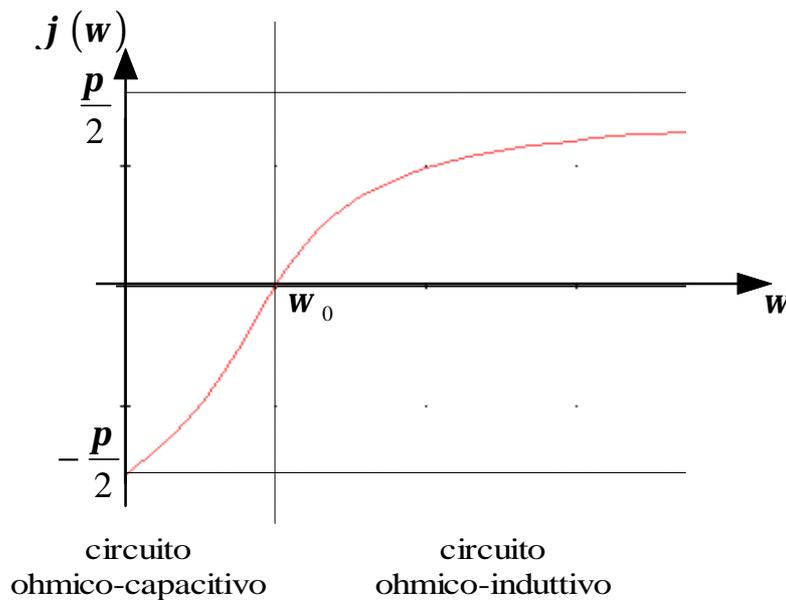
Sulla base di questi risultati, possiamo tracciare un grafico del valore efficace della corrente  $I(\omega)$  in funzione di  $\omega$ :



(in ascisse è stata usata una scala lineare per  $\omega$ ).

Si osserva, dunque, come il valore efficace della corrente parta dal valore nullo in corrispondenza di  $\omega=0$  (che corrisponde ad alimentare il circuito con una tensione continua), per crescere verso il valore di picco  $V/R$ , che si ottiene in corrispondenza di  $\omega_0$ , e quindi decrescere nuovamente verso il valore nullo per  $\omega \rightarrow \infty$ .

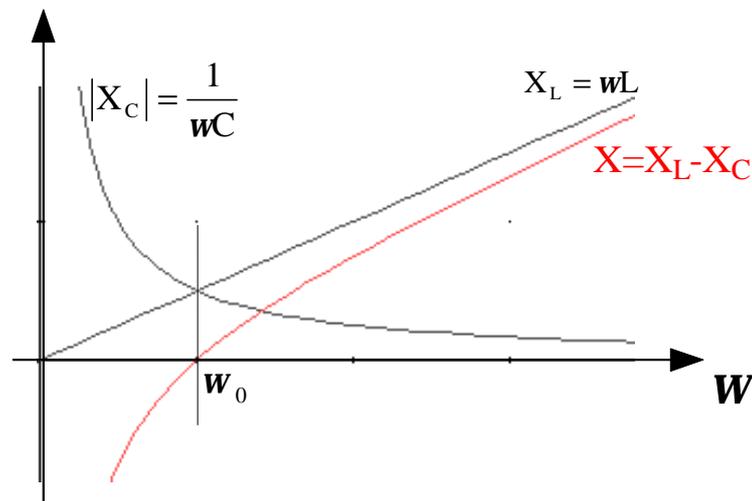
Il discorso non è molto diverso per quanto riguarda l'angolo di sfasamento  $\phi$ , il cui andamento grafico è fatto nel modo seguente:



Il grafico parte dal valore  $-\pi/2$  per  $\omega=0$ ; cresce fino a raggiungere il valore 0 in corrispondenza della pulsazione di risonanza, in accordo al fatto che, in questa condizione, il circuito è resistivo e quindi corrente e tensione sono in fase (ossia appunto  $\phi=0$ ); infine cresce ancora, tendendo in modo esponenziale al valore  $+\pi/2$  al crescere di  $\omega$ . Quindi, *l'angolo di sfasamento è una funzione crescente di  $\omega$  e si annulla in condizioni di risonanza.*

Nel primo tratto, dove l'angolo è negativo, il circuito si comporta dunque come un circuito ohmico-capacitivo, in quanto la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva; quando l'angolo di sfasamento si annulla, si comporta da circuito solo ohmico; infine, nel tratto in cui l'angolo di sfasamento è positivo, il circuito risulta essere ohmico-induttivo, in quanto la reattanza induttiva prevale questa volta su quella capacitiva.

Questo fatto può essere visto in un diagramma in cui riportiamo, sempre al variare di  $\omega$ , i valori di  $X_C$ ,  $X_L$  e  $X = X_L - X_C$ :



Il grafico mostra chiaramente che, prima di  $\omega_0$ , la reattanza capacitiva è maggiore di quella induttiva, per cui la reattanza complessiva è negativa, mentre, dopo  $\omega_0$ , accade il contrario, per cui  $X$  è positiva. In  $\omega_0$ , le due reattanze sono identiche e quindi la reattanza complessiva  $X$  si annulla.

### Fattore di qualità serie

Consideriamo sempre il circuito RLC serie esaminato prima e supponiamo che esso venga alimentato da una tensione avente pulsazione pari alla pulsazione di risonanza  $\omega_0$ . Abbiamo visto che, in queste condizioni, l'impedenza del circuito vale semplicemente  $R$  (cioè il circuito si comporta in modo puramente resistivo) e che il fasore associato alla corrente  $i(t)$  è  $\bar{I} = \frac{V}{R} \langle 0^\circ$ .

Questa è anche la corrente che scorre nel condensatore e nell'induttore, per cui possiamo calcolarci i fasori delle rispettive tensioni:

$$\bar{V}_C = \dot{z}_C \bar{I} = \frac{V}{\omega_0 RC} \langle -90^\circ \quad \bar{V}_L = \dot{z}_L \bar{I} = \frac{\omega_0 VL}{R} \langle 90^\circ$$

Tenendo conto che  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , le due tensioni risultano essere

$$\bar{V}_C = \dot{z}_C \bar{I} = \frac{V}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \langle -90^\circ \quad \bar{V}_L = \dot{z}_L \bar{I} = \frac{V}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \langle 90^\circ$$

Si osserva cioè che, *in condizioni di risonanza, le tensioni sul condensatore e sull'induttore risultano essere in opposizione di fase (cioè sfasate di  $180^\circ$ ), ma con valori efficaci uguali.*

In altre parole, in condizioni di risonanza serie, la tensione di alimentazione si ritrova interamente ai capi della resistenza, mentre le tensioni ai capi del condensatore e dell'induttore sono uguali ed in opposizione di fase.

Prende allora il nome di “**fattore di qualità serie**” il rapporto tra il valore efficace della tensione ai capi del condensatore (o dell'induttore in base a quanto appena visto) e la tensione di alimentazione, quando il circuito è in condizioni di risonanza:

$$Q = \frac{V_L}{V} = \frac{V_C}{V} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

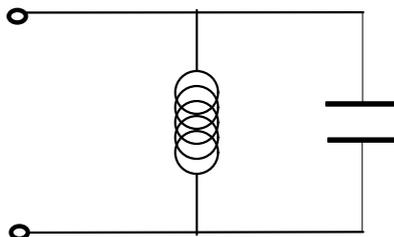
L'importanza ingegneristica di questo fattore  $Q$  è notevole e può essere spiegata nel modo seguente: dato sempre il circuito RLC serie visto prima, supponiamo di alimentarlo con una tensione sinusoidale avente valore efficace di 220V e frequenza angolare  $\omega = \omega_0$ ; in base a quanto visto prima, la condizione di funzionamento del circuito (cioè la risonanza serie) è tale che ai capi della resistenza si localizzi una tensione con valore efficace di 220 e che le tensioni ai capi di C ed L siano uguali ed in opposizione di fase. Quanto vale il valore efficace della tensione ai capi di questi elementi? In base a come abbiamo definito  $Q$ , essa vale  $V_L = V_C = QV$ , ossia è pari a 220V moltiplicato per il fattore di qualità serie; è importante allora conoscere il valore di  $Q$ : per esempio, supponiamo che i valori di R, L e C siano tali che risulti  $Q=10$ ; in questo caso, condensatore e induttore hanno ai loro capi una tensione di valore efficace pari a 2200V e, presumibilmente, si tratta di un valore che distrugge entrambi gli elementi.

Considerando che  $Q$  è inversamente proporzionale ad R e che, nella maggior parte dei circuiti, si tende a rendere R quanto più piccola è possibile, è chiara l'importanza che assume  $Q$ : dovendo decidere come alimentare il circuito, bisogna stare attenti alla pulsazione  $\omega$  ed al valore di  $Q$ , in quanto, se la pulsazione è vicina o addirittura uguale a quella di risonanza e se  $Q$  è elevato, è molto probabile che le tensioni ai capi di C ed L siano tali di distruggere il circuito stesso.

D'altra parte, è anche possibile fare un discorso inverso a quello appena esposto: considerato sempre lo stesso circuito, supponiamo che esso venga alimentato dal solito segnale sinusoidale  $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ ; supponiamo anche che l'ampiezza  $V_M$  di questo segnale (o, ciò che è lo stesso, il suo valore efficace), sia particolarmente debole, per cui è nostra intenzione amplificarlo; per fare questo, possiamo sfruttare proprio il concetto di risonanza, in quanto abbiamo visto che quanto più la pulsazione di alimentazione si approssima alla pulsazione di risonanza, tanto più la tensione che possiamo raccogliere ai capi della resistenza R tende a crescere: considerando che la  $\omega$  di ingresso è fissa, l'unica cosa che possiamo fare è quella di variare la pulsazione di risonanza  $\omega_0$  del circuito in modo che si avvicini quanto più è possibile a  $\omega$ ; ovviamente, per variare  $\omega_0$ , dobbiamo variare il valore di L o C; generalmente, si opera sul valore di C, che può essere modificato utilizzando i cosiddetti "condensatori a capacità variabile", ottenibili tramite diodi a giunzione. Le variazioni di C provocano ovviamente variazioni di  $Q$  e potremo scegliere quel valore di C (e quindi di  $\omega_0$  e di  $Q$ ) che ci fornisce l'amplificazione voluta del segnale in ingresso.

## RISONANZA PARALLELO

Nei paragrafi precedenti abbiamo esaminato cosa succede alla corrente di un circuito RLC serie quando si fa variare la pulsazione  $\omega$  della tensione sinusoidale di alimentazione. Qualcosa di simile vogliamo vedere adesso a proposito di un circuito monoporta costituito da un collegamento in parallelo di un induttore di induttanza L ed un condensatore di capacità C:



Supponiamo di alimentare il collegamento mediante una tensione sinusoidale, la cui forma d'onda sia  $V(t) = V_M \cos(\omega t)$ . Sappiamo ormai bene che la risposta del monoporta è una corrente in ingresso del tipo  $I(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$ , dove  $\varphi$  è ancora una volta l'angolo di sfasamento, ossia l'argomento dell'impedenza totale del circuito considerato.

Così come abbiamo fatto per la risonanza serie, vogliamo esaminare l'andamento della corrente  $i(t)$  al variare della pulsazione  $\omega$  con cui alimentiamo il circuito. E' abbastanza intuitivo comprendere come il ragionamento che ci accingiamo a fare sia semplicemente il "duale" di quello fatto per la risonanza serie.

Sappiamo intanto che corrente e tensione sono legate dalla legge  $\bar{I} = \bar{V} \dot{y}$ , dove  $\dot{y}$  è l'ammettenza del circuito (pari al reciproco dell'impedenza). Tale ammettenza, per un collegamento in parallelo, è la somma delle ammettenze: le singole ammettenze sono

$$\dot{y}_L = \frac{1}{z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L} \qquad \dot{y}_C = \frac{1}{z_C} = j\omega C$$

per cui l'ammettenza globale (detta anche "ammettenza di porta") è  $\dot{y} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ .

Allora, la corrente è semplicemente

$$I(\omega) = V\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Questa funzione nella variabile  $\omega$  ammette un minimo in corrispondenza del valore di  $\omega$  tale che  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , e si tratta evidentemente del valore  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Questo valore della pulsazione  $\omega$  prende il nome di "**pulsazione di anti-risonanza**": l'uso del prefisso "anti" deriva dal fatto che, mentre, nella risonanza serie, la corrente che si ottiene per  $\omega = \omega_0$  è la massima possibile, nella risonanza parallelo (o "**antirisonanza**") esso è nulla, ossia assume il valore minimo:  $I(\omega_0) = 0$

Naturalmente, mentre è nulla la corrente in ingresso, non sono certamente nulle le correnti che attraversano i due elementi: si ha infatti che

$$\bar{I}_L = \bar{V} \dot{y}_L = -\bar{V} j \frac{1}{\omega_0 L} = -\bar{V} j \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \bar{I}_C = \bar{V} \dot{y}_C = \bar{V} j \omega_0 C = \bar{V} j \sqrt{\frac{C}{L}} = -\bar{I}_L$$

Come era prevedibile, si tratta di correnti uguali ed opposte, che è la condizione necessaria affinché la corrente complessiva sia nulla (come imposto dalla LKC). In pratica, alimentando il circuito con una tensione sinusoidale di pulsazione pari alla pulsazione di antirisonanza  $\omega_0$ , si realizza un "**oscillatore puro**": *la corrente risulta ingabbiata tra il condensatore e l'induttore.*

Naturalmente, ciò è possibile solo ritenendo ideali l'induttore ed il condensatore e, soprattutto, quando mancano elementi dissipativi. Al contrario, nella realtà, l'induttore e il condensatore presentano una certa dissipazione di potenza: per tenere conto di questa dissipazione e vedere come cambiano le cose, possiamo inserire in parallelo anche un resistore di ammettenza generica

$\dot{y}_R = \frac{1}{z_R} = G$ . L'ammettenza di porta diventa allora  $\dot{y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ , e quindi la corrente, in

termini di fasori, è

$$\bar{I} = \bar{V} \dot{y} = GV + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) V$$

Per una pulsazione pari a  $\omega_0$ , la parte immaginaria si annulla e otteniamo perciò  $\bar{I} = G\bar{V}$ . Quindi, anche in condizioni di anti-risonanza, la corrente in ingresso al circuito non è più nulla. Le correnti nell'induttore e nel condensatore continuano ad essere le stesse di prima, ossia uguali ed opposte, per cui è come se tutta la corrente in ingresso passi per il resistore e dissipi energia.

Possiamo cioè dire che, *anche in presenza di fenomeni dissipativi, è realmente possibile realizzare un fenomeno periodico nel parallelo tra condensatore e induttore*. Tuttavia, mentre nel caso ideale questo era possibile senza alcun apporto energetico dall'esterno, nel caso reale è necessario fornire energia dall'esterno, proprio in modo da compensare gli effetti dissipativi sul resistore.

### Fattore di qualità parallelo

Così come, nel caso del circuito RLC serie, in condizioni di risonanza, avevamo la tensione sul condensatore e quella sull'induttore con valori efficaci uguali, ma in opposizione di fase, abbiamo poco fa' visto che lo stesso accade nel circuito RLC parallelo, in condizioni di antirisonanza, per quanto riguarda le correnti nel condensatore e nell'induttore:

$$\bar{I}_L = \bar{V} \dot{y}_L = -\bar{V} j \frac{1}{\omega_0 L} = -\bar{V} j \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \bar{I}_C = \bar{V} \dot{y}_C = \bar{V} j \omega_0 C = \bar{V} j \sqrt{\frac{C}{L}} = -\bar{I}_L$$

Prende allora il nome di "**fattore di qualità parallelo**" il rapporto tra la corrente nel condensatore (o dell'induttore in base a quanto appena visto) e la corrente in ingresso al circuito, quando il circuito è in condizioni di anti-risonanza:

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

E' immediato verificare che questo fattore di qualità parallelo è pari esattamente al reciproco del fattore di qualità serie trovato prima.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>