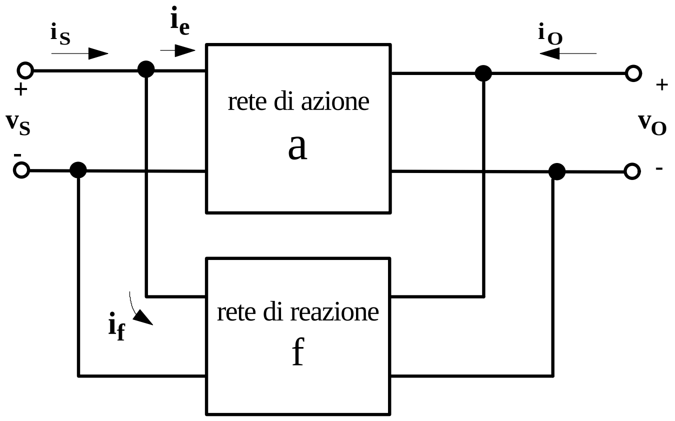
Appunti di Elettronica
Capitolo 13 – parte III
Amplificatori reazionati

Connessione parallelo-parallelo

Mentre la connessione serie-parallelo è caratteristica degli amplificatori di tensione in quanto stabilizza il guadagno di tensione, abbiamo già visto che *la* ***connessione parallelo-parallelo*** *è caratteristica degli* ***amplificatori in transresistenza****, in quanto stabilizza il guadagno in transresistenza*.

La schematizzazione di questo tipo di connessione è riportata nella figura seguente:



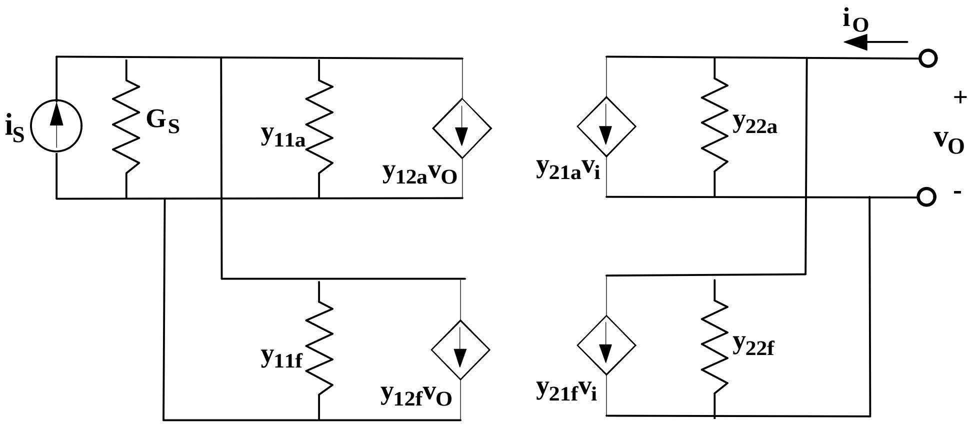
La rappresentazione biporta più opportuna per studiare questo tipo di connessione è quella **a parametri y** (detti anche *parametri di cortocircuito*):

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases}$$

L'opportunità di questa rappresentazione deriva dal fatto di essere quella che, in questo caso, consente più facilmente di sommare correnti ed impedenze sia in ingresso sia in uscita.

Il *criterio pratico* che porta alla scelta di questa rappresentazione è, invece, quello per cui le variabili indipendenti devono corrispondere alle grandezze elettriche in comune alla rete di azione ed a quella di reazione, ossia in questo caso le tensioni di ingresso v_i e di uscita v_O.

Modellando sia la rete di azione sia quella di reazione con i parametri y, otteniamo la seguente rappresentazione circuitale dell'amplificatore nel suo complesso:

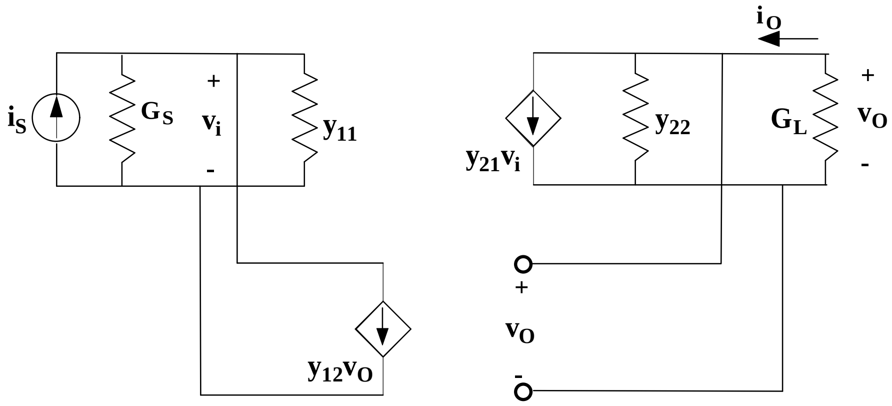


Così come abbiamo fatto nel caso della rappresentazione a parametri h di una connessione serie-parallelo, possiamo fare delle semplificazioni al fine di giungere ad uno schema ideale, in cui la rete di azione e quella di reazione risultino unilaterali e in cui la rete di azione comprenda gli effetti di carico su di essa esercitati dalla rete di reazione.

Per arrivare a questo schema, ci basta osservare che le conduttanze y_{11a} e y_{11f} sono in parallelo così come le conduttanze y_{22a} e y_{22f} , così come anche i generatori di corrente y_{12a} e y_{12f} e i generatori di corrente y_{21a} e y_{21f} : ponendo quindi

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= y_{11a} + y_{11f} \\
y_{12} &= y_{12a} + y_{12f} \\
y_{21} &= y_{21a} + y_{21f} \\
y_{22} &= y_{22a} + y_{22f}
\end{aligned}
$$

otteniamo lo schema seguente:



Vogliamo adesso trovare l'espressione del guadagno di feedback $A_f = v_O / i_S$ dell'amplificatore così rappresentato.

Cominciamo applicando la LKC alla maglia di ingresso:

$$i_S = +(G_S + y_{11})v_i + y_{12}v_O$$

Applichiamo ora la LKC al nodo di uscita:

$$y_{21}v_i + (G_L + y_{22})v_O = 0$$

Da questa seconda relazione possiamo esplicitare la tensione di ingresso i_i da sostituire nella prima relazione:

$$v_i = -\frac{G_L + y_{22}}{y_{21}} v_O \longrightarrow i_S = -(G_S + y_{11})\frac{G_L + y_{22}}{y_{21}} v_O + y_{12}v_O = \left[y_{12} - \frac{(G_S + y_{11})(G_L + y_{22})}{y_{21}} \right] v_O$$

Da qui possiamo dunque ricavare l'espressione del guadagno di tensione:

$$A_f = \frac{v_O}{i_S} = \frac{1}{y_{12} - \dfrac{(G_S + y_{11})(G_L + y_{22})}{y_{21}}}$$

A questo punto, con riferimento all’ultimo circuito disegnato, facciamo le seguenti due posizioni:

$$\boxed{Y_I = G_S + y_{11}} \qquad \boxed{Y_O = G_L + y_{22}}$$

Così facendo, il **guadagno di feedback** assume l’espressione

$$A_f = \frac{v_O}{i_S} = \frac{1}{y_{12} - \dfrac{Y_I Y_O}{y_{21}}}$$

Questa espressione è assolutamente analoga a quella trovata per il guadagno di feedback di un amplificatore di tensione: al posto dei parametri h_{12} e h_{21} e di Z_I, compaiono questa volta i parametri y_{12} e y_{21} e la Y_I.

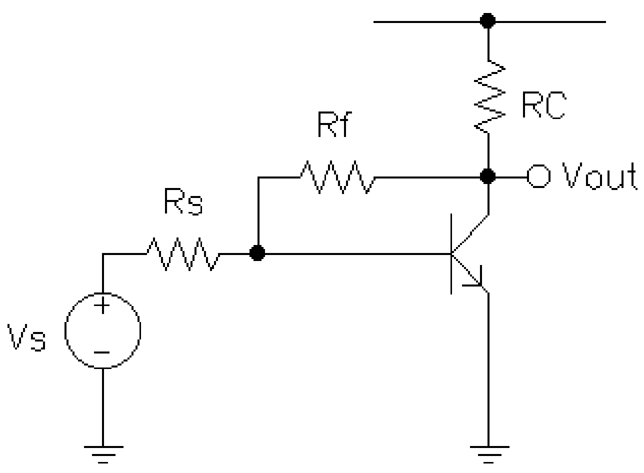
Al fine di arrivare ad una espressione di questo guadagno nella forma $\dfrac{a}{1+af}$, possiamo allora fare gli stessi passaggi fatti in quel caso:

$$A_f = \frac{1}{y_{12} - \dfrac{Y_I Y_O}{y_{21}}} = \frac{y_{21}}{y_{21}y_{12} - Y_I Y_O} = \frac{-\dfrac{y_{21}}{Y_I Y_O}}{1 - \dfrac{y_{21}y_{12}}{Y_I Y_O}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -\dfrac{y_{21}}{Y_I Y_O} \\ f = y_{12} \\ T = -\dfrac{y_{21}y_{12}}{Y_I Y_O} \end{array}}$$

Esempio: stadio invertitore con reazione base-collettore

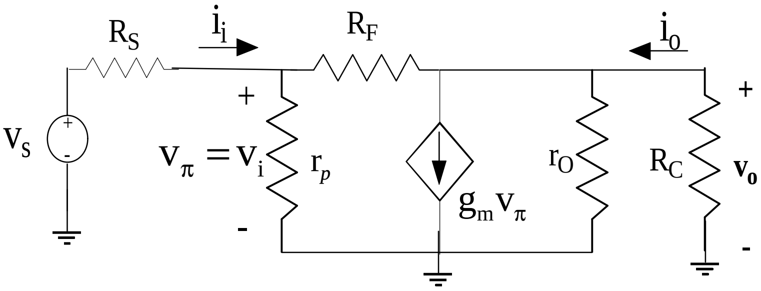
Vediamo adesso di applicare ad un caso concreto i risultati teorici ricavati nel paragrafo precedente.

Sappiamo già che un tipico circuito in cui viene realizzata una connessione parallelo-parallelo è quello indicato nella figura seguente:

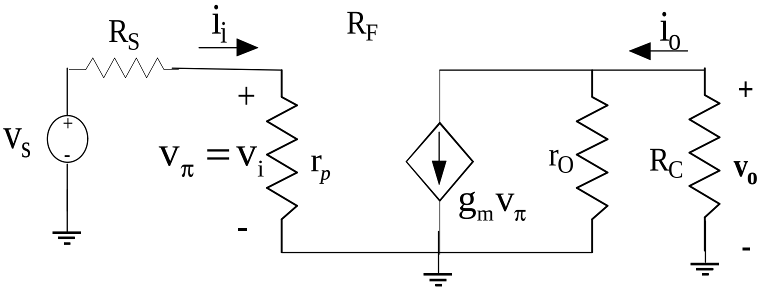


Si tratta di uno stadio invertitore a BJT, reazionato mediante una rete di reazione costituita semplicemente dalla resistenza R_F: quest’ultima preleva la tensione di uscita (parallelo in uscita) e riporta in ingresso una corrente (ad essa proporzionale) da confrontare con il segnale forzante di corrente (parallelo in ingresso).

Vogliamo allora trovare il modello a parametri y di questo circuito. Ci conviene subito considerare il circuito equivalente per piccoli segnali:



La sola rete di azione, senza effetti di carico, è fatta nel modo seguente:

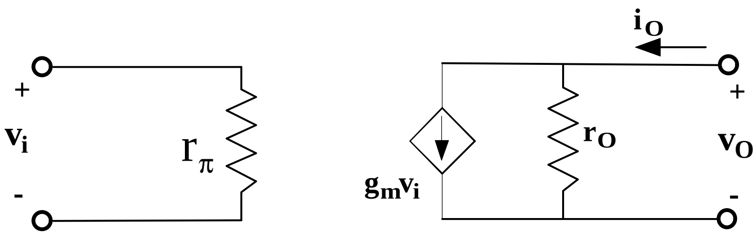


Su questa rete possiamo calcolare i parametri y_a:

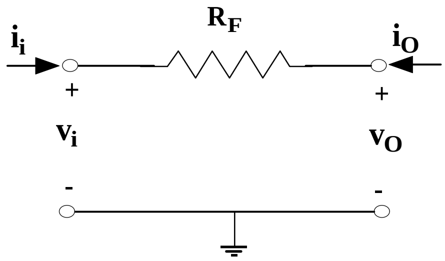
$$y_{11a} = \left.\frac{i_i}{v_i}\right|_{v_O=0} = r_\pi \qquad y_{12a} = \left.\frac{i_i}{v_O}\right|_{v_i=0} = 0$$

$$y_{21a} = \left.\frac{i_O}{v_i}\right|_{v_O=0} = g_m \qquad y_{22a} = \left.\frac{i_O}{v_O}\right|_{v_i=0} = \frac{1}{r_O}$$

La rete di azione ha dunque la seguente rappresentazione a parametri y:



Passiamo adesso alla rete di reazione, che è costituita semplicemente dalla R_F:

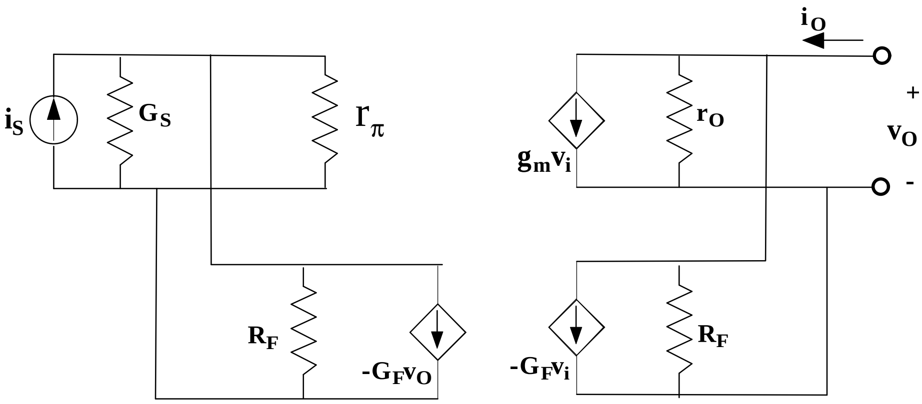


Calcoliamo su questa rete i parametri y_f:

$$y_{11f} = \left.\frac{i_i}{v_i}\right|_{v_O=0} = \frac{1}{R_F} \qquad y_{12a} = \left.\frac{i_i}{v_O}\right|_{v_i=0} = -\frac{1}{R_F}$$

$$y_{21a} = \left.\frac{i_O}{v_i}\right|_{v_O=0} = -\frac{1}{R_F} \qquad y_{22a} = \left.\frac{i_O}{v_O}\right|_{v_i=0} = \frac{1}{R_F}$$

Possiamo allora modellare l'amplificatore reazionato, in termini di parametri y, nel modo seguente:



Possiamo fare le seguenti nuove posizioni:

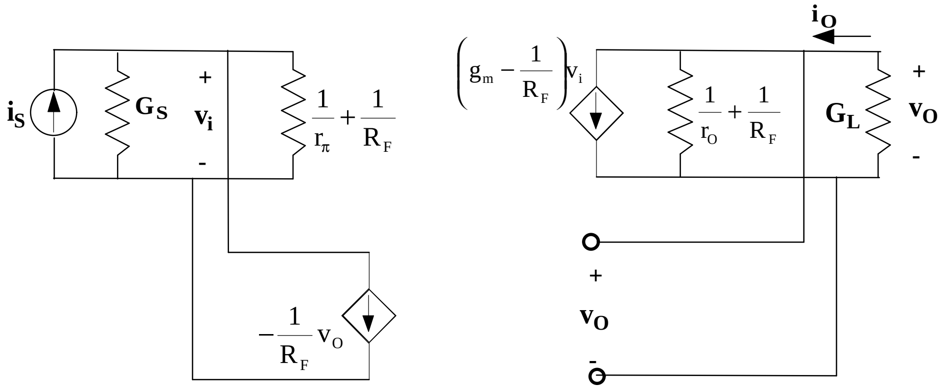
$$y_{11} = y_{11a} + y_{11f} = \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_F}$$

$$y_{12} = y_{12a} + y_{12f} = y_{12f} = -\frac{1}{R_F}$$

$$y_{21} = y_{21a} + y_{21f} = g_m - \frac{1}{R_F}$$

$$y_{22} = y_{22a} + y_{22f} = \frac{1}{r_O} + \frac{1}{R_F}$$

In tal modo, siamo in grado di ricondurci allo schema ideale in cui entrambe le reti sono unilaterali e in cui la rete di azione include gli effetti di carico su di essa esercitati dalla rete di reazione (parametri y_{11f} e y_{22f}):



Possiamo adesso applicare le formule ricavate nel paragrafo precedente al fine di individuare il guadagno delle due reti (azione e reazione) e quindi il guadagno di anello:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{y_{21}}{Y_I Y_O} = -\dfrac{g_m - \dfrac{1}{R_F}}{\left(\dfrac{1}{R_S} + \dfrac{1}{r_\pi} + \dfrac{1}{R_F}\right)\left(\dfrac{1}{r_O} + \dfrac{1}{R_F} + \dfrac{1}{R_C}\right)} \\ f = -\dfrac{1}{R_F} \end{cases} \longrightarrow T = \frac{\left(g_m - \dfrac{1}{R_F}\right)\left(\dfrac{1}{R_F}\right)}{\left(\dfrac{1}{R_S} + \dfrac{1}{r_\pi} + \dfrac{1}{R_F}\right)\left(\dfrac{1}{r_O} + \dfrac{1}{R_F} + \dfrac{1}{R_C}\right)}$$

Molto spesso, la resistenza R_F costituente la rete di reazione ha un valore abbastanza alto, per cui il termine $1/R_F$ è in questi casi trascurabile come termine additivo:

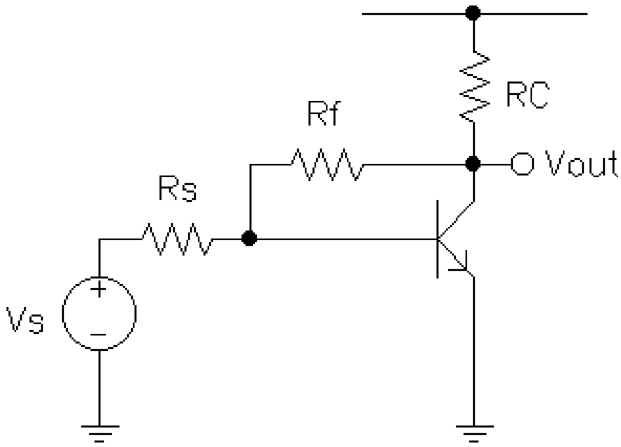
$$\begin{cases} a \cong -\dfrac{g_m}{\left(\dfrac{1}{R_S} + \dfrac{1}{r_\pi}\right)\left(\dfrac{1}{r_O} + \dfrac{1}{R_C}\right)} = -\dfrac{g_m (r_O // R_C)}{(r_\pi // R_S)} \\ f = -\dfrac{1}{R_F} \end{cases} \longrightarrow T \cong \frac{g_m (r_O // R_C) R_F}{(r_\pi // R_S)}$$

Possiamo dunque dire, con buona approssimazione, che il guadagno di feedback ha la seguente espressione:

$$A_f = \frac{a}{1+T} \cong \frac{g_m (r_O // R_C)}{(r_\pi // R_S) + g_m (r_O // R_C) R_F}$$

Tutto questo procedimento è stato seguito considerando la bilateralità sia della rete di azione sia della rete di reazione. Tuttavia, possiamo con buona approssimazione ritenere che le due reti siano invece *unilaterali*. Con questa assunzione di partenza, il procedimento da seguire si semplifica.

Intanto, possiamo determinare, direttamente sull'amplificatore reazionato, la rete di azione con gli effetti di carico. Riprendiamo perciò lo schema del circuito:



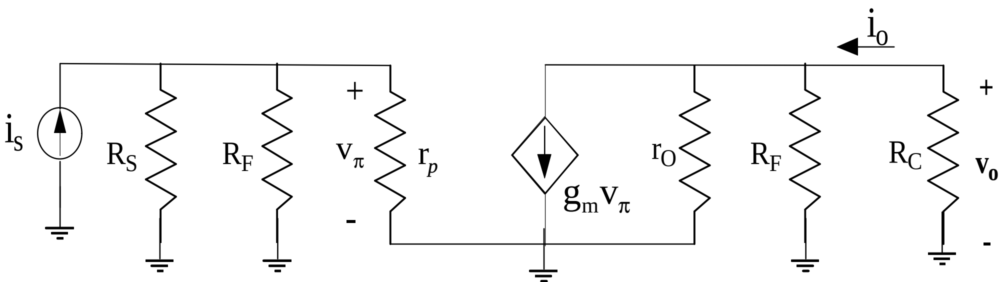
Per determinare gli effetti di carico in ingresso, dato che la connessione è di tipo parallelo, dobbiamo cortocircuitare l'uscita, in quanto questo annulla l'effetto di reazione, ma non annulla l'effetto di carico: se l'uscita è a massa, la R_F e la r_π sono in parallelo, per cui otteniamo la conduttanza

$$y_{11} = y_{11a} + y_{11f} = \frac{1}{r_\pi // R_F}$$

Per determinare gli effetti di carico in uscita, avendo ancora una volta una connessione parallelo, dobbiamo cortocircuitare l'ingresso (in modo da annullare il trasferimento diretto della rete di reazione): se l'ingresso è cortocircuitato, cioè la base del transistor è a massa, risultano in parallelo R_F ed r_O, per cui otteniamo la conduttanza

$$y_{22} = y_{22a} + y_{22f} = \frac{1}{r_O // R_F}$$

In base a questi risultati, il circuito incrementale della rete di azione con gli effetti di carico si ottiene dal circuito incrementale della sola rete di azione ponendo la R_F in parallelo sia alla r_π sia alla r_O:



Possiamo dunque calcolare il guadagno della rete di azione con inclusi gli effetti di carico:

$$a = \frac{v_O}{i_S} = \frac{-g_m v_\pi (r_O // R_F // R_C)}{i_S} = \frac{-g_m i_S (r_\pi // R_S // R_F)(r_O // R_F // R_C)}{i_S} = -g_m (r_\pi // R_S // R_F)(r_O // R_F // R_C)$$

Se consideriamo adesso che r_O ed R_F sono generalmente più grandi delle altre resistenze, possiamo esprimere questo guadagno, con buona approssimazione, nella forma

$$a=\frac{v_O}{i_S}\cong -g_m(r_\pi // R_S)(R_C)=-g_m R_C\frac{r_\pi R_S}{r_\pi+R_S}=-\frac{\beta R_C R_S}{r_\pi+R_S}$$

Osservando, poi, così come fatto prima, che il fattore di retroazione è $f=-\frac{1}{R_F}$, possiamo calcolarci immediatamente il guadagno di anello:

$$T=af=\frac{\beta R_C R_S}{(r_\pi+R_S)R_F}$$

Infine, noti T ed a, possiamo calcolarci il guadagno di feedback:

$$A_f=\frac{a}{1+T}=\frac{\frac{\beta R_C R_S}{(r_\pi+R_S)}}{1+\frac{\beta R_C R_S}{(r_\pi+R_S)R_F}}=\frac{\beta R_C R_S R_F}{R_F(r_\pi+R_S)+\beta R_C R_S}$$

N.B. Si osserva che sia **a** sia $\mathbf{A_f}$ sono stati definiti come rapporto tra v_O ed i_S: la differenza è, ovviamente, che **a** è il guadagno v_O/i_S ad anello aperto, cioè senza il trasferimento diretto della rete di reazione (ma con gli effetti di carico sulla rete di azione), mentre $\mathbf{A_f}$ è il il guadagno v_O/i_S ad anello chiuso, cioè tenendo conto del trasferimento diretto della rete di reazione (oltre che degli effetti di carico).

Considerando, inoltre, che lo stadio in esame può comunque essere usato come amplificatore di tensione (invertente), possiamo anche calcolare il suo guadagno di tensione:

$$A_{Vf}=\frac{v_O}{v_S}=\frac{v_O}{R_S i_S}=\frac{A_f}{R_S}=-\frac{\beta R_C R_F}{R_F(r_\pi+R_S)+\beta R_C R_S}$$

Possiamo a questo punto fare alcune importanti osservazioni. Per prima cosa, vediamo cosa succede quando facciamo tendere il guadagno di anello T=af all'infinito (cioè stabilizziamo in modo idealmente perfetto il guadagno in transresistenza ad anello chiuso sul valore $\mathbf{A_{f\infty}=1/f=-R_F}$): in base all'espressione trovata prima per T, possiamo scrivere che

$$T=\frac{\beta R_C R_S}{(r_\pi+R_S)R_F}=\frac{R_C R_S}{\left(\frac{1}{g_m}+\frac{R_S}{\beta}\right)R_F}$$

Affinché T tenda all'infinito, anche β deve tendere all'infinito, il che significa che la r_π tende ad infinito e quindi che la corrente nella r_π tende a 0 e quindi che tende a 0 la v_π: abbiamo cioè ancora una volta la situazione descritta come **cortocircuito virtuale** della r_π.

Si ha cioè la situazione per cui la resistenza r_π non è realmente cortocircuitata, ma presenta una tensione nulla ai suoi capi: nel circuito, questo comporta che la corrente di segnale i_S fluisca interamente attraverso la resistenza R_F, ai capi della quale si stabilisce la tensione di uscita v_O, in modo tale da ottenere

$$A_{f\infty} = \frac{v_O}{i_S} = \frac{-R_F i_S}{i_S} = -R_F$$

In base a questa espressione, se il guadagno d'anello potesse essere molto elevato (il che, però, non è in pratica possibile in un singolo stadio), il guadagno di feedback dello stadio sarebbe indipendente da R_C e dalle caratteristiche del BJT.

Naturalmente, ricordando che il guadagno di tensione dello stadio è $A_{Vf} = \frac{v_O}{v_S} = \frac{v_O}{R_S i_S} = \frac{A_f}{R_S}$, deduciamo che, per $T\rightarrow\infty$, esso vale

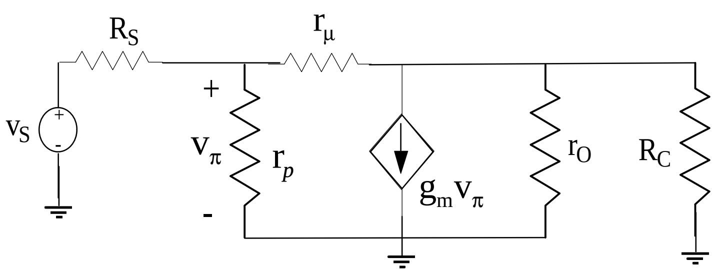
$$A_{Vf\infty} = \frac{A_{f\infty}}{R_S} = -\frac{R_F}{R_S}$$

Anche questo guadagno è indipendente da R_C e dalle caratteristiche del BJT, mentre dipende dalla resistenza serie R_S.

E' interessante osservare che *questa resistenza serie R_S ha una importanza notevole in questo circuito, in quanto consente la presenza della reazione:* infatti, se non ci fosse R_S, la tensione di base del transistor sarebbe comunque pari a quella v_S del generatore forzante, per cui la resistenza R_F non sortirebbe alcun effetto di reazione. In termini analitici, ci accorgiamo di questo fatto osservando semplicemente che, se R_S=0, risulta T=0 e quindi A_f=a.

Osservazione: reazione intrinseca della r_m

Per concludere con questo esempio, ricordiamo che l'effetto di reazione della resistenza R_F è identico a quello prodotto dalla resistenza r_μ intrinseca posta tra la base ed il collettore del transistor:

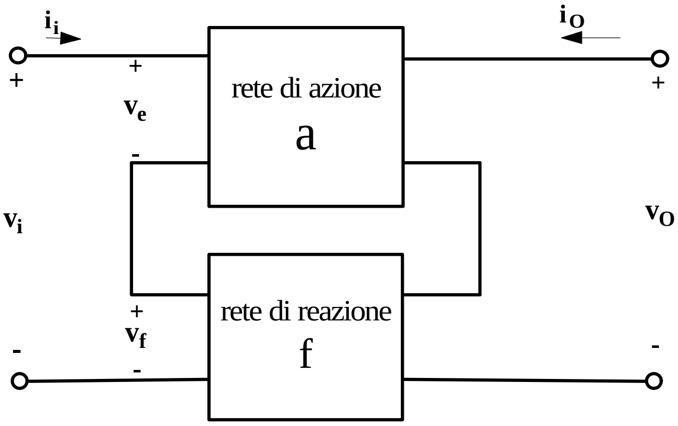


E' evidente, allora, che l'effetto della r_μ può essere studiato in maniera identica a quella seguita per la R_F: per esempio, l'espressione del guadagno di tensione (ottenuta trascurando la r_O) sarebbe

$$A_{Vf} = \frac{v_O}{v_S} = -\frac{\beta R_C r_\mu}{r_\mu(r_\pi + R_S) + \beta R_C R_S}$$

Connessione serie-serie

Il terzo tipo di reazione che abbiamo introdotto è quello che prevede una *connessione serie in ingresso* (confronto di tensione) e *serie in uscita* (misura di corrente). Lo schema a blocchi di un **amplificatore reazionato serie-serie** è dunque il seguente:



Sappiamo che *questo tipo di connessione contribuisce a stabilizzare il guadagno in transconduttanza dell'amplificatore:* dato che $v_e = v_i - v_f$, $i_O = a v_e$ e $v_f = f i_O$, deduciamo infatti che

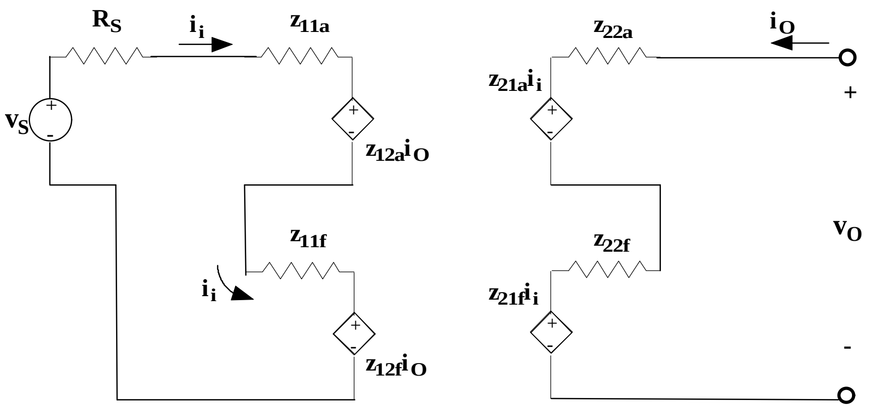
$$i_O = a v_i = a(v_i - v_f) = a(v_i - f i_O) \longrightarrow A_f = \frac{i_O}{v_i} = \frac{a}{1 + af}$$

La rappresentazione biporta più opportuna per studiare questo tipo di connessione è quella a **parametri z**:

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{cases}$$

Ancora una volta, questa rappresentazione è comoda in quanto consente più facilmente di sommare correnti ed impedenze sia in ingresso sia in uscita.

Modellando sia la rete di azione sia quella di reazione con i parametri z, otteniamo la seguente rappresentazione circuitale:

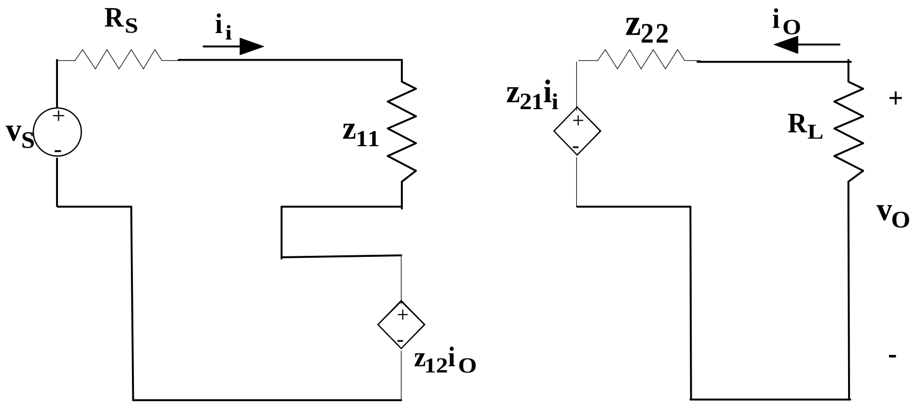


Possiamo anche in questo caso fare delle semplificazioni per giungere ad uno schema ideale in cui la rete di azione e quella di reazione risultano unilaterali e in cui la rete di azione comprende gli effetti di carico su di essa esercitati dalla rete di reazione.

Per arrivare a questo schema ci basta osservare che le resistenze z_{11a} e z_{11f} sono in serie così come le resistenze z_{22a} e z_{22f} , così come anche i generatori di tensione z_{12a} e z_{12f} e i generatori di tensione z_{21a} e z_{21f} : ponendo quindi

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_{11a} + z_{11f} \\ z_{12} &= z_{12a} + z_{12f} \\ z_{21} &= z_{21a} + z_{21f} \\ z_{22} &= z_{22a} + z_{22f} \end{aligned}$$

otteniamo lo schema seguente:



Dobbiamo a questo punto trovare l'espressione del guadagno di feedback $A_f = i_O / v_S$ dell'amplificatore così rappresentato.

Cominciamo applicando la LKT alla maglia di ingresso:

$$v_S = (R_S + z_{11})i_i + z_{12} i_O$$

Possiamo inoltre applicare la LKT alla maglia di uscita:

$$z_{21} i_i + (R_L + z_{22}) i_O = 0$$

Da questa seconda relazione possiamo esplicitare la corrente di ingresso i_i da sostituire nella prima relazione:

$$i_i = -\frac{R_L + z_{22}}{z_{21}} i_O \longrightarrow v_S = (R_S + z_{11}) \frac{-(R_L + z_{22})}{z_{21}} i_O + z_{12} i_O = \left[z_{12} - \frac{(R_S + z_{11})(R_L + z_{22})}{z_{21}} \right] i_O$$

Da qui possiamo dunque ricavare l'espressione del guadagno di feedback:

$$A_f = \frac{i_O}{v_S} = \frac{1}{z_{12} - \frac{(R_S + z_{11})(R_L + z_{22})}{z_{21}}}$$

A questo punto, con riferimento all'ultimo circuito disegnato, facciamo le seguenti posizioni:

$$\boxed{Z_I = R_S + z_{11}} \qquad \boxed{Z_O = R_L + z_{22}}$$

Così facendo, il **guadagno di feedback** assume l'espressione seguente:

$$A_f = \frac{i_O}{v_S} = \frac{1}{z_{12} - \frac{Z_I Z_O}{z_{21}}}$$

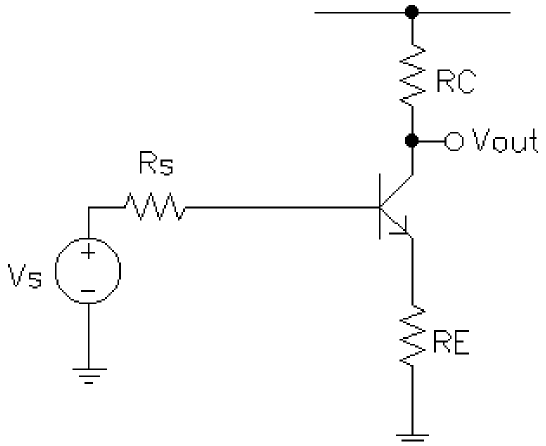
Questa espressione, come ci si poteva aspettare, è assolutamente analoga a quella trovata per il guadagno di feedback di un amplificatore di tensione o per quella di un amplificatore in transresistenza.

Al fine di arrivare ad una espressione di questo guadagno nella forma $\frac{a}{1+af}$, possiamo allora fare gli stessi passaggi fatti in quei casi:

$$A_f = \ldots = \frac{-\frac{z_{21}}{Z_I Z_O}}{1 - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_I Z_O}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -\frac{z_{21}}{Z_I Z_O} \\ f = z_{12} \\ T = -\frac{z_{21} z_{12}}{Z_I Z_O} \end{array}}$$

Esempio: stadio a degenerazione di emettitore

L'esempio più semplice di un amplificatore in cui viene impiegata una connessione serie-serie è quello di uno stadio invertitore con degenerazione, per esempio realizzato mediante un BJT (stadio a degenerazione di emettitore):



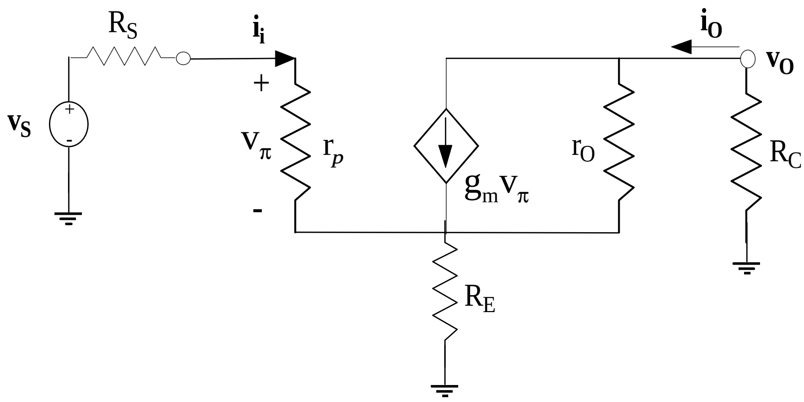
Per prima cosa, cerchiamo conferma del fatto che si tratti di una connessione parallelo-serie:

- in uscita, la resistenza R_E preleva la corrente di uscita ($i_e \cong i_c$), per cui abbiamo *serie in uscita*;
- in ingresso, la resistenza R_E riporta una tensione (proporzionale alla corrente di uscita) che viene confrontata con la tensione di ingresso al fine di generare la tensione $v_\pi = v_e$ che pilota l'amplificatore di andata, per cui abbiamo *serie in ingresso*.

Andiamo allora a trovare la rappresentazione a **parametri z** di questo stadio:

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases}$$

Per il calcolo di questi parametri, sia per la rete di azione sia per quella di reazione, dobbiamo far riferimento al circuito equivalente per piccoli segnali dell'amplificatore:



Si calcolano facilmente le seguenti espressioni per quanto riguarda i parametri della rete di azione e di quella di reazione:

$$z_{11a} = \left.\frac{v_{1a}}{i_{1a}}\right|_{i_{2a}=0} = \left.\frac{v_\pi}{i_i}\right|_{i_O=0} = r_\pi \qquad z_{11f} = \left.\frac{v_{1f}}{i_{1f}}\right|_{i_{2f}=0} = R_E$$

$$z_{12a} = \left.\frac{v_{1a}}{i_{2a}}\right|_{i_{1a}=0} = \left.\frac{v_\pi}{i_O}\right|_{i_i=0} = 0 \qquad z_{12f} = \left.\frac{v_{1f}}{i_{2f}}\right|_{i_{1f}=0} = R_E$$

$$z_{21a} = \left.\frac{v_{2a}}{i_{ia}}\right|_{i_{1a}=0} = \left.\frac{v_o}{i_i}\right|_{i_O=0} = -\beta r_O \qquad z_{21f} = \left.\frac{v_{2f}}{i_{if}}\right|_{i_{1f}=0} = R_E$$

$$z_{22a} = \left.\frac{v_{2a}}{i_{2a}}\right|_{i_{1a}=0} = \left.\frac{v_O}{i_O}\right|_{i_i=0} = r_O \qquad z_{22f} = \left.\frac{v_{2f}}{i_{2f}}\right|_{i_{1f}=0} = R_E$$

In base a queste espressioni, il modello a parametri z dell'intero amplificatore reazionato è caratterizzato dai seguenti valori:

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_{11a} + z_{11f} = r_\pi + R_E \\ z_{12} &= z_{12a} + z_{12f} = z_{12f} = R_E \\ z_{21} &= z_{21a} + z_{21f} = -\beta r_O + R_E \\ z_{22} &= z_{22a} + z_{22f} = r_O + R_E \end{aligned}$$

Noti questi parametri, ci basta applicare le formule generali per il calcolo del guadagno a dell'amplificatore di andata e del guadagno f della rete di reazione:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{z_{21}}{Z_I Z_O} = -\dfrac{-\beta r_O + R_E}{(R_S + r_\pi + R_E)(R_C + r_O + R_E)} = -\dfrac{-\beta + \dfrac{R_E}{r_O}}{(R_S + r_\pi + R_E)\left(\dfrac{R_C}{r_O} + 1 + \dfrac{R_E}{r_O}\right)} \\ f = z_{12} = R_E \end{cases}$$

Se, in prima approssimazione, riteniamo che r_O sia molto maggiore sia di R_E sia di R_C, possiamo approssimare l'espressione del guadagno della rete di andata con

$$a \cong \frac{\beta}{R_S + r_\pi + R_E}$$

Possiamo a questo punto calcolare il guadagno di anello e quindi il guadagno di feedback:

$$A_f = \frac{i_O}{v_S} = \frac{a}{1+af} \cong \frac{\dfrac{\beta}{R_S + r_\pi + R_E}}{1 + \dfrac{\beta R_E}{R_S + r_\pi + R_E}} = \frac{\beta}{R_S + r_\pi + (\beta+1)R_E}$$

Questa, ovviamente, è la stessa formula trovata a suo tempo mediante l'applicazione delle leggi di Kirchoff.

Proseguendo nella nostra analisi, possiamo calcolare l'impedenza di ingresso e quella di uscita dell'amplificatore reazionato: ricordando le formule generali per la connessione serie-serie, possiamo subito scrivere che

$$\begin{aligned} Z_{if} &= Z_I(1+T) = Z_I\left(1 - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_I Z_O}\right) \\ Z_{of} &= Z_O(1+T) = Z_O\left(1 - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_I Z_O}\right) \end{aligned}$$

Per applicare queste formule, dobbiamo ricordarci di una importante osservazione fatta in precedenza: infatti, tali formule forniscono i risultati corretti solo a patto che il calcolo di T e poi il successivo calcolo di Z_I e Z_O vengano effettuati sullo stesso modello circuitale. Allora, mentre per ottenere l'espressione della Z_{if} possiamo trascurare la presenza della r_O, per cui l'espressione di T è quella approssimata trovata prima, per il calcolo della Z_{of} dobbiamo necessariamente considerare la r_O, per cui l'espressione da utilizzare per il T è

$$T = \frac{(\beta r_O - R_E)R_E}{(R_S + r_\pi + R_E)(r_O + R_E)}$$

Abbiamo qui escluso il carico in quanto desideriamo calcolare l'impedenza di uscita vista dal carico stesso, per cui la R_C non va considerata nel calcolo del T.

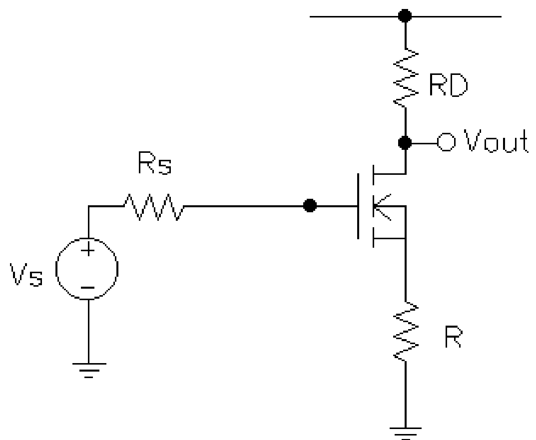
Con questi accorgimenti, abbiamo quanto segue:

$$Z_{if} = Z_I(1+T) = (R_S + r_\pi)\left(1 + \frac{\beta R_E}{R_S + r_\pi + R_E}\right) = \frac{R_S + r_\pi + (\beta+1)R_E}{1 + \frac{R_E}{(R_S + r_\pi)}}$$

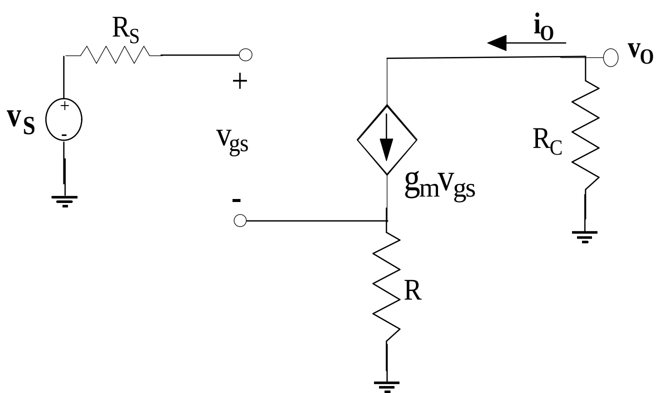
$$Z_{of} = Z_O(1+T) = r_O\left(1 + \frac{(\beta r_O - R_E)R_E}{(R_S + r_\pi + R_E)(r_O + R_E)}\right) \cong r_O\left(1 + \frac{\beta R_E}{R_S + r_\pi + R_E}\right) + R_E // (R_S + r_\pi)$$

Esempio: stadio a degenerazione di source

Uno stadio a degenerazione può anche essere realizzato mediante un MOSFET (stadio a degenerazione di source):



Consideriamo allora il circuito equivalente per piccoli segnali di questo stadio:



Dobbiamo trovare il modello a parametri z sia della rete di azione sia di quella di reazione:

$$z_{11a} = \left.\frac{v_{1a}}{i_{1a}}\right|_{i_{2a}=0} = \left.\frac{v_{gs}}{i_g}\right|_{i_O=0} = \infty \qquad z_{11f} = \left.\frac{v_{1f}}{i_{1f}}\right|_{i_{2f}=0} = R$$

$$z_{12a} = \left.\frac{v_{1a}}{i_{2a}}\right|_{i_{1a}=0} = \left.\frac{v_{gs}}{i_O}\right|_{i_g=0} = \frac{1}{g_m} \qquad z_{12f} = \left.\frac{v_{1f}}{i_{2f}}\right|_{i_{1f}=0} = R$$

$$z_{21a} = \left.\frac{v_{2a}}{i_{ia}}\right|_{i_{1a}=0} = \left.\frac{v_o}{i_g}\right|_{i_O=0} = \infty \qquad z_{21f} = \left.\frac{v_{2f}}{i_{if}}\right|_{i_{1f}=0} = R$$

$$z_{22a} = \left.\frac{v_{2a}}{i_{2a}}\right|_{i_{1a}=0} = \left.\frac{v_O}{i_O}\right|_{i_g=0} = ??? \qquad z_{22f} = \left.\frac{v_{2f}}{i_{2f}}\right|_{i_{1f}=0} = R$$

Ci troviamo, a questo punto, in una situazione anomala: infatti, a causa della corrente di gate virtualmente nulla, si osserva che $z_{21}=\infty$ e $z_{11}=\infty$ e questo comporta che il guadagno di anello risulti in forma indeterminata ([1]):

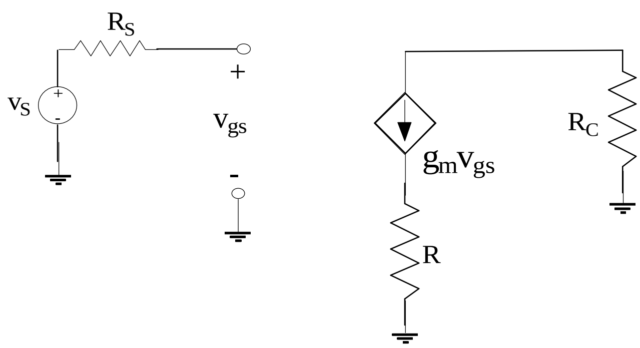
$$T = af = -\frac{z_{12}z_{21}}{Z_I Z_O} = -\frac{z_{12}z_{21}}{(R_S + z_{11})(R_C + z_{22})} = \frac{\infty}{\infty}$$

Siamo dunque nella situazione per cui non possiamo applicare in modo rigoroso la rappresentazione a parametri z. Si può anche vedere che lo stesso accade per un'altra qualsiasi delle rimanenti rappresentazioni (h,y e g).

Allora, per aggirare l'ostacolo, possiamo procedere nel modo seguente.

In primo luogo, facciamo l'ipotesi che sia la rete di azione sia soprattutto quella di reazione siano *unilaterali*, il che significa che stiamo trascurando per la rete di reazione il termine z_{21f} e per la rete di azione il termine z_{12a}.

In secondo luogo, andando a determinare gli effetti di carico della rete di reazione su quella di reazione, perveniamo alla seguente rappresentazione della rete di azione:



[1] In effetti, nello studio ad alta frequenza il problema appena evidenziato non si pone, in quanto intervengono le capacità di gate del transistor ad assicurare un corrente di gate non più nulla. Invece, nello studio a basse o medie frequenze, il problema sussiste, ma, come si vedrà tra un attimo, può essere facilmente aggirato.

Possiamo allora calcolare il guadagno della rete di azione con gli effetti di carico:

$$a = \frac{i_O}{v_S} = \frac{g_m v_{gs}}{v_{gs}} = g_m$$

Dai calcoli effettuati prima sappiamo anche che il fattore di retroazione vale $f=z_{12}=R$, per cui possiamo adesso calcolare il guadagno di anello e il guadagno di feedback:

$$\begin{cases} a = g_m \\ f = R \end{cases} \longrightarrow T = af = g_m R \longrightarrow A_f = \frac{a}{1+af} = \frac{g_m}{1+g_m R}$$

Il guadagno di feedback, come visto in precedenza, è un guadagno in transconduttanza, dal quale possiamo anche ricavare il guadagno di tensione:

$$A_{Vf} = \frac{v_O}{v_S} = \frac{-R_D i_O}{v_S} = -R_D A_f = -\frac{g_m R_D}{1+g_m R}$$

Naturalmente, se il guadagno d'anello $T=g_m R$ è elevato, quella espressione può essere approssimata con $A_{Vf} \cong -\frac{R_D}{R}$.

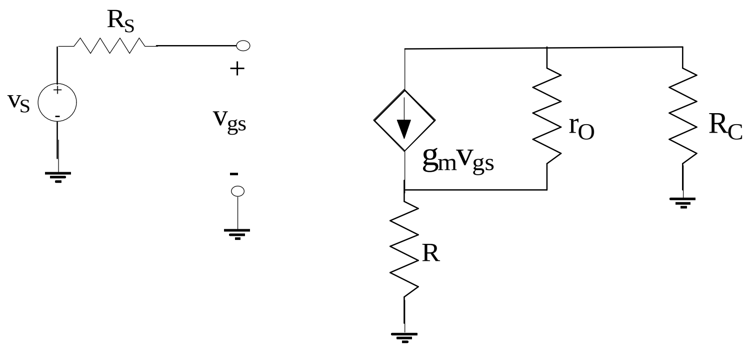
Possiamo adesso calcolare l'impedenza di ingresso e quella di uscita dello stadio:

$$Z_{if} = Z_I(1+T) = Z_I\left(1 - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_I Z_O}\right)$$

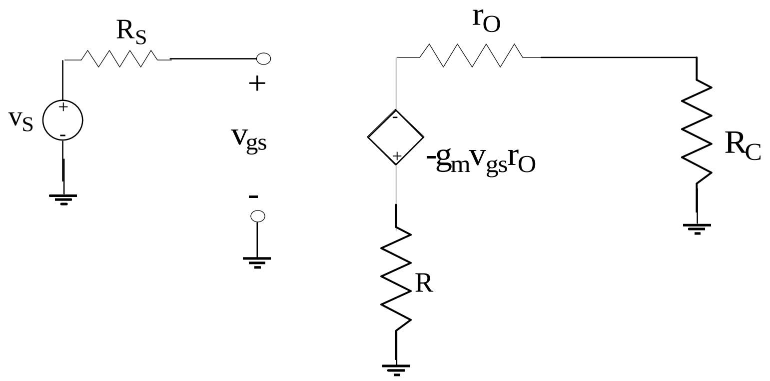
$$Z_{of} = Z_O(1+T) = Z_O\left(1 - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_I Z_O}\right)$$

Per quanto riguarda Z_{if}, sappiamo che è infinita in quanto lo è quella del transistor. Vediamo perciò l'impedenza di uscita.

Per il calcolo di Z_{of} dobbiamo ancora una volta tener presente che Z_O e T vanno calcolati sullo stesso circuito: dato che prima abbiamo calcolato T sul circuito in assenza della r_O, dovremmo ripetere il calcolo di Z_O sullo stesso circuito, ma troveremmo ovviamente $Z_O=\infty$ in conseguenza del fatto che si tratterebbe della resistenza di uscita di un generatore di tensione (sia pure pilotato). Di conseguenza, dobbiamo ripetere il calcolo di T sul circuito equivalente con la resistenza r_O:



Ci conviene sostituire il parallelo tra il generatore pilotato e la r_O con il suo equivalente di Thevenin:



Possiamo dunque scrivere che

$$i_O = -\frac{-g_m v_{gs} r_O}{R + R_D + r_O} = \frac{g_m r_O}{R + R_D + r_O} v_S \longrightarrow a = \frac{i_O}{v_S} = \frac{g_m r_O}{R + R_D + r_O}$$

Ricordando che f=R, abbiamo che il guadagno di anello vale

$$T = af = \frac{g_m r_O R}{R + R_D + r_O}$$

Usando allora questa espressione per il calcolo di Z_{of} e considerando che $Z_O = r_O + R$, abbiamo che

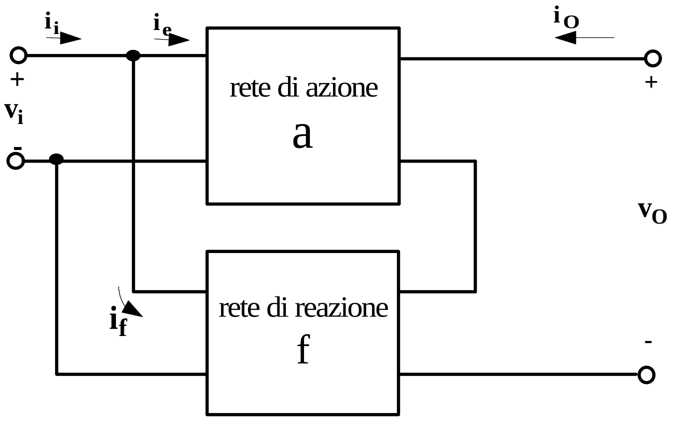
$$Z_{of} = Z_O(1+T) = (r_O + R)\left(1 + \frac{g_m r_O R}{R + R_D + r_O}\right)$$

Questa è dunque la formula esatta per il calcolo della Z_{of} e solo adesso può essere semplificata considerando che la resistenza r_O è generalmente elevata:

$$Z_{of} = (r_O + R)\left(1 + \frac{g_m r_O R}{R + R_D + r_O}\right) = r_O + R + \frac{g_m r_O R}{1 + \frac{R_D}{r_O + R}} \cong r_O + R + g_m r_O R = r_O(1 + g_m R) + R$$

Connessione parallelo-serie

L'ultimo tipo di reazione che abbiamo studiato è quello che prevede una connessione parallelo in ingresso (confronto di correnti) e serie in uscita (misura di corrente). Lo schema a blocchi di un **amplificatore reazionato con connessione parallelo-serie** è il seguente:



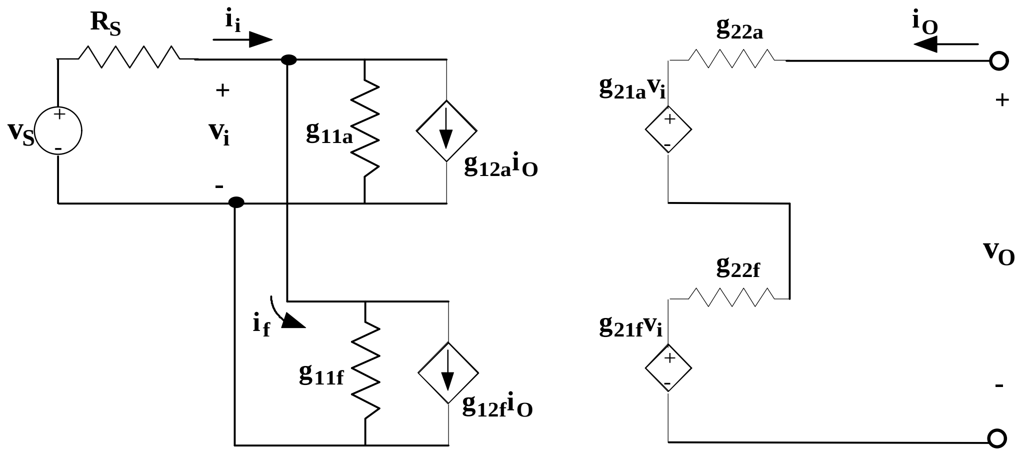
Sappiamo che *questo tipo di connessione contribuisce a stabilizzare il guadagno in corrente dell'amplificatore:* dato che $i_e=i_i-i_f$, $i_O=ai_e$ e $i_f=fi_O$, deduciamo infatti che

$$i_O = ai_i = a(i_i - i_f) = a(i_i - fi_O) \longrightarrow A_f = \frac{i_O}{i_i} = \frac{a}{1+af}$$

La rappresentazione biporta più opportuna per studiare questo tipo di connessione è quella a **parametri g**:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}i_2 \\ v_2 = g_{21}v_1 + g_{22}i_2 \end{cases}$$

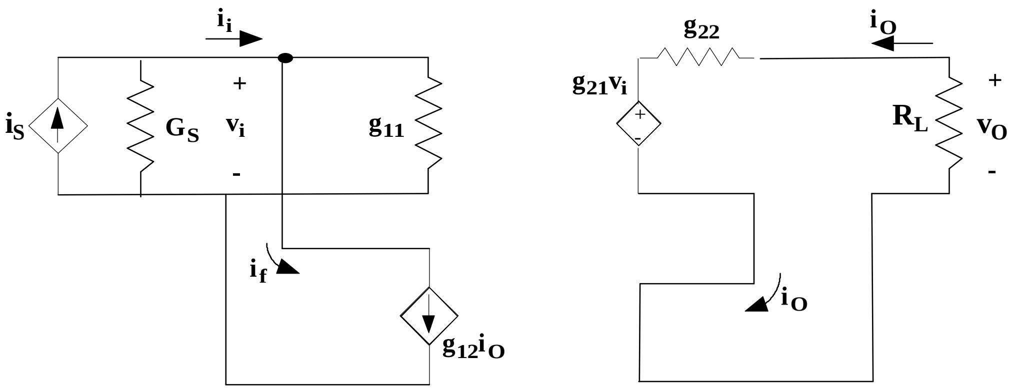
Modellando sia la rete di azione sia quella di reazione con i parametri z, otteniamo la seguente rappresentazione circuitale:



Partendo da questo schema, è immediato fare delle semplificazioni per giungere ad uno schema ideale in cui la rete di azione e quella di reazione risultino unilaterali e in cui la rete di azione comprenda gli effetti di carico su di essa esercitati dalla rete di reazione: basta osservare che le conduttanze g_{11a} e g_{11f} sono in parallelo così come i generatori di corrente $g_{12a}i_O$ e $g_{12f}i_O$, mentre le resistenze g_{22a} e g_{22f} sono in serie così come anche i generatori di tensione g_{21a} e g_{21f} . Ponendo quindi

$$g_{11} = g_{11a} + g_{11f}$$
$$g_{12} = g_{12a} + g_{12f}$$
$$g_{21} = g_{21a} + g_{21f}$$
$$g_{22} = g_{22a} + g_{22f}$$

otteniamo lo schema seguente ([2]):



Dobbiamo a questo punto trovare l'espressione del guadagno di feedback $A_f = i_O / i_S$ dell'amplificatore così rappresentato.

Cominciamo applicando la LKC al terminale di ingresso e la LKT alla maglia di uscita:

$$\text{LKC} \rightarrow \; i_S = (G_S + g_{11})v_i + g_{12} i_O$$

$$\text{LKT} \rightarrow \; z_{21} v_i + (R_L + g_{22}) i_O = 0$$

Da questa seconda relazione possiamo esplicitare la tensione di ingresso v_i da sostituire nella prima relazione:

$$v_i = -\frac{R_L + g_{22}}{g_{21}} i_O \longrightarrow i_S = \left[g_{12} - \frac{(G_S + g_{11})(R_L + g_{22})}{g_{21}} \right] i_O$$

Da qui possiamo dunque ricavare l'espressione del guadagno di feedback:

$$A_f = \frac{i_O}{i_S} = \frac{1}{g_{12} - \frac{(G_S + g_{11})(R_L + g_{22})}{g_{21}}}$$

A questo punto, facciamo le solite due posizioni:

$$\boxed{Y_I = G_S + g_{11}} \qquad \boxed{Z_O = R_L + g_{22}}$$

In tal modo, il **guadagno di feedback** assume l'espressione

[2] Usiamo l'equivalente di Norton per il generatore forzante e abbiamo considerato un carico generico R_L.

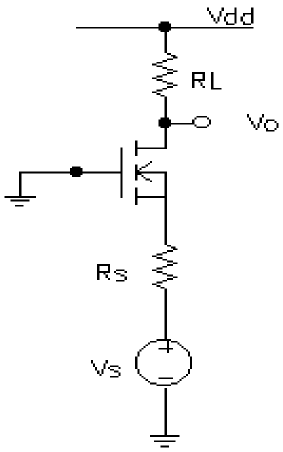
$$A_f = \frac{i_O}{i_S} = \frac{1}{g_{12} - \frac{Y_I Z_O}{g_{21}}}$$

Ancora una volta, abbiamo ottenuto una espressione assolutamente analoga alle precedenti: possiamo perciò scrivere che

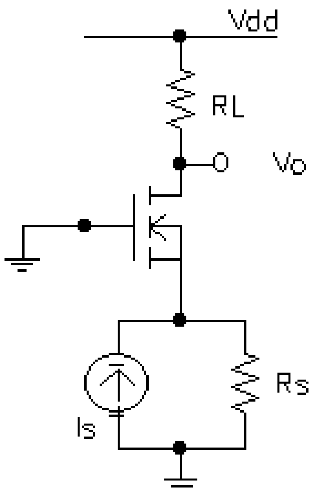
$$A_f = \ldots = \frac{-\frac{g_{21}}{Y_I Z_O}}{1 - \frac{g_{21} g_{12}}{Y_I Z_O}} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{g_{21}}{Y_I Z_O} \\ f &= g_{12} \\ T &= -\frac{y_{21} y_{12}}{Y_I Z_O} \end{aligned}}$$

Esempio: stadio inseguitore di corrente

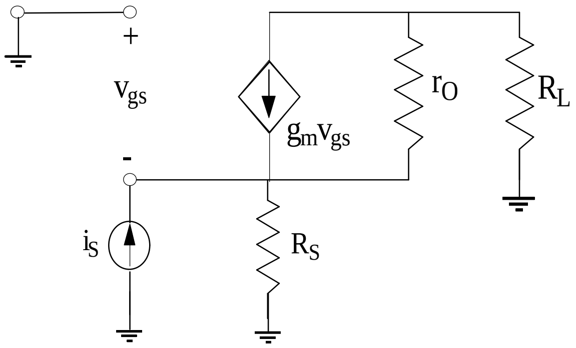
Uno stadio inseguitore di corrente può essere ottenuto per mezzo di uno stadio elementare, ad esempio con MOSFET a gate comune come nella figura seguente:



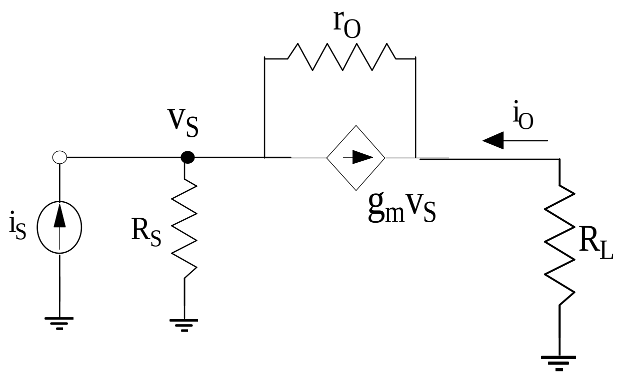
Al fine di studiare il circuito, può essere conveniente considerare il generatore forzante con il suo equivalente di Norton:



Al fine di capire se si tratta di un circuito reazionato o meno e, in caso affermativo, che tipo di connessione ci sia in ingresso ed in uscita, andiamo direttamente a considerare l'equivalente per piccoli segnali:



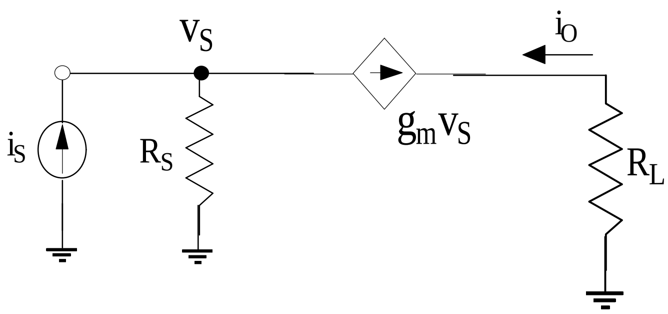
Questo stesso circuito può essere più convenientemente disegnato nel modo seguente:



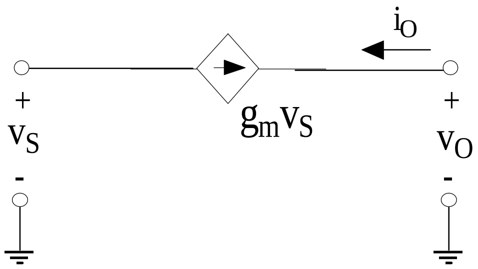
dove abbiamo posto v_{gs}=-v_S (tensione di source) in quanto il gate è a massa.

Questo circuito mostra intuitivamente che gli elementi che garantiscono una reazione sono il generatore pilotato e la resistenza r_O. Siamo perciò in una situazione diversa da quelle esaminate nei casi precedenti: *la rete di reazione non è più costituita da elementi passivi inseriti nel circuito, bensì da un elemento attivo*, in questo caso un transistor.

Per il momento, supponiamo che la resistenza r_O sia sufficientemente elevata da poter essere trascurata, per cui il circuito diventa il seguente:



Una volta individuati i terminali della sorgente forzante e del carico, è immediato definire la sola rete di reazione , che è dunque fatta nel modo seguente:



In questo circuito è facile individuare il tipo di connessione in ingresso ed in uscita:

- in uscita, il generatore pilotato effettua un prelievo della corrente i_O di uscita, per cui abbiamo *serie in uscita*;
- abbiamo invece una connessione *parallelo in ingresso*: infatti, il generatore pilotato riporta in ingresso l'intera corrente di uscita cambiata di segno (per cui possiamo subito affermare che f=-1), in modo che essa sia confrontata con la corrente i_S del generatore forzante al fine di ottenere la corrente $i_{RS} = i_S - i_O$ che, fluendo nella R_S, genera la tensione di comando $v_S = R_S i_{RS} = R_S(i_S - i_O)$.

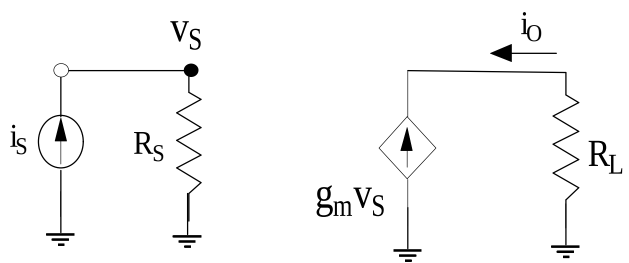
L'effetto della presenza di una r_O non infinita verrà esaminato separatamente, in quanto vedremo che essa esercita un tipo di reazione diverso da quello appena descritto.

Al fine di determinare il guadagno di anello ed il guadagno di feedback, potremmo procedere con il calcolo rigoroso dei parametri g sia per la rete di azione sia per la rete di azione, ma possiamo senz'altro procedere in via più approssimata assumendo l'<u>unilateralità delle due reti</u> (soprattutto di quella di reazione).

Fatta questa ipotesi e avendo già detto che il fattore di retroazione vale f=-1, non ci resta che determinare gli effetti di carico che la rete di reazione esercita su quella di azione:

- dato che abbiamo una connessione serie in uscita, per ottenere il circuito di uscita dobbiamo cortocircuitare l'ingresso: dato che stiamo ritenendo $r_O=\infty$, continuiamo a vedere una resistenza infinita, per cui non abbiamo effetti di carico in uscita;
- in ingresso abbiamo una connessione parallelo, per cui, per ottenere il circuito di ingresso, dobbiamo aprire l'uscita: anche qui, se poniamo $i_O=0$, dato che la resistenza di ingresso del transistor è infinita, non abbiamo effetti di carico.

In definitiva, quindi, non abbiamo effetti di carico, per cui il calcolo del guadagno della rete di azione può essere fatto direttamente sul seguente circuito:



Abbiamo evidentemente che

$$a = \frac{i_O}{i_S} = \frac{-g_m v_S}{i_S} = \frac{-g_m R_S i_S}{i_S} = -g_m R_S$$

Avendo detto che f=-1, possiamo dunque concludere che

$$T = af = g_m R_S \longrightarrow A_f = \frac{i_O}{i_S} = \frac{a}{1+af} = \frac{-g_m R_S}{1+g_m R_S}$$

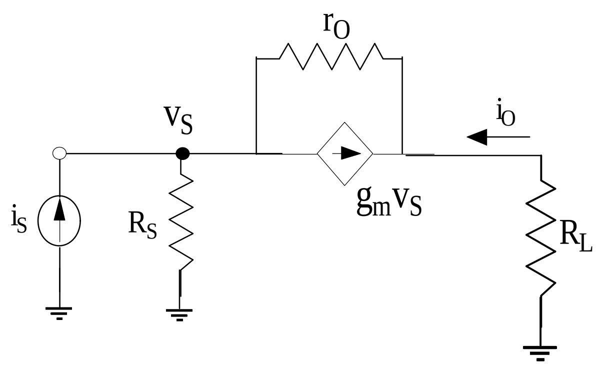
Su questa relazione possiamo fare due importanti considerazioni:

- la prima è che, se il termine $g_m R_S$ è sufficientemente maggiore di 1, possiamo approssimare il guadagno di corrente con -1, ottenendo un inseguitore di corrente perfetto;
- la seconda, deducibile direttamente dal circuito originario, è che la presenza della reazione è garantita dalla presenza della R_S: infatti, se $R_S=0$, avremmo $T=0$.

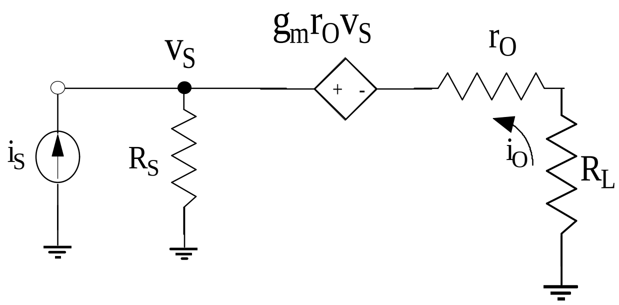
In analogia agli esempi considerati in precedenza, possiamo calcolare l'impedenza di ingresso dell'amplificatore reazionato: avendo una connessione parallelo in ingresso, abbiamo infatti che $Z_{if} = \frac{Z_I}{1+T}$ e quindi, se consideriamo l'impedenza vista dal generatore di segnale, otteniamo

$$Z_{if} = \frac{R_S}{1+T} = \frac{R_S}{1+g_m R_S} \xrightarrow{T\to\infty} \cong \frac{1}{g_m}$$

Se, invece, volessimo calcolare l'impedenza di uscita, avremmo la necessità di considerare la resistenza di uscita r_O del transistor, che invece prima abbiamo trascurato. Dobbiamo allora ricalcolare il guadagno d'anello includendo la r_O, utilizzando perciò il circuito seguente:



Conviene sostituire il parallelo tra il generatore pilotato e la r_O mediante il suo equivalente di Thevenin:



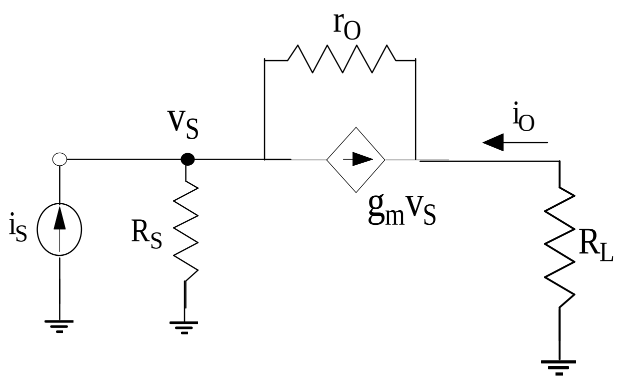
In questo caso si trova

$$T = af = \frac{g_m r_O R_S}{R_S + r_O + R_L}$$

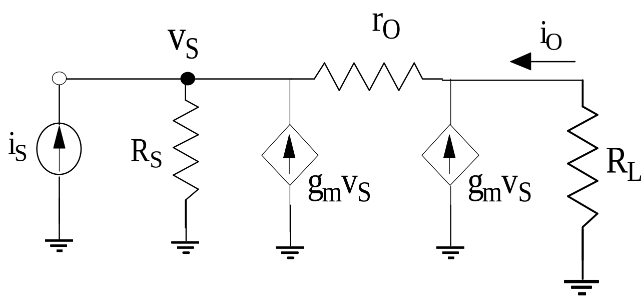
Con questa nuova espressione del guadagno di anello possiamo calcolare l'impedenza di uscita dell'amplificatore reazionato: osservando che la connessione in uscita è di tipo parallelo, abbiamo che

$$Z_{of} = Z_O(1+T) \cong (R_S + r_O)\left(1 + \frac{g_m r_O R_S}{R_S + r_O + R_L}\right)$$

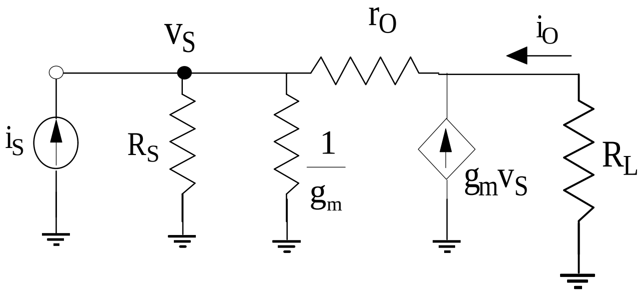
A questo punto, abbiamo terminato l'analisi della reazione determinata dal generatore pilotato, per cui passiamo ad esaminare quella introdotta dalla resistenza r_O, partendo ancora una volta dal seguente circuito:



Questo circuito può essere disegnato più opportunamente nel modo seguente:



A questo punto, il generatore $g_m v_S$ a sinistra è pilotato dalla stessa tensione ai suoi capi, per cui equivalente ad una resistenza $1/g_m$:

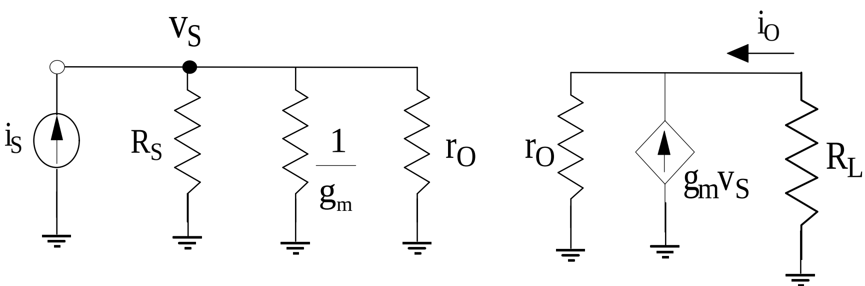


In questo caso, la reazione introdotta dalla sola r_O è diversa rispetto a prima: infatti, la r_O preleva la tensione di uscita (per cui abbiamo parallelo in uscita) e riporta in ingresso una corrente ad essa proporzionale (per cui abbiamo parallelo in ingresso). Quindi, *mentre il generatore pilotato effettuava una reazione parallelo-serie, la r_O esercita una reazione parallelo-parallelo.*

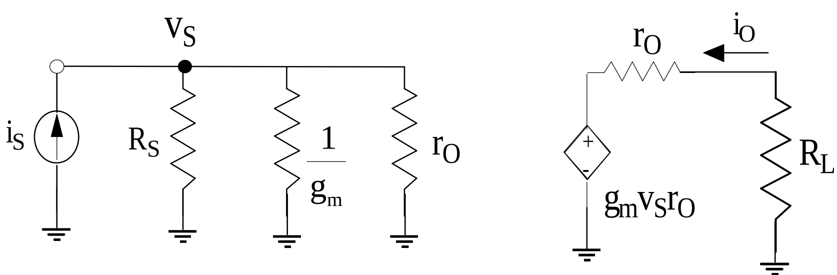
Per analizzare una reazione parallelo-parallelo dovremmo usare i parametri y, ma possiamo anche procedere in modo più approssimato, supponendo ancora una volta la unilateralità delle due reti (azione e reazione) e individuando la rete di azione con gli effetti di carico:

- cortocircuitando l'ingresso, otteniamo la r_O in parallelo al carico;
- aprendo invece l'uscita, abbiamo la r_O in parallelo ad R_S e $1/g_m$.

Quindi, la rete di azione con gli effetti di carico è fatta nel modo seguente:



Per semplice comodità, conviene inoltre sostituire il parallelo tra il generatore pilotato e la r_O con il suo equivalente di Thevenin:



Su questo circuito possiamo calcolare il guadagno della rete di azione con gli effetti di carico: dato che

$$v_O = g_m v_S (r_O // R_L) = g_m (r_O // R_L) i_S \left(R_S // r_O // \frac{1}{g_m} \right)$$

deduciamo che il guadagno della rete di azione (che in questo caso è un guadagno in transresistenza, visto che la connessione è parallelo-parallelo) è

$$a = \frac{v_O}{i_S} = g_m (r_O // R_L)\left(R_S // r_O // \frac{1}{g_m}\right)$$

Dobbiamo adesso individuare il fattore di retroazione, ossia il guadagno f della rete di reazione: applicando allora il modello a parametri y, si trova che

$$f = y_{12} = y_{12a} + y_{12f} = y_{12f} = -\frac{1}{r_O}$$

Possiamo infine concludere che il guadagno di anello vale

$$T = af = -\frac{g_m}{r_O}(r_O // R_L)\left(R_S // r_O // \frac{1}{g_m}\right) < 0$$

A prescindere dall'espressione analitica, la cosa più importante che osserviamo è che T è risultato negativo, il che è indice di una **reazione positiva**: quindi, *la reazione introdotta dalla r_O non solo è diversa da quella introdotta dal generatore pilotato per via della connessione in uscita (parallelo per r_O e serie per il generatore pilotato), ma anche per il segno (positiva per r_O e negativa per il generatore pilotato).*

N.B. Il fatto che la r_O introduca una *reazione positiva* è ampiamente giustificabile a livello fisico: infatti, un aumento della tensione (di piccolo segnale) al drain produce una riduzione della lunghezza del canale e quindi un aumento della corrente di drain, la quale, a sua volta, produce un aumento della tensione di drain. Naturalmente, si tratta di una reazione di bassa entità, come è facile dedurre dal fatto che il guadagno di anello prima calcolato assume un valore generalmente basso.

Riepilogo

Volendo fare una sintesi di quanto trovato fino ad ora, diciamo che lo studio della reazione mediante l'approccio a biporta ha le seguenti caratteristiche:

- presuppone l'identificazione del blocco diretto (rete di azione o rete di andata) e di quello inverso (rete di reazione) in una schematizzazione a singolo anello di reazione;
- presuppone l'individuazione del tipo di connessione, sia in ingresso (serie o parallelo a seconda che vengano confrontate le tensioni o le correnti) sia in uscita (serie o parallelo a seconda che venga misurata la corrente o la tensione);
- richiede la scelta della rappresentazione analitica più idonea (z, y, h, g);

- richiede la valutazione degli effetti di carico della rete di reazione su quella di azione;
- consente spesso (anche se non necessariamente) di ritenere unilaterali sia la rete di azione sia soprattutto quella di reazione.

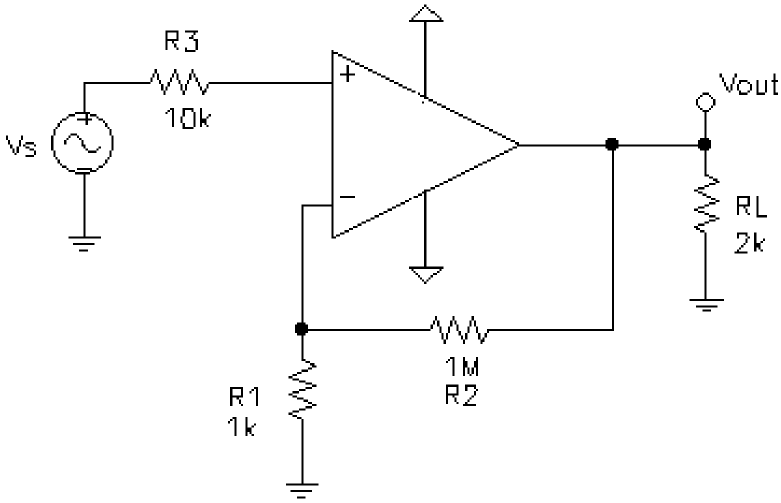
Nella seguente tabella sono inoltre riassunte alcune importanti informazioni raccolte nei paragrafi precedenti:

Connessioni	Ingresso (confronto)	Uscita (misura)	Parametri biporta	Guadagno stabilizzato	Impedenza di ingresso	Impedenza di uscita
Serie-parallelo	V	V	H	A_V	$Z_I(1+T)$	$Z_O/(1+T)$
Parallelo-parallelo	I	V	Y	A_R	$Z_I/(1+T)$	$Z_O/(1+T)$
Parallelo-serie	I	I	G	A_I	$Z_I/(1+T)$	$Z_O(1+T)$
Serie-serie	V	I	Z	A_G	$Z_I(1+T)$	$Z_O(1+T)$

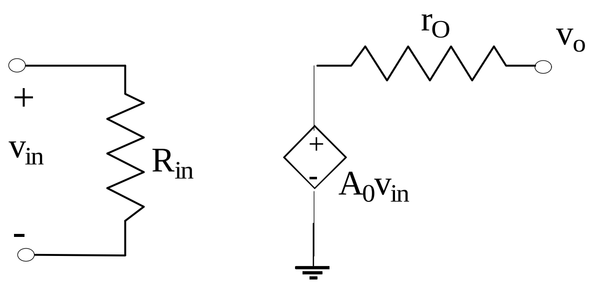
Esempio numerico: reazione serie-parallelo

Facciamo adesso un esempio numerico che consenta di chiarire ulteriormente gran parte dei concetti esposti nei paragrafi precedenti.

Consideriamo allora il seguente circuito:



L'amplificatore inserito in questo circuito è un **amplificatore operazionale**. Senza scendere nei dettagli, che saranno approfonditi in un capitolo successivo, ci limitiamo a dire che si tratta tipicamente di un *amplificatore di tipo differenziale*, caratterizzato da un circuito incrementale fatto nel modo seguente:

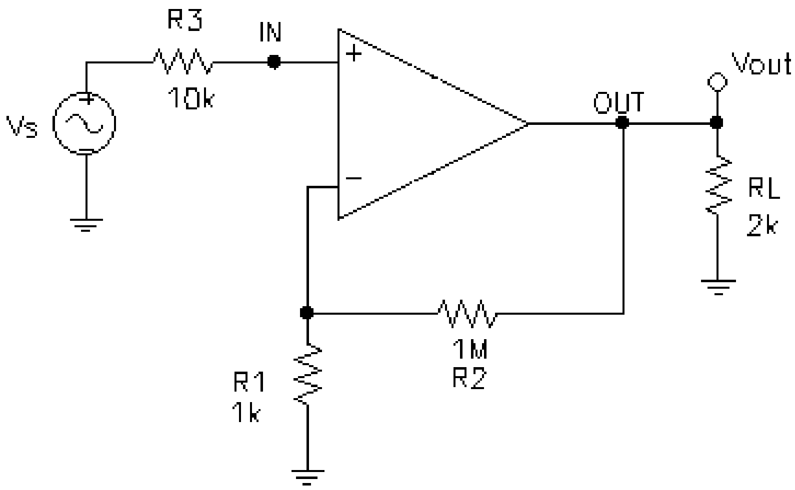


I valori dei parametri incrementali sono i seguenti: guadagno di tensione a vuoto $A_0=10^4$; resistenza di uscita $r_O=1k\Omega$; resistenza di ingresso $R_{in}=100k\Omega$.

Sulla base di questi dati (che in pratica ci evitano di compiere l'analisi del punto di lavoro), vogliamo calcolare il guadagno di tensione v_{out}/v_S del circuito, la resistenza R_{IN} vista dal generatore di segnale v_S e la resistenza di uscita R_{OUT} vista dal terminale di uscita (cioè a valle del carico R_L).

Per determinare questi parametri, dobbiamo per prima cosa individuare le principali caratteristiche del circuito; in particolare, dobbiamo chiederci se si tratta o meno di un circuito reazionato.

A tale scopo, conviene in primo luogo individuare un terminale di ingresso del circuito ed un terminale di uscita; sulla base dell'esperienza ormai acquisita, possiamo scegliere i terminali IN e OUT indicati nella figura seguente:



Una volta individuati tali morsetti, ci accorgiamo immediatamente che il circuito è reazionato, visto che la resistenza R_2 riporta in ingresso una parte dell'uscita.
Una volta accertata la presenza della reazione, dobbiamo capire essenzialmente due cose:

- in primo luogo, dobbiamo capire se si tratta di una reazione positiva o negativa: percorrendo allora l'anello di reazione, si osserva immediatamente la presenza di una inversione di segno all'interno dell'amplificatore differenziale, dal che deduciamo che la reazione è negativa;
- in secondo luogo, dobbiamo capire che tipo di connessione abbiamo in ingresso ed in uscita, ossia la grandezza elettrica (tensione o corrente) che la rete di reazione preleva in uscita e la grandezza elettrica (tensione o corrente) che la stessa rete di reazione riporta in ingresso:
  - la grandezza elettrica prelevata in uscita è evidentemente la tensione v_{out}, per cui abbiamo una connessione *parallelo in uscita*;
  - in ingresso, invece, possiamo sicuramente escludere che si tratti di una connessione parallelo, in quanto il terminale di ingresso (IN) non è collegato in alcun modo ad alcuna grandezza legata all'uscita; ci aspettiamo quindi una connessione *serie in ingresso* ed è immediato accorgersi che è proprio così, in quanto la resistenza R_2 riporta in ingresso una tensione che viene confrontata con quella forzante al fine di determinare la tensione v_{in} che pilota l'amplificatore di andata.

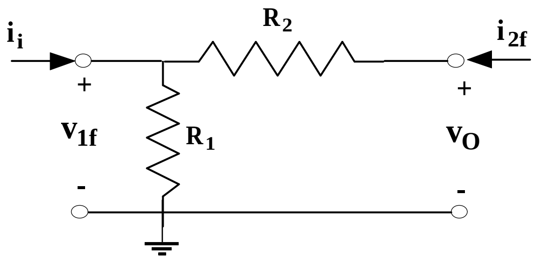
Abbiamo dunque concluso che l'amplificatore di andata è chiuso in un anello di reazione negativa mediante una connessione serie in ingresso (confronto di tensione) e parallelo in uscita (misura di tensione).
Questa conclusione ci permette di dire che l'anello di reazione ha sicuramente l'effetto di stabilizzare il guadagno di tensione, in quanto sappiamo che, per la connessione serie-parallelo, il guadagno di feedback $A_f = \frac{a}{1+af}$ è appunto un guadagno di tensione (cioè proprio il rapporto v_{out}/v_S che vogliamo calcolare).
Accertato questo, il nostro obbiettivo primario diventa, a prescindere, per il momento, da quello che la traccia ci ha richiesto, la determinazione del guadagno di anello T=af e del guadagno di feedback A_f: noti questi due parametri, saremo in grado, nel modo che vedremo, di determinare ogni altro parametro del circuito.

Il problema che si pone a questo punto è quello di scegliere il metodo con cui analizzare il circuito reazionato: l'unico metodo da noi analizzato fino ad ora è quello dei doppi bipoli (mentre vedremo in seguito altri metodi, anche più facili), per cui non abbiamo scelta.

Per applicare il *metodo dei doppi bipoli*, dobbiamo per prima cosa scegliere la rappresentazione biporta più opportuna per studiare il circuito. Sappiamo allora che la scelta si effettua prendendo la rappresentazione biporta tale che le due variabili indipendenti coincidano con le grandezze elettriche in comune alla rete di azione ed a quella di reazione: essendo la connessione di tipo serie-parallelo, le due reti (azione e reazione) hanno la stessa corrente di ingresso i_i e la stessa tensione di uscita v_{out}, per cui la rappresentazione biporta da considerare è quella che ha queste stesse grandezze come variabili indipendenti. Si tratta, evidentemente, della *rappresentazione a parametri h*:

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 = h_{11}i_i + h_{12}v_O \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 = h_{21}i_i + h_{22}v_O \end{cases}$$

Possiamo allora cominciare modellando la rete di reazione in termini di parametri h. Per fare questo, dobbiamo in primo luogo individuare la rete di reazione, che evidentemente è quella composta dalle resistenze R_1 ed R_2:



Determiniamo allora il modello a parametri h di questo circuito:

- effetto di carico in ingresso: $h_{11f} = \left.\frac{v_{1f}}{i_{1f}}\right|_{v_{2f}=0} = \left.\frac{v_{1f}}{i_i}\right|_{v_O=0} = R_1 // R_2 \cong R_1 = 1k\Omega$;

- fattore di reazione: $h_{12f} = \left.\frac{v_{1f}}{v_{2f}}\right|_{i_{1f}=0} = \left.\frac{v_{1f}}{v_O}\right|_{i_i=0} = \frac{R_1}{R_1+R_2} \cong \frac{R_1}{R_2} = 0.001$;

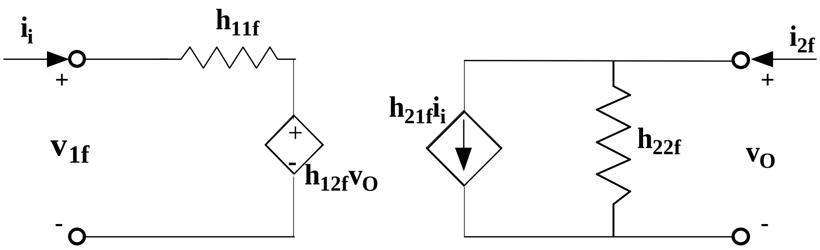
- trasferimento diretto (uscita→ingresso): $h_{21f} = \left.\frac{i_{2f}}{i_{1f}}\right|_{v_{2f}=0} = \left.\frac{i_{2f}}{i_i}\right|_{v_O=0} = -\frac{R_1}{R_1+R_2} \cong 0.001$;

- effetto di carico in uscita: $h_{22f} = \left.\frac{i_{2f}}{v_{2f}}\right|_{i_{1f}=0} = \left.\frac{i_{2f}}{v_O}\right|_{i_i=0} = \frac{1}{R_1+R_2} \cong \frac{1}{R_2} = 10^{-6}\Omega^{-1}$.

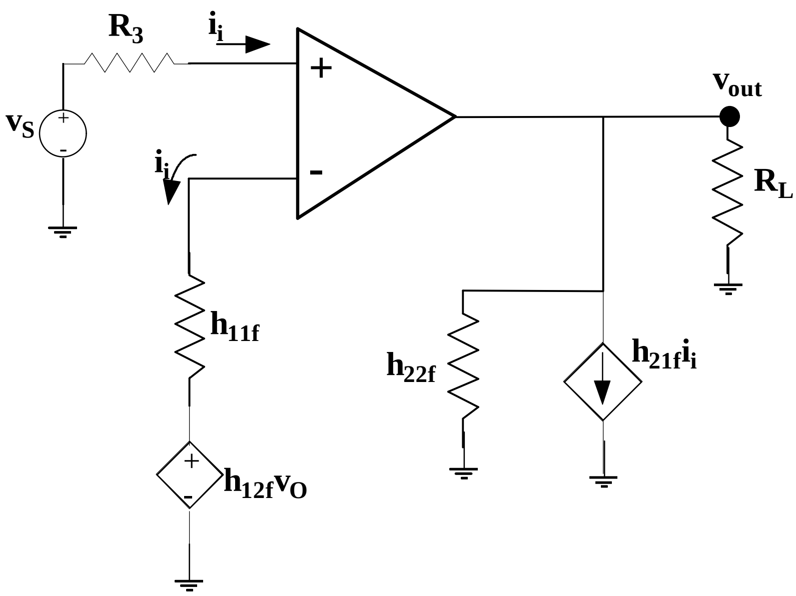
Dai valori numerici di questi parametri possiamo trarre qualche interessante conclusione sulla rete di reazione:

- in primo luogo, osserviamo che, mentre gli effetti di carico in ingresso non sono tanto piccoli, quelli in uscita lo sono sicuramente;
- in secondo luogo, osserviamo che la rete di reazione, avente un fattore di reazione $f=h_{12}f=0.001$, determina una notevole attenuazione del segnale di retroazione, il che si manifesterà in un valore non elevato del guadagno di anello T=af;
- infine, osserviamo, in base al basso valore del parametro h_{21f}, che il trasferimento diretto della rete di reazione è sicuramente trascurabile: spesso questa approssimazione (che corrisponde a ritenere unilaterale la rete di reazione) può essere assunta a priori, ma può anche essere verificata confrontando il parametro h_{21f} con il corrispondente parametro h_{21a} della rete di azione: bisogna cioè verificare che risulti effettivamente $h_{21a}>>h_{21f}$, come accade in questo caso.

A questo punto, abbiamo definito il modello a parametri h della rete di reazione, che quindi può essere schematizzata nel modo seguente:

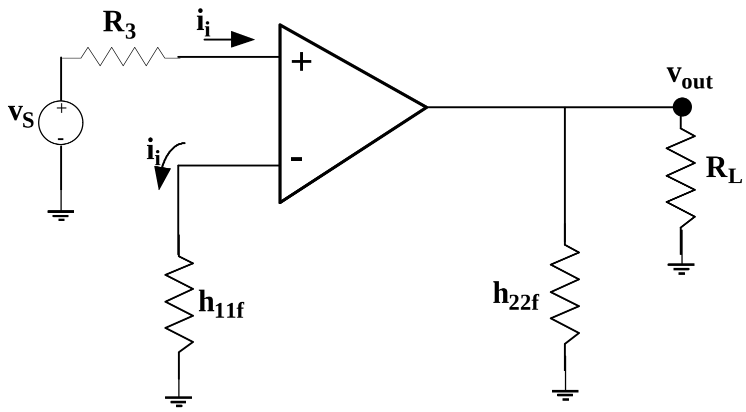


Possiamo allora tornare sul circuito di partenza e rappresentare la rete di reazione direttamente mediante questo circuito:



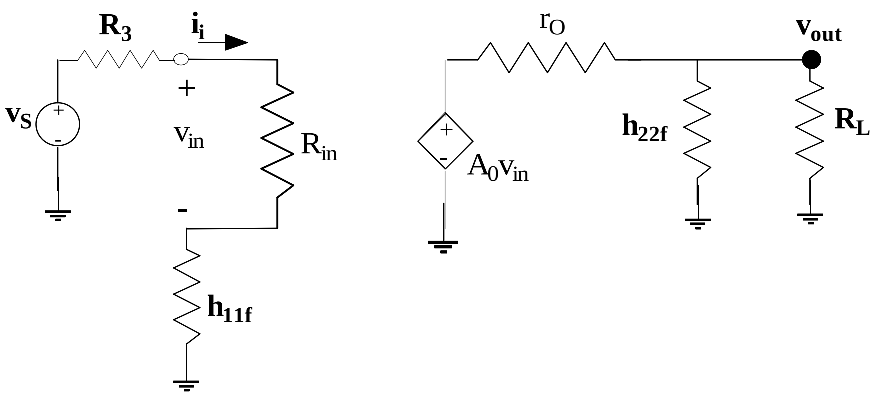
Su questo circuito possiamo fare due osservazioni:

- la prima è che il generatore pilotato $h_{21f}i_i$, rappresentativo del trasferimento diretto della rete di reazione, è trascurabile, per cui può essere sostituito con un circuito aperto;
- la seconda è che, se eliminiamo il generatore pilotato $h_{12f}v_O$, rappresentativo della reazione, otteniamo subito la rete di azione con gli effetti di carico:



Ovviamente, a questo circuito potevamo anche arrivare calcolando subito gli effetti di carico in ingresso ed in uscita, ma abbiamo preferito seguire questa strada più rigorosa al fine di chiarire bene i vari passaggi.

A questo punto, possiamo calcolare il guadagno della rete di azione con gli effetti di carico. Per fare questo, dobbiamo ovviamente sostituire all’amplificatore di andata il suo circuito equivalente per piccoli segnali:



Il calcolo del guadagno di tensione di questo circuito è abbastanza immediato:

$$a=\frac{v_{out}}{v_S}=\frac{\dfrac{(h_{22f}//R_L)}{r_O+(h_{22f}//R_L)}A_0 v_{in}}{v_S}=\frac{\dfrac{(h_{22f}//R_L)}{r_O+(h_{22f}//R_L)}A_0\dfrac{R_{in}}{R_3+R_{in}+h_{11f}}v_S}{v_S}=$$

$$=\frac{(h_{22f}//R_L)}{r_O+(h_{22f}//R_L)}A_0\frac{R_{in}}{R_3+R_{in}+h_{11f}}$$

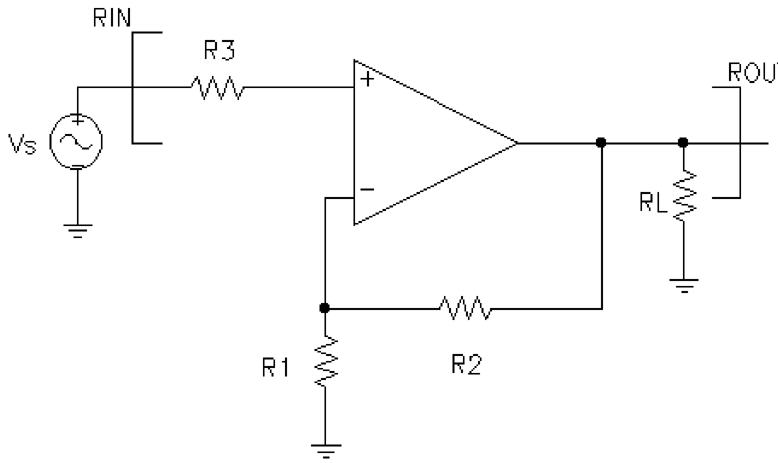
Facendo i conti, risulta $a=6000$.

Ricordando adesso che il fattore di retroazione vale $f=h_{12f}=0.001$, deduciamo che il guadagno d’anello è $T=af=6$ (positivo, a conferma che la reazione è negativa) e quindi che il guadagno di feedback vale

$$A_f = \frac{v_{out}}{v_S} = \frac{a}{1+af} = 857$$

Come avevamo previsto, il fatto che f fosse piccolo comporta che anche T sia piccolo, il che significa che la stabilizzazione del guadagno di tensione non è eccezionale ([3]).

A questo punto, noto il guadagno di anello, possiamo calcolare le resistenze R_{IN} ed R_{OUT} come, rispettivamente, resistenza di ingresso e resistenza di uscita dell'amplificatore reazionato, considerando questa volta, come terminali di ingresso e di uscita dell'amplificatore stesso, rispettivamente il nodo a valle del generatore v_S e quello a valle del carico R_L:



La scelta di queste due sezioni deriva sia dal fatto che è imposta dalla traccia sia anche dal fatto che, nel calcolo del guadagno di anello prima effettuato, abbiamo incluso sia la R_3 sia la R_L, per cui, al fine di applicare le formule caratteristiche della connessione serie in ingresso e parallelo in uscita, dobbiamo necessariamente tener conto di tali resistenze: abbiamo dunque che

$$R_{IN} = R_{IN,0}(1+T)$$

$$R_{OUT} = \frac{R_{OUT,0}}{1+T}$$

dove $R_{IN,0}$ è la resistenza di ingresso della rete di azione con gli effetti di carico, mentre $R_{OUT,0}$ è la resistenza di uscita della rete di azione con gli effetti di carico:

$$R_{IN,0} = R_S + R_{in} + h_{11f} = 111k\Omega \longrightarrow R_{IN} = R_{IN,0}(1+T) = 777k\Omega$$

$$R_{OUT,0} = R_L // r_O // h_{22f} = 0.67k\Omega \longrightarrow R_{OUT} = \frac{R_{OUT,0}}{1+T} = 96\Omega$$

Facciamo osservare che il procedimento appena seguito non ha richiesto di modellare la rete di azione mediante il modello a doppi bipoli. Tuttavia, potevamo anche procedere determinando tale modello ed applicando successivamente la formula generale per il calcolo dei vari parametri:

[3] Sottolineiamo che il fatto di ritenere $f=h_{12f}$ costituisce una approssimazione, in quanto sappiamo che, in generale, risulta $f=h_{12f}+h_{12a}$: trascurare il termine h_{12a} equivale a ritenere unidirezionale anche la rete di azione ed anche questa è una ipotesi sicuramente accettabile a priori

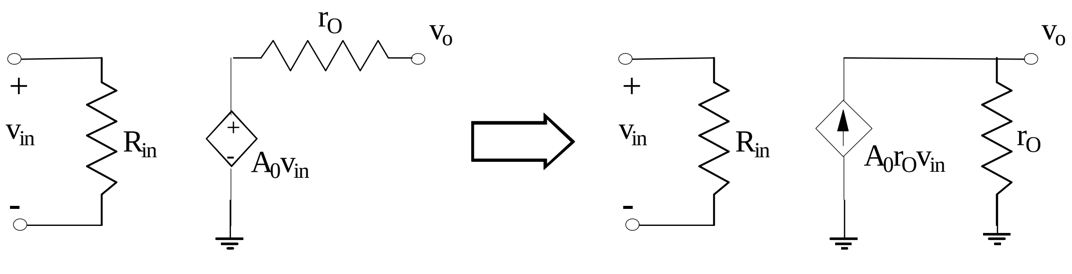
$$\begin{cases} a = -\dfrac{h_{21a}+h_{21f}}{(R_S+h_{11a}+h_{11f})(G_L+h_{22a}+h_{22f})} = -\dfrac{h_{21}}{Z_I Y_O} \\ f = h_{12a}+h_{12f} = h_{12} \end{cases} \longrightarrow T = -\frac{h_{21}h_{12}}{Z_I Y_O} \longrightarrow A_f = \frac{\dfrac{h_{21}}{Z_I Y_O}}{1-\dfrac{h_{21}h_{12}}{Z_I Y_O}}$$

Dato che abbiamo già individuato i parametri della rete di reazione, dobbiamo solo determinare quelli della rete di azione:

- resistenza di ingresso: $h_{11a} = \left.\dfrac{v_{1a}}{i_{1a}}\right|_{v_{2a}=0} = R_{in}$;
- reazione intrinseca: $h_{12af} = \left.\dfrac{v_{1a}}{v_{2a}}\right|_{i_{1a}=0} = 0$;
- guadagno: $h_{21a} = \left.\dfrac{i_{2a}}{i_{1a}}\right|_{v_{2a}=0} = \dfrac{-\dfrac{A_0 v_{in}}{r_O}}{i_i} = \dfrac{-\dfrac{A_0 R_{in} i_i}{r_O}}{i_i} = -\dfrac{A_0 R_{in}}{r_O}$;
- conduttanza di uscita: $h_{22a} = \left.\dfrac{i_{2a}}{v_{2a}}\right|_{i_{1a}=0} = \dfrac{1}{r_O}$.

Noti questi parametri, la corrispondente espressione di A_f è chiaramente la stessa ricavata prima.

E' importante osservare che non sempre è possibile determinare il modello a doppi bipoli della rete di azione, per cui il primo procedimento da noi seguito può essere assunto come metodo più generale. In questo caso, è stato possibile determinare il modello della rete di azione in quanto è possibile fare l'equivalente di Norton del generatore pilotato $A_0 v_{in}$:



Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry