

Appunti di Elettronica

Capitolo 16 – parte IV

Metodo delle costanti di tempo

<i>Introduzione.....</i>	<i>2</i>
<i>Descrizione del metodo.....</i>	<i>2</i>
<i>Esempio: stadio invertitore a BJT.....</i>	<i>4</i>
<i>Esempio: stadio inseguitore di corrente</i>	<i>5</i>
<i>Esempio: stadio CC-CB.....</i>	<i>6</i>
<i>Esempio: Amplificatore in transconduttanza.....</i>	<i>8</i>
<i>Esempio: stadio differenziale</i>	<i>9</i>
COMPORTAMENTO IN BASSA FREQUENZA	13
<i>Introduzione.....</i>	<i>13</i>
<i>Stima della frequenza di taglio inferiore</i>	<i>14</i>
<i>Stadio ad emettitore comune</i>	<i>15</i>

Introduzione

Data una **rete RC attiva** (contenente cioè solo resistori, condensatori e generatori pilotati), il **metodo delle costanti di tempo** consente di effettuare una stima della posizione del polo, tra quelli in bassa frequenza, che si trova alla frequenza maggiore e del polo, tra quelli in alta frequenza, che si trova alla frequenza minore. In tal modo, si ottiene quindi sostanzialmente una stima delle frequenze di taglio, rispettivamente, inferiore e superiore, ossia una caratterizzazione di massima della banda di frequenza entro la quale la rete può essere efficacemente utilizzata.

La stima viene fatta valutando l'influenza che ogni singola capacità esercita sul circuito, trascurando (nel modo che si vedrà) la presenza delle altre capacità; in questo modo, i calcoli vengono enormemente semplificati, poiché ci si riconduce sempre allo studio di circuiti del 1° ordine e quindi a dover valutare soltanto delle resistenze equivalenti.

Questo metodo non comporta soltanto una semplificazione dei calcoli, ma consente anche di stabilire quale capacità o quale resistenza equivalente influenza maggiormente la frequenza del polo che si sta valutando e quindi fornisce utili suggerimenti in sede di progetto.

Il lato negativo di questo metodo è invece dato dal fatto che si tratta comunque di un metodo approssimato, che quindi non sempre può dare risultati validi.

La dimostrazione del metodo non viene riportata in questi appunti: ci si limita perciò ad enunciare i risultati più significativi.

Descrizione del metodo

Per prima cosa, è importante fornire alcune importanti definizioni:

- data una rete RC attiva di ordine maggiore di uno, contenente una capacità C, si definisce **costante di tempo a circuito aperto** associata alla capacità C (simbolo: τ_C^o) la costante di tempo del circuito che si ottiene ponendo a circuito aperto tutte le altre capacità presenti nel circuito di partenza. In pratica, tale costante di tempo risulta perciò data dal prodotto di C per la resistenza equivalente che si vede ai capi di C stessa;
- partendo sempre dalle ipotesi del caso precedente, si definisce inoltre **costante di tempo in cortocircuito** associata alla capacità C (simbolo: τ_C^s) la costante di tempo del circuito che si ottiene ponendo in cortocircuito tutte le altre capacità del circuito di partenza. Anche in questo caso, la costante di tempo risulta pari al prodotto di C per la resistenza equivalente che si vede ai capi di C stessa, ma ovviamente ha valore diverso dall'altra costante di tempo, data la diversità del relativo circuito di calcolo.

Sulla base di queste definizioni, si dimostrano le seguenti due relazioni fondamentali:

$$-\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \tau_{C_i}^o$$

$$-\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\tau_{C_i}^s} \right)$$

La prima relazione si rivela utile quando, nell'analisi ad alta frequenza, il polo a frequenza più bassa ha una frequenza molto più piccola delle frequenze degli altri poli: in questo caso, la quantità $\sum_{i=1}^n \tau_{C_i}^o$ (cioè la somma delle costanti di tempo a circuito aperto) fornisce una buona stima dell'inverso della frequenza del polo a più bassa frequenza (in questo caso si parla di **metodo delle costanti di tempo in circuito aperto**).

La seconda relazione è invece utile quando, nello studio in bassa frequenza, il polo a frequenza più alta ha una frequenza molto maggiore delle frequenze degli altri poli: allora, la quantità $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\tau_{C_i}^s} \right)$ (ossia la somma dei reciproci delle costanti di tempo in cortocircuito) fornisce una buona stima della frequenza del polo a frequenza maggiore (in questo caso si parla di **metodo delle costanti di tempo in cortocircuito**).

L'utilizzo di queste due relazioni si rivela molto utile per la determinazione delle frequenze di taglio di un generico amplificatore; infatti:

- *per determinare la frequenza di taglio superiore è sufficiente considerare il modello in alta frequenza dell'amplificatore e usare il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto; in questo modo si ottiene la frequenza più bassa del modello in alta frequenza e quindi la frequenza di taglio superiore del circuito di partenza:*

$$\omega_h = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \tau_{C_i}^o}$$

- *analogamente per la frequenza di taglio inferiore basta considerare il modello alle basse frequenze dell'amplificatore e applicare il metodo delle costanti di tempo in cortocircuito; così facendo, si ottiene la frequenza più alta del modello alle basse frequenze che coincide con la frequenza di taglio inferiore:*

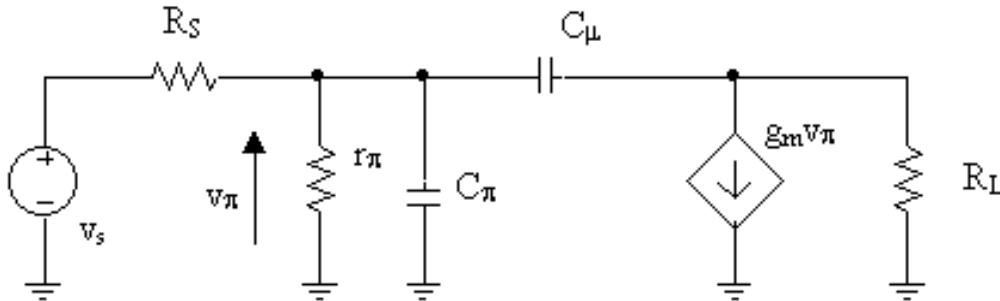
$$\omega_l = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\tau_{C_i}^s} \right)$$

Questo metodo presuppone sempre che le frequenze (o, meglio, i corrispondenti poli) che si stanno calcolando siano dominanti rispetto alle altre: in caso contrario, l'approssimazione può non risultare buona. In ogni caso, è importante osservare che il metodo delle costanti di tempo dà comunque un'indicazione che si può rivelare oltremodo utile in sede di progetto.

Esempio: stadio invertitore a BJT

Consideriamo un esempio pratico di applicazione dei concetti esposti nel paragrafo precedente.

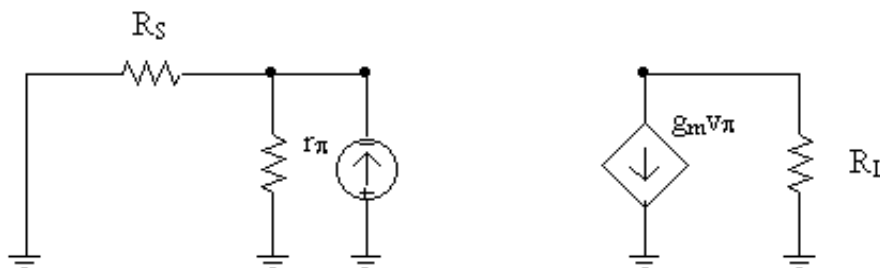
Vogliamo valutare la frequenza di taglio superiore dello stadio ad emettitore comune. Consideriamo allora direttamente il corrispondente circuito equivalente:



Dovendo calcolare la frequenza di taglio superiore, applichiamo il *metodo delle costanti di tempo a circuito aperto*. Questo significa che dobbiamo valutare le costanti di tempo associate alle uniche due capacità presenti nel circuito, C_π e C_μ ; le rispettive costanti di tempo saranno perciò, genericamente, nella forma seguente:

$$\tau_{C_\pi}^o = C_\pi \cdot R_{C_\pi} \qquad \tau_{C_\mu}^o = C_\mu \cdot R_{C_\mu}$$

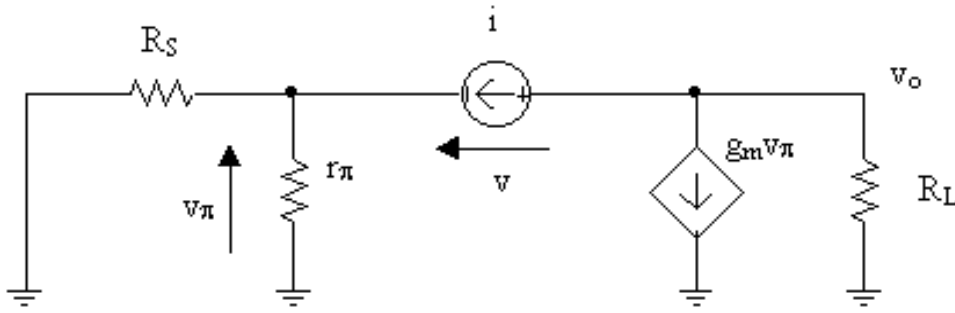
Per ottenere la costante di tempo associata a C_π , dobbiamo innanzitutto cortocircuitare il generatore d'ingresso e sostituire la C_μ con un circuito aperto. Secondariamente, dobbiamo sostituire C_π con un generatore di test, ad esempio di corrente, e valutare la corrispondente tensione ai suoi capi, in modo che il rapporto ci dia la resistenza equivalente. Il circuito su cui ragionare è dunque il seguente:



Si vede allora facilmente che la resistenza ai capi del generatore di test vale $R_{C_\pi} = r_\pi // R_S$ (mentre l'altra "porzione" del circuito non ha alcuna influenza sul calcolo, dato il circuito aperto con cui abbiamo sostituito la C_μ), per cui possiamo scrivere che

$$\tau_{C_\pi}^o = C_\pi \cdot (r_\pi // R_S)$$

Adesso, per il calcolo della costante associata a C_μ , dobbiamo ancora una volta passivare il circuito; inoltre, dobbiamo "aprire" la C_π e dobbiamo inoltre porre un generatore di test al posto di C_μ . così facendo, si ottiene il seguente circuito:



Dato che $v_\pi = v + v_o$ e, inoltre, che $v_\pi = (R_S // r_\pi) \cdot i$ e $v_o = -(i + g_m v_\pi) \cdot R_L$, si ottiene facilmente che

$$v = v_\pi - v_o = (R_S // r_\pi) \cdot i + [i + g_m (R_S // r_\pi) \cdot i] \cdot R_L$$

da cui quindi concludiamo che

$$R_{C_\mu} = \frac{v}{i} = R_S // r_\pi + R_L \cdot [1 + g_m (R_S // r_\pi)]$$

La costante di tempo associata alla C_μ vale dunque

$$\tau_{C_\mu}^o = \{R_S // r_\pi + R_L \cdot [1 + g_m (R_S // r_\pi)]\} \cdot C_\mu$$

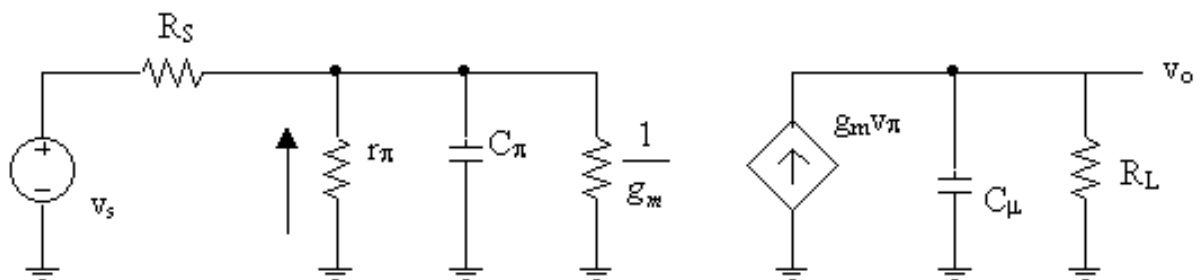
In conclusione, in base al metodo delle costanti di tempo a circuito aperto, deduciamo che la pulsazione di taglio superiore vale

$$\omega_h = \frac{1}{\tau_{C_\pi}^o + \tau_{C_\mu}^o} = \frac{1}{C_\pi \cdot (r_\pi // R_S) + \{R_S // r_\pi + R_L \cdot [1 + g_m (R_S // r_\pi)]\} \cdot C_\mu}$$

Si può verificare che l'espressione ottenuta è assolutamente analoga a quella trovata con le leggi di Kirchoff.

Esempio: stadio inseguitore di corrente

Consideriamo adesso il classico inseguitore di corrente a BJT. Riportiamo direttamente il suo circuito equivalente per piccoli segnali:



In questo caso, applicare il metodo delle costanti di tempo è inutile, poiché si ha sin dall'inizio un circuito costituito da due parti tra di loro sconnesse: in particolare, le uniche due capacità presenti non si influenzano tra di loro e quindi, se si calcolano le costanti di tempo a circuito aperto, esse coincideranno necessariamente con le costanti di tempo associate ad ognuna delle due parti del circuito.

Inoltre, in questo caso particolare, le costanti di tempo a circuito aperto coincidono anche con le costanti di tempo in cortocircuito: infatti, se le due capacità non si influenzano, nel calcolo della resistenza vista dai morsetti di una qualsiasi delle due è indifferente che l'altra sia in cortocircuito o in circuito aperto.

Si vede allora facilmente che

$$\tau_{C_\pi}^o = C_\pi \cdot \left(r_\pi // R_s // \frac{1}{g_m} \right) \cong C_\pi \cdot \left(\frac{1}{g_m} \right) \qquad \tau_{C_\mu}^o = R_L \cdot C_\mu$$

Quale delle due costanti di tempo sia più grande dipende molto dal valore delle resistenze, ma in genere la resistenza di carico è molto maggiore di $1/g_m$, più di quanto C_π sia maggiore di C_μ .

Se valutiamo la frequenza di taglio superiore sommando le due costanti di tempo, otteniamo una frequenza che è più piccola della frequenza del polo a più bassa frequenza.

In questo caso, quindi, il metodo delle costanti di tempo non serve, poiché si riescono a calcolare esattamente le frequenze dei poli del circuito.

In generale, dato un qualsiasi circuito, è sempre opportuno provare preventivamente a semplificare il circuito, cercando, con delle operazioni di equivalenza e/o con delle approssimazioni, di sconnettere il maggior numero di capacità ⁽¹⁾; successivamente, si può applicare il metodo delle costanti di tempo separatamente ad ogni parte del circuito.

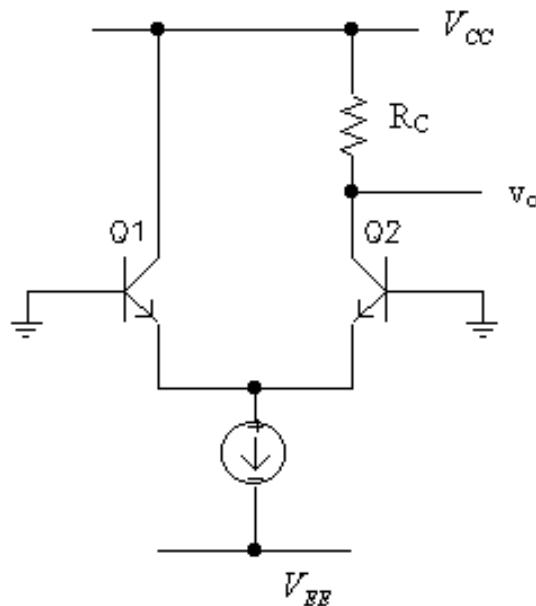
Sottolineiamo che il quello delle costanti di tempo è un metodo che fa uso di approssimazioni e quindi è inutile utilizzarlo se si possono valutare facilmente le soluzioni esatte.

Esempio: stadio CC-CB

Consideriamo ora circuiti più complessi di quelli esaminati nei paragrafi precedenti. Per tali nuovi circuiti, il metodo delle costanti di tempo diventa praticamente necessario, dato che, in presenza di particolarità complessità circuitali, la soluzione non può che essere approssimata.

Consideriamo, ad esempio, il circuito seguente, ottenuto come cascata di uno stadio a collettore comune (CC) con uno stadio a base comune (CB):

¹ Ad esempio, nello stadio a base comune, le capacità sono sconnesse anche se non lo è il circuito, mentre invece, nello stadio ad emettitore comune, si ricorre ad una particolare approssimazione.



Il circuito presenta quattro diverse capacità intrinseche (due per ogni transistor). Tuttavia, per il segnale, la capacità $C_{\mu 1}$ è in cortocircuito (dato che si trova tra la base di Q1, che è sempre a massa, ed il collettore di Q1, che è collegato all'alimentazione, la quale, sotto segnale, equivale ad una massa), mentre le due C_{π} sono in parallelo (dato che si trovano tra massa ed il nodo in cui convergono i due emettitori). Quindi, l'ordine del circuito è in realtà pari a 2.

Applichiamo il metodo delle costanti di tempo in circuito aperto, il che significa che, nel valutare la resistenza equivalente "associata" ad una capacità, dobbiamo considerare tutte le altre capacità come dei circuiti aperti.

Senza nemmeno ricorrere al circuito equivalente per piccoli segnali, possiamo subito dire che la capacità $2C_{\pi}$ vede ai suoi capi una resistenza pari al parallelo di due resistenze pari a $1/g_m$ (ciò che si vede da entrambi gli emettitori dei due transistor).

L'altra capacità è data da $C_{\mu 2}$, che vede ai suoi capi una resistenza pari a circa $R_C // 2r_{o\equiv}$.

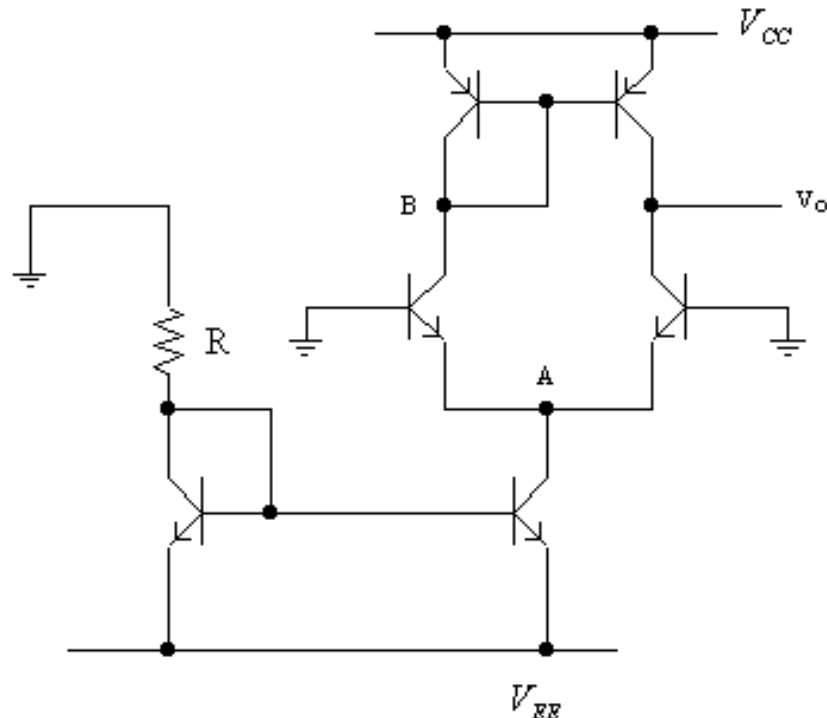
E' evidente, allora, che $C_{\mu 2}$ viene notevolmente esaltata dalla resistenza che vede, per cui possiamo scrivere, in prima approssimazione, che la frequenza di taglio superiore vale

$$\omega_h \cong \frac{1}{C_{\mu_2} \cdot (R_C // 2r_{o\equiv})} \cong \frac{1}{C_{\mu_2} \cdot (R_C)}$$

Si comprende, dunque, come il metodo delle costanti di tempo ci abbia consentito di stimare il valore di ω_h con maggiore facilità e, nello stesso tempo, di capire quali sono gli elementi circuitali dai quali essa dipende maggiormente.

Esempio: Amplificatore in transconduttanza

Passiamo adesso a considerare l'OTA con specchio di corrente per la polarizzazione. Si tratta del circuito seguente:

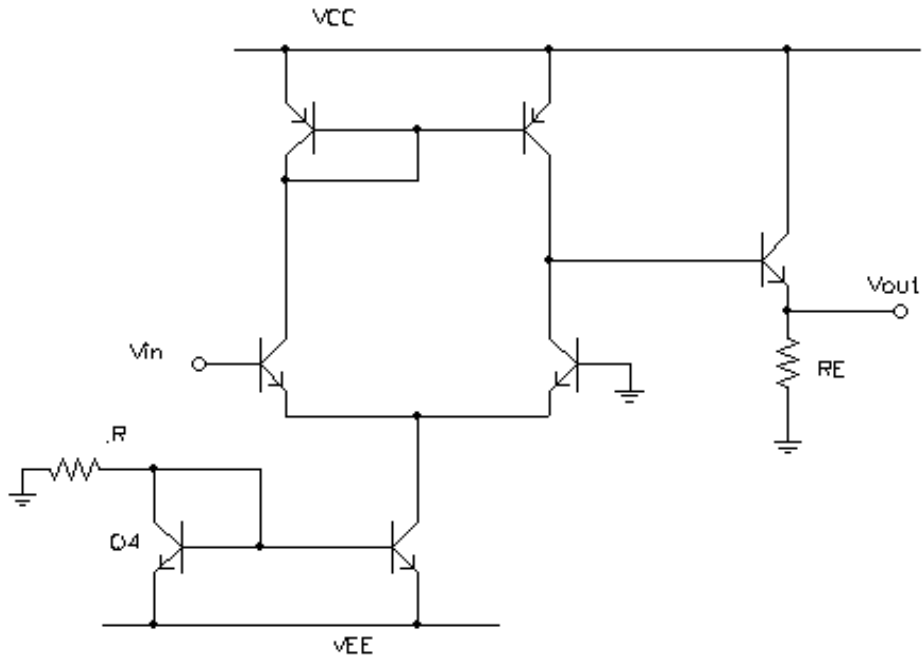


Questo circuito presenta ben 12 condensatori, per cui non può assolutamente essere studiato con le leggi di Kirchhoff. Il metodo delle costanti di tempo consente invece di stimare abbastanza facilmente la frequenza di taglio superiore. Infatti il circuito ha solo il nodo d'uscita ad alta impedenza, mentre il nodo a cui è connessa la resistenza R , nonché i nodi A e B , sono tutti ad impedenza molto bassa (almeno tre ordini di grandezza di differenza rispetto al nodo di uscita): infatti, tali nodo vedono, almeno da una parte, una resistenza pari a $1/g_m$. Di conseguenza, si può dire immediatamente che sarà la costante di tempo associata all'uscita a fissare la frequenza di taglio superiore.

La resistenza del nodo d'uscita vale $r_{op} // r_{on}$; la capacità equivalente che si vede dal nodo d'uscita è data invece dal parallelo tra la C_μ del transistor npn e la serie di C_μ e $2C_\pi$ dei transistor pnp; tale parallelo vale approssimativamente C_μ , per cui alla fine si ottiene, con buona approssimazione, che

$$\omega_h \cong \frac{1}{C_\mu \cdot (r_{on} // r_{op})}$$

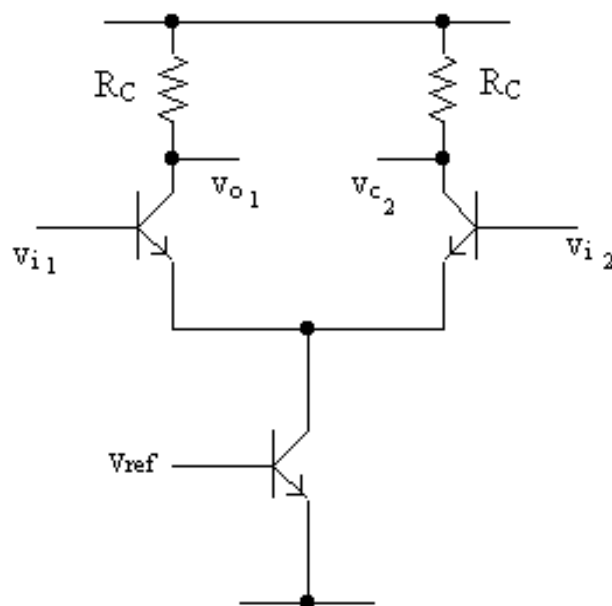
Supponiamo adesso di complicare il circuito aggiungendo, all'uscita dell'amplificatore, un inseguitore di tensione:



Alla C_μ dell'OTA, calcolata poco fa, si deve adesso porre semplicemente in parallelo la C_μ del transistor dell'inseguitore, mentre, essendo la resistenza d'ingresso dell'inseguitore molto elevata, la resistenza del nodo d'uscita dell'OTA non viene modificata.

Esempio: stadio differenziale

Consideriamo ora il classico stadio differenziale, supponendo che il generatore di corrente sia formato da un transistor connesso tra una alimentazione negativa (sull'emettitore) ed una tensione fissa di riferimento (sulla base):

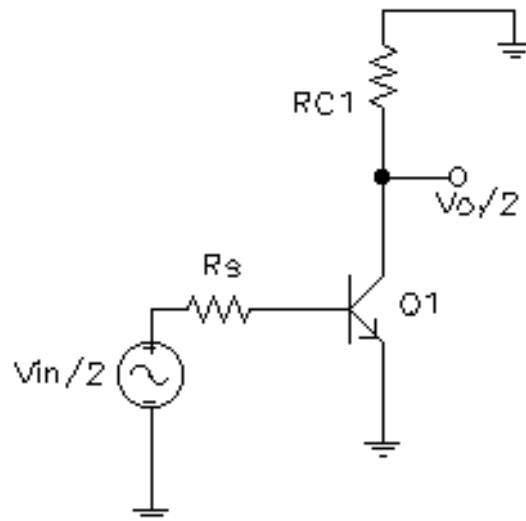


Questo stadio è molto importante in quanto costituisce un blocco fondamentale in molti circuiti. *Vogliamo studiarne il comportamento in alta frequenza sia rispetto ad un ingresso di modo puramente differenziale sia rispetto ad un ingresso di modo comune.*

Cominciamo dal caso in cui è applicato in ingresso un segnale di modo puramente differenziale.

Sappiamo bene che, in questo caso, il nodo in cui convergono i due emettitori è a massa sotto segnale, per cui non è importante considerare né la resistenza di Norton del generatore di corrente né una eventuale capacità in parallelo ad essa.

Consideriamo ad esempio il semicircuito di sinistra:



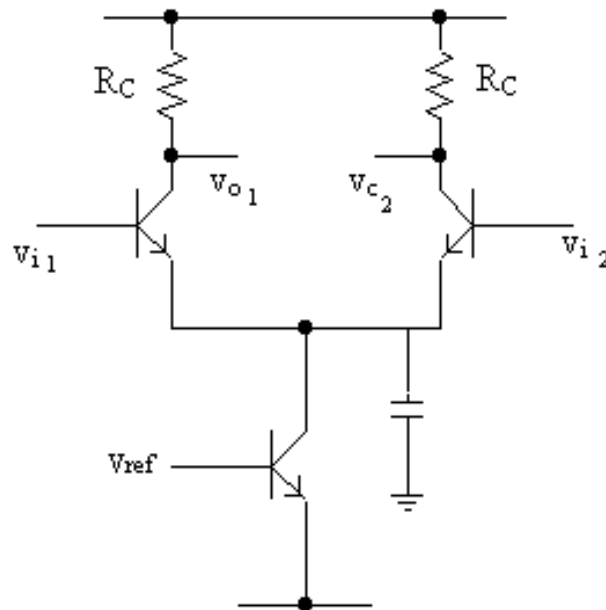
Il guadagno $\frac{v_o/2}{v_{in}/2}$ di questo circuito è pari al guadagno di modo differenziale A_{dm} del circuito completo iniziale.

Osservando il semicircuito, si nota che si tratta di classico stadio ad emettitore comune come quello analizzato all'inizio di questo capitolo, il che ci consente quindi di affermare che valgono le stesse identiche considerazioni fatte in quel caso.

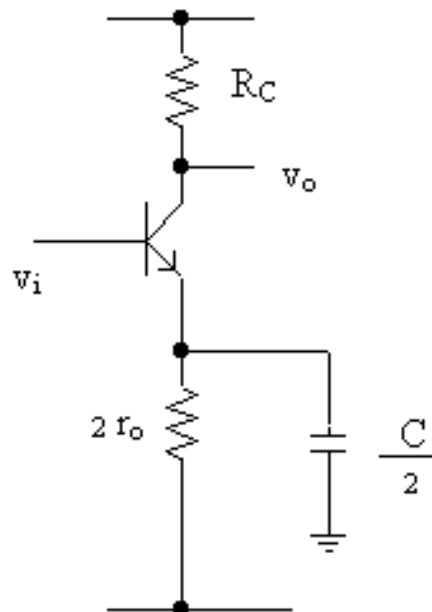
Passiamo allora a considerare il caso in cui è applicato in ingresso allo stadio differenziale un segnale di modo comune, cioè un segnale uguale sui due terminali di ingresso.

In questo caso, sappiamo che sul nodo in cui convergono gli emettitori compare un segnale pari a metà del modo comune, per cui ci si riconduce ad un emettitore comune con forte degenerazione (pari al doppio della resistenza di uscita dello specchio usato per la polarizzazione). A causa della forte degenerazione, il circuito di modo comune risente molto meno dell'effetto Miller e quindi ha una banda molto più ampia del circuito di modo differenziale. Questo può indurre a pensare che il CMRR rimanga costante fino alla frequenza di taglio superiore del circuito di modo differenziale.

In realtà, le cose non stanno così, poiché il circuito di modo comune risente dell'effetto della capacità presente tra collettore e substrato del transistor che funge da specchio. Tale capacità è evidenziata nella figura seguente:



La capacità del transistor che funge da generatore viene messa in cortocircuito nel modo differenziale (in quanto il nodo in cui convergono gli emettitori di Q1 e Q2 è una massa di segnale per il modo differenziale), ma è ben presente nel modo comune, come evidenziato dal seguente semi-circuito di modo comune:



Tale capacità introduce dunque uno zero ad una frequenza che si può ricavare facilmente:

$$\frac{1}{2r_o} + s \cdot \frac{C}{2} = 0 \longrightarrow s_z = -\frac{1}{C \cdot r_o}$$

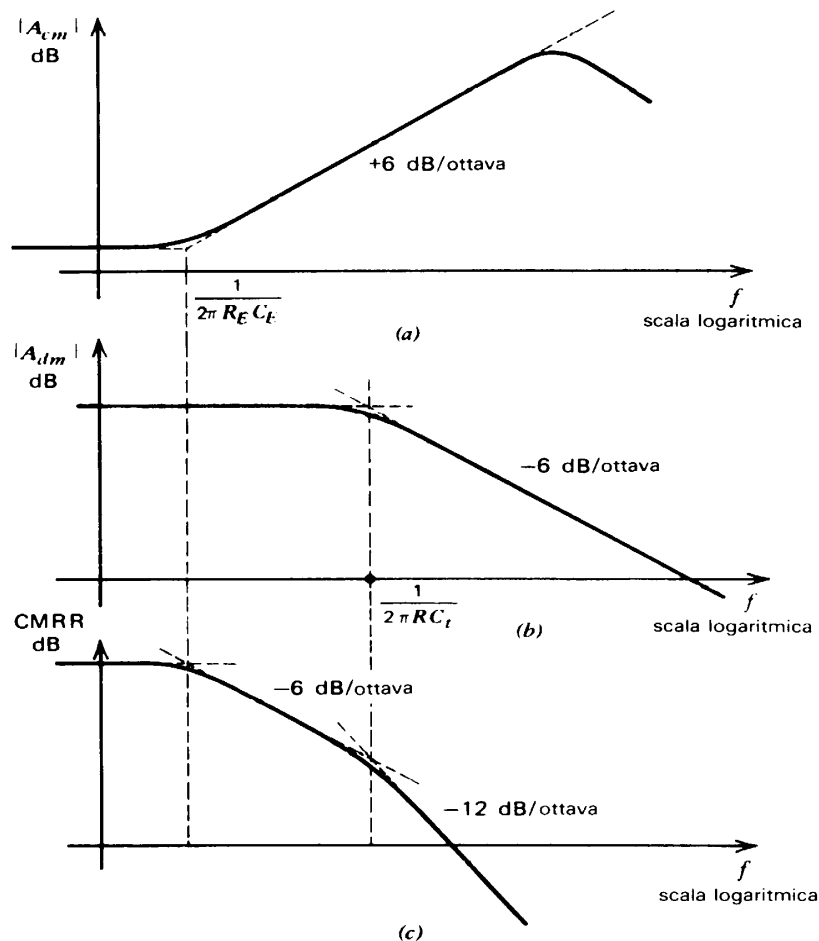
Questa frequenza $\omega_z = \frac{1}{C_{r0}}$ risulta molto più bassa della frequenza di taglio del

circuito di modo differenziale, comportando un aumento del guadagno di modo comune e quindi una diminuzione del CMRR.

E' ovvio che questo aumento di A_{cm} (e quindi la diminuzione del CMRR) è indesiderato, in quanto si vorrebbe che il guadagno di modo comune fosse il più piccolo possibile. D'altra parte, questo aumento non può continuare indefinitamente, in quanto le capacità che prima abbiamo trascurato (C_π e C_μ) incominceranno, da una certa frequenza in poi, a far sentire il loro peso, costringendo $A_{cm}(s)$ a diminuire alle frequenze più elevate.

Tuttavia, a queste stesse frequenze il guadagno di modo differenziale decresce ancora più rapidamente, con la conseguenza di una ulteriore riduzione del CMRR.

Tutte queste considerazioni sono rappresentate nella figura seguente, in cui sono riportati gli andamenti in frequenza dei vari guadagni dello stadio:



Come si può osservare, il CMRR rimane alto in un range di frequenze estremamente ridotto.

Comportamento in bassa frequenza

Introduzione

In molti amplificatori, è possibile che siano presenti effetti capacitivi che fanno sentire la propria influenza alle basse frequenze. Tipicamente, tali effetti si manifestano nei circuiti a componenti discreti, mentre invece sono praticamente assenti nei circuiti integrati (per i quali serve infatti, generalmente, solo l'analisi in alta frequenza).

Si può subito evidenziare che, se eventualmente un amplificatore presenta un polo a bassa frequenza, dovrà allora avere anche uno zero a bassa frequenza, poiché solo in questo modo sarà possibile avere una funzione di risposta armonica che risulta essere costante in un ben preciso intervallo di frequenza. Allora i modelli circuitali che caratterizzano il comportamento in bassa frequenza degli amplificatori presenteranno sempre funzioni di risposta armonica aventi ugual numero di poli e zeri. Si tratterà perciò di funzioni del tipo seguente:

$$A(s) = K \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_n)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}$$

La determinazione degli zeri di un circuito in genere non viene fatta, poiché di solito si è interessati alle frequenze di taglio e alla posizione dei poli dominanti in alta frequenza (per la caratterizzazione della stabilità); di conseguenza, in questa sede non forniremo metodi generali per la ricerca degli zeri di un circuito ⁽²⁾, ma faremo solo alcune considerazioni di natura prettamente operativa.

Possiamo dire che l'eventuale presenza di zeri alle basse frequenze può essere dovuta a **capacità di disaccoppiamento** oppure a **capacità di bypass** presenti nei circuiti che "ospitano" i transistor:

- le capacità di disaccoppiamento servono appunto a disaccoppiare in continua e quindi introducono sempre uno zero alla frequenza nulla;
- le capacità di bypass servono invece a bypassare delle resistenze (qualora esse servano solo a garantire la polarizzazione desiderata) e introducono quindi uno zero alla frequenza per la quale l'ammettenza del parallelo tra la capacità di bypass e la resistenza da bypassare risulta nulla.

In base a queste considerazioni, la determinazione della posizione degli zeri per i modelli circuitali in bassa frequenza di un amplificatore viene fatta agevolmente.

Per quanto riguarda la determinazione dei poli, non c'è da aggiungere molto, poiché si utilizzano gli stessi strumenti che sono stati definiti per lo studio in alta frequenza. In questo caso, si rivela particolarmente utile il **metodo delle costanti di tempo in cortocircuito**, poiché esso consente di determinare con molta facilità la frequenza di taglio inferiore di un amplificatore.

² Ovviamente, gli zeri possono essere determinati valutando la funzione di risposta armonica mediante la classica applicazione delle leggi di Kirchhoff, ma abbiamo ampiamente osservato come tale procedimento sia tutt'altro che comodo

Stima della frequenza di taglio inferiore

Vediamo prima di tutto come è possibile determinare la frequenza di taglio inferiore di un circuito quando si ha a disposizione la funzione di trasferimento del modello del circuito stesso alle basse frequenze.

Per semplificare i conti, facciamo riferimento ad un sistema a due poli e due zeri, considerando, però, che il risultato vale anche in generale e lo si può dimostrare allo stesso modo mediante un procedimento soltanto più laborioso.

Consideriamo una funzione di trasferimento nella forma seguente:

$$A(s) = k \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2)}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica è

$$A(j\omega) = k \cdot \frac{(j\omega - z_1) \cdot (j\omega - z_2)}{(j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2)} = k \cdot \frac{-\omega^2 + z_1 \cdot z_2 - j\omega \cdot (z_1 + z_2)}{-\omega^2 + p_1 \cdot p_2 - j\omega \cdot (p_1 + p_2)} = k \cdot \frac{-\omega + \frac{z_1 \cdot z_2}{\omega} - j \cdot (z_1 + z_2)}{-\omega + \frac{p_1 \cdot p_2}{\omega} - j \cdot (p_1 + p_2)}$$

Alla frequenza di taglio inferiore si ha, per definizione, che $|A(j\omega_1)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$.

Se il polo dominante si trova ad una frequenza significativamente maggiore di quelle degli altri poli e degli zeri, si può considerare $\omega_1 \gg \frac{z_1 \cdot z_2}{\omega_1}$ e $\omega_1 \gg \frac{p_1 \cdot p_2}{\omega_1}$ e pertanto si può scrivere

$$|A(j\omega_1)| = k^2 \cdot \frac{\omega_1^2 + (z_1 + z_2)^2}{\omega_1^2 + (p_1 + p_2)^2} = \frac{k^2}{2}$$

Da qui si ricava che

$$2 \cdot \omega_1^2 + 2 \cdot (z_1 + z_2)^2 = \omega_1^2 + (p_1 + p_2)^2 \longrightarrow \omega_1^2 = (p_1 + p_2)^2 - 2 \cdot (z_1 + z_2)^2$$

In questo caso, a differenza che per le alte frequenze, anche gli zeri contribuiscono ad individuare la frequenza di taglio inferiore. In particolare, generalmente gli zeri sono a frequenze molto più basse e quindi è possibile scrivere che

$$\omega_1^2 \cong (p_1 + p_2)^2 \longrightarrow \omega_1 = -(p_1 + p_2)$$

Se adesso moltiplichiamo i fattori a denominatore della funzione di trasferimento, otteniamo

$$A(s) = k \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2)}{s^2 - s \cdot (p_1 + p_2) + p_1 \cdot p_2}$$

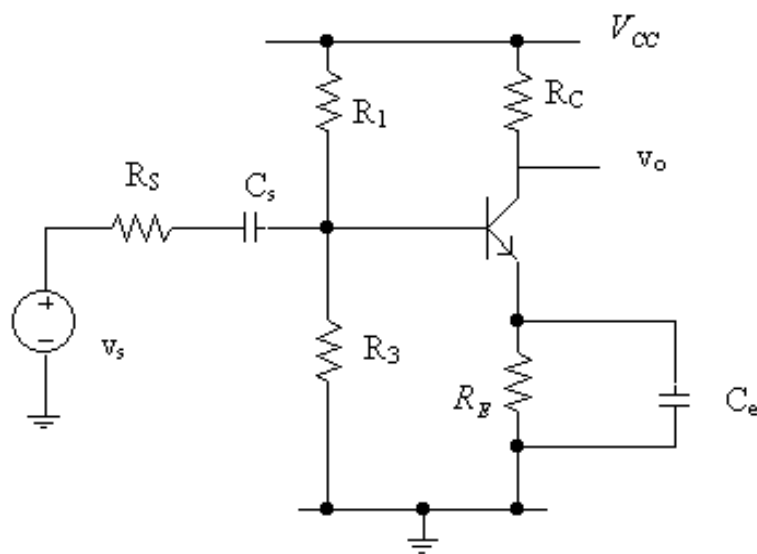
Confrontiamo questa espressione con $A(s) = k \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2)}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$: si deduce immediatamente che $\omega_1 = a_1 / a_2$. Più in generale, si ha che

$$\omega_1 = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Questa conclusione vale sempre nelle ipotesi che il polo dominante sia ad una frequenza molto maggiore delle altre e che gli zeri siano a frequenze molto più basse delle frequenze dei poli.

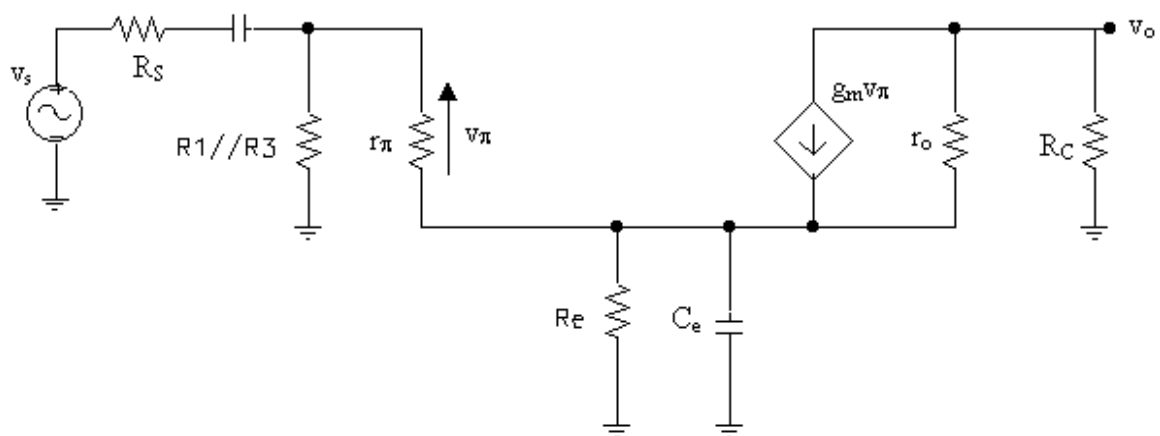
Stadio ad emettitore comune

A titolo di esempio di quanto esposto nel paragrafo precedente, studiamo uno stadio ad emettitore comune realizzato con componenti discreti:



Ci poniamo il problema di dimensionare il valore delle capacità per garantire un valore minimo ω_1 alla frequenza di taglio inferiore.

Consideriamo il circuito per piccoli segnali:



Per risolvere il problema, applichiamo il metodo delle costanti di tempo in cortocircuito. Il metodo dice che la frequenza di taglio inferiore è stimabile mediante la relazione

$$\omega_1 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\tau_{C_i}^s} \right)$$

Ci sono due costanti di tempo nel circuito in esame. Per il dimensionamento delle capacità, facciamo l'ipotesi che una costante sia molto più piccola dell'altra (almeno un ordine di grandezza); in questo modo, ω_1 viene determinata completamente dalla costante di tempo più piccola, che quindi sarà pari all'inverso della frequenza di taglio inferiore.

Per fare in modo che questa ipotesi sia verificata, si sceglie la capacità che vede ai suoi capi la resistenza minore. In questo caso, per la C_E si ha che la resistenza ai suoi capi è data dal parallelo di R_E e ciò che si vede dall'emettitore del transistor diviso $\beta+1$: tale resistenza vale quindi

$$R_{C_E} = R_E // \left(\frac{r_\pi + R_1 // R_3 // R_S}{\beta+1} \right) \cong R_E // \left(\frac{1}{g_m} \right)$$

Per la C_S si ha invece più banalmente che

$$R_{C_S} = R_S + R_1 // R_3 // r_\pi$$

E' evidente che, per i valori che in genere hanno le resistenze, è la C_E quella che vede ai suoi capi una resistenza minore; in base a questa considerazione, possiamo concludere che

$$\omega_1 \cong \frac{1}{\tau_{C_E}^s} = \frac{1}{C_E \cdot R_{C_E}}$$

da cui quindi scaturisce che $C_E = \frac{1}{\omega_1 \cdot R_{C_E}}$.

Per dimensionare l'altra capacità, imponiamo che la sua costante di tempo sia almeno dieci volte maggiore; in questo modo otteniamo:

$$\tau_{C_S}^s = C_S \cdot R_{C_S} = 10 \cdot \tau_{C_E}^s$$

da cui scaturisce che $C_S = \frac{10 \cdot \tau_{C_E}^s}{R_{C_S}} = \frac{10}{\omega_1 \cdot R_{C_S}}$.

In definitiva, abbiamo applicato il metodo delle costanti di tempo partendo dai valori delle costanti, al fine di valutare il valore dei parametri degli elementi circuitali.

Autore: Sandro Petrizzelli

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>