Appunti di Elettronica
Capitolo 17
Stabilità degli amplificatori reazionati

Introduzione *2*
Relazione tra guadagno e larghezza di banda *2*
Limiti all'entità della reazione imposti dalla stabilità *6*
STUDIO DELLA STABILITÀ TRAMITE IL METODO DEL LUOGO DEL RADICI 9
Introduzione *9*
Tecniche del luogo delle radici *10*
REAZIONE NEGATIVA E CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST 19
Criterio di Nyquist *19*
Significato del margine di fase in termini di risposta in frequenza *29*

Introduzione

Nei capitoli precedenti lo studio della **reazione negativa** negli stadi amplificatori è stato condotto trascurando gli *effetti dinamici* (legati essenzialmente alle capacità sia "interne" sia "esterne" ai transistor) ed utilizzando perciò modelli puramente resistivi dei circuiti. Sotto queste ipotesi, si è dimostrato che un *amplificatore reazionato negativamente*, tramite un valore elevato del guadagno d'anello T, presenta fondamentalmente i seguenti vantaggi:

- *minore sensibilità alle variazioni parametriche* da parte degli elementi circuitali che costituiscono il ramo di trasferimento diretto ([1]);
- *reiezione di qualsiasi disturbo che insorge nel ramo di trasferimento diretto* (ad esempio rumore oppure anche "ripple" della tensione di alimentazione);
- *possibilità di modificare il valore delle impedenze d'ingresso e di uscita nella maniera desiderata*;
- *notevole riduzione delle distorsioni di non linearità*.

In questo capitolo vogliamo invece analizzare gli effetti della reazione negativa sulla risposta in frequenza di un amplificatore, ossia sostanzialmente vogliamo studiare la reazione includendo, nei modelli circuitali, anche gli elementi reattivi e quindi i corrispondenti effetti dinamici. Dimostreremo che *la reazione negativa può produrre un aumento della banda passante dei circuiti.*

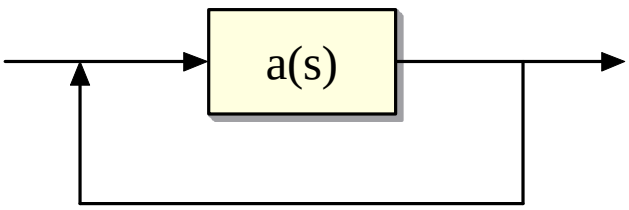
Relazione tra guadagno e larghezza di banda

Partiamo, per semplicità, da un amplificatore avente la seguente funzione di trasferimento in anello aperto:

$$a(s) = \frac{k}{s + p_1}$$

Abbiamo dunque una *costante di guadagno* k ed un polo (che supponiamo essere reale) in $-p_1$ (cui corrisponde quindi una frequenza $\omega_{B1} = |-p_1| = p_1$).

Supponiamo di chiudere questo sistema in un anello di reazione unitaria:



Il nostro obbiettivo è quello di indagare gli effetti che l'anello di reazione esercita sulla funzione di risposta armonica ad anello chiuso.

In primo luogo, possiamo porre la funzione di trasferimento ad anello aperto nel modo seguente:

1 Le variazioni parametriche del "ramo di ritorno" non possono essere contenute e per questo motivo questo "ramo" deve essere un attenuatore di precisione

$$a(s)=\frac{k}{s+p_1}=\frac{k}{p_1\left(1+\frac{s}{p_1}\right)}=\frac{\frac{k}{p_1}}{1+\frac{s}{p_1}}$$

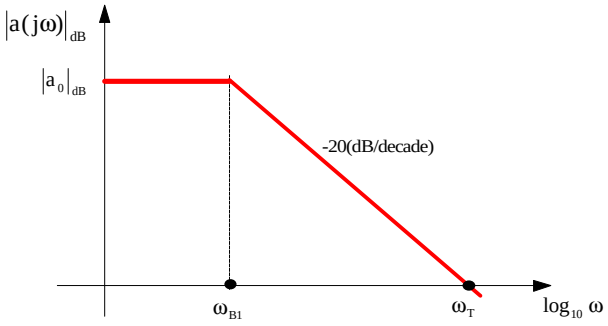
Dato che ci interessa studiare il comportamento in frequenza, poniamo s=jω per ottenere la **funzione di risposta armonica in anello aperto**:

$$a(j\omega)=\frac{k/p_1}{1+j\frac{\omega}{p_1}}$$

La quantità $a_0=\frac{k}{p_1}$ prende il nome di **guadagno a bassa frequenza ad anello aperto** (o, più brevemente, *guadagno statico ad anello aperto*), in quanto rappresenta evidentemente il valore assunto da a(jω) in ω=0:

$$\boxed{a(j\omega)=\frac{a_0}{1+j\frac{\omega}{p_1}}}$$

Tracciamo il diagramma di Bode (asintotico) del modulo di questa funzione:



Nel diagramma si notano essenzialmente la frequenza ω_{B1} del polo (dove il pedice "B" sta per "*break*"), oltre la quale $|a(j\omega)|_{dB}$ decresce di 20dB/decade, e la *frequenza di transizione* ω_T (o *frequenza di crossover*), in corrispondenza della quale risulta $|a(j\omega)|_{dB}=0$, ossia $|a(j\omega)|=1$.

A questo punto, supponiamo di chiudere il sistema in un anello di retroazione unitaria: la **funzione di trasferimento ad anello chiuso** assume l'espressione

$$A_f(s)=\frac{a(s)}{1+a(s)}=\frac{\frac{a_0}{1+\frac{s}{p_1}}}{1+\frac{a_0}{1+\frac{s}{p_1}}}=\frac{a_0}{(1+a_0)+\frac{s}{p_1}}=\frac{a_0}{1+a_0}\frac{1}{1+\frac{s}{p_1(1+a_0)}}$$

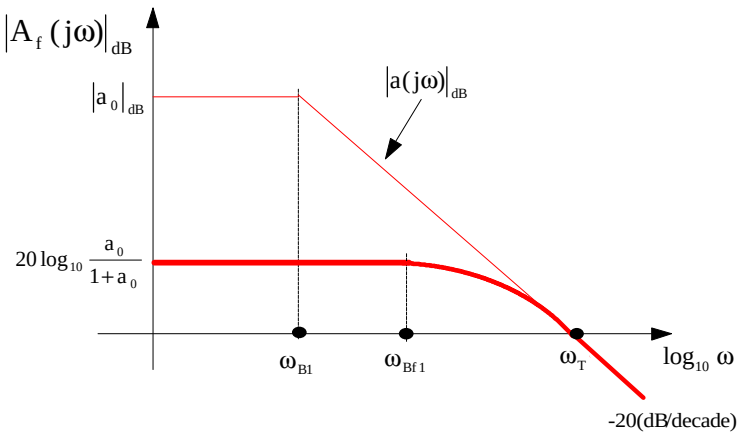
Da questa espressione deduciamo che la funzione di trasferimento in anello chiuso ha guadagno statico $A_{f0}=\frac{a_0}{1+a_0}$ e presenta un polo in $-p_1(1+a_0)$, ossia ad una frequenza $\omega_{Bf1}=p_1(1+a_0)$:

$$A_f(s)=\frac{A_{f0}}{1+\frac{s}{p_1(1+a_0)}}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica è dunque la seguente:

$$A_f(j\omega)=\frac{A_{f0}}{1+\frac{j\omega}{p_1(1+a_0)}}$$

E' immediato tracciare anche il diagramma di Bode (sempre asintotico) del modulo di questa funzione:



Confrontando, come fatto nella figura, con il diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$ riportato prima, si osservano essenzialmente tre cose:

- in primo luogo, la <u>riduzione del guadagno a bassa frequenza</u> di un valore $1+a_0$;
- in secondo luogo, come già osservato, lo spostamento della frequenza del polo di un fattore $1+a_0$: dato che, per un sistema a singolo polo (oppure a singolo polo dominante), la frequenza del polo costituisce una stima della cosiddetta **banda passante** del sistema (ossia la frequenza alla quale $|A_f(j\omega)|_{dB}$ diminuisce di 3dB rispetto al valore a bassa frequenza), abbiamo dunque un <u>aumento della banda passante</u>;
- in terzo luogo, il fatto che la frequenza di transizione rimane invariata, in anello chiuso, rispetto alla posizione in anello aperto.

E' importante sottolineare che <u>tutte queste considerazioni non cambiano se al posto di usare una reazione unitaria, consideriamo un anello di reazione con</u>

funzione di trasferimento della rete di reazione puramente algebrica, ossia del tipo $f(s)=f$. In questo caso, infatti, la **funzione di trasferimento ad anello chiuso** assume l'espressione

$$A_f(s)=\frac{1}{1+fa(s)}=\frac{\dfrac{a_0}{1+\dfrac{s}{p_1}}}{1+f\dfrac{a_0}{1+\dfrac{s}{p_1}}}=\frac{a_0}{(1+fa_0)+\dfrac{s}{p_1}}=\frac{a_0}{1+fa_0}\frac{1}{1+\dfrac{s}{p_1(1+fa_0)}}$$

Il guadagno a bassa frequenza è dunque $A_{f0}=\dfrac{a_0}{1+fa_0}$, mentre il polo va in $-p_1(1+fa_0)$.

La corrispondente funzione di risposta armonica è la seguente:

$$A_f(j\omega)=\frac{A_{f0}}{1+\dfrac{j\omega}{p_1(1+fa_0)}}$$

Il corrispondente diagramma di Bode (asintotico) del modulo ha la stessa identica forma di quello visto nel caso della retroazione unitaria, salvo valori numerici diversi a causa della presenza della costante di proporzionalità f.

In ogni caso, quindi, possiamo affermare che *la reazione negativa lascia invariato il prodotto tra il guadagno e la banda passante*. Si tratta, di volta in volta, di scegliere quale parametro privilegiare: il guadagno o la banda passante.

Al contrario, le cose cambiano se il sistema ha una funzione di trasferimento ad anello aperto caratterizzata da più di un polo e magari anche da qualche zero. In linea del tutto generale, si possono fare due affermazioni circa il comportamento di un amplificatore di questo tipo:

- in primo luogo, *il prodotto tra il guadagno e la larghezza di banda non è costante;*
- d'altra parte, è sempre vero che *al diminuire del guadagno aumenta la banda.* In base a ciò, considerando che la reazione negativa interviene sempre a ridurre il guadagno, si deduce che *la reazione negativa si presta comunque molto bene a rendere più veloce un amplificatore.*

Questo beneficio introdotto dalla retroazione negativa viene tuttavia accompagnato da due svantaggi non sempre trascurabili:

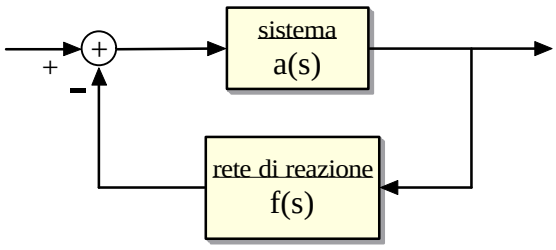
- in primo luogo, il fatto che il guadagno del circuito venga ridotto in maniera quasi direttamente proporzionale al miglioramento di banda rende spesso necessaria l'aggiunta di un ulteriore stadio amplificatore, con un conseguente aumento della complessità e dei costi di realizzazione;
- in secondo luogo, un circuito reazionato ha la tendenza a *oscillare* ed è spesso richiesta al progettista estrema attenzione per evitare che ciò accada. Il problema dell' "oscillazione" di un amplificatore e, più in generale, della sua "stabilità" è l'argomento principale di questo capitolo.

Limiti all'entità della reazione imposti dalla stabilità

Vogliamo esaminare quali limiti all'entità della reazione vengano imposti dalle specifiche di **stabilità**. Ricordiamo subito, a tal proposito, che i problemi legati alla *stabilità* di un amplificatore sorgono quando sono presenti, nella rete reazionata, degli elementi in grado di immagazzinare energia (induttori e, soprattutto, condensatori).

Prima di procedere con le definizioni, cerchiamo di capire, da un punto di vista fisico, cosa si intende per *stabilità di un sistema reazionato*.

Facciamo riferimento alla figura seguente:



Se a(s) e f(s) sono, rispettivamente, la funzione di trasferimento dell'amplificatore in anello aperto e quella della rete di reazione, sappiamo che la funzione di trasferimento dell'amplificatore in anello chiuso ha espressione

$$A(s)=\frac{a(s)}{1+a(s)\cdot f(s)}$$

Se il modulo di a(s) diminuisce con la frequenza, diminuisce anche il guadagno d'anello T(s)=a(s)·f(s) (e quindi anche il fattore di desensibilizzazione D(s)=1+T(s)).

Una situazione del tutto particolare si ha quando $a(s)=-\frac{1}{f(s)}$, ossia quando a(s)·f(s)=-1, ossia anche quando

$$|a(s)\cdot f(s)|=1$$
$$\angle[a(s)\cdot f(s)]=(1+2h)\cdot\pi \qquad h=0,\pm1,\pm2,\pm3.....$$

In questo caso, infatti, il guadagno A(s) diverge e si ha instabilità dell'amplificatore, nel senso (teorico) che una sollecitazione in ingresso di ampiezza limitata produce una risposta di ampiezza illimitata: risulta infatti

$$A(s)=\frac{a(s)}{1+a(s)\cdot f(s)}=\frac{a(s)}{1+(-1)}=\infty$$

In questo caso, come si vede, il segno di T(s) è negativo (mentre sappiamo che a centro banda deve essere positivo se si vuole una reazione negativa). Quindi, *all'instabilità corrisponde una reazione positiva*.

Al contrario, non vale sempre il viceversa, ossia non è detto che una reazione positiva comporti necessariamente instabilità: infatti, la reazione diventa positiva (cioè T(s)<0) a partire da quella frequenza complessa alla quale $|1+T(s)|<1$; supponiamo allora che ci sia, per il generico amplificatore in esame, un intervallo

di frequenze in corrispondenza delle quali risulti verificata la condizione $|1+T(s)|<1$; se, in corrispondenza di tali frequenze, il guadagno d'anello non è sufficientemente elevato, ossia risulta $|T(s)|<1$, non si ha instabilità. Al contrario, se $|T(s)|>1$, ogni segnale, anche accidentalmente presente nell'anello di reazione, viene rigenerato ed amplificato lungo l'anello, producendo così instabilità.

Quindi, *alla frequenza fisica w_0 alla quale si verificano le condizioni*

$$|T(j\omega_0)|=1$$
$$\angle T(j\omega_0)=180°$$

l'amplificatore produce un'uscita autonoma, cioè una auto-oscillazione la cui ampiezza è limitata solo dalla saturazione degli elementi del circuito (di solito in prossimità dei valori di alimentazione). ([2])

Fatte queste considerazioni, diamo la definizione di "stabilità" attraverso un approccio sistemistico:

> ***Def.*** *Un sistema lineare stazionario avente una funzione di trasferimento a(s) razionale fratta si dice* ***asintoticamente stabile*** *se e solo se tutti i poli di a(s) sono a parte reale negativa. Se e solo se almeno un polo di a(s) presenta parte reale positiva, il sistema si dice instabile.*

In genere, per gli amplificatori i concetti di stabilità appena definiti vengono sempre sottintesi (altrimenti l'amplificatore funzionerebbe da oscillatore) e la stabilità viene intesa in senso lato come **comportamento dinamico soddisfacente**: infatti, anche se un amplificatore è asintoticamente stabile (cioè i fenomeni transitori sulla risposta si esauriscono abbastanza rapidamente e, a regime, tale risposta non diverge), è possibile che la sua risposta si discosti eccessivamente da ciò che si vorrebbe ottenere, fornendo così un comportamento dinamico non soddisfacente.

Il comportamento dinamico di un sistema, in generale, può essere caratterizzato in due modi:

- studiando la risposta al gradino e analizzando il transitorio che si genera;
- analizzando i picchi nella risposta in frequenza a centro banda.

Per avere un comportamento dinamico soddisfacente (o anche una *risposta accettabile*), si deve fare in modo che, nei transitori, non si generino **overshoot** (sovraelongazioni) elevati e, a regime, non si abbia una **sovramplificazione**, la quale comporterebbe una distorsione del segnale da amplificare (infatti, il suo contenuto armonico verrebbe amplificato in modo differente).

Da ciò segue, quindi, il seguente **criterio di accettabilità della risposta**: *la risposta di un amplificatore è "accettabile" se gli overshoot (nel tempo) sono contenuti e la risposta in frequenza non presenta dei picchi nel centro banda.*

Rispettando queste specifiche, le oscillazioni nei transitori sono contenute e quindi trascurabili (soprattutto non danneggiano i dispositivi), la risposta a regime rimane sempre per frequenze di centro banda e l'amplificatore non esalta nessuna frequenza, evitando così di distorcere il segnale.

2 Possiamo subito anticipare che un oscillatore viene realizzato in modo che questa condizione sia verificata. Un oscillatore può essere visto come un amplificatore reso volutamente instabile.

Tutto questo è dovuto alla presenza, nel sistema in anello chiuso, di poli complessi e coniugati a parte reale negativa: questi poli generano, in fase transitoria, il tipico andamento oscillatorio smorzato, mentre a regime determinano i picchi nella risposta in frequenza.

In conclusione, *un amplificatore si dirà instabile (o privo di risposta accettabile) se presenta oscillazioni transitorie eccessive e/o distorce il segnale a regime*. Bisogna quindi controllare la reazione affinché ciò non accada.

Prima di procedere allo studio dei criteri per determinare una risposta accettabile, enunciamo due fondamentali proprietà degli *stadi elementari*:

- in primo luogo, se si analizza (con un metodo qualsiasi) la stabilità degli stadi elementari descritti nei capitoli precedenti, si trova che tutti quanti presentano solo poli reali negativi, per cui sono tutti asintoticamente stabili;
- in secondo luogo, esiste un preciso teorema in base al quale *un circuito costituito dalla cascata di stadi elementari presenta a sua volta solo poli reali e negativi,* per cui anch'esso è sempre asintoticamente stabile.

Queste due proprietà giustificano il fatto per cui *un amplificatore in anello aperto si considera sempre asintoticamente stabile*. E', eventualmente, la presenza di una retroazione a introdurre problemi di stabilità, in quanto, come è noto e come si vedrà bene tra poco, la retroazione fa in modo che i poli in anello chiuso siano diversi da quelli in anello aperto.

Premesso tutto questo, lo scopo dei prossimi paragrafi è quello di descrivere i metodi più utilizzati per imporre le condizioni di una risposta accettabile.

Studio della stabilità tramite il metodo del luogo del radici

Introduzione

I punti di vista di chi affronta lo studio della stabilità di un sistema (ad esempio un amplificatore) possono essere vari:

- quando l'obbiettivo è quello di realizzare una determinata funzione di trasferimento A(s) in anello chiuso, si può sintetizzarla imponendo una opportuna configurazione di poli e di zeri: un simile problema può essere risolto agevolmente ricorrendo al metodo del **luogo delle radici**;
- quando, invece, si hanno già a disposizione i blocchi circuitali già realizzati, di cui si ignorano le funzioni a(s) e f(s), sperimentalmente ci si vuole assicurare della possibilità di ottenere un sistema stabile una volta chiuso l'anello. Allora, in questo caso è opportuno ricorrere ai metodi basati sui *diagrammi di Bode e di Nyquist* ([3]), tramite i quali applicare il **criterio di stabilità di Nyquist**.

In questi primi paragrafi ci occupiamo del primo metodo, basato sulla costruzione del *luogo delle radici*.

Per un generico amplificatore reazionato, è possibile esprimere la funzione di trasferimento ad anello chiuso nella forma seguente:

$$A(s)=\frac{a(s)}{1+a(s)\cdot f(s)}=\frac{a(s)}{1+T(s)}$$

Se si pone uguale a zero il denominatore di A(s), si ottiene un'equazione che prende il nome di **equazione caratteristica** del sistema in anello chiuso; le soluzioni dell'equazione caratteristica rappresentano evidentemente i **poli** del sistema in anello chiuso.

L'equazione caratteristica è data dunque da

$$\boxed{1+T(s)=0}$$

Trattandosi di numeri complessi, questa equazione può essere espressa in termini di due distinte equazioni, una per l'ampiezza ed una per la fase:

$$|T(s)|=1$$

$$\angle T(s)=\begin{cases}(1+2h)\cdot\pi & \text{per} \quad h>0\\ 2h\pi & \text{per} \quad h<0\end{cases} \qquad \text{con} \quad h=0,\pm1,\pm2,\pm3....$$

[3] Nella pratica, può essere rischioso chiudere un anello di reazione senza essere sicuri che esso sarà stabile, poiché potrebbero verificarsi danneggiamenti ai componenti circuitali.

La relazione sulla fase del guadagno d'anello T(s) è propriamente quella che si utilizza per costruire il cosiddetto **luogo delle radici**, ossia il luogo geometrico che si ottiene considerando come variano, al variare della costante di guadagno k del sistema ad anello aperto, le soluzioni dell'equazione caratteristica.

Dopo che il luogo è stato tracciato, si ricorre alla relazione sui moduli del guadagno d'anello T(s) per individuare i punti del luogo che rappresentano i poli in anello chiuso dell'amplificatore; essi vengono individuati da un preciso valore di k e quindi dal guadagno a centro banda, al quale k è legato. Per questo, la relazione sui moduli prende il nome di **equazione di taratura**, poiché essa consente di tarare il luogo individuando i poli in anello chiuso.

Tecniche del luogo delle radici

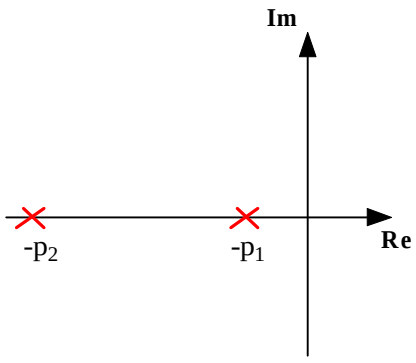
In genere, nel dimensionare un amplificatore, i poli e gli zeri del guadagno T(s) vengono imposti a priori e quindi il problema si riduce a *tarare adeguatamente* il luogo in modo che siano soddisfatte le specifiche per ottenere una risposta accettabile. *Tarare adeguatamente* vuol dire scegliere un valore opportuno del parametro k (e quindi di T(0)) e questo sostanzialmente significa dimensionare opportunamente l'entità della reazione.

Prima di definire un criterio di risposta accettabile, dobbiamo considerare un esempio che ci servirà a dare delle definizioni e a dimostrare degli importanti risultati.

Consideriamo dunque un amplificatore avente funzione di trasferimento (parliamo del ramo di andata) con due soli poli, rispettivamente in $-p_1$ e $-p_2$:

$$a(s) = \frac{a_0}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)}$$

Supponiamo che i due poli siano disposti nel piano di Gauss come nella figura seguente:



Supponiamo adesso di chiudere l'amplificatore in un anello di retroazione caratterizzato da un fattore di reazione f costante: la funzione di trasferimento dell'amplificatore reazionato è

$$A_f(s)=\frac{a(s)}{1+a(s)f}=\frac{a_0}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)+a_0}=\frac{a_0p_1p_2}{s^2+\left(p_1+p^2\right)s+p_1p_2\left(a_0f+1\right)}=\frac{\frac{a_0p_1p_2}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}}{\frac{1}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}s^2+\frac{p_1+p_2}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}s+1}$$

Il coefficiente a numeratore rappresenta il guadagno statico (cioè per ω=0):

$$A_{f0}=\frac{a_0p_1p_2}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}\longrightarrow A_f(s)=\frac{A_{f0}}{\frac{1}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}s^2+\frac{p_1+p_2}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}s+1}$$

I poli dell'amplificatore sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

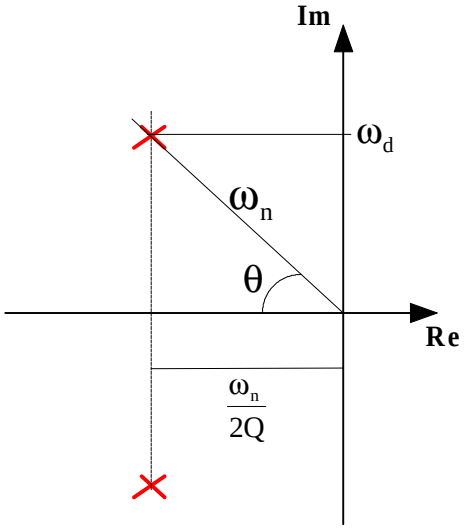
$$\frac{1}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}s^2+\frac{p_1+p_2}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}s+1=0$$

Se confrontiamo i coefficienti di questa equazione con quelli della classica equazione di 2° grado posta nella forma $\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{1}{\omega_nQ}s+1=0$, deduciamo quanto segue:

$$\begin{cases}\omega_n^2=p_1p_2\left(a_0f+1\right)\\ \frac{p_1+p_2}{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}=\frac{1}{Q\omega_n}\end{cases}\longrightarrow Q=\frac{\omega_n}{p_1+p_2}=\frac{\sqrt{p_1p_2\left(a_0f+1\right)}}{p_1+p_2}$$

Il parametro Q è il cosiddetto **fattore di qualità**, pari a $1/2\delta$, dove δ è il **coefficiente di smorzamento**.

Il parametro Q (o anche δ) e la **pulsazione naturale** ω_n caratterizzano la posizione dei due poli nel piano di Gauss, come indicato nella figura seguente:



Generalmente, il fattore di qualità varia tra 0 ed 1.

Una volta trovate le espressioni di Q e ω_n, troviamo le espressioni analitiche dei due corrispondenti poli, risolvendo l'equazione $\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{1}{\omega_n Q}s+1=0$:

$$s_{1/2}=-\frac{\omega_n}{2Q}\pm\omega_n\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$$

E' evidente, dalle espressioni considerate prima, che sia ω_n sia Q sono proporzionali al fattore $T_0=a_0f$, che rappresenta il guadagno d'anello dell'amplificatore a bassa frequenza:

$$Q=\frac{\sqrt{p_1p_2(T_0+1)}}{p_1+p_2}$$
$$\omega_n=\sqrt{p_1p_2(T_0+1)}$$

Di conseguenza, al variare di T_0 nell'intervallo $[0,+\infty]$, Q e ω_n variano, il che significa che cambia la posizione dei due poli s_1 ed s_2 dell'amplificatore reazionato. Muovendosi, nel piano di Gauss, al variare di T_0, i due poli definiscono il cosiddetto **luogo delle radici** dell'amplificatore base considerato.

In particolare, è facile, in questo caso, comprendere come avviene tale movimento dei poli ad anello chiuso nel piano di Gauss.

La posizione iniziale dei poli è quella che si ottiene per $T_0=0$:

$$Q=\frac{\sqrt{p_1p_2}}{p_1+p_2}$$
$$\omega_n=\sqrt{p_1p_2}$$

Sostituendo nell'espressione dei due poli in anello chiuso, si trova facilmente, come c'era da aspettarsi, che $s_1=-p_1$ e $s_2=-p_2$: in assenza di reazione, cioè appunto per $T_0=0$, i due poli sono quelli dell'amplificatore base.

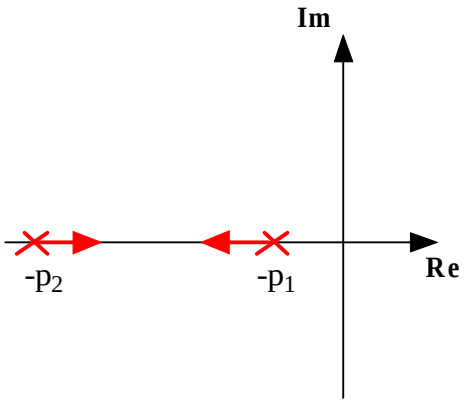
Passiamo dunque a valori di T_0 positivi. Sostituendo le espressioni di Q e ω_n nell'espressione dei due poli, si ottiene quanto segue:

$$s_{1/2}=-\frac{p_1+p_2}{2}\pm\sqrt{\frac{(p_1+p_2)^2}{4}-p_1p_2(T_0+1)}$$

La prima possibilità è che l'argomento della radice risulti positivo, cui corrispondono quindi due poli reali e distinti (*sovrasmorzamento*): l'argomento della radice è positivo per valori del guadagno statico d'anello tali che

$$T_0<\frac{(p_1+p_2)^2}{4p_1p_2}-1=\frac{(p_1-p_2)^2}{4p_1p_2}$$

In particolare, ci si accorge che, all'aumentare di T_0, l'argomento della radice diminuisce e quindi i due poli tendono ad avvicinarsi:

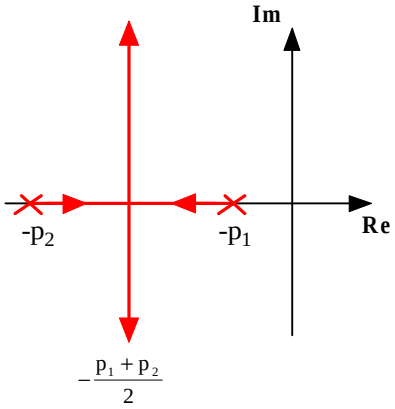


Il limite all'avvicinamento dei due poli si ha quando $T_0 = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4p_1p_2}$: in questo caso, si annulla la radice e quindi i due poli diventano reali e coincidenti (*smorzamento critico*). E' evidente che si trovano in corrispondenza del punto reale di coordinata $-\frac{p_1 + p_2}{2}$, ossia a metà tra i due poli in anello aperto.

Se T_0 aumenta oltre il valore $\frac{(p_1 - p_2)^2}{4p_1p_2}$, l'argomento della radice diventa negativo, per cui i due poli diventano complessi e coniugati (*sottosmorzamento*). In particolare, la loro parte reale rimane costante sul valore $-\frac{p_1 + p_2}{2}$, mentre il coefficiente della parte immaginaria aumenta:

$$s_{1/2} = -\frac{p_1 + p_2}{2} \pm j\sqrt{p_1p_2(T_0 + 1) - \frac{(p_1 + p_2)^2}{4}}$$

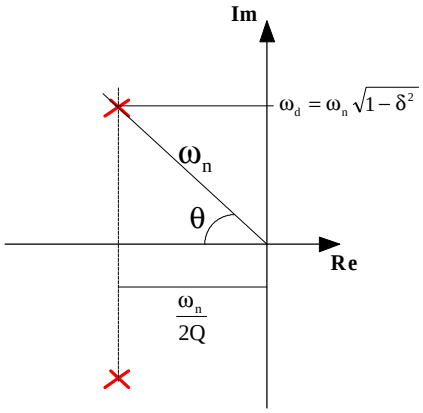
I due poli tendono dunque ad allontanarsi seguendo la retta verticale passante per $-\frac{p_1 + p_2}{2}$:



Questo è dunque il luogo delle radici dell'amplificatore considerato: la cosa più evidente che si osserva è che *i poli ad anello chiuso non passano mai nel semipiano destro, il che significa che l'amplificatore è stabile in anello chiuso per qualsiasi*

valore del guadagno d'anello a centro banda T_0, ossia, fissato a_0, per qualsiasi valore del fattore di reazione f.

A questo punto, consideriamo un generico valore di T_0 , cui corrisponde quindi una precisa posizione dei due poli in anello chiuso. Facciamo per esempio riferimento alla figura seguente:



Da semplici considerazioni geometriche si deduce che $\frac{\omega_n}{2Q} = \omega_n \cos\theta$, da cui quindi $Q = \frac{1}{2\cos\theta}$ (ed anche $\delta=\cos\theta$).

Il nostro scopo è capire come varia la funzione di risposta armonica dell'amplificatore reazionato al variare di δ (e quindi di Q).

Consideriamo, a tal fine, la funzione di trasferimento dell'amplificatore in anello chiuso così come l'abbiamo ricavata prima: la corrispondente funzione di risposta armonica ad anello chiuso è

$$A_f(j\omega) = \frac{A_{f0}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1}$$

In questa espressione abbiamo posto $\omega_0=\omega_n$ per indicare il fatto che il diagramma di Bode del modulo della funzione elementare a denominatore ha la propria frequenza di transizione ω_0 nella frequenza naturale dei due poli.

Consideriamo adesso la quantità

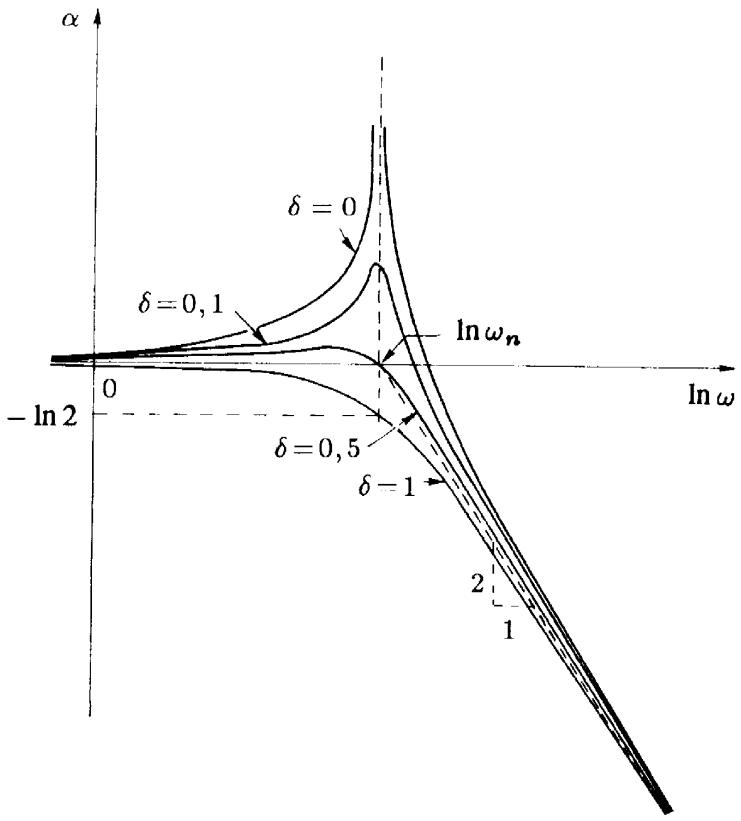
$$20\log_{10}\left|\frac{A_f(j\omega)}{A_{f0}}\right| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1}\right|$$

Si tratta del modulo, espresso in dB, del rapporto tra $A_f(j\omega)$ ed il valore che $A_f(j\omega)$ stesso assume in bassa frequenza: tale rapporto è diverso a seconda del valore di Q: in particolare, se la calcoliamo in $\omega=\omega_0$, otteniamo

$$20\log_{10}\left|\frac{A_f(j\omega_0)}{A_{f0}}\right| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\frac{1}{Q}}\right| = 20\log_{10} Q = 20\log_{10}\frac{1}{2\delta}$$

Questa espressione ci dice quanto segue: la funzione di risposta armonica $A_f(j\omega)$, calcolata nella pulsazione ω_0, è al di sopra del valore A_{f0} se δ è minore di 0.5, mentre è al di sotto se $\delta>0.5$.

Il diagramma completo della quantità $\left|\frac{A_f(j\omega)}{A_{f0}}\right|_{dB}$ al variare di ω e in funzione di δ è indicato nella figura seguente:



Quando d=0.5, ossia quando Q=1, c'è un picco poco prima della pulsazione di transizione. Per valori superiori di δ (e quindi inferiori di Q), non ci sono invece picchi, ma c'è una riduzione di banda rispetto a quando $\delta=0.5$.

Il valore che distingue la presenza o l'assenza di picchi è **δ=0.707** (che corrisponde anche a **Q=0.707**): quando $\delta<0.707$, abbiamo un picco tanto più pronunciato quanto minore è δ, mentre invece non ci sono picchi se $\delta>0.707$.

Nel caso $\delta=0$, il picco è di ampiezza infinita e corrisponde ad una oscillazione dell'amplificatore con frequenza ω_0.

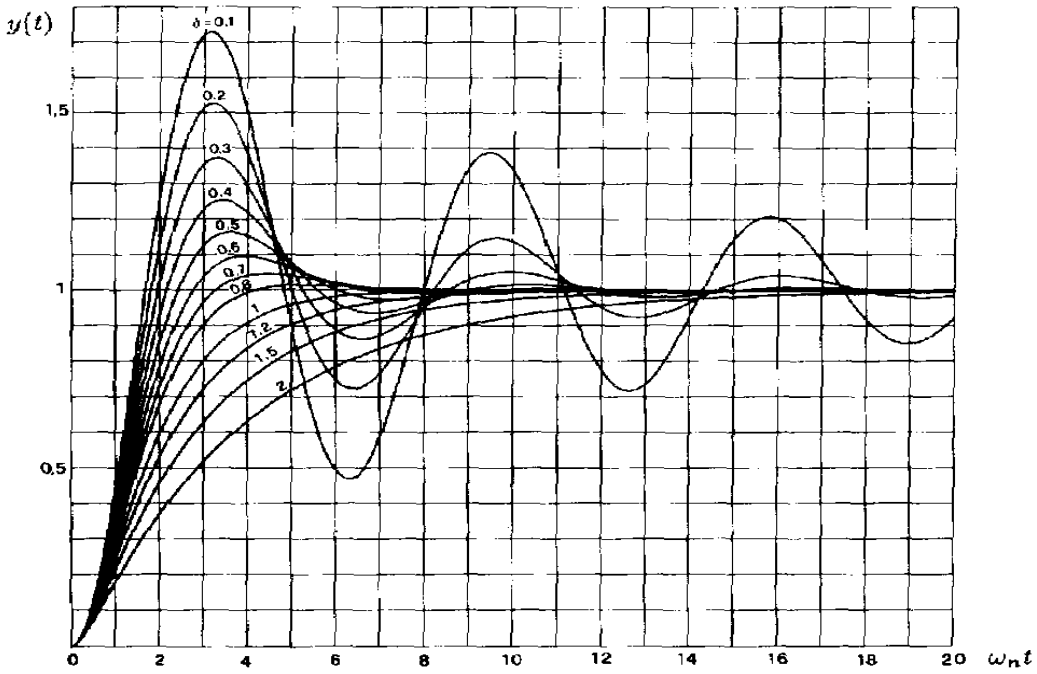
Esistono anche due formule analitiche che legano la **pulsazione di risonanza** ed il **picco di risonanza** al valore del coefficiente di smorzamento δ:

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1-2\delta^2}$$

$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

Queste formule valgono rigorosamente solo quando l’argomento $1-2\delta^2$ della radice è positivo, ossia quindi per **$\delta<0.707$**, come detto poco fa. In questa ipotesi, così come mostrato dall’ultima figura, la pulsazione di risonanza ω_R è tanto più vicina a ω_0 (ed il picco M_R è tanto più pronunciato) quanto più piccolo è il valore di δ.

A questo punto, è opportuno osservare che il valore di δ non influenza solo la risposta in frequenza dell’amplificatore, ma anche la risposta nel tempo, che infatti è a sua volta legata alla risposta in frequenza. Per evidenziare questo, supponiamo che l’amplificatore (caratterizzato sempre da due poli) riceva in ingresso un segnale a gradino (supposto di ampiezza tale che l’amplificatore continui a comportarsi in modo lineare). Senza scendere nei dettagli analitici, si può vedere che la risposta dell’amplificatore a tale ingresso varia, in funzione di δ, come indicato nella figura seguente:



Sulla base di questa risposta si definiscono alcuni fondamentali parametri, che sintetizzano le cosiddette *specifiche nel dominio del tempo*:

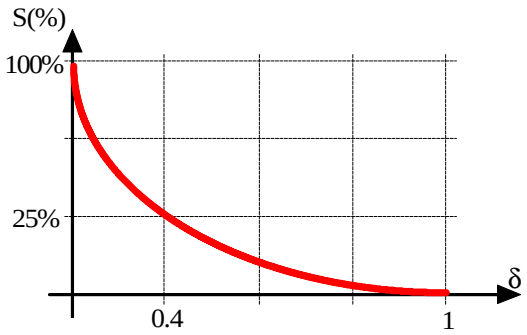
- **massima sovraelongazione S** (*overshoot*): differenza tra il valore massimo raggiunto dall’uscita ed il valore finale di regime: normalmente, questo parametro è espresso come percentuale del valore finale, per cui si parla di *massima sovraelongazione percentuale*;
- **tempo di ritardo**: tempo necessario affinché l’uscita raggiunga il 50% del valore finale;
- **tempo di salita :** (*t-rise*): tempo necessario affinché l’uscita passi dal 10% al 90% del valore finale;

- **tempo di assestamento T_a**: tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale;
- **istante di massima sovraelongazione T_m**: istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

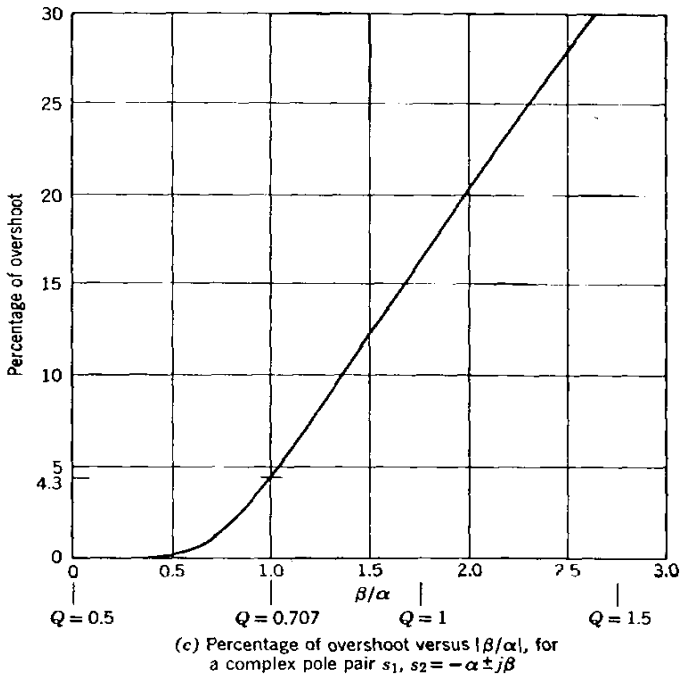
Tutti questi parametri dipendono dalla posizione dei poli del sistema nel piano complesso, ossia quindi dai valori di δ e ω_n. In particolare, si trova che la massima sovraelongazione è legata al coefficiente di smorzamento dalla seguente relazione:

$$S(\%) = e^{-\delta\frac{\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100$$

All'aumentare di δ (non oltre il valore 1, al fine di mantenere positivo l'argomento di quella radice), la sovraelongazione massima diminuisce, come indicato nella figura seguente, che interpreta graficamente la relazione appena riportata:



Riportiamo anche l'andamento di S(%) in funzione del fattore di qualità Q:

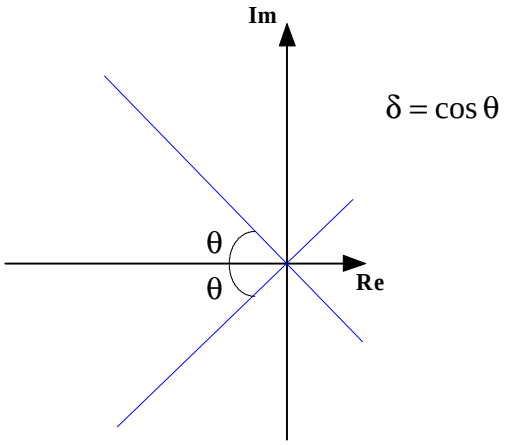


Quando δ raggiunge il valore 1, non si ha più sovraelongazione, in quanto, come si nota dalla figura precedentemente riportata, la risposta non presenta più

oscillazione, ma è quella tipica di un sistema del primo ordine, cioè esponenziale crescente fino al valore di regime: il motivo è che i due poli sono a questo punto entrambi reali, per cui danno appunto luogo a due modi esponenziali smorzati.

Abbiamo pertanto dimostrato, con riferimento ad un sistema del secondo ordine, che *gli overshoot e i picchi nella risposta in frequenza sono dovuti ai poli complessi e coniugati della funzione di trasferimento in anello chiuso, i quali, a loro volta, sono completamente determinati dal coefficiente di smorzamento d (o, ciò che è lo stesso, dal fattore di qualità Q).* Pertanto, per imporre una condizione di risposta accettabile si deve imporre che ogni coppia di poli complessi e coniugati in anello chiuso presenti un ben preciso valore del coefficiente di smorzamento (o, in modo equivalente, un ben preciso valore del fattore di qualità).

Graficamente, questo corrisponde a tarare il luogo delle radici in modo che i poli si trovino all’interno della regione, nel semipiano sinistro di Gauss, limitata dalle rette la cui inclinazione (rispetto all’asse reale negativo) è imposta dal coefficiente di smorzamento ($\delta=\cos\theta$, dove θ è l’inclinazione delle suddette rette):



Evidenziamo ora una cosa importante: in base a quanto appena visto, è evidente che *tanto minore è il valore di Q (cioè tanto maggiore è d), tanto più stabile è il sistema;* tuttavia, queste specifiche vanno in contrasto con le specifiche sulle prestazioni ed in particolare un valore troppo basso di Q può comportare un restringimento eccessivo della banda dell’amplificatore. Quindi, se si può tollerare un picco poco accentuato nella risposta in frequenza, poiché si è interessati ad un amplificatore veloce, allora si può arrivare fino a Q=1, mentre, se è necessaria un alta fedeltà, è necessario garantire una banda piatta, anche se più stretta, e quindi un valore più basso di Q.

Reazione negativa e criterio di stabilità di Nyquist

Criterio di Nyquist

Passiamo ora all'*analisi di stabilità nel dominio della frequenza*: si usano, in questo caso, i diagrammi di Nyquist e i diagrammi di Bode. L'uso di tali diagrammi si rende necessario qualora non ci conoscano direttamente le singolarità dell'amplificatore considerato.

Consideriamo dunque un amplificatore avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$a(s) = \frac{k}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

Il sistema ha costante di guadagno k (da non confondere con il guadagno statico a_0) e tre poli, rispettivamente in $-p_1$, $-p_2$ e $-p_3$. Facciamo l'ipotesi che questo sistema sia stabile, per cui tali tre poli hanno tutti parte reale negativa, e facciamo inoltre l'ipotesi che si tratti di *poli reali (come accade in tutti gli stadi elementari e nelle cascate di stadi elementari)*, per cui le pulsazioni corrispondenti sono $\omega_{B1} = p_1$, $\omega_{B2} = p_2$ e $\omega_{B3} = p_3$.

Anche in questo caso, come nel paragrafo precedente, supponiamo di chiudere questo sistema in un anello di reazione negativa: il nostro obbiettivo è quello di indagare gli effetti che l'anello di reazione esercita sulla funzione di risposta armonica ad anello chiuso e quindi anche sulla stabilità del sistema ad anello chiuso.

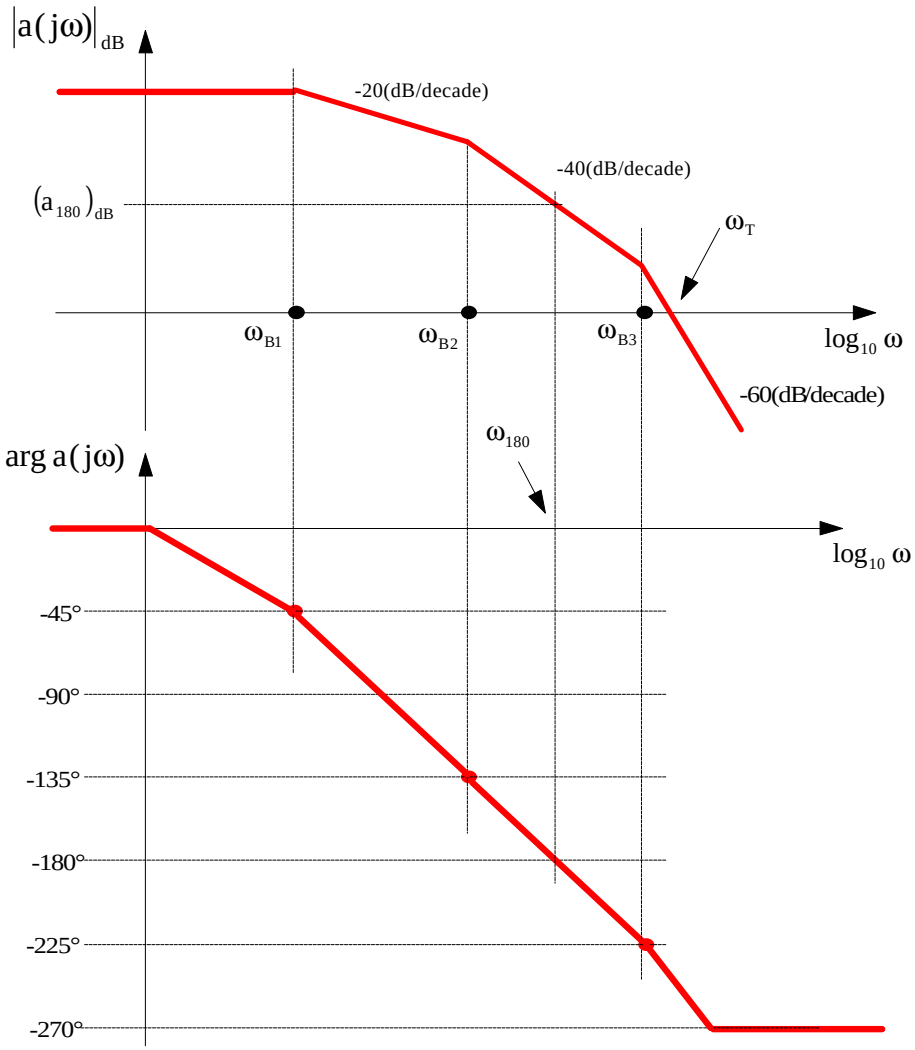
Per prima cosa, determiniamo la funzione di risposta armonica del sistema in anello aperto: con semplici passaggi si arriva all'espressione

$$a(j\omega) = \frac{a_0}{\left(1+j\frac{\omega}{p_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{p_2}\right)\left(1+j\frac{\omega}{p_3}\right)}$$

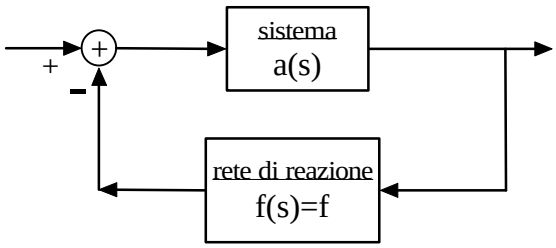
dove $a_0 = \frac{k}{p_1 p_2 p_3}$ è il guadagno statico ad anello aperto.

Tracciamo, nella prossima figura, i diagrammi di Bode (asintotici) del modulo e della fase di questa funzione, ipotizzando circa un fattore 10 (cioè una decade) di separazione tra le frequenze corrispondenti ai tre poli.

Ai fini di quello che diremo in seguito, ci interessa segnalare, in questi diagrammi, la pulsazione $\boldsymbol{\omega_{180}}$ alla quale a(jω) presenta una fase di -180° e il valore $\boldsymbol{a_{180}}$ che $|a(j\omega)|$ assume in tale pulsazione. Entrambe queste grandezze sono indicate in figura.



A questo punto, supponiamo di chiudere il sistema in un anello di retroazione in cui la funzione di trasferimento della rete di reazione sia puramente algebrica del tipo $f(s)=f$:



Il **guadagno d'anello** assume dunque l'espressione $\boxed{T(s)=f(s)a(s)=fa(s)}$, per cui la **funzione di trasferimento ad anello chiuso** assume l'espressione

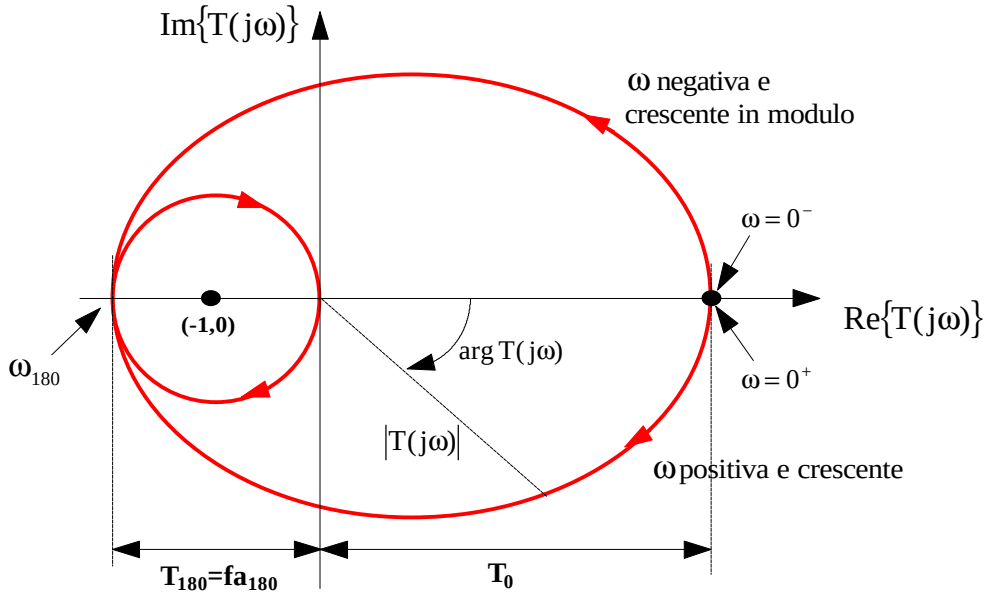
$$A_f(s)=\frac{a(s)}{1+T(s)}=\frac{a(s)}{1+fa(s)}$$

cui corrisponde quindi una **funzione di risposta armonica ad anello chiuso** avente espressione

$$A_f(j\omega) = \frac{a(j\omega)}{1 + fa(j\omega)}$$

Dato che f è costante, è evidente che il guadagno d'anello $T(j\omega)=f\cdot a(j\omega)$ ha lo stesso andamento con la frequenza di $a(j\omega)$: il modulo aumenta semplicemente di un fattore f (che sul diagramma logaritmico diventa un termine $20\log_{10} f$ da sommare al diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$), mentre la fase rimane inalterata (essendo f>0).

Avendo a disposizione i *diagrammi di Bode* di T(jω), è possibile ricavare anche il *diagramma polare* di T(jω), ossia la rappresentazione di T(jω) in termini di parte reale e parte immaginaria al variare di ω. Nel caso che stiamo considerando di un amplificatore a 3 poli distinti, il diagramma polare di T(jω) è del tipo indicato nella figura seguente (non in scala):



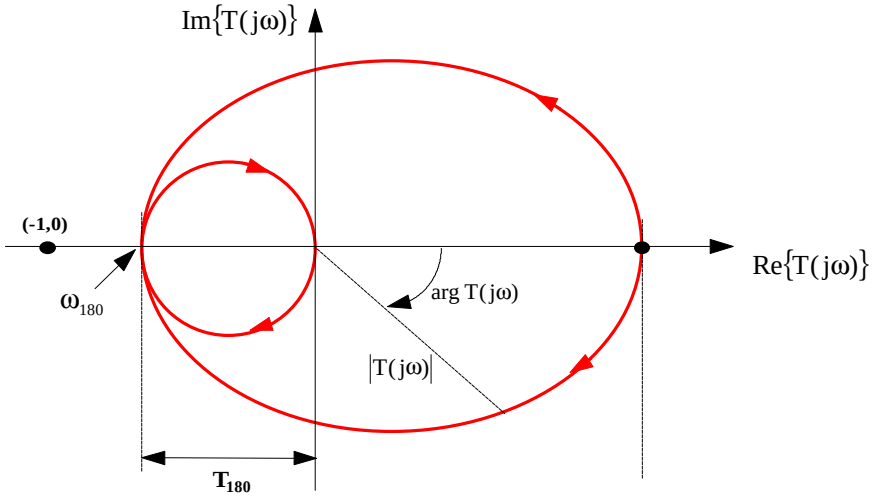
In questo diagramma è interessante notare tre cose:

- la prima è che, in corrispondenza di ω=0, la funzione T(jω) assume il proprio valore statico, che vale evidentemente $T_0 = fa(j0) = fa_0$ (**guadagno statico d'anello**);
- la seconda è che, invece, in corrispondenza di $\omega=\omega_{180}$, dato che a(jω) assume il valore indicato con a_{180} (corrispondente a quando a(jω) ha fase di -180°), il guadagno d'anello assume il valore $T_{180} = fa_{180}$.
- infine, si osserva che, per $\omega\to\infty$, dato che $|a(j\omega)| \to 0$ e $\arg a(j\omega) \to -270°$, risulta anche $|T(j\omega)| \to 0$ e $\arg T(j\omega) \to -270°$, ossia il diagramma tende asintoticamente all'origine ed è tangente all'asse immaginario.

Ai fini di studiare la stabilità del sistema in anello chiuso, possiamo applicare il *criterio di stabilità di Nyquist*; in particolare, applichiamo il **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta**, in quanto stiamo supponendo che il sistema sia stabile in anello aperto, ossia che la funzione a(s) non abbia poli a parte reale positiva: in base a questo criterio, *il sistema è stabile in anello chiuso se e solo se il diagramma polare di T(jw) non circonda il* ***punto critico*** *s=-1+j0*.

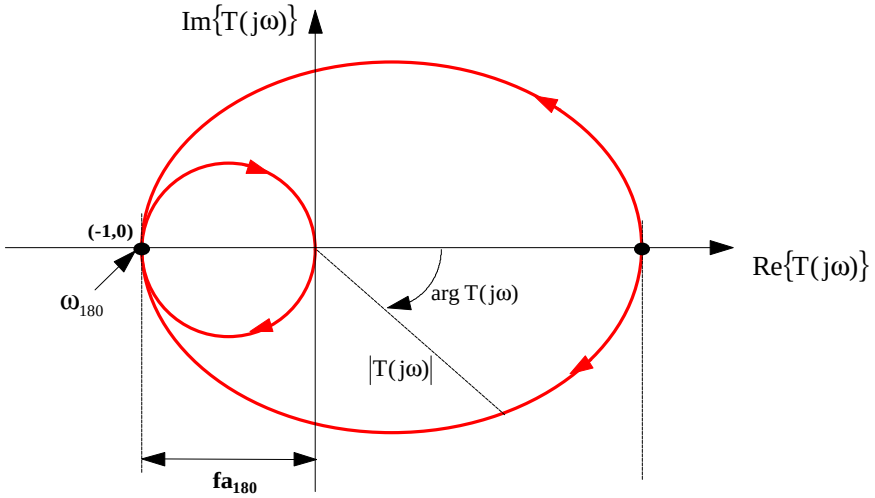
E' allora chiaro, dalla figura, che il sistema in esame non è stabile in anello chiuso, in quanto il diagramma circonda il punto critico. Questo avviene, in particolare, perché la quantità $T_{180} = |T(j\omega_{180})| = f|a(j\omega_{180})| = fa_{180}$ risulta maggiore di 1.

Avremmo invece un sistema stabile in anello chiuso se la posizione del diagramma polare di T(jω) rispetto al punto critico fosse stata quella indicata nella figura seguente:



In questo caso, risulta evidentemente $T_{180} = |T(j\omega_{180})| < 1$, per cui il diagramma polare non circonda il punto critico e quindi il sistema è stabile in anello chiuso così come lo è, per ipotesi, in anello aperto.

Diventa quindi importante la posizione relativa del diagramma polare di T(jw) rispetto al punto critico -1. Per capire il significato di questo punto, basta supporre che il diagramma polare di T(jω) passi esattamente per esso, come indicato nella figura seguente:

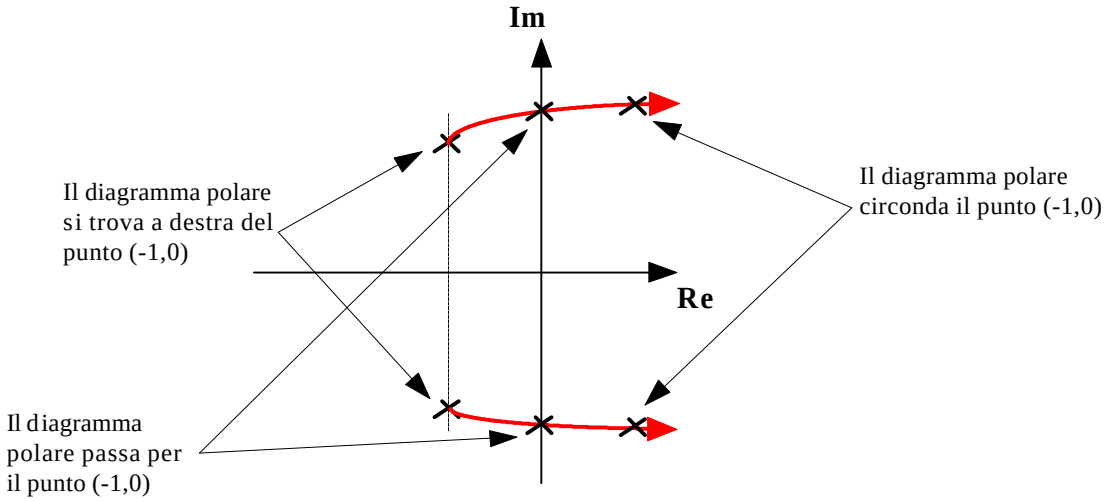


In questa situazione, alla frequenza $\omega=\omega_{180}$ il guadagno d'anello assume il valore $T(j\omega_{180})=-1+j0$, per cui la funzione di risposta armonica ad anello chiuso diventa

$$A_f(j\omega_{180})=\frac{a(j\omega_{180})}{1+T(j\omega_{180})}=\frac{a(j\omega_{180})}{1+(-1)}=\infty$$

Avere $A_f(j\omega_{180})=\infty$ *significa che il sistema ad anello chiuso ha un guadagno infinito alla pulsazione* w_{180}*, il che indica l'inizio della instabilità e quindi dell'oscillazione a tale pulsazione.* Questa situazione, con riferimento al luogo delle radici del sistema considerato, corrisponde a dire che la funzione di trasferimento $A_f(s)$ presenta dei poli sull'asse immaginario.

Se, a partire da questa situazione (ossia quella in cui $T(j\omega_{180})=-1+j0$), si decide di aumentare il guadagno statico d'anello T_0 aumentando $a_0=a(j0)$ oppure f, il diagramma polare di $T(j\omega)$ si espande linearmente e passa a circondare il punto critico; in questa situazione, i poli di $A_f(s)$ sono passati nel semipiano destro, come indicato nella figura seguente:



A questo punto, possiamo anche esporre il **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta** in un'<u>altra forma</u>: diremo infatti che *il sistema risulta stabile ad anello chiuso se e solo se risulta* $|T(j\omega)|<1$ *alla frequenza* $w=w_{180}$ *in corrispondenza della quale* $\arg T(j\omega)-180°$.

Si definisce **margine di ampiezza** (o anche *margine di guadagno*) la quantità

$$mg[dB]=20\log_{10}\frac{1}{|T(j\omega_{180})|}$$

Il criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta si può allora anche esprimere dicendo che *il sistema ad anello chiuso risulta stabile se e solo se il margine di guadagno risulta* <u>*maggiore di 0 dB*</u>.

Posta la questione in questo modo, abbiamo la possibilità di capire se il sistema è stabile ad anello chiuso direttamente osservando i diagrammi di Bode di T(jω): individuata la pulsazione ω_{180} in corrispondenza della quale T(jω) ha fase di -180°, andiamo a leggere sul diagramma dei moduli il valore di $|T(j\omega_{180})|_{dB}$ e, se tale valore è minore di 0dB, possiamo dedurre che il sistema è stabile ad anello chiuso; in caso risulti invece $|T(j\omega_{180})|_{dB} > 0$, possiamo affermare che il sistema è instabile ad anello chiuso.

In alternativa, è possibile fare anche il ragionamento inverso: sul diagramma di $|T(j\omega)|_{dB}$ si individua la cosiddetta **pulsazione di crossover** ω_0 (detta anche *pulsazione di transizione*), ossia la pulsazione in corrispondenza della quale il diagramma interseca l'asse orizzontale, ossia in corrispondenza della quale risulta $|T(j\omega)|_{dB} = 0$ e quindi $|T(j\omega)| = 1$; in corrispondenza di questa pulsazione ω_0, si legge sul diagramma delle fasi il valore della fase di T(jω): il **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta** si può allora esprimere dicendo che *il sistema ad anello chiuso risulta stabile se e solo se risulta* $\arg T(j\omega_0) > -180°$.

Si definisce, a questo proposito, **margine di fase** del sistema considerato la differenza tra $\arg T(j\omega_0)$ e -180°:

$$\boxed{mf = \arg T(j\omega_0) - (-180°) = \arg T(j\omega_0) + 180°}$$

E' evidente che *il sistema ad anello chiuso risulta stabile se e solo se risulta*

$$\boxed{mf > 0°}$$

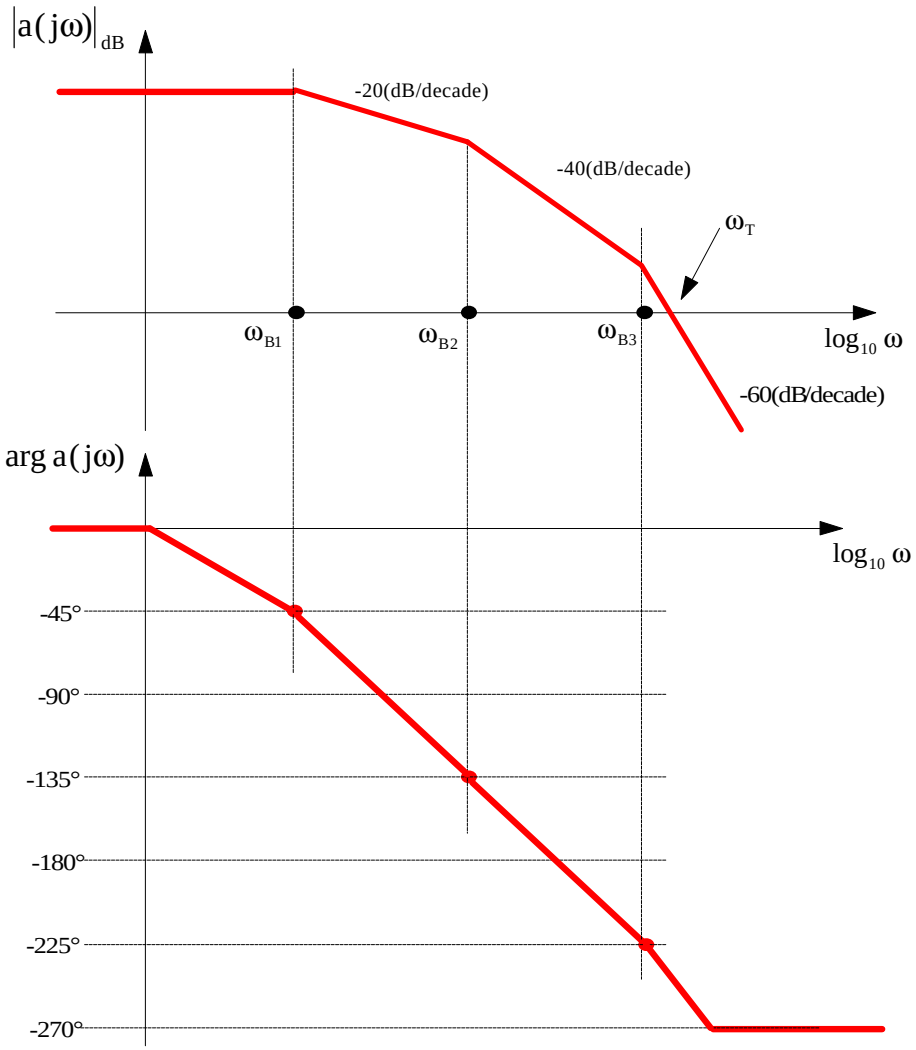
Solitamente, anziché considerare il margine di ampiezza, si fa riferimento proprio al margine di fase e lo stesso noi faremo quindi nei discorsi che seguono.

Questi studi di stabilità ad anello chiuso sono stati dunque condotti sui diagrammi di Bode di T(jω): possiamo in realtà fare anche qualcosa in più, nel senso che possiamo ragionare non sui diagrammi di Bode di T(jω), bensì su quelli di a(jω), che sono quelli generalmente a nostra disposizione (in quanto provengono, per esempio, da opportune misure sperimentali). Vediamo allora come si procede.

Consideriamo nuovamente un sistema a 3 poli caratterizzato da una funzione di risposta armonica ad anello aperto nella forma

$$a(j\omega) = \frac{a_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{p_2}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{p_3}\right)}$$

Riportiamo nuovamente i diagrammi di Bode di questa funzione:



Supponiamo di inserire il sistema in un anello di retroazione negativa con $f(s)=f=cost$. Basta fare alcuni semplici passaggi analitici per rendersi conto di come sia possibile ricavare graficamente il diagramma dei moduli di T(jω) noto che sia quello dei moduli di a(jω): infatti, possiamo scrivere che

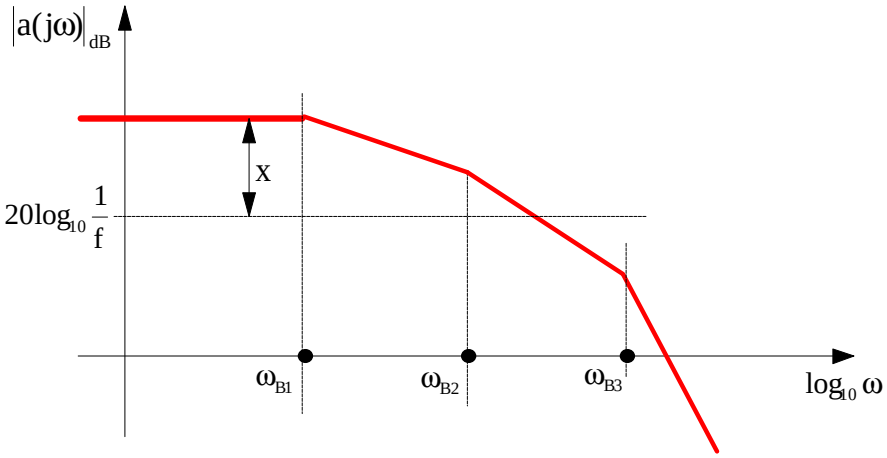
$$|a(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{f}{f}|a(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{|fa(j\omega)|}{f} = 20\log_{10}|fa(j\omega)| - 20\log_{10} f =$$
$$= 20\log_{10}|T(j\omega)| - 20\log_{10} f = |T(j\omega)|_{dB} - 20\log_{10} f$$

Da qui ricaviamo che

$$\boxed{|T(j\omega)|_{dB} = |a(j\omega)|_{dB} - 20\log_{10}\frac{1}{f}}$$

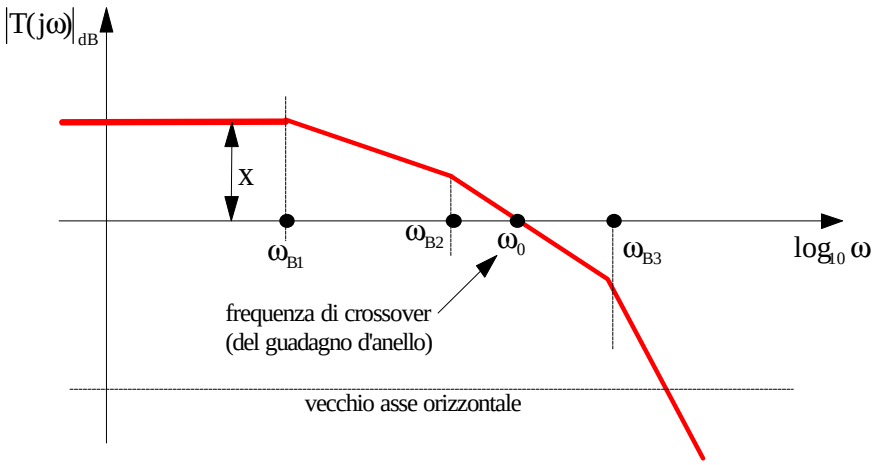
Questa relazione dice che il diagramma dei moduli di T(jω) si ottiene da quello dei moduli di a(jω) semplicemente sottraendo la quantità costante (con ω) $20\log_{10}\frac{1}{f}$, ossia traslando verso il basso di tale quantità il diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$.

Graficamente, questo significa che, se riportiamo sul diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$ la retta orizzontale corrispondente a $20\log_{10}\frac{1}{f}$, la differenza tra $|a(j\omega)|_{dB}$ e tale retta fornisce il diagramma di $|T(j\omega)|_{dB}$:



Quindi, la distanza indicata in figura con **x** rappresenta una misura diretta di $|T(j\omega)|_{dB}$ alla frequenza considerata.

Detto ancora in altre parole, il diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$ può essere interpretato come il diagramma di $|T(j\omega)|_{dB}$ a patto di considerare come nuovo asse delle ascisse la retta corrispondente a $20\log_{10}\frac{1}{f}$:

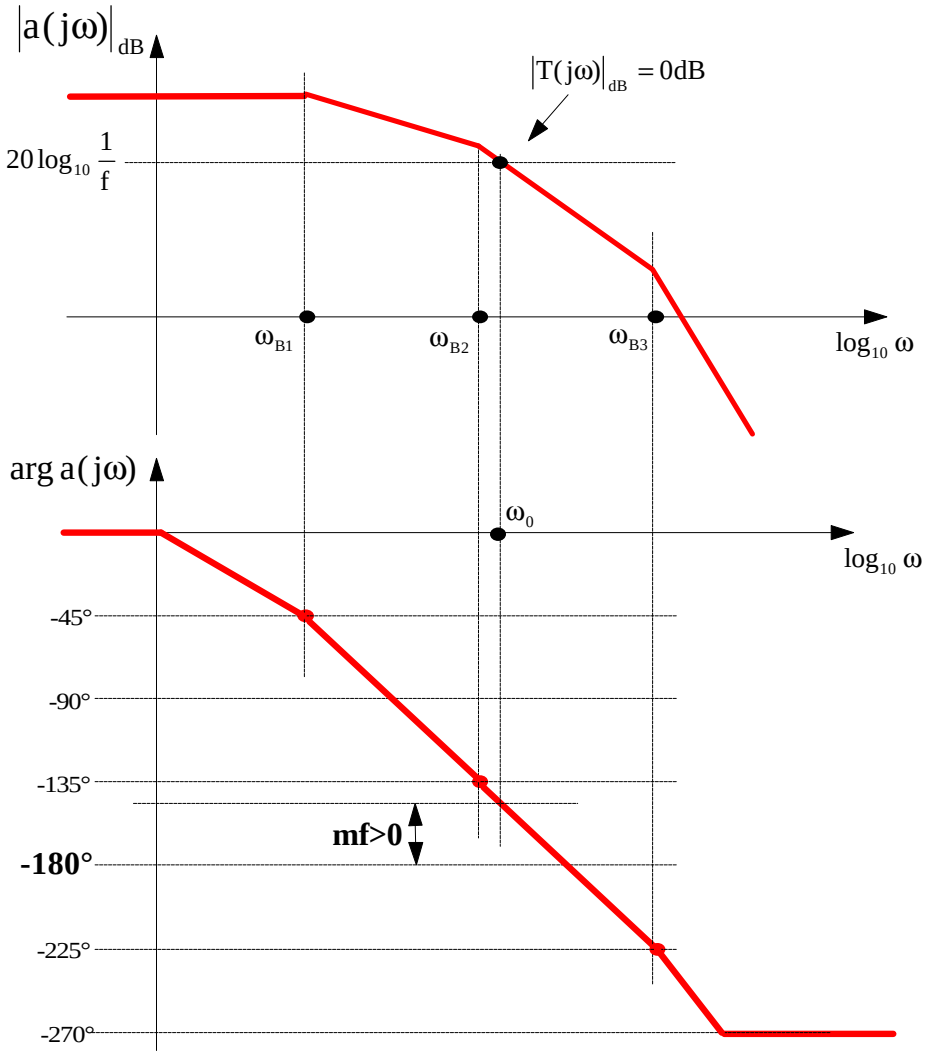


Per quanto riguarda il diagramma delle fasi di T(jw), è evidente che coincide con quello di a(jw): abbiamo infatti che

$$\arg T(j\omega) = \arg\left(fa(j\omega)\right) = \arg\left(\mathrm{Re}\{fa(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{fa(j\omega)\}\right) = \arg\left(f\,\mathrm{Re}\{a(j\omega)\} + jf\,\mathrm{Im}\{a(j\omega)\}\right) =$$
$$= \mathrm{arctg}\frac{f\,\mathrm{Im}\{a(j\omega)\}}{f\,\mathrm{Re}\{a(j\omega)\}} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\{a(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{a(j\omega)\}} = \arg a(j\omega)$$

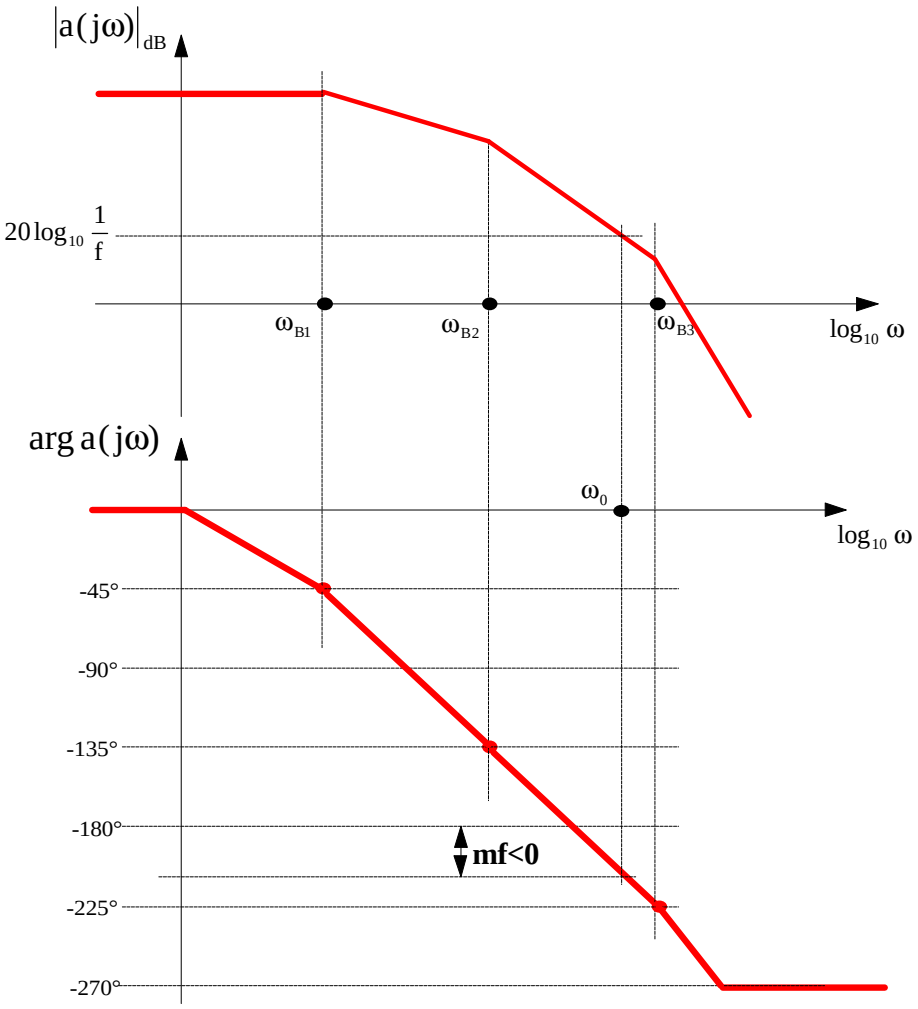
Accertato questo, vediamo di capire come possiamo identificare il margine di fase del sistema considerato facendo riferimento direttamente ai diagrammi di Bode di a(jω).

A tal fine, riportiamo ancora una volta tali diagrammi per il sistema a 3 poli che stiamo considerando:



Per definizione di margine di fase, dobbiamo per prima cosa individuare la pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale T(jω) ha modulo unitario: in base ai discorsi fatti in precedenza, è evidente che si tratta della pulsazione corrispondente al punto in cui il diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$ interseca la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}$. Una volta individuata tale pulsazione, dobbiamo calcolare la corrispondente fase di T(jω), che è uguale alla fase di a(jω): possiamo dunque leggere $\arg T(j\omega_0)$ come semplicemente $\arg a(j\omega_0)$, ossia sul diagramma delle fasi di a(jω). Applicando infine la definizione, abbiamo che il margine di fase vale $mf = \arg T(j\omega_0) + 180°$ e deve essere positivo affinché il sistema risulti stabile in anello chiuso: nel caso indicato in figura, risulta effettivamente mf>0, per cui il sistema è stabile in anello chiuso.

Ovviamente, questa conclusione vale per il valore di f scelto. E' chiaro che la situazione cambia se si ha quanto indicato nella figura seguente:



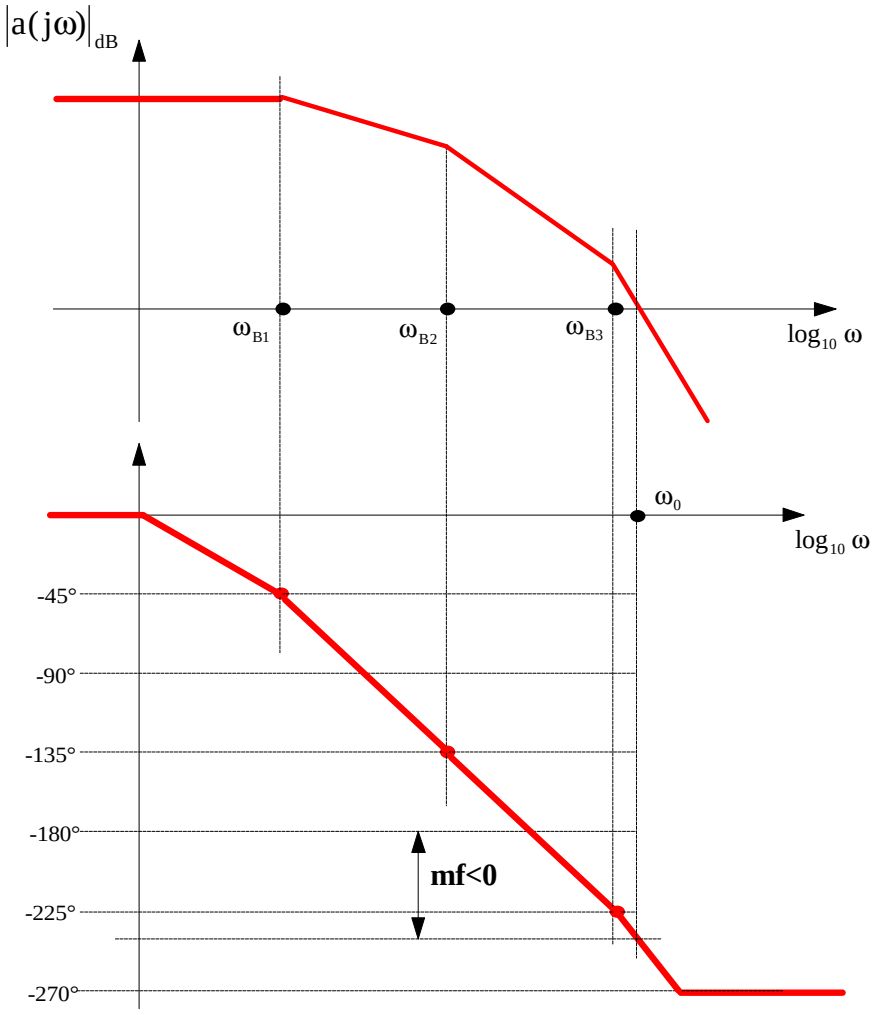
Abbiamo scelto un valore di f più alto rispetto a prima: seguendo allora lo stesso procedimento di prima, si osserva che $mf \cong -30° < 0$, in quanto a(jω) (e quindi anche T(jω)) ha già raggiunto una fase inferiore a -180° quando T(jω) ha modulo unitario.

In definitiva, quindi, *non solo abbiamo trovato come si individua il margine di fase sui diagrammi di Bode di a(jw), ma abbiamo anche trovato un criterio di progetto dell'anello di reazione basato su tali diagrammi:* abbiamo infatti capito come posizionare la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}$ (ossia quindi come scegliere f) in modo da ottenere un margine di fase positivo, ossia un sistema stabile ad anello chiuso.

A questo punto, è anche evidente un'altra cosa: infatti, mentre abbiamo appena visto che, noto il diagramma di Bode del modulo di a(jω), è possibile ricavare quello del modulo di T(jω)=fa(iω) semplicemente mandando la retta orizzontale per $20\log_{10}\frac{1}{f}$ e considerando tale retta come nuovo asse orizzontale, nel caso in cui la retroazione sia unitaria (f=1) risulta T(jω)=a(jω), per cui tutti i ragionamenti si semplificano, in quanto possono essere condotti direttamente su a(jω), che risulta perfettamente uguale al guadagno d'anello T(jω).

Per individuare il margine di fase, quindi, basta individuare direttamente la pulsazione in cui $|a(j\omega)| = 1$ e valutare, in corrispondenza di essa, la fase di a(jω).

Consideriamo, per esempio, la stessa funzione a(jω) considerata poco fa:



Se scegliamo una retroazione unitaria, la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}$ coincide con l'asse delle ascisse e quindi la pulsazione di transizione ω_T di $|a(j\omega)|$ coincide con la pulsazione di transizione ω_0 di $|T(j\omega)|$: in corrispondenza della pulsazione ω_0 in cui $|a(j\omega)| = 1$, si osserva che $\arg a(j\omega) \cong -240°$, cui corrisponde un margine di fase $mf \cong -60°$, ossia un sistema molto instabile in anello chiuso.

Significato del margine di fase in termini di risposta in frequenza

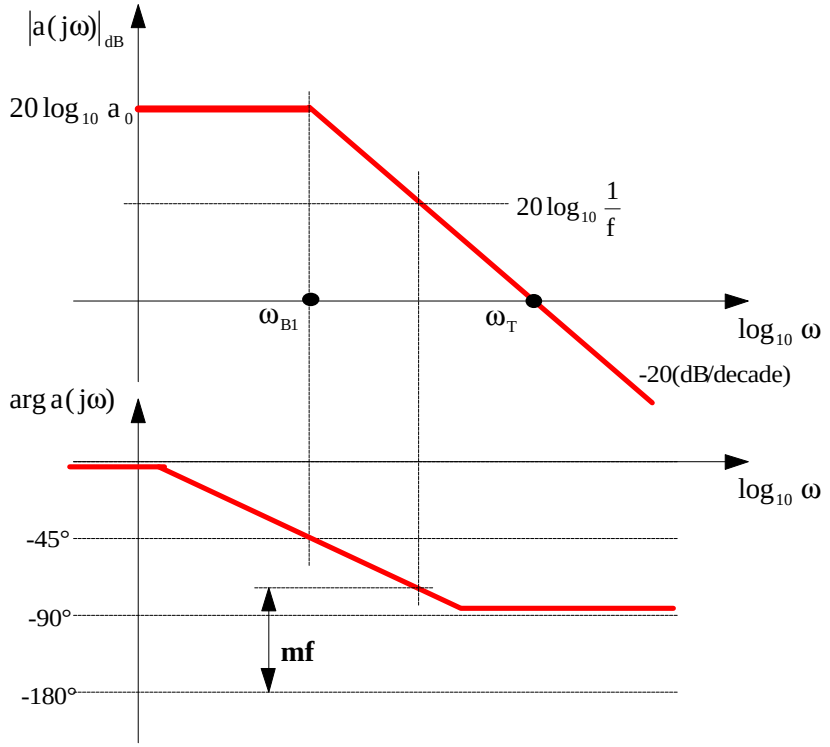
Cerchiamo adesso di interpretare in altro modo il significato del valore del margine di fase. Consideriamo, perciò, nuovamente un sistema ad un solo polo (reale negativo) avente la seguente funzione di trasferimento:

$$a(s)=\frac{k}{s+p_1}$$

Poniamo s=jω per ottenere la corrispondente funzione di risposta armonica: con semplici passaggi algebrici, sappiamo di poter porre questa funzione nella forma

$$a(j\omega)=\frac{a_0}{1+j\frac{\omega}{p_1}}$$

I corrispondenti diagrammi di Bode (asintotici) sono fatti nel modo seguente:



Fissato un qualsiasi valore di f, si osserva che *il margine di fase è maggiore o tutt'al più uguale a 90°, per cui il sistema ad anello chiuso è molto stabile comunque venga scelta la rete di reazione*. Nella pratica, in effetti, si accettano valori del margine di fase compresi tra 45° e 60°. Vogliamo allora capire in cosa si traduce, per quanto riguarda la funzione di risposta armonica ad anello chiuso, un diverso valore del margine di fase.

Consideriamo, per esempio, un sistema (di ordine generico) in anello chiuso avente un margine di fase di 45° e un fattore di reazione f reale (e perciò costante): per definizione di margine di fase, sappiamo che $mf=\arg T(j\omega_0)+180°=\arg a(j\omega_0)+180°$, per cui deduciamo che il guadagno d'anello, in corrispondenza della pulsazione di crossover ω_0, ha fase $\arg T(j\omega_0)=mf-180°=-135°$.

Valutiamo allora la funzione di risposta armonica in anello chiuso in corrispondenza di questa pulsazione: ricordando che $|T(j\omega_0)|=1$ per definizione di ω_0, abbiamo che

$$A_f(j\omega_0)=\frac{a(j\omega_0)}{1+T(j\omega_0)}=\frac{a(j\omega_0)}{1+e^{-j135°}}=\frac{a(j\omega_0)}{1+(-0.7-j0.7)}=\frac{a(j\omega_0)}{0.3-j0.7}$$

Ci interessa in particolare il modulo di questa funzione:

$$|A_f(j\omega_0)|=\frac{|a(j\omega_0)|}{|0.3-j0.7|}=1.3|a(j\omega_0)|$$

D'altra parte, è facile rendersi conto che la condizione $|T(j\omega_0)|=1$ implica che $|a(j\omega_0)|=\frac{1}{f}$: possiamo dunque scrivere che

$$|A_f(j\omega_0)|=\frac{1.3}{f}$$

Ma *la quantità 1/f rappresenta il valore di $A_f(jw)$ quando* $|T(j\omega)|$ *è molto elevato, ossia* $A_{f0}=\frac{1}{f}$: possiamo allora concludere che

$$mf=45°\longrightarrow|A_f(j\omega_0)|=1.3A_{f0}$$

Questa relazione mostra che, in corrispondenza della pulsazione ω_0 in cui $T(j\omega)$ ha modulo unitario, $|A_f(j\omega)|$ presenta un picco al di sopra del valore A_{f0} assunto in bassa frequenza: in scala logaritmica, il picco, rispetto al valore in bassa frequenza, è di +2.4dB.

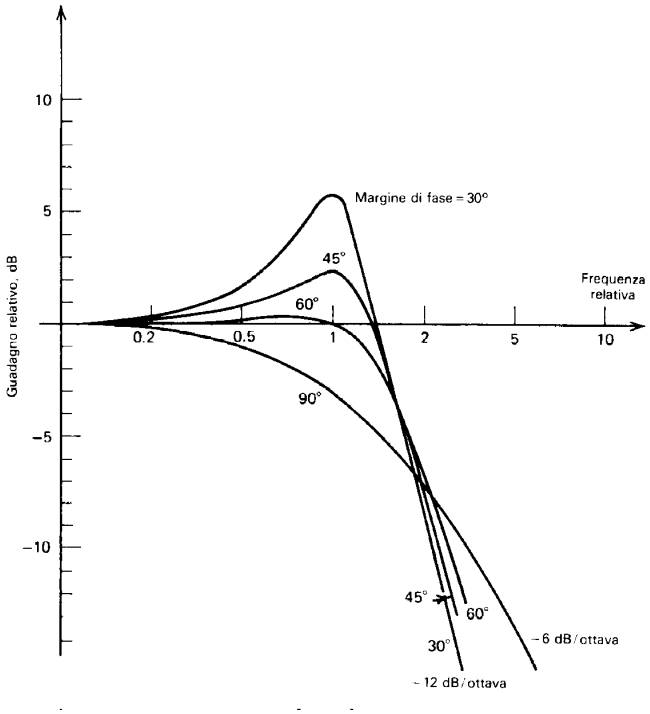
Con un procedimento del tutto analogo, si trovano questi altri due risultati:

$$mf=60°\longrightarrow|A_f(j\omega_0)|=\frac{1}{f}=A_{f0}$$

$$mf=90°\longrightarrow|A_f(j\omega_0)|=\frac{0.7}{f}=0.7A_{f0}$$

Per mf=60°, $|A_f(j\omega)|$ non presenta alcun picco in ω_0, mentre, per mf=90°, $|A_f(j\omega_0)|$ si trova al di sotto di A_{f0}.

Tutti questi risultati sono riportati nella figura seguente, dove in ascisse viene riportata la quantità $\log_{10}\frac{\omega}{\omega_0}$ (ossia viene effettuata una *normalizzazione rispetto a w₀*), mentre in ordinate viene riportata la quantità $20\log_{10}\left|\frac{A_f(j\omega)}{A_{f0}}\right|$ (ossia viene effettuata una *normalizzazione rispetto a A_{f0}*):



Queste curve sono tracciate nell'ipotesi che la funzione di risposta armonica del sistema in esame sia dominata dai primi due poli della funzione di trasferimento, eccetto che per il caso del margine di fase di 90°, che ha un solo polo.

Come trovato prima nei calcoli, al diminuire del margine di fase il picco di $|A_f(j\omega)|$ diviene sempre più grande, fino a che $|A_f(j\omega)|$ si avvicina ad essere infinito: per un margine di fase di 0°, si ottiene l'oscillazione.

E' inoltre interessante notare che il picco di $|A_f(j\omega)|$ si verifica solitamente in prossimità della frequenza di crossover ω_0, tranne che nel caso di margine di fase di 60°, per il quale c'è un picco di 0.2dB appena al di sotto di ω_0.

Si nota infine che, per margini di fase diversi da 90°, dopo il picco le curve tendono ad un asintoto di -12dB/ottava: questo si verifica in quanto $|a(j\omega)|_{dB}$ scende con la pendenza di -12 dB/ottava (o anche -40dB/decade) a causa della presenza di due poli nella funzione di trasferimento.

In conclusione, la condizione di risposta accettabile può essere imposta nel dominio della frequenza fissando il valore del margine di fase: *quanto maggiore è il margine di fase, tanto più contenuti saranno gli overshoot e i picchi nella risposta in frequenza.*

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry