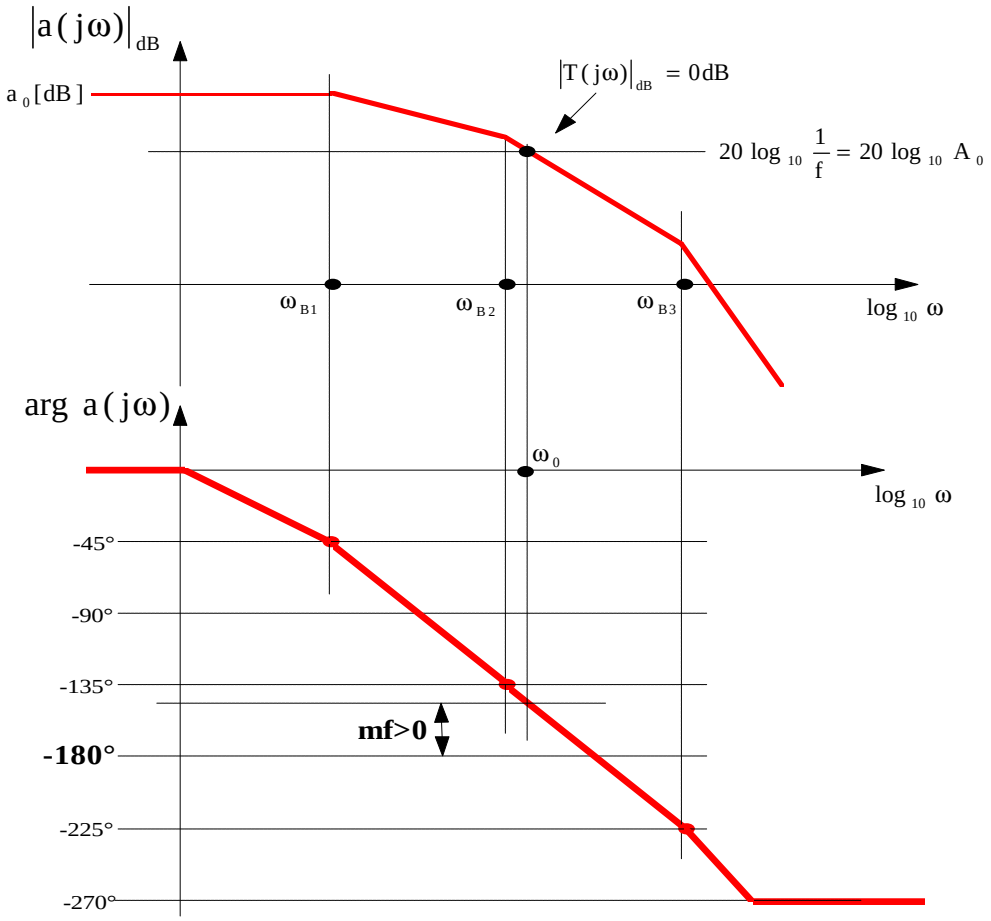
Appunti di Elettronica Applicata

Capitolo 18 - La compensazione

Teoria della compensazione 1
Compensazione per introduzione di un polo dominante 3
Esempio numerico *6*
Osservazione *7*
Compensazione tramite modifica del polo dominante 9
Esempio numerico *11*
Esempio numerico *12*
Metodi di compensazione 17
Compensazione per effetto Miller *19*
Tecniche del luogo delle radici 23
Richiami sul luogo delle radici 23
Luogo delle radici per una funzione di trasferimento a 3 poli 25
Regole per la costruzione del luogo delle radici 29
Esempio di taratura di un luogo delle radici *31*
Luogo delle radici per la compensazione a polo dominante 32
Esempio numerico *34*
compensazione con uno zero nel cammino di reazione 34

TEORIA DELLA COMPENSAZIONE

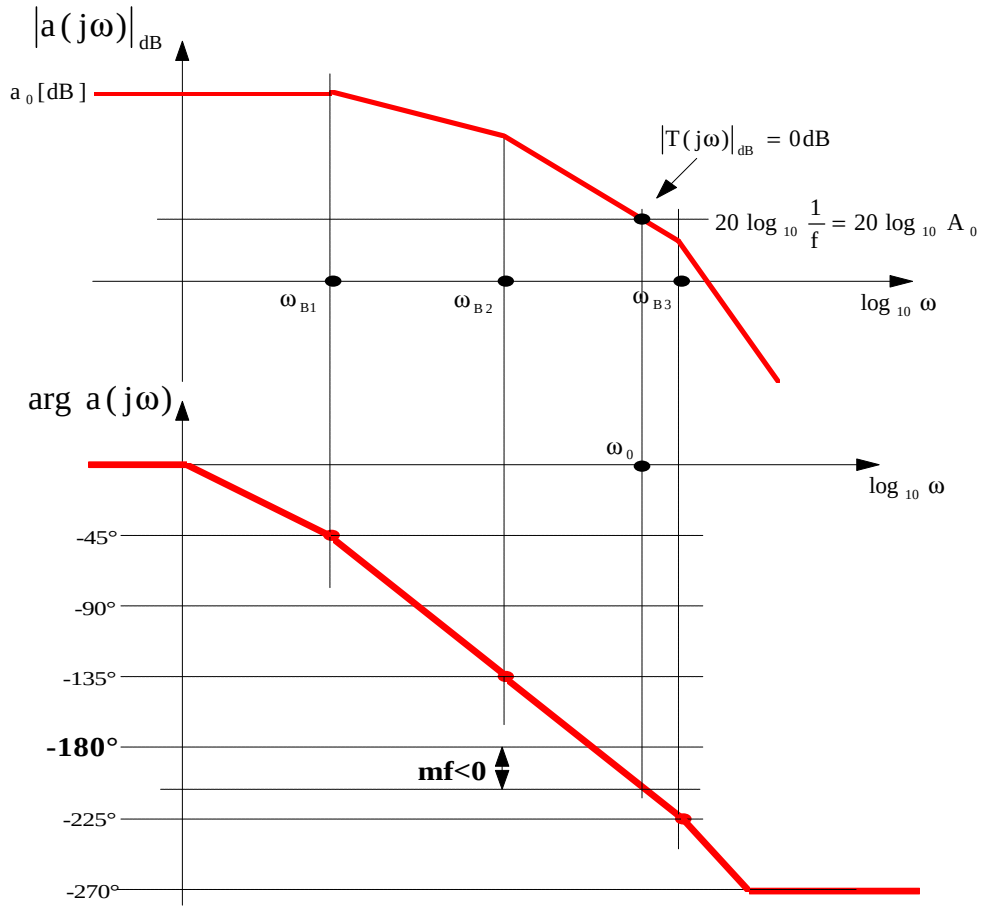
Consideriamo un amplificatore avente guadagno a(jω) in anello aperto. Supponiamo che tale amplificatore sta stabile in anello aperto e supponiamo inoltre che i diagrammi di Bode del modulo e della fase di a(jω) siano quelli riportati nella figura seguente:



Supponiamo di chiudere l'amplificatore in un anello di reazione negativa caratterizzato da un fattore di reazione f costante. Mandando, sul diagramma dei moduli di a(jω), la retta orizzontale per $20\log_{10}\frac{1}{f}$, sappiamo di poter studiare la stabilità dell'amplificatore ad anello chiuso mediante una valutazione del margine di fase $\boxed{mf = 180° + \arg T(j\omega_0) = 180° + \arg a(j\omega_0)}$, dove ω_0 è la pulsazione in corrispondenza della quale la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}$ interseca il diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$: nel caso indicato in figura, tale margine di fase risulta essere positivo (leggermente inferiore a 45°), da cui deduciamo che l'amplificatore ad anello chiuso, con questa scelta del fattore di reazione f, risulta essere stabile.

E' evidente che se aumentiamo l'entità della reazione aumentando il valore di f, le cose cambiano, in quanto la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}$ si abbassa, la pulsazione di transizione ω_0 si sposta verso destra e il margine di fase si riduce fino a diventare negativo, come per esempio accade nella figura seguente:

Autore: Sandro Petrizzelli



Esiste dunque un valore f_C del fattore di reazione in corrispondenza del quale si ottiene un margine di fase nullo: per valori di f superiori a f_C, l'amplificatore è instabile in anello chiuso, mentre per valori inferiori a f_C esso rimane stabile. A questo valore critico del fattore di reazione corrisponde anche un valore critico del guadagno d'anello, che sarà ovviamente $\boxed{T_C = f_C a_0}$ (dove a_0 è il guadagno statico dell'amplificatore di andata, generalmente fissato a priori), oltre il quale il circuito è instabile ad anello chiuso. Può tuttavia capitare che si sia obbligati a progettare il circuito in modo che abbia un guadagno d'anello T maggiore di T_C: in questi casi, è necessario prendere dei provvedimenti necessari ad aumentare il margine di fase pur conservando il valore desiderato di T. Le tecniche volte ad aumentare il margine di fase prendono il nome di **tecniche di compensazione**.

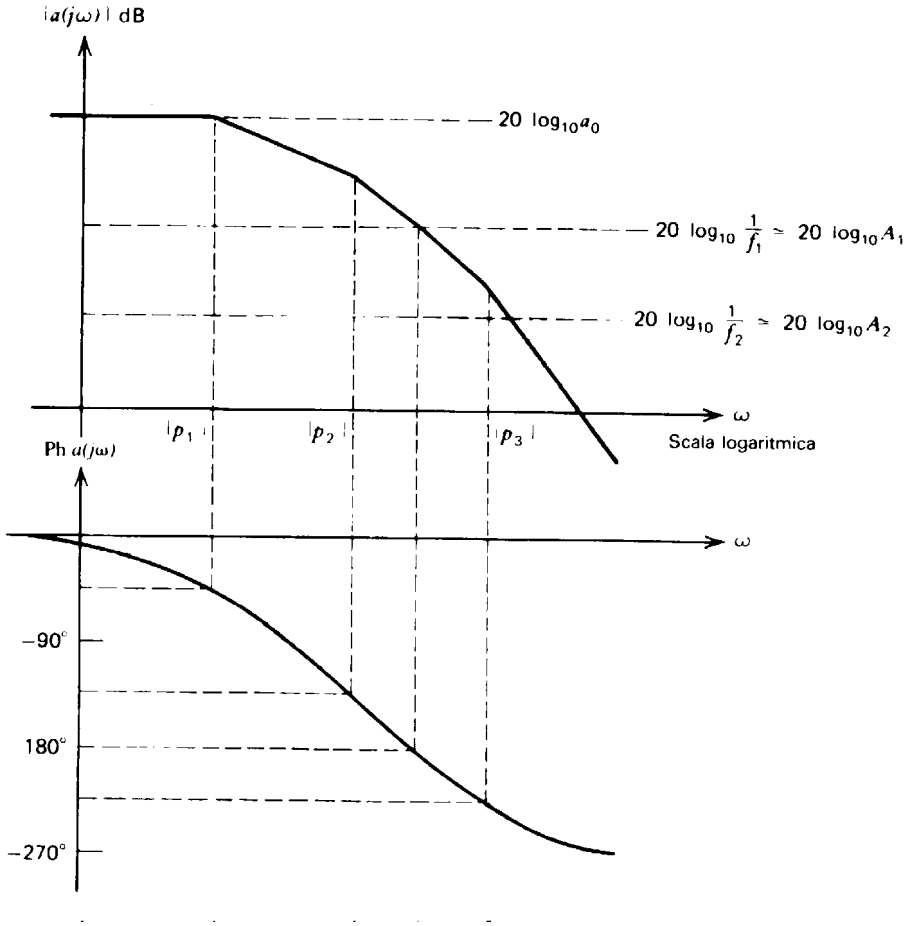
Si capisce, comunque, dalle considerazioni fatte nei capitoli precedenti che la compensazione non ha il solo scopo di garantire la stabilità: l'obbiettivo è, in generale, quello di ottenere dal circuito una risposta accettabile, dove i criteri di questa "accettabilità" sono stati precedentemente esposti.

COMPENSAZIONE PER INTRODUZIONE DI UN POLO DOMINANTE

Il metodo più semplice e più comune di compensazione consiste nell'*introdurre deliberatamente, nell'amplificatore base considerato, un polo dominante, in modo da forzare la fase del guadagno d'anello T(jw) ad un valore prefissato quando il modulo di T(jw) stesso è unitario.* Come vedremo tra un attimo, lo svantaggio di questo metodo è che esso comporta una riduzione della larghezza di banda dell'amplificatore, tanto che si parla di **compensazione per restringimento di banda** (*narrow-banding*).

Il caso più difficile da compensare è quando l'amplificatore in esame è retroazionato con retroazione unitaria (f=1), nel quale caso sappiamo che il diagramma del modulo del guadagno d'anello T(jω) coincide con quello del modulo del guadagno a(jω) dell'amplificatore di andata, mentre quello della fase differisce di 180° a seconda che a(jω) sia positivo o negativo[1]. Nel seguito, faremo per semplicità l'ipotesi che a(jω) sia maggiore di 0, il che implica che anche i diagrammi di Bode di a(jω) e T(jω) risultino coincidenti.

Consideriamo allora nel dettaglio questa situazione e, in particolare, supponiamo che l'amplificatore di andata abbia un guadagno a(jω) positivo i cui diagrammi di Bode sono quelli illustrati nella figura seguente:

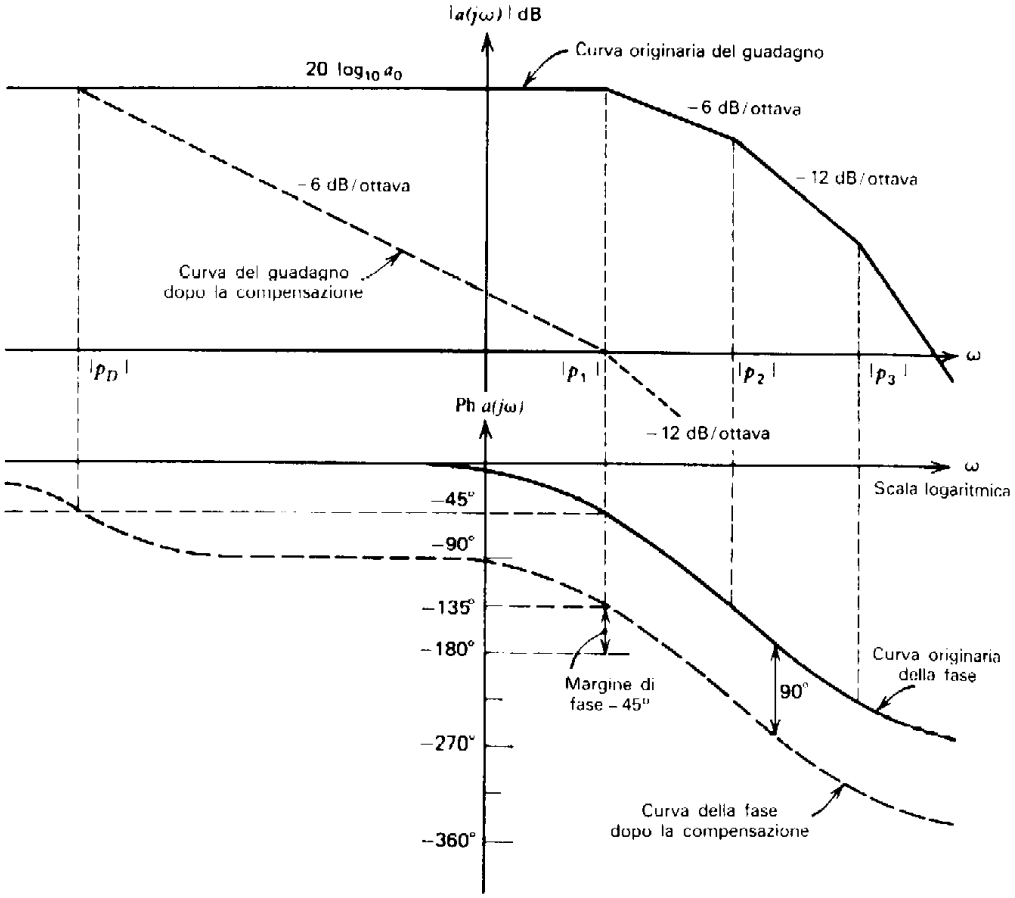


Abbiamo dunque un amplificatore con 3 poli, che supponiamo essere sufficientemente distanziati uno dall'altro.

Facciamo l'ipotesi di chiudere questo sistema in un anello di retroazione unitaria, per cui i diagrammi appena riportati coincidono con quelli di T(jω): si nota subito che, in corrispondenza della frequenza in cui |T(jω)| è unitario, la fase di T(jω) ha già abbondantemente oltrepassato il valore di -180°, per cui dobbiamo necessariamente effettuare una compensazione.

Per effettuare questa compensazione, introduciamo un nuovo polo, che indichiamo con p_D, che deve risultare dominante rispetto ai tre poli già presenti, il che significa che deve avere una frequenza $\omega_D=|p_D|$ minore delle frequenze degli altri tre poli. Supponendo che il nuovo polo non influenzi i poli originari dell'amplificatore di andata (ciò non è sempre vero, ma possiamo per semplicità assumere che sia così), i diagrammi di Bode si modificano nel modo seguente:

[1] Ricordiamo che la fase di T(jω) parte sempre dal valore 0° nel nostro modello, mentre quella di a(jω) parte da 0° o -180° a seconda che a(jω) sia positivo o negativo.



La presenza del nuovo polo dominante p_D fa' si che $|T(j\omega)|_{dB}$ cominci a diminuire, di 20 dB/decade (o di 6 dB/ottava come indicato in figura), a partire proprio dalla frequenza del polo stesso; poi la diminuzione passa a 40dB/decade in corrispondenza di $|p_1|$, quindi a 60dB/decade in corrispondenza di $|p_2|$ ed infine a 80dB/decade in corrispondenza di $|p_3|$. In parole povere, ***il nuovo polo dominante fa sì che, a partire dalla frequenza del polo stesso, la pendenza (negativa) del nuovo diagramma di $|T(jw)|_{dB}$ aumenti, in ogni punto, di 20dB/decade rispetto al diagramma in assenza di compensazione***

Per quanto riguarda, invece, la fase di T(jω), abbiamo il valore -45° in corrispondenza del polo dominante, poi -135° in corrispondenza di $|p_1|$, quindi -225° in corrispondenza di $|p_2|$ e così via verso valori sempre più negativi. In parole povere, ***il nuovo polo dominante fa sì che il diagramma delle fasi trasli di 90° verso il basso rispetto alla posizione in assenza di compensazione.***

Si tratta adesso di decidere dove posizionare ω_D in modo che il margine di fase del sistema diventi positivo: come indicato in figura, considerando che in corrispondenza del primo polo (p_1) dell'amplificatore di andata la fase di T(jω) vale asintoticamente -135°, ***possiamo imporre la posizione di w_D in modo che la nuova frequenza di transizione w_{T1} si trovi proprio in corrispondenza della frequenza $|p_1|$ del primo polo.*** In tal modo, avremo un margine di fase di 45°, ossia un sistema sicuramente stabile in anello chiuso.

E' evidente che il prezzo che si paga, con un procedimento di questo tipo, è che l'amplificatore di andata ha adesso una **larghezza di banda a guadagno unitario** molto più piccola di quanto non fosse prima della compensazione: infatti, la nuova frequenza di transizione ha valore $|p_1|$, mentre in

assenza di compensazione era molto più grande, addirittura maggiore della frequenza del 3° polo (p_3) dell’amplificatore stesso. Con la compensazione, abbiamo praticamente posto fuori banda due dei tre poli dell’amplificatore di andata. *Oltre ad una diminuzione della frequenza di transizione, è diminuita anche la frequenza di taglio,* in quanto la diminuzione di $|a(j\omega)|$ comincia adesso a partire da $|p_D|$ e non più a partire da $|p_1|$. Dato che stiamo considerando una retroazione con f costante (ed unitario), anche $|T(j\omega)|$ comincia a decrescere da $|p_D|$, il che significa che tutti i vantaggi della reazione negativa (stabilizzazione del guadagno e modifica delle impedenze di ingresso e di uscita) diminuiscono all’aumentare della frequenza più di quanto non accadesse prima della compensazione: per esempio, sappiamo che in una connessione parallelo in ingresso e parallelo in uscita, l’effetto della reazione è di ridurre di 1+T sia l’impedenza di ingresso sia quella di uscita; allora, queste due impedenze cominciano a crescere, rispetto al valore assunto a centro banda, nel momento in cui $T(j\omega)$ comincia a diminuire, cioè a partire da $\omega=|p_D|$.

Esempio numerico

A questo punto, dopo aver descritto il procedimento teorico per l’introduzione del polo dominante, vediamo nella pratica come si procede per valutare p_D. Facciamo riferimento ad un dispositivo concreto, come l’**amplificatore operazionale 702**, il quale ha guadagno statico in anello aperto a_0=3600 e tre poli reali negativi, rispettivamente alle frequenze f_1=1MHz, f_2=4MHz e f_3=40MHz. Vogliamo determinare la frequenza del polo dominante richiesta per compensare l’amplificatore, in caso di retroazione unitaria, con un margine di fase di 45°.

Dobbiamo dunque applicare i risultati teorici descritti poco fa, con una accortezza però: abbiamo specificato che i ragionamenti fatti prima valgono rigorosamente nel caso in cui i poli dell’amplificatore di andata (in questo caso dell’operazionale) siano sufficientemente distanti uno dall’altro (ci deve essere almeno una decade di differenza tra le frequenze di ciascuna coppia di poli adiacenti); in questo caso, invece, i primi due poli sono abbastanza ravvicinati, il che comporta che il contributo di fase del secondo polo, alla frequenza del primo polo, non sia nullo e, viceversa, che il contributo di fase del primo polo, alla frequenza del secondo polo, non sia di -90°. Sulla base di questa osservazione, il procedimento esposto prima è ancora valido, ma solo per una stima di massima della frequenza del polo dominante: una stima più precisa va poi condotta aggiustando empiricamente (per esempio tramite una simulazione) la frequenze $|p_D|$ richiesta fino ad arrivare al margine di fase desiderato.

Premesso questo, in base alle considerazioni teoriche fatte prima dobbiamo introdurre un polo dominante, alla frequenza $|p_D|$, in modo tale che $|a(j\omega)|$ risulti unitario in corrispondenza della frequenza $|p_1|=2\pi f_1= 6.28*10^6$rad/sec del primo polo dell’operazionale. Ci basta allora ragionare nel modo seguente: *nell’intervallo di frequenza tra $|p_D|$ e $|p_1|$, la quantità $|a(jw)|$ decresce con pendenza di 20 dB/decade, ossia in modo tale che ci sia proporzionalità diretta tra frequenza e valore di $|a(jw)|$:* questo significa che, se prendiamo 2 qualsiasi punti A e B sulla retta con pendenza di 20 dB/decade, i rispettivi valori di $|a(j\omega)|$ e di ω sono legati dalla relazione

$$\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{|a(j\omega_B)|}{|a(j\omega_A)|}$$

Nel nostro caso, possiamo allora prendere $\omega_A=\omega_D=|p_D|$ e $\omega_B=\omega_1=|p_1|$: in corrispondenza di ω_D, sappiamo che $|a(j\omega)|$ deve assumere il suo valore statico a_0, mentre dobbiamo imporre che in corrispondenza di ω_1, esso assuma valore unitario, per cui abbiamo che

$$\frac{|p_D|}{|p_1|}=\frac{1}{|a_0|}\longrightarrow|p_D|=\frac{|p_1|}{|a_0|}\longrightarrow f_D=\frac{|p_D|}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{|p_1|}{|a_0|}=278\text{Hz}$$

Abbiamo dunque stimato il valore della frequenza cui dobbiamo porre il polo dominante per avere un margine di fase di 45°. Possiamo verificare la bontà di questo calcolo nel modo seguente.

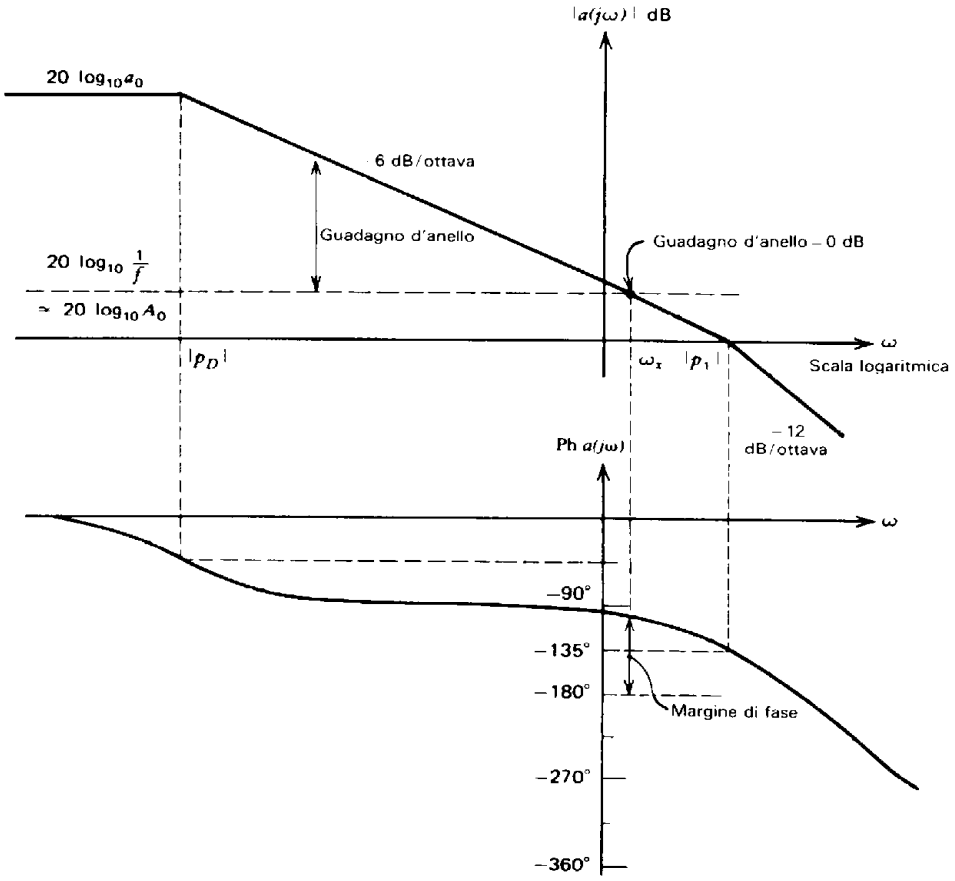
In primo luogo, avendo 4 poli, possiamo esprimere la funzione di risposta armonica dell'amplificatore di andata nella forma

$$a(j\omega)=\frac{a_0}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_D}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_3}\right)}$$

Facendo i conti, questa espressione indica che |a(jω)| vale 1 in corrispondenza della frequenza f_T=780 kHz, mentre noi avevamo imposto che questa frequenza fosse quella del primo polo, ossia 1MHz. Il motivo di questa differenza è, come accennato prima, nel fatto che i primi due poli dell'amplificatore di andata sono abbastanza ravvicinati. In termini di fasi, si trova che, a 780 kHz, la fase di a(jω) vale -139°, cui corrisponde un margine di fase di 41° anziché di 45° come noi volevamo. Nonostante questo risultato sia sufficientemente approssimato per la maggior parte dei casi, un margine di fase di esattamente 45° può essere ottenuto riducendo empiricamente (o al massimo per tentativi) $|p_D|$ fino a che l'espressione prima riportata di a(jω) dà una fase di -135° alla frequenza di guadagno unitario. Procedendo in questo modo, si ottiene una frequenza del polo dominante di circa 260Hz, cui corrisponde una frequenza di transizione di 730 kHz. Entrambi questi valori non sono poi così diversi da quelli stimati poco fa supponendo i poli sufficientemente distanziati tra loro.

Osservazione

Consideriamo nuovamente l'amplificatore considerato nel paragrafo precedente. Abbiamo visto come compensare l'amplificatore, introducendo un nuovo polo dominante, in modo da ottenere un margine di fase di 45° nel caso di retroazione unitaria. Adesso supponiamo che lo stesso amplificatore, con la suddetta compensazione, non venga più impiegato in un anello di reazione unitaria, ma in un anello di reazione con f<1 (cui corrisponde un guadagno asintotico di feedback $A_0=1/f>1$). La situazione è mostrata nella figura seguente:



Essendo in questo caso f≠1 e supponendo sempre a(jω)>0, il guadagno d’anello T(jω)=a(jω)f ha lo stesso diagramma delle fasi di a(jω), mentre il diagramma dei moduli si ottiene da quello di a(jω) sottraendo in ogni punto la quantità $20\log_{10} f$. In altre parole, mandando la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}$, il diagramma di $|T(j\omega)|_{dB}$ si ottiene da quello di $|a(j\omega)|_{dB}$ usando la suddetta retta come nuovo asse delle ascisse.

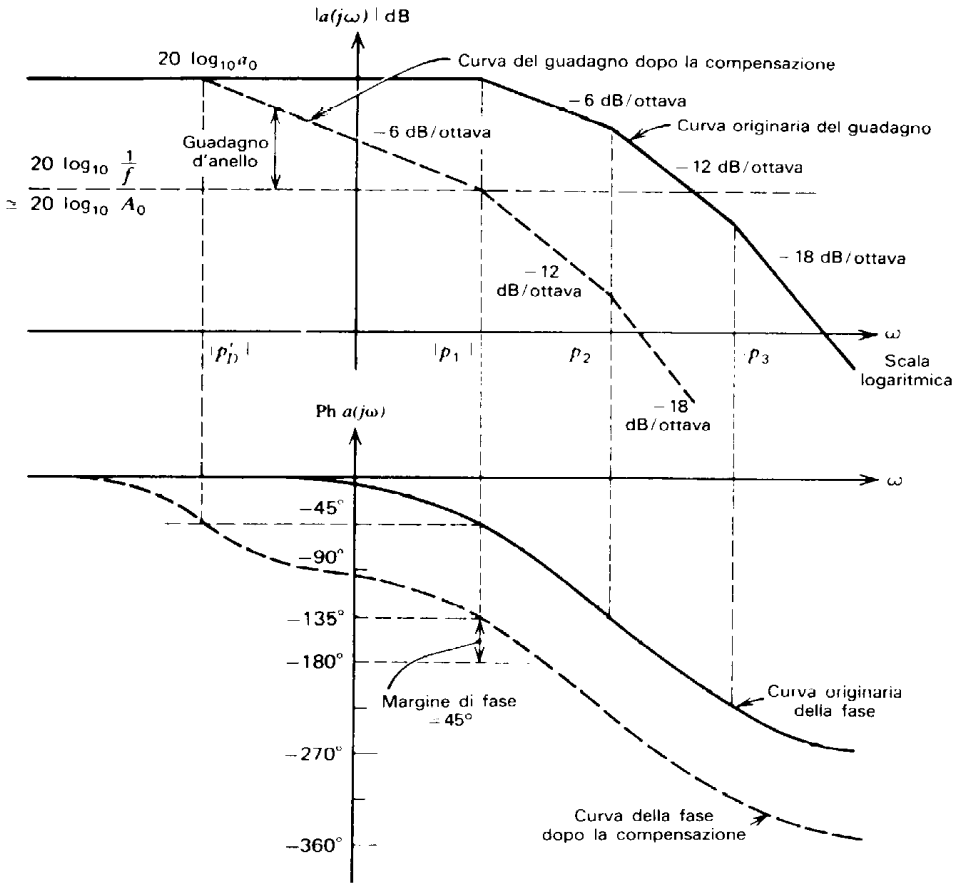
Allora, per individuare il margine di fase, bisogna individuare la frequenza ω_X alla quale la retta $20\log_{10}\frac{1}{f}$ interseca il diagramma di $|a(j\omega)|_{dB}$ e calcolare la corrispondente fase di a(jω): come si nota dalla figura, si osserva un margine di fase di quasi 90°, cioè un sistema in retroazione più stabile rispetto a quando la retroazione era stata considerata unitaria.

A fronte di questa maggiore stabilità, c’è però un inconveniente: la frequenza di taglio del guadagno d’anello T(jω) è proprio ω_X, per cui il circuito è più compensato di quanto sia in effetti necessario: viene dunque sprecata larghezza di banda.

Quindi, nonostante sia conveniente, dal punto di vista della stabilità, compensare un amplificatore per un fattore di reazione f unitario e poi usarlo inalterato per altre applicazioni (come viene fatto in molti amplificatori operazionali), questo procedimento ha conseguenze negative dal punto di vista della banda.

Amplificatori a guadagno statico di feedback A_0 fisso (cioè fattore di reazione fisso), che sono progettati per applicazioni in cui è richiesta la massima banda possibile, vengono generalmente compensati in modo da ottenere un margine di fase specificato (tipicamente da 45° a 60°) in corrispondenza del valore richiesto del guadagno A_0. Tuttavia, dato che gli amplificatori operazionali sono circuiti di uso generale, essi devono poter essere adoperati con differenti reti di reazione e con valori di f compresi tra 0 ed 1: allora, *al fine di ottenere, in questi circuiti,*

la larghezza di banda ottimale, è opportuno che sia l'utilizzatore stesso ad introdurre la compensazione, in modo da adattarla al valore del guadagno richiesto. In questo modo, si ottengono larghezze di banda molto maggiori per guadagni elevati, come si vede nella figura seguente:



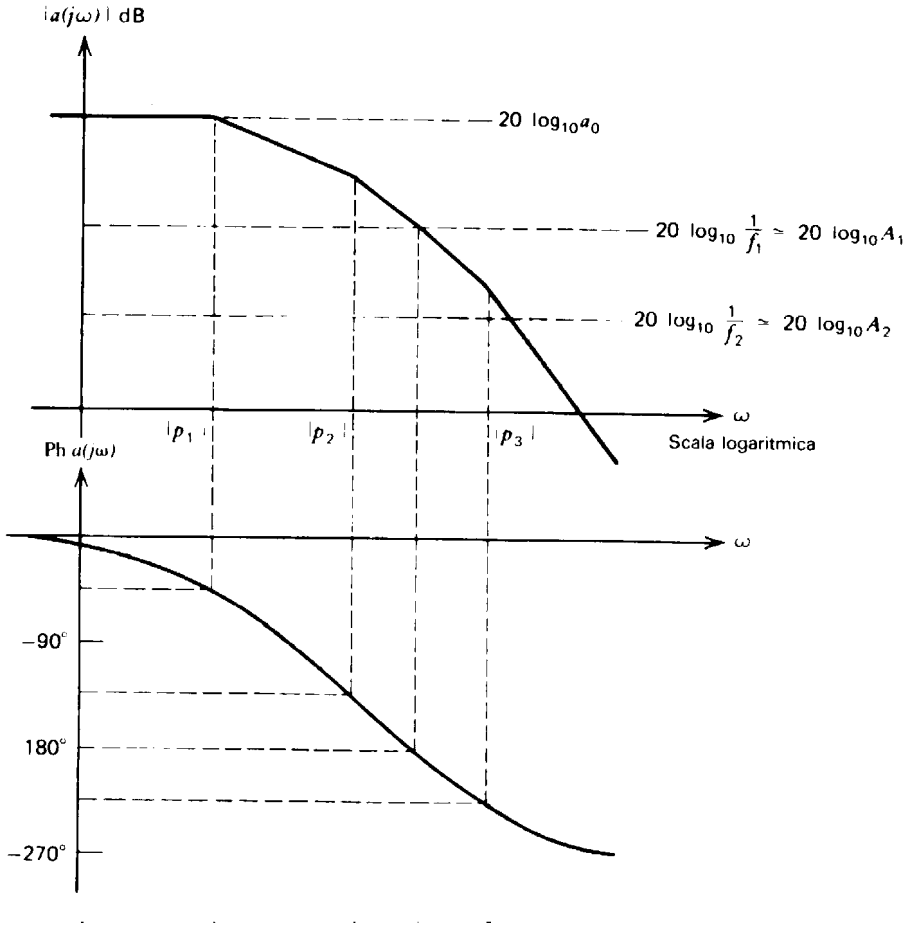
Viene qui mostrata la compensazione delle caratteristiche dell'amplificatore a 3 poli considerato prima, allo scopo, questa volta, di impiegarlo in un circuito reazionato (negativamente) con guadagno A_0 e quindi con retroazione $f=1/A_0$. Mandata la retta per $20\log_{10}\frac{1}{f}=20\log_{10}A_0$ e individuata la pulsazione di transizione di $T(j\omega)$, si legge un margine di fase praticamente nullo, per cui si effettua una compensazione tramite introduzione di un polo dominante p'_D: la frequenza di questo polo dominante viene scelta, nello stesso modo descritto prima, in modo tale da ottenere un margine di fase di 45°. La frequenza del nuovo polo dominante è ovviamente maggiore di quella considerata nel caso di retroazione unitaria e la frequenza di taglio superiore è adesso $|p_1|$, in corrispondenza della quale $|T(j\omega)|=1$, mentre, nel caso di retroazione unitaria, sarebbe stata invece $\omega_X=/p_1|/A_0$, cioè di gran lunga più bassa.

COMPENSAZIONE TRAMITE MODIFICA DEL POLO DOMINANTE

Il metodo di compensazione appena descritto consiste dunque nella introduzione, nell'amplificatore di andata, di un nuovo polo dominante opportunamente dimensionato e vale rigorosamente nel caso in cui tale nuovo polo non vada ad influenzare i poli precedenti. *Un altro modo di procedere è quello di lasciare inalterato il numero di*

poli dell'amplificatore di andata e di andare a modificare il valore del polo dominante in modo tale da operare la compensazione con il margine di fase voluto. Fisicamente, come si ottiene questo? Dato che ciascun polo dell'amplificatore è legato ad una o più capacità, la modifica della frequenza del polo dominante può essere effettuata solo inserendo una opportuna capacità, detta appunto **capacità di compensazione**, che vada anch'essa a determinare, insieme alle capacità già presenti, la frequenza del polo dominante. Per fare questo, chiaramente, è necessario poter accedere ai nodi interni dell'amplificatore ed è inoltre necessario conoscere i nodi del circuito in cui l'aggiunta di una capacità riduce la frequenza del polo dominante.

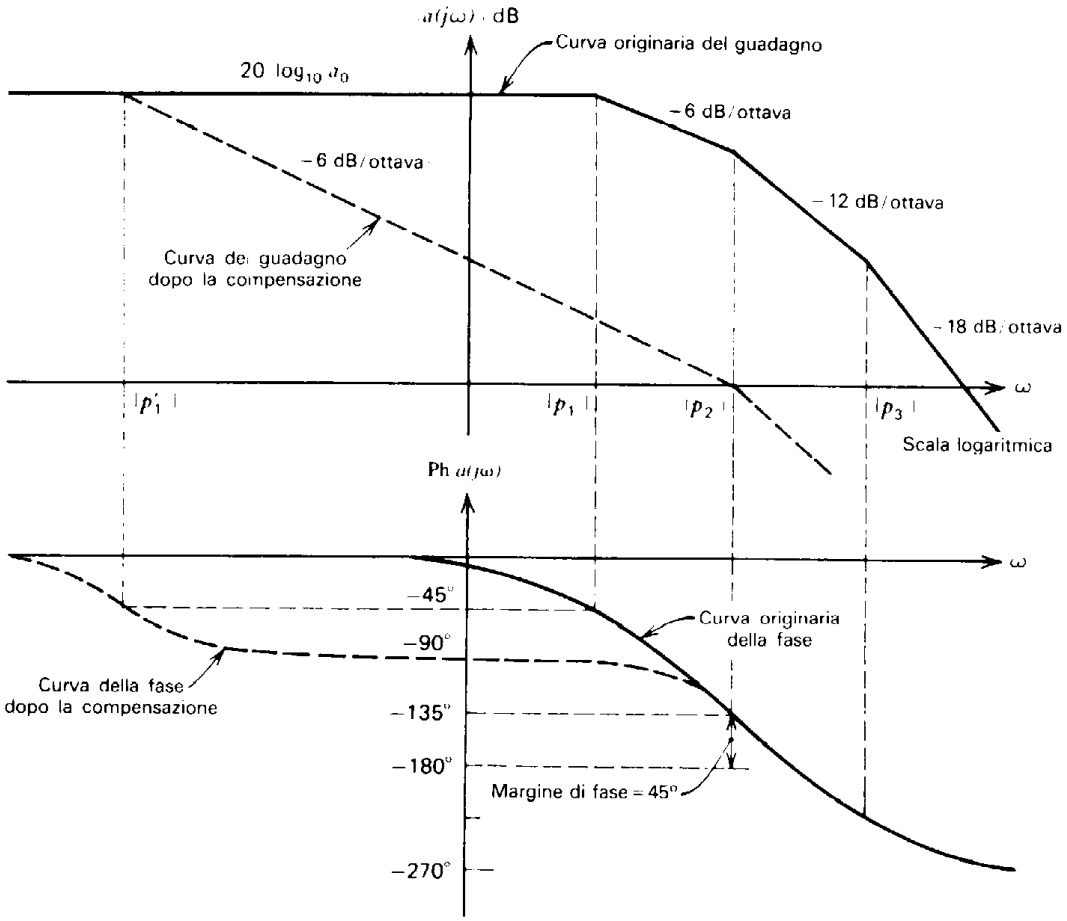
Consideriamo, dunque, nuovamente l'amplificatore che nel precedente paragrafo abbiamo compensato tramite l'introduzione di un nuovo polo dominante. Vogliamo in questo caso ottenere un margine di fase di 45° modificando la frequenza del polo dominante dell'amplificatore. Riportiamo allora nella figura seguente i diagrammi di Bode di tale amplificatore:



Il polo dominante è ovviamente p_1 (cioè quello a frequenza più bassa). Facciamo ancora una volta l'ipotesi che i poli a frequenza più alta p_2 e p_3 non risentano dell'influenza di p_1, che quindi può essere modificato a nostro piacimento: in realtà, a seconda del metodo di compensazione utilizzato, questi poli vengono generalmente spostati dalla compensazione in su o in giù come frequenza, ma noi trascuriamo questo aspetto, ritenendo che i poli rimangano invariati.

Come dobbiamo scegliere la frequenza $|p'_1|$ del polo dominante in modo da ottenere una margine di fase di 45°? In modo analogo a prima, *dobbiamo imporre che tale frequenza $|p'_1|$ sia tale che la nuova frequenza di taglio cada esattamente in $|p_2|$, cioè nella frequenza del secondo polo,* in corrispondenza della quale la fase di a(jω) (e quindi anche di T(jω) visto che stiamo considerando la retroazione unitaria) vale asintoticamente -135°.

La compensazione dell'amplificatore ottenuta riducendo $|p_1|$ è mostrata nella figura seguente:



Così facendo, quindi, la nuova frequenza di transizione vale adesso $|p_2|$, mentre nel caso precedente, cioè introducendo un nuovo polo dominante, era $|p_1|$: abbiamo dunque, come questo metodo di compensazione, una larghezza di banda maggiore. Negli amplificatori reali, la frequenza $|p_2|$ è spesso 5 o 10 volte maggiore della frequenza $|p_1|$ e vengono perciò ottenuti miglioramenti sostanziali nella larghezza di banda.

Esempio numerico

Dopo aver descritto il procedimento teorico per la modifica della frequenza del polo dominante, vediamo anche in questo caso come si procede in pratica per valutare p'_1. Facciamo riferimento allo stesso amplificatore considerato nell'esempio precedente, ossia l'amplificatore operazionale 702, il quale ha guadagno statico a_0=3600 e tre poli reali negativi, rispettivamente alle frequenze f_1=1MHz, f_2=4MHz e f_3=40MHz. Vogliamo determinare la nuova frequenza del polo dominante richiesta per compensare l'amplificatore, in caso di retroazione unitaria, con un margine di fase di 45°.

In base alle considerazioni teoriche fatte prima, dobbiamo determinare $|p_1|$ in modo tale che $|a(j\omega)|$ risulti unitario in corrispondenza della frequenza $|p_2|=2\pi f_2= 25*10^6$rad/sec del secondo polo. Anche in questo caso, ci basta tener presente che, nell'intervallo di frequenza tra $|p'_1|$ e $|p_2|$, $|a(j\omega)|$ decresce con pendenza di 20 dB/decade, per cui vale ancora la relazione

$$\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{|a(j\omega_B)|}{|a(j\omega_A)|}$$

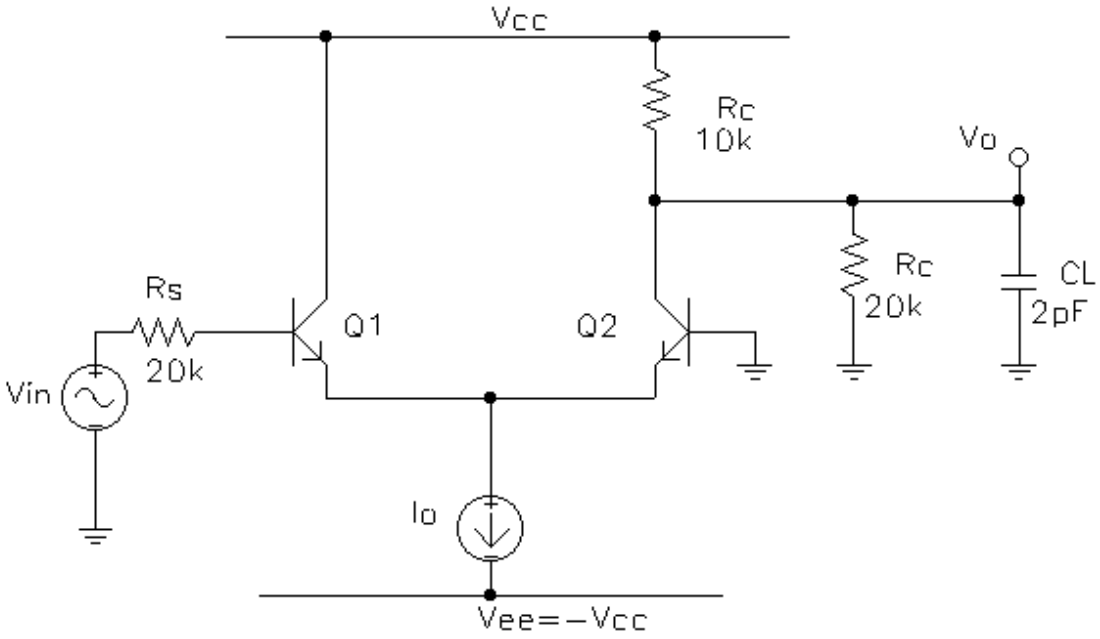
dove A e B sono due qualsiasi punti sulla retta con pendenza di 20 dB/decade. Nel nostro caso, dobbiamo prendere $\omega_A=\omega'_1=|p'_1|$ e $\omega_B=\omega_2=|p_2|$: in corrispondenza di ω'_1, sappiamo che $|a(j\omega)|$ deve assumere il suo valore statico a_0, mentre dobbiamo imporre che in corrispondenza di ω_2, esso assuma valore unitario, per cui abbiamo che

$$\frac{|p'_1|}{|p_2|}=\frac{1}{|a_0|}\longrightarrow|p'_1|=\frac{|p_2|}{|a_0|}\longrightarrow f'_1=\frac{|p'_1|}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{|p_2|}{|a_0|}=1.1\text{kHz}$$

Abbiamo dunque stimato il valore della frequenza in cui dobbiamo spostare il polo dominante per avere un margine di fase di 45°.

Esempio numerico

Consideriamo il seguente amplificatore costituito dalla cascata di uno stadio CC (inseguitore di tensione) con uno stadio CB (inseguitore di corrente):



Il generatore di corrente di polarizzazione I_0 si suppone ideale, ossia con resistenza di Norton infinita e privo di effetti capacitivi.

Supponiamo di conoscere i dati sul punto di lavoro e di aver ricavato che g_m=100 mA/V e r_π=5 kΩ. Supponiamo inoltre che C_π=20 pF e C_μ=2 pF.

Supponendo di chiudere il circuito in un anello di reazione negativa unitaria, vogliamo compensare l’amplificatore in modo da ottenere un margine di fase di 45°.

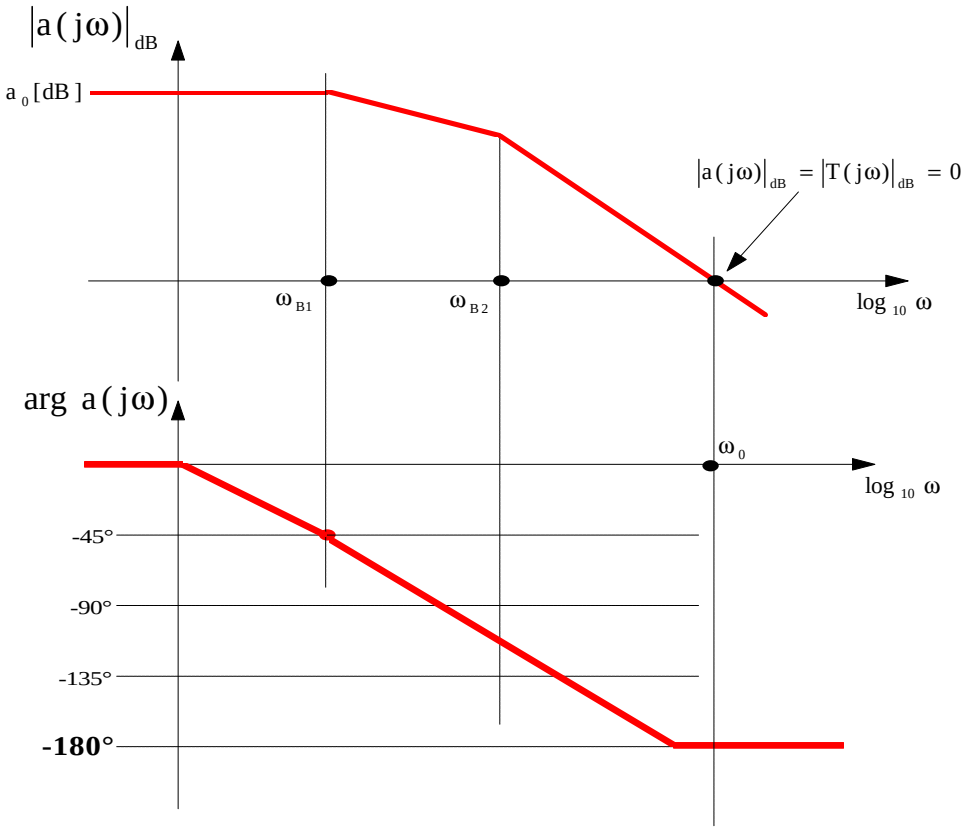
Per rispondere a questo quesito, la prima cosa da fare è quella di calcolare tutti i poli dell’amplificatore di andata, in modo da costruire i diagrammi di Bode dell’amplificatore e quindi da progettare la compensazione. Dall’analisi del circuito si osserva la presenza di 4 capacità intrinseche (la C_π e la C_μ per Q1 e la C_π e la C_μ per Q2), cui si aggiunge la capacità del carico. In particolare, le

due C_π e la $C_{\mu 1}$ risultano in parallelo tra loro (sono poste entrambe tra il nodo E e massa), mentre la $C_{\mu 2}$ è in parallelo alla C_L. Quindi, nonostante l'apparente complessità, il circuito presenta due sole capacità, tra l'altro indipendenti tra di loro, per cui ciascuna di esse introduce un polo nella funzione di trasferimento $a(s)=v_O/v_{in}$: facendo i conti, si trova in particolare che le frequenze dei due poli sono

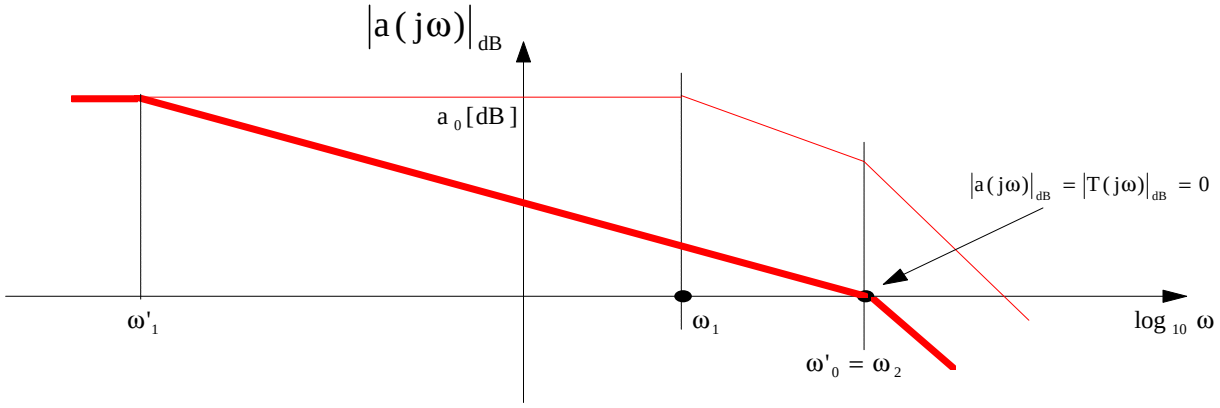
$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\left(C_{\mu 1} + \frac{C_\pi}{2}\right)(R_S \,//\, 2r_\pi)} = \frac{1}{80(\text{n sec})} = 12.5*10^6 \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{(C_{\mu 2} + C_L)(R_C \,//\, R_L)} = \frac{1}{40(\text{n sec})} = 25*10^6 \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$$

Abbiamo dunque due poli di cui il secondo a frequenza doppia del primo (che quindi è un polo dominante). Il fatto che questi due poli siano a frequenze ravvicinate ci dice che il margine di fase risulta sicuramente piccolo, da cui la necessità di compensare:



Come si nota in figura, il margine di fase è praticamente nullo. Effettuiamo una compensazione tramite modifica del polo dominante: dobbiamo cioè spostare il polo dominante p_1 in modo tale che il margine di fase assuma il valore richiesto di 45°. In base alle considerazioni teoriche fatte prima, dobbiamo semplicemente fare in modo che la nuova frequenza di transizione ω'_0 si trovi in corrispondenza della frequenza del secondo polo:



Data la proporzionalità diretta tra frequenza e valore di |T(jω)| (uguale a |a(jω)|) nell'intervallo di frequenza compreso tra ω_1 e ω'_0, abbiamo che

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_0}=\frac{|T(j\omega'_0)|}{|T(j\omega'_1)|}\longrightarrow \omega'_1=\omega'_0\frac{|T(j\omega'_0)|}{|T(j\omega'_1)|}=\omega_2\frac{1}{|T_0|}=\omega_2\frac{1}{|a_0 f|}=\omega_2\frac{1}{|a_0|}$$

Dobbiamo dunque calcolare il valore del guadagno statico dell'amplificatore: usando il circuito equivalente dell'amplificatore a centro banda (quindi con le capacità più piccole sostituite da circuiti aperti e quelle più grandi sostituite da cortocircuiti) si ottiene

$$|a_0|=\frac{g_m}{2}(R_C /\!/ R_L)\frac{2r_\pi}{2r_\pi+R_S}=167$$

Con questo valore del guadagno statico, si ottiene che il nuovo polo dominante va posto alla frequenza $\omega'_1=\frac{\omega_2}{|a_0|}=149.7*10^3\left(\frac{rad}{sec}\right)$.

A questo punto, non resta che stabilire come effettuare, fisicamente, lo spostamento del polo dominante. A questo scopo, basta riprendere l'espressione analitica della frequenza del polo dominante:

$$\omega_1=\frac{1}{\left(C_{\mu 1}+\frac{C_\pi}{2}\right)(R_S /\!/ 2r_\pi)}$$

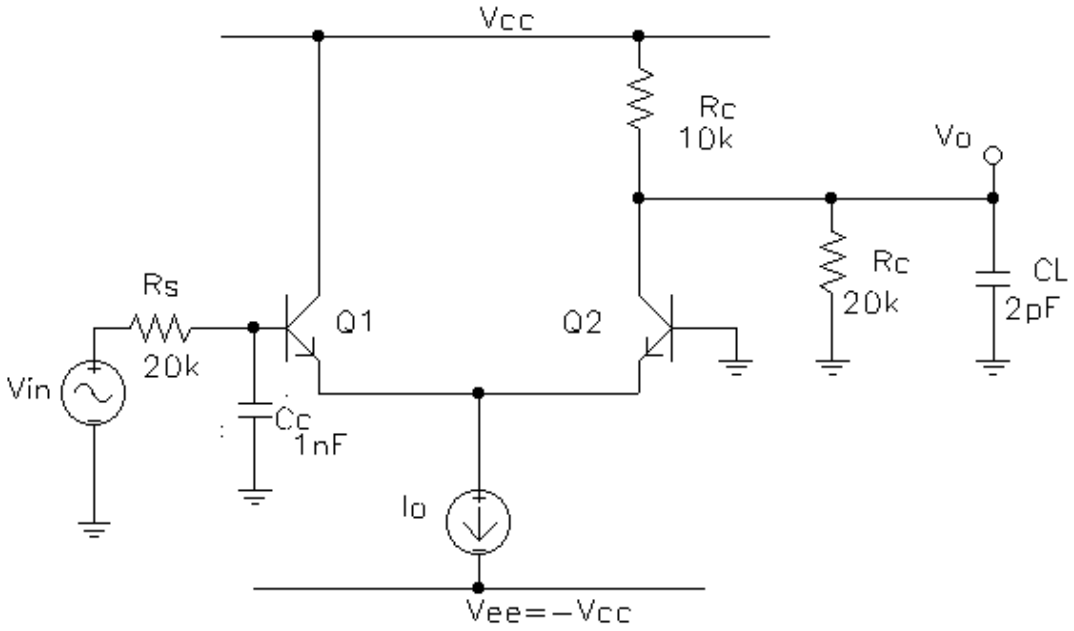
In base a questa espressione, il polo dominante del circuito considerato dipende dalle capacità $C_\pi/2$ e $C_{\mu 1}$, che sono in parallelo tra di loro e sono poste tra la base e il collettore (a massa) del transistor Q1. Per modificare allora la frequenza ω_1, ci basta porre una opportuna capacità di compensazione C in parallelo a $C_\pi/2$ e $C_{\mu 1}$, in modo da ottenere

$$\omega'_1=\frac{1}{\left(C+C_{\mu 1}+\frac{C_\pi}{2}\right)(R_S /\!/ 2r_\pi)}$$

Imponendo che risulti $\omega'_1 = 149.7 * 10^3 \left(\frac{rad}{sec}\right)$, si trova il valore della C:

$$C = \frac{1}{\omega'_1 (R_S // 2r_\pi)} - \left(C_{\mu 1} + \frac{C_\pi}{2}\right) = 1nF$$

Questa capacità va dunque inserita tra la base di Q1 e massa, come indicato nella figura seguente:



Osservazione

E' importante osservare che il risultato ottenuto è abbastanza particolare ed è legato al fatto di aver scelto una resistenza serie R_S particolarmente elevata: questo valore elevato fa si che la corrispondente costante di tempo risulti dominante e quindi che la capacità di compensazione vada messa tra l'ingresso e massa. Generalmente, la R_S è molto più piccola (qualche kΩ) e la costante di tempo dominante è quella associata all'uscita, per cui è lì che generalmente va messa la capacità di compensazione.
Ad esempio, se prendiamo RS=2kΩ, troviamo che

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\left(C_{\mu 1} + \frac{C_\pi}{2}\right)(R_S // 2r_\pi)} = 5.8 * 10^7 \left(\frac{rad}{sec}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{(C_{\mu 2} + C_L)(R_C // R_L)} = \frac{1}{40(n\,sec)} = 25 * 10^6 \left(\frac{rad}{sec}\right)$$

Il polo dominante è questa volta il secondo (legato all'uscita), a conferma del fatto che la capacità di compensazione dovrà essere usata per modificare la frequenza di tale polo.

Adesso, ripetiamo il procedimento supponendo di voler ottenere un margine di fase non più di 45°, ma di 60°. Una volta ricavati i poli del circuito, dobbiamo semplicemente scegliere la nuova posizione di p_1 in modo diverso da quanto fatto prima. Il modo di procedere è il seguente.

Avendo detto che l'amplificatore presenta due poli, possiamo rappresentare la sua funzione di risposta armonica nel modo seguente:

$$a(j\omega)=\frac{a_0}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Essendo unitario il fattore di reazione dell'anello in cui intendiamo inserire questo amplificatore, T(jω) coincide con a(jω):

$$T(j\omega)=\frac{T_0}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \qquad a_0=T_0$$

Il margine di fase è definito come $mf=180°+\arg T(j\omega'_0)$, dove ω'$_0$ è la nuova pulsazione di transizione, che noi dobbiamo imporre in modo opportuno. Nostro scopo è quello di ottenere un margine di fase di 60°, da cui deduciamo che deve risultare

$$\arg T(j\omega'_0)=mf-180°=-120°$$

Utilizzando l'espressione di T(jω), possiamo calcolare la fase di T(jω) stesso:

$$\arg T(j\omega)=\arg T_0-\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)-\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)=-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

Possiamo allora imporre che, in ω'_0 , questa fase valga -120°:

$$\arg T(j\omega'_0)=-120°=-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_2}\right)$$

A questo punto, dato che i due poli sono sufficientemente distanziati, il contributo di fase del primo polo alla nuova frequenza di transizione sarà sicuramente giunto al valore asintotico -90°, per cui possiamo scrivere con ottima approssimazione che

$$-120°\cong-90°-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_2}\right)\longrightarrow\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_2}\right)=30°\longrightarrow\omega'_0=\omega_2\,tg30°=14.5*10^6\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

Abbiamo in questo modo ottenuto la nuova frequenza di transizione, mediante la quale possiamo calcolare la nuova frequenza del polo dominante riapplicando la formula $\frac{\omega'_1}{\omega'_0}=\frac{1}{|T(j\omega'_1)|}$: si trova che

$$\omega'_1=\omega'_0\frac{1}{|T(j\omega'_1)|}=\omega'_0\frac{1}{|a_0|}=8.7*10^4\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

La capacità di compensazione necessaria a spostare in questa nuova posizione il polo dominante è

$$C = \frac{1}{\omega'_1 \left(R_S \,//\, 2r_\pi\right)} - \left(C_{\mu 1} + \frac{C_\pi}{2}\right) = 1.6\text{nF}$$

ed è solo leggermente più grande di quella necessaria ad ottenere un margine di fase di 45°.

Evidentemente, il procedimento appena seguito vale in tutti i casi in cui il margine di fase che si intende imporre è diverso da 45° o da un suo multiplo: la formula generale da applicare è

$$\text{mf} - 180° \cong -90° - \text{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_2}\right)$$

Per esempio, volendo ottenere un margine di fase di 30°, si ha quanto segue:

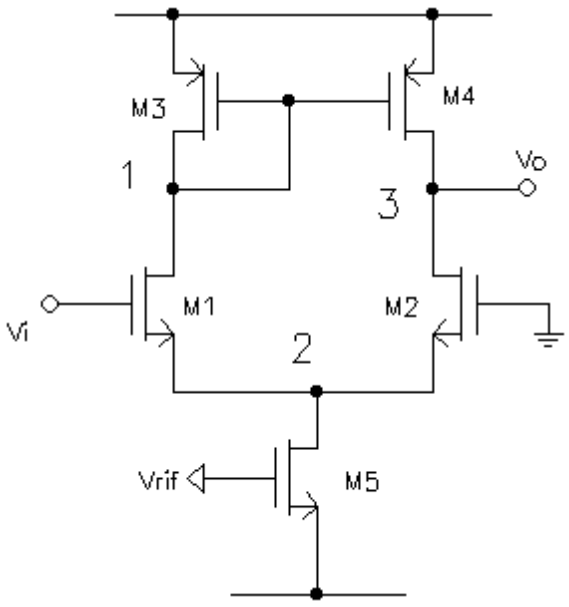
$$-150° \cong -90° - \text{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_2}\right) \longrightarrow \text{arctg}\left(\frac{\omega'_0}{\omega_2}\right) = 60° \longrightarrow \omega'_0 = \omega_2 \,\text{tg}60° = 43.3*10^6\left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$$

A proposito di quest'ultimo calcolo, c'è da osservare che un margine di fase di 30° equivale ad avere i due poli molto vicini tra di loro, il che significa che l'approssimazione di ritenerli non interagenti tra di loro è meno buona dei casi precedenti.

METODI DI COMPENSAZIONE

Nei paragrafi precedenti abbiamo dunque discusso due distinti metodi di compensazione di un amplificatore: nel primo caso, si procedere introducendo un nuovo polo dominante; nel secondo caso, invece, si modifica la frequenza del polo dominante già esistente nell'amplificatore base. La caratteristica comune ai due metodi è quella per cui è necessario poter accedere direttamente ai nodi del circuito. *Ci chiediamo, allora, come sia possibile, da un punto di vista fisico, introdurre un nuovo polo dominante o modificare la frequenza del polo dominante già esistente.*

Per comprendere questo aspetto, consideriamo un esempio pratico, indicato nella figura seguente:



Si tratta di un classico amplificatore in transconduttanza con ingresso singolo e uscita singola. Per stimare la frequenza del polo dominante di questo circuito, ci basta stimare la frequenza di taglio superiore ω_H del circuito stesso. Tale frequenza può essere determinata con il metodo delle costanti di tempo: in particolare, si osserva la presenza nel circuito di tre soli nodi (il nodo 1 è il drain di M1, il nodo 2 è quello in cui convergono i terminali di source di M1 ed M3, il nodo 3 è il nodo di uscita del circuito), cui quindi sono associate tre costanti di tempo, per cui la frequenza di taglio superiore sarà del tipo

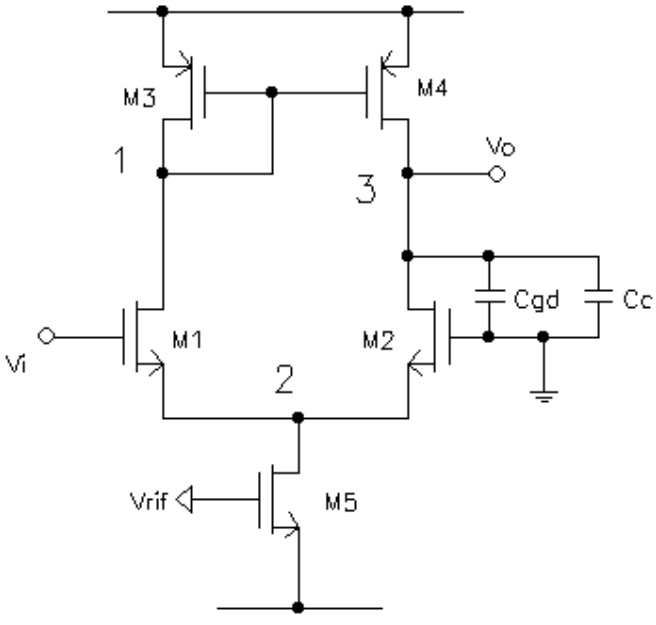
$$\omega_H = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_3 C_3}$$

La costante di tempo τ_1 è il prodotto tra la capacità C_1 connessa tra il nodo 1 e massa e l'impedenza vista dai morsetti di tale capacità quando le altre sono dei circuiti aperti; in modo analogo si definiscono poi τ_2 e τ_3 . Tuttavia, dei tre nodi si osserva che l'unico ad alta impedenza è il nodo 3: infatti l'impedenza vista dal nodo 3 è $R_3 = r_{O,4} \,//\, r_{O,2}$, mentre le impedenze viste dagli altri nodi sono rispettivamente $R_1 = \frac{1}{g_{m,3}} \,//\, r_{O,1} \cong \frac{1}{g_{m,3}}$ e $R_2 = \frac{1}{g_{m,1}} \,//\, \frac{1}{g_{m,2}} \,//\, r_{O,5} \cong \frac{1}{2g_m}$. Possiamo allora affermare, con buona approssimazione, che

$$\omega_H \cong \frac{1}{R_3 C_3} = \frac{1}{(r_{O,4} \,//\, r_{O,2}) C_3}$$

La capacità C_3 connessa tra il nodo 3 e massa è il parallelo di diverse capacità: ci sono le C_{gs} dei transistor M3 ed M4, la C_{gd} di M4 e la C_{gd} di M2. Quella prevalente è però la capacità C_{gd} del transistor M2, per cui possiamo concludere che $\omega_H \cong \frac{1}{(r_{O,4} \,//\, r_{O,2}) C_{gd}}$

Questa è dunque una buona stima della frequenza del polo dominante del circuito considerato: volendo allora modificare questa frequenza, non dobbiamo far altro che introdurre una nuova capacità C_C, detta appunto **capacità di compensazione**, tra il nodo 3 e massa, ossia in parallelo alla C_{gd}:



Così facendo, una buona stima della frequenza del polo dominante del circuito (e quindi anche della frequenza di taglio superiore) sarà data da

$$\omega'_H \cong \frac{1}{(r_{O,4} \,//\, r_{O,2})(C_{gd} + C_C)}$$

Basterà perciò dimensionare C_C in modo da ottenere la ω'_H desiderata.

E' immediato accorgersi che questo procedimento pratico vale per un qualsiasi circuito, ma non è sempre di facile applicazione, in quanto non è sempre facile individuare il nodo ad impedenza maggiore tra quelli presenti nel circuito. Inoltre, quasi sempre i poli a frequenza più alta dell'amplificatore considerato vengono spostati dall'introduzione della capacità di compensazione. Di conseguenza, il metodo migliore per effettuare la compensazione è quello di utilizzare la simulazione su calcolatore oppure di effettuare misure per determinare la posizione dei poli originari. Una prima stima di C_C viene fatta, così come abbiamo fatto poco fa, supponendo che i poli a frequenza più alta non si spostino in frequenza e una nuova simulazione al calcolatore o nuove misure vengono poi effettuate includendo C_C per verificare tale ipotesi. Un'altra stima di C_C viene poi fatta sulla base di nuovi dati e solitamente questo processo converge dopo alcune iterazioni.

Compensazione per effetto Miller

Il metodo di compensazione descritto nel paragrafo precedente (consistente nel modificare la frequenza del polo dominante tramite l'introduzione di una capacità in posizione opportuna e di valore opportuno) presenta uno svantaggio notevole: ***molto spesso, il valore richiesto per la capacità di compensazione è troppo alto e non può perciò essere implementato in un circuito integrato.*** Per esempio, consideriamo la formula

$$\omega'_H \cong \frac{1}{(r_{O,4} \,//\, r_{O,2})(C_{gd} + C_C)}$$

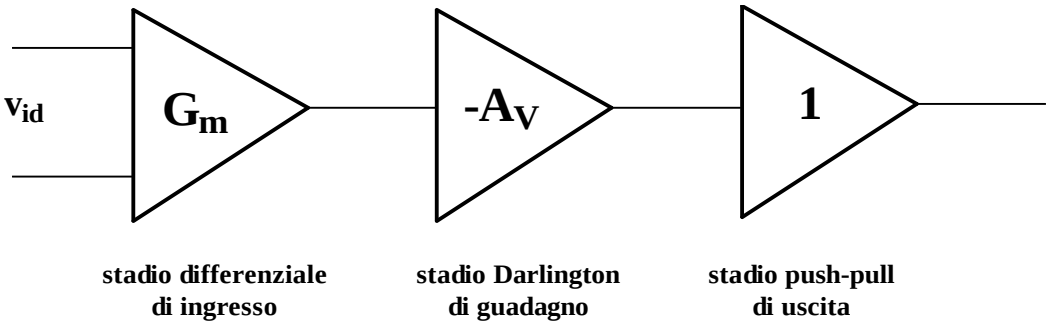
ricavata per l'esempio studiato poco fa: da essa si ricava che

$$C_C = \frac{1}{(r_{O,4} \,//\, r_{O,2})\omega'_H} - C_{gd}$$

Supponiamo allora che C_{gd}=1pF e che $r_{O,4}$=$r_{O,2}$=50kΩ: con questi valori, per ottenere una frequenza di taglio superiore di 100 kHz, è necessario usare una capacità di compensazione C_C di 399pF. Questo è già un valore abbastanza alto per una capacità da inserire in un integrato, ma spesso si ottengono valori ben più alti, anche superiori a 1000pF.

Questo è per esempio il caso dell'**operazione μA-741**, nel quale, come si vedrà tra un attimo, una capacità di compensazione ricavata nel modo descritto poco fa dovrebbe avere un valore di circa 3000pF, che non può essere assolutamente implementato in un circuito integrato. Bisogna allora necessariamente pensare a qualche altro sistema per l'inserimento e il dimensionamento della capacità di compensazione: si usa, allora, il cosiddetto **effetto Miller**, che descriveremo adesso con riferimento proprio al μA-741.

Consideriamo dunque l'amplificatore operazionale μA-741, che possiamo schematicamente rappresentare nel modo seguente:

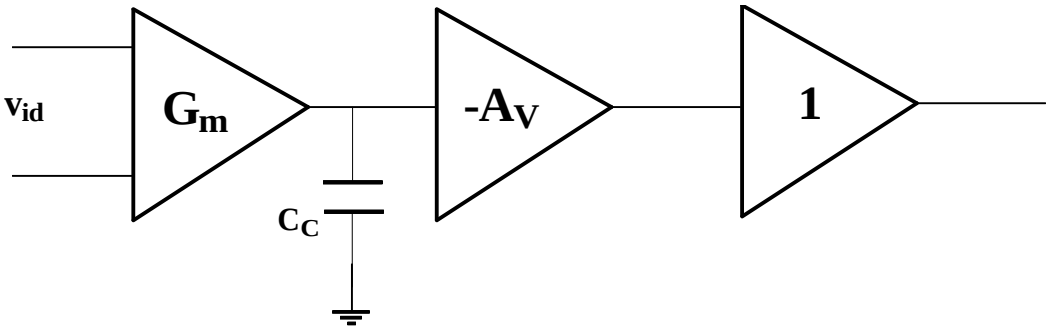


Lo stadio di ingresso è uno stadio differenziale con ingresso differenziale e uscita singola: esso è modellabile con una transconduttanza G_m che, a centro banda, sappiamo valere circa 0.19mA/V e presenta una resistenza di uscita di 6.7MΩ.

Lo stadio intermedio è uno stadio Darlington con guadagno A_V (invertente) di circa 500, resistenza di ingresso di 3.5MΩ e resistenza di uscita da 38kΩ.

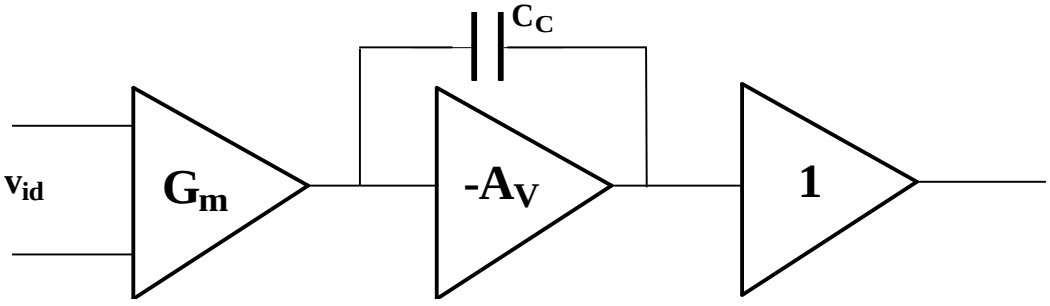
Lo stadio di uscita è un push-pull in classe AB con guadagno pressoché unitario e resistenza di ingresso bassa.

L'individuazione del nodo ad impedenza maggiore è abbastanza facile, in quanto si tratta del nodo di uscita del differenziale: infatti, questo nodo vede verso destra la resistenza di ingresso del Darlington (=3.5MΩ) e verso sinistra la resistenza di uscita del differenziale (=6.7MΩ). Allora, sia pure senza scendere nei dettagli analitici, si trova che, per compensare il circuito in modo da ottenere una buona frequenza di taglio superiore, è necessario porre, sul nodo ad impedenza maggiore una capacità di compensazione di 3000pF:



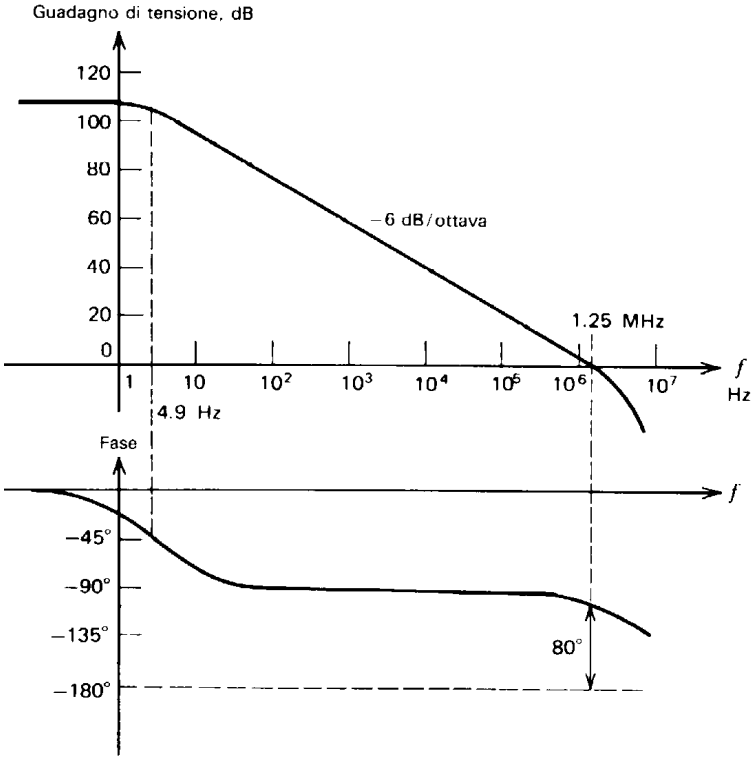
Come detto prima, è impossibile realizzare una simile capacità su una piastrina monolitica, in quanto è difficile, nella pratica, realizzare una capacità, in un circuito integrato, superiore a 50 pF. Dobbiamo perciò effettuare la compensazione in modo tale da non dover superare questi 50pF.

Si sfrutta allora l'**effetto Miller**, disponendo la capacità di compensazione come indicato nella figura seguente:



Si pone dunque C_C a cavallo dello stadio di guadagno: in tal modo, la C_C si trova tra due nodi tra i quali esiste un guadagno negativo di A_V, per cui essa è equivalente ad una capacità $C = (1 + A_V)C_C$ posta tra l'uscita del differenziale e massa: considerando che A_V=500 e che si prende C_C=30pF,

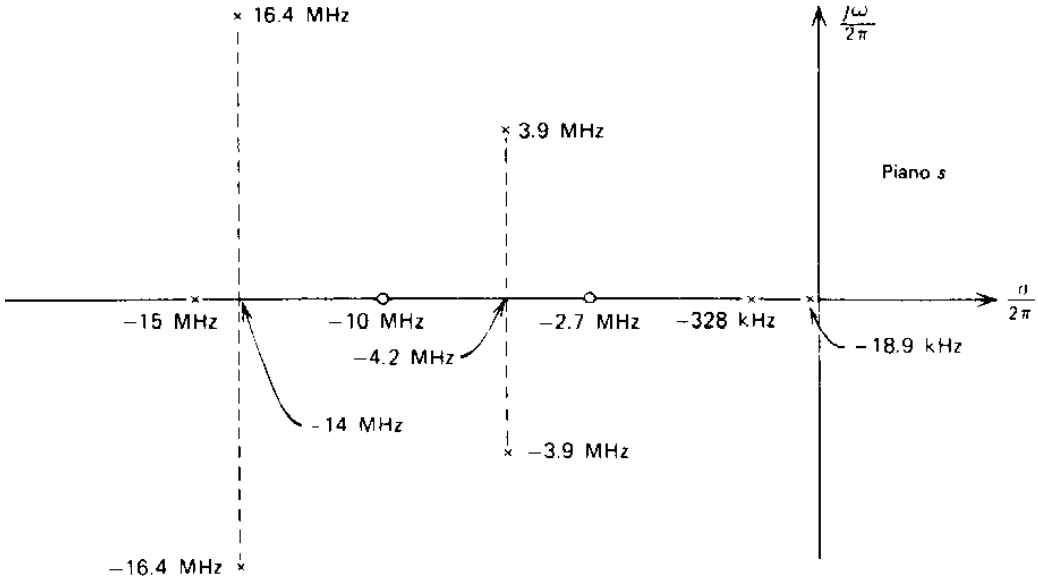
risulta una capacità C, posta tra l'uscita del differenziale e massa, da 15nF, più che sufficiente per ottenere la compensazione desiderata. Le curve di guadagno e di fase risultanti da questa compensazione sono riportate nella figura seguente:



Le curve mostrano che la frequenza di transizione del guadagno di tensione (ossia la frequenza alla quale il guadagno è unitario), è di 1.25 MHz, che il margine di fase è 80° e che il guadagno a bassa frequenza è 108dB.

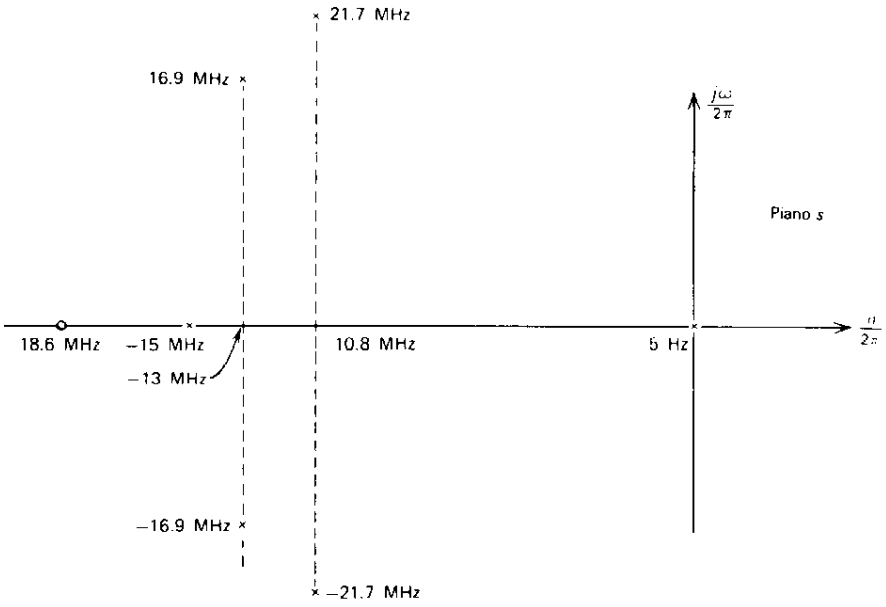
Questo tipo di compensazione, oltre a consentire l'uso di un piccolo condensatore che può essere tranquillamente integrato in una piastrina monolitica, comporta un altro effetto: si tratta del cosiddetto **fenomeno di separazione dei poli** (*pole splitting*).

Per illustrare questo fenomeno, riportiamo, nella figura seguente, la mappa dei poli e degli zeri più importanti del 741, così come sono stati ricavati dalle simulazioni, prima della compensazione:



Si osserva dunque che, prima della compensazione, il circuito presenta due poli importanti a bassa di frequenza, con valori **18.9 kHz** e **328 kHz**. In particolare, è possibile verificare che il polo dominante a 18.9 kHz è prodotto principalmente dalla capacità in parallelo alla base del primo transistore dello stadio Darlington di guadagno. Inoltre, si è verificato che il polo a 328 kHz è anch’esso legato ai transistori dello stadio Darlington. I rimanenti poli e zeri provengono invece da varie parti del circuito, inclusi lo stadio di ingresso e quello di uscita.

Allora, se i due poli dominanti del circuito sono legati ai due transistor dello stadio Darlington, è intuitivo aspettarsi che la capacità di compensazione posta a cavallo di tale stadio intervenga a modificare in qualche modo tali poli. Effettivamente, è così, in quanto, dopo la compensazione, c’è un sostanziale mutamento nella posizione dei poli e degli zeri del circuito, come mostrato nella figura seguente:

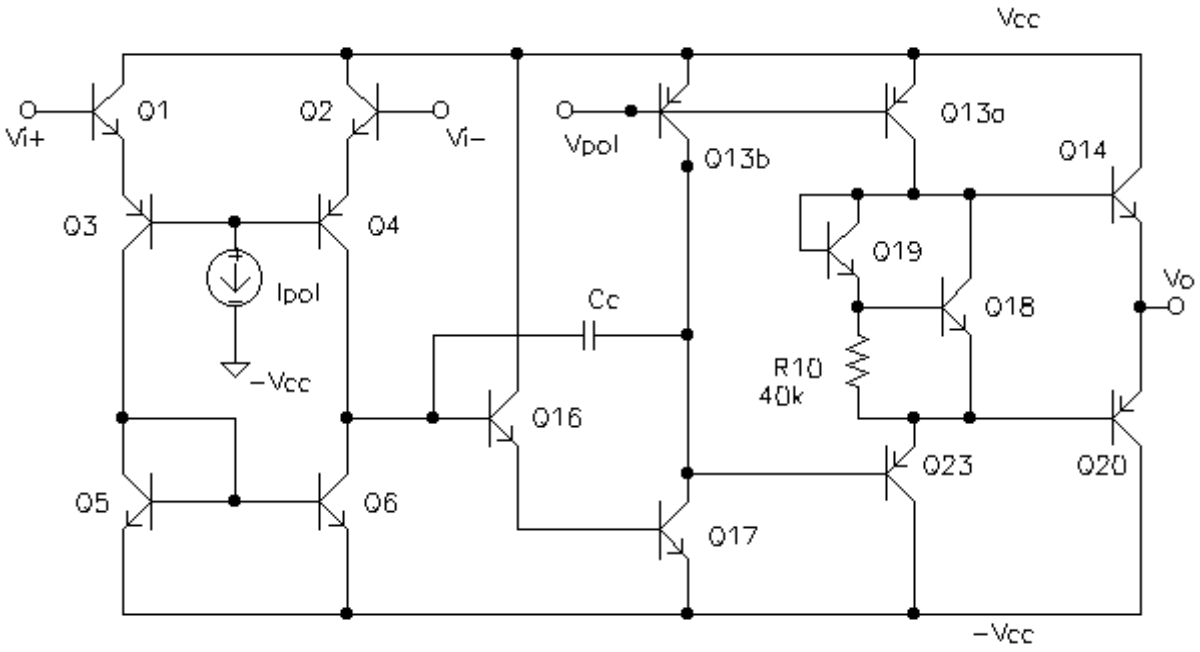


Si osserva che l’amplificatore possiede adesso un polo dominante a frequenza di 5 Hz, come si voleva deliberatamente ottenere tramite la compensazione, mentre l’altro polo, che prima della compensazione era a 328 kHz, adesso è stato praticamente eliminato, visto che è passato ad una frequenza talmente più alta da non essere nemmeno riportato.

C’è dunque un gruppo di poli, inclusa una coppia di poli complessi coniugati, con frequenze comprese tra 10 MHz e 15 MHz. Dato che il guadagno dell’amplificatore, in base alla compensazione, deve scendere ad 1 ad una frequenza inferiore a quella del secondo polo (per avere un adeguato margine di fase), la rimozione del polo a 328 kHz ha aumentato notevolmente la larghezza di banda ottenibile del circuito. Se questo polo non si fosse spostato, il condensatore di compensazione avrebbe dovuto essere regolato in modo da fare cadere il guadagno del 741 all’unità ad una frequenza inferiore a 328 kHz, con una conseguente drastica riduzione di banda.

La separazione appena descritta dei due poli a bassa frequenza del 741 è comunque un fenomeno abbastanza complesso che coinvolge altri poli e zeri a frequenza più alta propri dello stadio Darlington.

Per ultimo, riportiamo uno schema circuitale semplificato del µA-741 nel quale si evidenzia con precisione la posizione della capacità di compensazione a cavallo dello stadio Darlington:

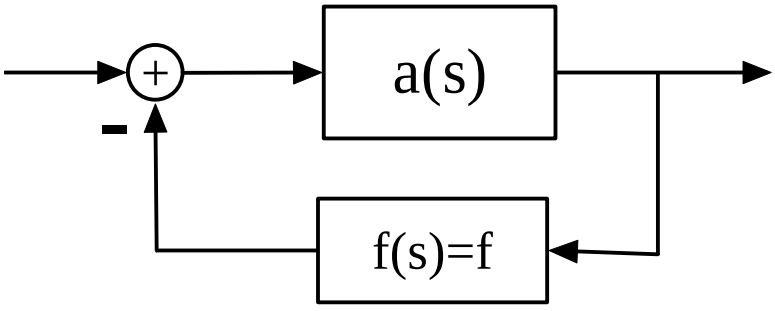


Tecniche del luogo delle radici

RICHIAMI SUL LUOGO DELLE RADICI

Fino a questo punto, le considerazioni che abbiamo fatto sono state principalmente concentrate su calcoli della stabilità degli amplificatori reazionati (negativamente) e sulla compensazione, utilizzando tecniche nel dominio della frequenza (diagrammi polari, diagrammi di Bode, criterio di stabilità di Nyquist). Queste tecniche permettono il progetto della compensazione degli amplificatori reazionati senza richiedere un eccessivo sforzo. *La tecnica del luogo delle radici comporta invece il calcolo dei poli e degli zeri effettivi dell'amplificatore, nonché del loro movimento nel piano di Gauss al variare del guadagno statico d'anello* $T_0=T(j0)$. Di conseguenza, si tratta di un metodo che fornisce più informazioni sulle prestazioni dell'amplificatore di quelle che sono state date dalle tecniche sopra esposte nel dominio della frequenza; questo, però, a spese di uno sforzo computazionale maggiore. Nella pratica, alcuni problemi possono essere risolti ugualmente bene usando l'uno o l'altro dei due metodi, mentre altri si risolvono più facilmente con l'uno o l'altro metodo.

Consideriamo dunque lo schema generico di un amplificatore inserito in un anello di reazione negativa:



Per semplicità, supponiamo che la rete di retroazione sia puramente resistiva (cioè caratterizzata da un fattore di reazione f costante): questa è una semplificazione utile nel nostro caso, visto che gli amplificatori da noi considerati rientrano generalmente in questa casistica, ma comporta delle differenze, che saranno evidenziate via via, con il caso in cui anche la rete di reazione presenta poli e zeri propri, ossia una funzione di trasferimento nella forma f(s).

Supponiamo che l’amplificatore di andata abbia una funzione di trasferimento razionale fratta del tipo seguente:

$$a(s) = a_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k)}$$

La funzione di trasferimento dell’amplificatore reazionato ha allora espressione

$$A(s) = \frac{a(s)}{1 + a(s)f} = \frac{a(s)}{1 + T(s)}$$

E’ evidente che i poli della funzione a(s) corrispondono anche ai poli della funzione T(s):

$$T(s) = a(s)f = a_0 f \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k)} = T_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k)}$$

Questo è dovuto al fatto che la rete di reazione è puramente resistiva, cioè f=costante, mentre invece la situazione cambia se anche f(s) presenta poli e zeri.

Sostituendo le espressioni di a(s) e T(s) in quella di A(s), abbiamo quanto segue:

$$A = \frac{a(s)}{1 + T(s)} = \frac{a_0 \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k) + T_0 \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}$$

Da questa espressione si deduce immediatamente che A(s) ha gli stessi zeri della funzione T(s), mentre ha poli in generale diversi, per cui possiamo affermare che ***l’anello di reazione non modifica gli zeri del sistema in anello aperto, mentre modifica i poli.*** Anche qui, è bene sottolineare che questo accade solo se il fattore di reazione f è una costante.

Il nostro scopo è individuare i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso A(s), noti che siano gli zeri e i poli della funzione T(s).

I poli di A(s) non sono altro che le radici della cosiddetta **equazione caratteristica**, che si ottiene uguagliando a zero il denominatore di A(s):

$$\boxed{1 + T(s) = 0}$$

In base all’espressione scritta prima per T(s), possiamo scrivere questa equazione nella forma:

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}=-\frac{1}{T_0}$$

Questa equazione mette in evidenza due cose fondamentali: intanto, si tratta di una equazione di ordine n (in quanto facciamo sempre l'ipotesi che sia m≤n), per cui ammette n zeri, ossia A(s) presenta tanti poli quanti ne presenta anche T(s); in secondo luogo, è evidente che queste radici sono funzioni del guadagno statico d'anello T_0: per ogni assegnato valore di T_0, si hanno n poli diversi. Allora, al variare di T_0 (tra 0 ed ∞), le radici dell'equazione caratteristica descrivono nel piano complesso una o più curve (a seconda del numero di radici) cui si dà il nome di **luogo delle radici**.

Al variare di T_0, questa equazione ammette dunque radici diverse. Avendo a che fare con quantità complesse, quella equazione è equivalente a due diverse equazioni, una per l'uguaglianza dei moduli e l'altra per l'uguaglianza degli argomenti: tenendo conto che il modulo e l'argomento di $-1/T_0$ sono rispettivamente $1/T_0$ e che $(2\nu+1)\pi$ (con ν intero positivo o negativo), le due equazioni sono

$$\text{relazione sui moduli} \longrightarrow \frac{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{k=1}^{n}|s-p_k|}=\frac{1}{T_0}$$

$$\text{relazione sugli argomenti} \longrightarrow \sum_{i=1}^{m}\arg(s-z_i)-\sum_{k=1}^{n}\arg(s-p_k)=(2\nu+1)\pi$$

Queste due relazioni definiscono dunque analiticamente il luogo delle radici del sistema considerato. La seconda relazione (**relazione sugli argomenti**) è quella più importante, in quanto definisce tutti i punti che appartengono al luogo considerato, mentre la prima relazione (**relazione sui moduli**) serve solo ad individuare il valore di T_0 corrispondente ai singoli punti del luogo stesso.

LUOGO DELLE RADICI PER UNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO A 3 POLI

Consideriamo un amplificatore la cui funzione di trasferimento presenti 3 poli identici:

$$a(s)=\frac{a_0}{\left(1-j\frac{s}{p_1}\right)^3}$$

Chiudendo questo amplificatore in un anello di reazione negativa con fattore di retroazione f costante, si ottiene un amplificatore controreazionato avente la seguente funzione di trasferimento:

$$A(s)=\frac{a(s)}{1+a(s)f}=..=\frac{a_0}{\left(1-j\frac{s}{p_1}\right)^3+T_0}$$

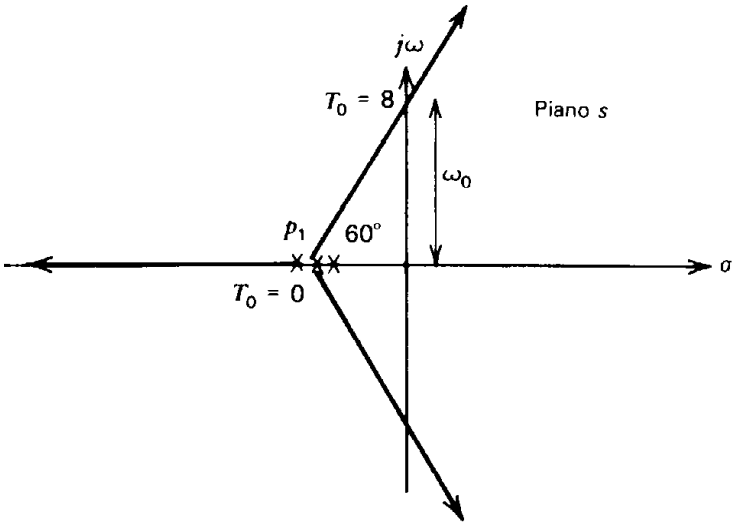
I poli di questa funzione sono le radici dell'equazione caratteristica ottenuta uguagliando a zero il denominatore. Analiticamente, non è difficile (in questo caso) trovare le espressioni di tali poli:

$$s_1 = p_1\left(1+\sqrt[3]{T_0}\right)$$
$$s_2 = p_1\left(1-\sqrt[3]{T_0}\,e^{j60°}\right)$$
$$s_3 = p_1\left(1-\sqrt[3]{T_0}\,e^{-j60°}\right)$$

Queste formule permettono il calcolo dei tre poli dell'amplificatore controreazionato per un qualsiasi valore del guadagno statico d'anello T_0:

- per T_0=0, ossia in assenza di reazione, si trovano semplicemente i poli dell'amplificatore di andata, situati tutti e tre sull'asse reale negativo;
- all'aumentare di T_0, invece, il polo s_1 si muove sull'asse reale negativo allontanandosi dall'origine, mentre gli altri due (complessi coniugati) lasciano l'asse reale ad un angolo di 60° e si spostano verso il semipiano destro.

L'andamento completo dei poli al variare di T_0, ossia appunto il luogo delle radici del sistema considerato, è riportato nella figura seguente:



Ogni punto del diagramma è identificato da un corrispondente valore di T_0.
Un punto di particolare importanza è il valore di T_0 in corrispondenza del quale i due poli complessi coniugati vengono a trovarsi sull'asse immaginario (l'importanza deriva dal fatto che, in corrispondenza di questa situazione, il sistema prende ad oscillare): per trovare tale valore, basta imporre che sia nulla la parte reale di s_2 ed s_3, in modo da ottenere

$$\mathrm{Re}(s_2) = \mathrm{Re}(s_3) = \mathrm{Re}\left\{p_1\left(1-\sqrt[3]{T_0}\,e^{\pm j60°}\right)\right\} = 1 - T_0\cos 60° \longrightarrow \mathbf{T_0 = 8}$$

Quindi, quando T_0 vale 8, il sistema prende ad oscillare, mentre, se T_0 è maggiore di 8, il sistema diventa instabile.

La cosa interessante da notare è che questo valore non dipende in alcun modo dal valore dei tre poli dell'amplificatore di andata, dal che deduciamo che si tratta di un valore caratteristico degli amplificatori aventi 3 poli identici: *un qualsiasi amplificatore con 3 poli*

identici diventa instabile per un guadagno statico d'anello T_0 maggiore di 8. Questa è ovviamente una condizione molto restrittiva e mette in evidenza la necessità della compensazione quando sono richiesti valori più grandi di T_0.

Osserviamo inoltre che la tecnica del luogo delle radici non solo fornisce il valore di T_0 che causa instabilità, ma permette anche il calcolo dei poli dell'amplificatore per valori di T_0 minori di 8, permettendo così il calcolo della risposta dell'amplificatore sia in regime sinusoidale sia in regime transitorio.

Sempre usando il luogo delle radici, è facile calcolare anche la frequenza di oscillazione del sistema nel caso in cui T_0=8: infatti, con riferimento al luogo tracciato prima, tale frequenza di oscillazione ω_0 è pari alla distanza di ciascuno dei due poli complessi coniugati dall'origine, ossia è pari al coefficiente della parte immaginaria dei due poli, per cui vale

$$\omega_0 = |p_1| \tan 60° = 1.732|p_1|$$

Quindi, quando i poli si trovano sull'asse immaginario, il coefficiente della loro parte immaginaria vale $\omega_0 = 1.732|p_1|$ e questa è quindi la frequenza della risposta sinusoidale: in altre parole, se i poli complessi coniugati si trovano a $(\pm j\omega_0)$, la risposta in transitorio del circuito contiene un termine $K\sin(\omega_0 t)$ che corrisponde ad una *oscillazione permanente* (la costante K deriva dalle condizioni iniziali). Se poi i due poli passano poi nel semipiano destro, cioè si trovano a $(\sigma \pm j\omega_0)$, la risposta in transitorio del circuito contiene un termine $Ke^{\sigma t}\sin(\omega_0 t)$ che corrisponde ad una oscillazione crescente e quindi ad una *condizione di instabilità*.

Il valore di T_0 che causa instabilità può anche essere calcolato utilizzando l'approccio nel dominio delle frequenze ed il criterio di stabilità di Nyquist: si tratta di calcolare il margine di ampiezza dell'amplificatore di andata e di imporre la condizione di stabilità di Nyquist, in base alla quale tale margine di ampiezza deve essere minore di 1. Vediamo i dettagli.

Il guadagno d'anello espresso in funzione della frequenza ha la seguente espressione:

$$T(j\omega) = a(j\omega)f = \frac{a_0 f}{\left(1 + j\frac{\omega}{|p_1|}\right)^3}$$

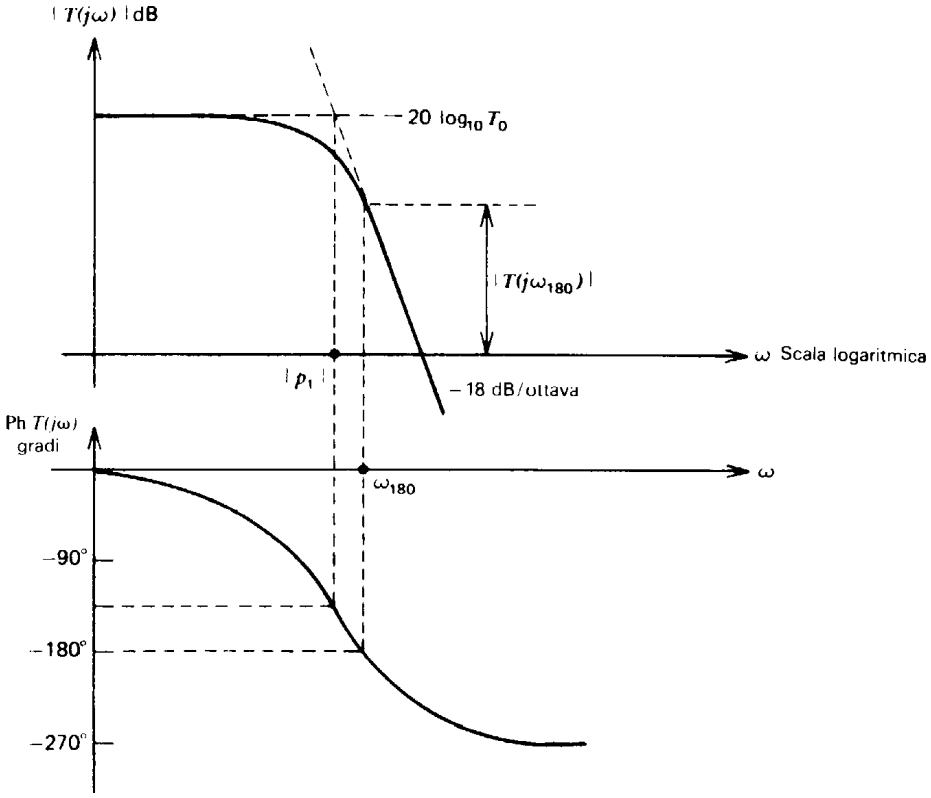
dove ovviamente $|p_1| = \omega_1$ è la frequenza corrispondente al polo triplo dell'amplificatore di andata.

L'ampiezza e la fase di T(jω) hanno le seguenti espressioni:

$$|T(j\omega)| = \frac{a_0 f}{\left|1 + j\frac{\omega}{|p_1|}\right|^3} = \frac{a_0 f}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{|p_1|}\right)^2}\right]^3}$$

$$\arg T(j\omega) = \arg(a_0 f) - 3\arg\left(1 + j\frac{\omega}{|p_1|}\right) = -3\arg\left(1 + j\frac{\omega}{|p_1|}\right) = -3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{|p_1|}\right)$$

Graficamente, l'andamento dell'ampiezza e della fase di T(jω) con ω è rappresentabile tramite i diagrammi di Bode, come nella figura seguente:



La frequenza che ci interessa è quella in corrispondenza della quale la fase di T(jω) vale -180°; indicandola con ω_{180}, possiamo calcolarla direttamente dall'espressione della fase di T(jω):

$$\arg T(j_{180}) = -180° \longrightarrow -3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_{180}}{|p_1|}\right) = -180° \longrightarrow \frac{\omega_{180}}{|p_1|} = \mathrm{tg}60° \longrightarrow \omega_{180} = |p_1|\,\mathrm{tg}60° = 1.732|p_1|$$

Si tratta, ovviamente, della stessa pulsazione ω_0 calcolata prima. Il margine di ampiezza corrisponde al modulo di T(jω) in corrispondenza di tale frequenza:

$$|T(j\omega_{180})| = \frac{a_0 f}{\left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{180}}{|p_1|}\right)^2}\right]^3} = \frac{T_0}{\left[\sqrt{1+(1.732)^2}\right]^3} = \frac{T_0}{8}$$

A questo punto, il criterio di stabilità di Nyquist dice che il sistema è stabile in anello chiuso se il margine di ampiezza è minore di 1: imponendo perciò $|T(j\omega_{180})| < 1$, si ottiene evidentemente $T_0<8$, così come avevamo trovato prima con la tecnica del luogo delle radici. L'oscillazione si ha ovviamente, in corrispondenza di $\omega=\omega_{180}=\omega_0$, quando $|T(j\omega_{180})| = 1$: in questo caso, infatti, il guadagno di feedback del sistema vale

$$A(j\omega_{180}) = \frac{a(j\omega_{180})}{1+T(j\omega_{180})} = \frac{a(j\omega_{180})}{1+(-1)} = \infty$$

per qualsiasi valore del guadagno $a(j\omega_{180})$ dell'amplificatore di andata.

REGOLE PER LA COSTRUZIONE DEL LUOGO DELLE RADICI

Nell'esempio semplice esaminato nel paragrafo precedente era possibile calcolare le espressioni analitiche esatte dei poli dell'amplificatore in funzione di T_0, in modo da tracciare esattamente il luogo delle radici dell'amplificatore stesso. Nella maggior parte dei casi pratici, invece, questo è molto difficile, perché è necessaria la soluzione di una equazione polinomiale del terzo ordine o di ordine superiore. Di conseguenza, *sono state sviluppate delle regole che permettono di tracciare approssimativamente il luogo delle radici senza richiedere il calcolo esatto della posizione dei poli.*

Queste regole valgono per i casi più generali, ossia supponendo che sia l'amplificatore di andata sia la rete di reazione abbiano propri poli e propri zeri: in altre parole, si considera sempre un guadagno d'anello avente espressione

$$T(s) = a(s)f(s) = a_0 \frac{N_a(s)}{D_a(s)} f_0 \frac{N_f(s)}{D_f(s)}$$

cui corrisponde una funzione di trasferimento dell'amplificatore reazionato avente espressione

$$A(s) = \frac{a(s)}{1+T(s)} = \frac{a_0 \dfrac{N_a(s)}{D_a(s)}}{1+a_0 f_0 \dfrac{N_a(s)}{D_a(s)} \dfrac{N_f(s)}{D_f(s)}} = \frac{a_0 N_a(s) D_f(s)}{D_a(s) D_f(s) + T_0 N_a(s) N_f(s)}$$

Gli zeri di A(s), in base a questa espressione, coincidono con gli zeri di a(s) e con i poli di f(s), mentre i poli di A(s) sono le soluzioni della seguente equazione caratteristica:

$$D_a(s) D_f(s) + T_0 N_a(s) N_f(s) = 0$$

che possiamo anche esprimere nella forma seguente:

$$\boxed{\frac{N_a(s) N_f(s)}{D_a(s) D_f(s)} = -\frac{1}{T_0}}$$

Da questa espressione, esplicitando i vari termini a primo membro, si ottengono la **relazione sugli argomenti** e la **relazione sui moduli**. Sulla base di queste relazioni, che per semplicità non riportiamo, sono state individuate le seguenti regole per la costruzione del luogo delle radici:

- *Regola 1 - Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale*

  Questa proprietà deriva dal fatto che, in corrispondenza di ogni polo o zero complesso c'è sempre il suo coniugato posto simmetricamente rispetto all'asse reale.

- *Regola 2 - Se n è il grado del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento T(s), allora il luogo delle radici è costituito da n rami*

  Questa proprietà ci dice che il luogo delle radici presenta tanti rami quanti sono i poli della funzione T(s): il motivo è chiaramente nel fatto che ciascuno di questi poli varia la propria posizione al variare di T_0, dando origine appunto ad n rami.

- *Regola 3 - Il luogo delle radici parte dai poli della funzione T(s)*

  Questa proprietà dice che ogni ramo del luogo delle radici parte dal corrispondente polo della funzione T(s).

- *Regola 4 – Il luogo delle radici termina negli zeri della funzione T(s) oppure all'infinito*

  Questa regola ci dice che i rami che costituiscono il luogo delle radici terminano tutti negli zeri della funzione T(s); questo, ovviamente, a patto che gli zeri siano in numero (m) pari al numero (n) dei poli; se, invece, risulta m<n, allora ci sono dei rami che non possono terminare ciascuno in uno zero, per cui vanno all'infinito. Ci si può esprimere dicendo che *i rami del luogo delle radici tendono agli m zeri al finito ed agli n-m zeri all'infinito.* Sarà in seguito enunciata una regola che consente di individuare le cosiddette **direzioni asintotiche** del luogo, ossia il modo cui alcuni rami tendono eventualmente all'infinito.

- *Regola 5 – I punti dell'asse reale che appartengono al luogo delle radici sono quelli che lasciano alla propria destro un numero dispari di singolarità (cioè di poli o di zeri) della funzione T(s)*

  Questa regola consente semplicemente di individuare se ci sono punti (e quali sono) dell'asse reale che appartengono al luogo delle radici. Essa è una diretta conseguenza della relazione sugli argomenti (derivante dall'equazione caratteristica) ed è bene sottolineare che vale solo nel caso in cui $T_0>0$.

Queste prime 5 regole consentono di tracciare qualitativamente il luogo delle radici nei casi semplici. Seguono adesso altre regole che aiutano invece nei casi più complessi:

- *Regola 6 - Tutti i segmenti del luogo che si trovano sull'asse reale tra coppie di poli (o coppie di zeri) di T(s) devono, in corrispondenza di qualche punto interno (detto **punto di diramazione**), deviare dall'asse reale. La deviazione avviene sempre ad angolo retto*

- *Regola 7 - Se i rami del luogo abbandonano l'asse reale, lo fanno in un punto (detto **punto di diramazione**) in cui la somma vettoriale dei reciproci delle distanze rispetto ai poli di T(s) è pari alla somma vettoriale dei reciproci delle distanze rispetto agli zeri di T(s)*

- *Regola 8 - I rami del luogo che terminano all'infinito, lo fanno seguendo degli **asintoti** così caratterizzati:*

  * *gli asintoti si incontrano in un punto dell'asse reale (detto centroide) di valore*

$$\sigma_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{i=1}^{n} z_i}{n-m}$$

dove p_k sono i poli (in numero n) di T(s) e z_i sono gli zeri (in numero m) di T(s)

* *gli asintoti formano con l'asse reale un angolo di valore*

$$\frac{(2n+1)p}{n-m}$$

dove ν varia tra 0 ed n-1

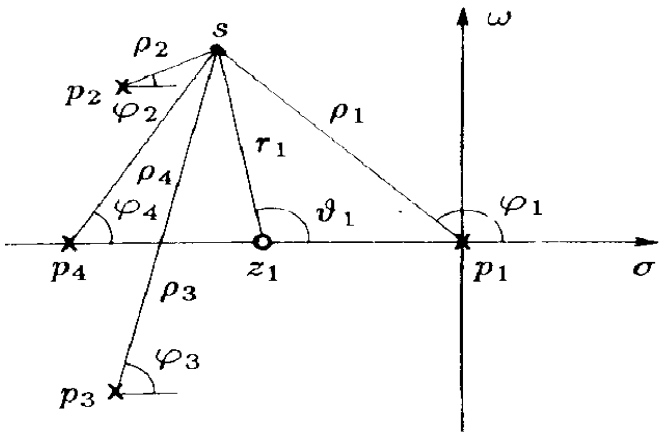
E' importante osservare come tutte queste regole sono basate solo sulla **relazione degli argomenti**. Una volta che il luogo è stato tracciato approssimativamente, esso può essere tarato, mediante la **relazione dei moduli**, in base ai valori del guadagno statico d'anello T_0 calcolati in qualsiasi punto desiderato.

Esempio di taratura di un luogo delle radici

Consideriamo un amplificatore chiuso in un anello di reazione con fattore di reazione costante. Supponiamo che il guadagno d'anello T(s) abbia la seguente espressione:

$$T(s) = T_0 \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)}$$

In particolare, supponiamo che lo zero e i 4 poli di T(s) sia disposti, nel piano complesso, come indicato nella figura seguente:



Si osserva, dunque, un polo nell'origine (p_1) e gli altri tre poli a parte reale negativa (uno dei tre poli, p_4, è reale, mentre gli altri due sono complessi coniugati): possiamo allora esprimere meglio la funzione T(s) nella forma

$$T(s) = \frac{s - r_1}{s(s - (\sigma_2 + j\omega_2))(s - (\sigma_2 - j\omega_2))(s - \sigma_4)}$$

Consideriamo il punto s indicato nella figura precedente, individuato dal raggio ρ_1 e dalla fase φ_1: ci chiediamo se questo punto appartenga al luogo delle radici del sistema in anello chiuso,

ossia, in termini concreti, se esiste un valore di $T_0=a_0 f$ tale che il sistema in anello chiuso abbia un polo in s.
Un problema del genere si risolve nel modo seguente: la condizione necessaria e sufficiente affinché il punto s appartenga al luogo delle radici è che esso soddisfi alla relazione sui moduli, ossia alla condizione

$$\arg T(s) = (2\nu+1)\pi \qquad \nu \text{ intero}$$

Dobbiamo allora determinare ancora una volta l'argomento di T(s): in base alla simbologia usata nella figura, è facile accorgersi che

$$\arg T(s) = \theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$$

per cui l'argomento φ_1 di s deve soddisfare all'equazione

$$\theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = (2\nu+1)\pi \qquad \nu \text{ intero}$$

Se φ_1 è stato già fissato, come noi stiamo supponendo, allora bisogna solo controllare che si tratti di una identità; al contrario, se φ_1 non fosse stato fissato, lo si potrebbe determinare proprio dall'equazione: ciò che deve risultare è che

$$\varphi_1 = \theta_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - (2\nu+1)\pi$$

Supponiamo che φ_1 soddisfi a tale condizione, il che significa che s appartiene al luogo delle radici del sistema; resta da determinare il valore della costante T_0 in corrispondenza del quale s risulta essere un polo per il sistema: questo valore è dato dall'equazione sul modulo di T(s):

$$|T(s)| = \frac{1}{T_0}$$

Nel nostro caso, riferendoci sempre alla simbologia usata in figura, risulta $|T(s)| = \frac{1}{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}$, per cui abbiamo che

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4} = \frac{1}{T_0} \longrightarrow T_0 = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$$

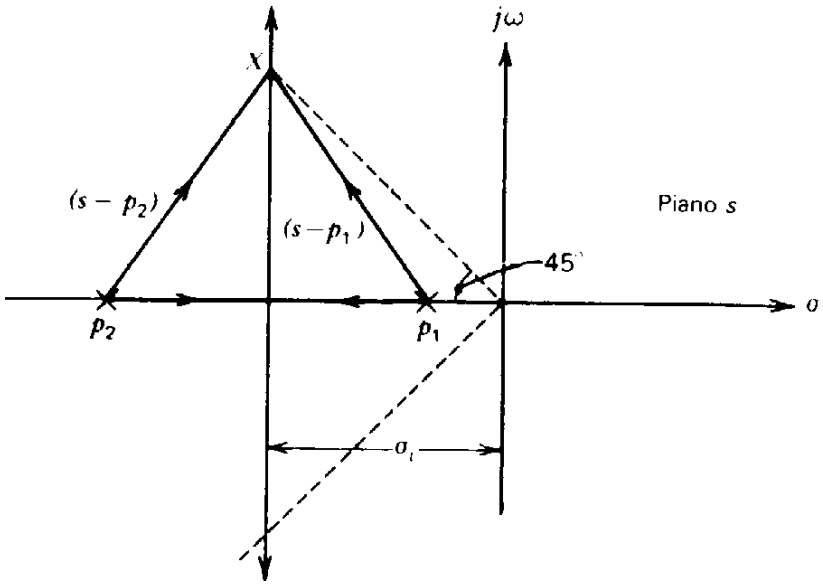
Quindi, in conclusione, prendendo $T_0 = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$, siamo certi che s è un polo per il sistema in anello chiuso considerato.

LUOGO DELLE RADICI PER LA COMPENSAZIONE A POLO DOMINANTE

Abbiamo in precedenza visto come si può compensare un amplificatore, al fine di ottenere un prefissato margine di fase, tramite l'introduzione di un nuovo polo dominante: in particolare, il dimensionamento del nuovo polo dominante è stato condotto usando metodi nel dominio della frequenza e, precisamente, usando i diagrammi di Bode. Un metodo alternativo per effettuare tale dimensionamento è basato sull'impiego del luogo delle radici, per cui vediamo di che si tratta.

Consideriamo un amplificatore (ad esempio un operazionale) che sia stato già compensato tramite l'introduzione di un nuovo polo dominante: indichiamo con p_1 (da considerarsi ovviamente negativo)

la posizione di tale nuovo polo. Supponiamo inoltre che il secondo polo sia in p_2: se trascuriamo l'effetto di poli a frequenza ancora superiore, è immediato tracciare il luogo delle radici dell'amplificatore nel caso in cui venga applicata una controreazione resistiva:



Al crescere di T_0, i rami del luogo convergono e poi si separano (in corrispondenza del punto medio), in modo tale che i due poli diventino complessi. Quando T_0 diviene grande, la parte immaginaria dei poli diventa grande e si arriva ad un certo valore di T_0 in corrispondenza del quale il circuito acquista un **picco nella risposta in frequenza complessiva** $A(j\omega)$. Questo è in accordo con quanto già visto a proposito del picco nel guadagno $A(j\omega)$ che si verifica al diminuire del margine di fase.

Fatta questa premessa teorica, ci poniamo il seguente problema: vogliamo scegliere il nuovo polo dominante p_1 in modo da ottenere la massima larghezza di banda, ma, contemporaneamente, in modo da non avere alcun picco nella risposta in frequenza.

Se ragionassimo nel dominio della frequenza, la condizione per non avere picchi nella risposta in frequenza sarebbe un margine di fase di 45° o inferiore. In termini, invece, di luogo delle radici e quindi di posizione dei poli in anello chiuso, *l'assenza di picchi si ottiene imponendo un'altra precisa condizione: i poli in anello chiuso non devono andare al di là dei punti indicati con X sul luogo tracciato prima, dove un angolo di 45° è formato tra l'asse reale negativo e una linea tracciata da X verso l'origine.*

Per prima cosa, allora, andiamo ad individuare il valore del guadagno statico d'anello T_0 corrispondente al punto X: mediante una operazione di taratura, eseguita utilizzando la relazione sui moduli $|T(s)| = \frac{1}{T_0}$, si ottiene

$$T_0 = \frac{1}{2}\left|\frac{p_2}{p_1}\right|$$

In corrispondenza, quindi, di questo valore del guadagno statico d'anello, i poli dell'amplificatore reazionato si trovano nella posizione X: allora, noto p_2 (che è il polo dominante dell'amplificatore in anello aperto prima della compensazione) e fissato il valore di T_0 necessario a garantire una adeguata larghezza di banda, quella relazione consente di calcolare il valore di p_1 necessario a portare i poli in anello chiuso a 45°, in modo da non aver picchi nella risposta in frequenza.

N.B. Facciamo osservare che la condizione di avere i poli ad anello chiuso a 45° rispetto all'asse reale negativo equivale alla condizione per cui Q<0.707, dove Q è il cosiddetto **fattore di qualità** dei poli stessi, pari a $1/2\delta$, dove δ è il **coefficiente di smorzamento**.

A questo punto, si può comprendere facilmente l'effetto della *riduzione della banda dell'amplificatore*: infatti, man mano che $|p_1|$ diventa più piccolo (cioè man mano che si introduce il nuovo polo dominante a frequenza sempre più piccola), aumenta il valore di T_0 necessario per portare i poli a 45°.

Esempio numerico

Consideriamo l'amplificatore operazionale μA-741: vogliamo calcolare il guadagno statico d'anello richiesto per produrre poli a 45° rispetto all'asse reale negativo.

Cominciamo col ricordare che il μA-741 presenta i due poli principali rispettivamente a 18.9kHz ed a 328kHz. Assumendo che questi poli abbiano un peso dominante sul luogo delle radici in prossimità dell'origine, ci basta applicare la relazione $T_0 = \frac{1}{2}\left|\frac{p_2}{p_1}\right|$ per determinare il valore richiesto del guadagno statico d'anello:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left|\frac{328\text{kHz}}{18.9\text{kHz}}\right| = 8.7 (= 18.8\text{dB})$$

E' evidente che questo valore di T_0 è fortemente limitativo delle prestazioni dell'amplificatore. Allora, proviamo con la compensazione: supponiamo, per esempio, di compensare l'operazionale mediante una capacità da 0.3μF posta tra l'ingresso dello stadio Darlington e massa. In questo caso, risulta (dalle simulazioni) che il polo dominante è alla frequenza 0.27kHz, mentre il secondo polo si trova a 294kHz. Ripetendo allora il calcolo di prima, si trova che, per produrre tali poli a 45° rispetto all'asse reale negativo, è necessario un guadagno statico d'anello pari a

$$T_0 = \frac{1}{2}\left|\frac{p'_2}{p'_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{294\text{kHz}}{0.27\text{kHz}}\right| = 544000 (= 115\text{dB})$$

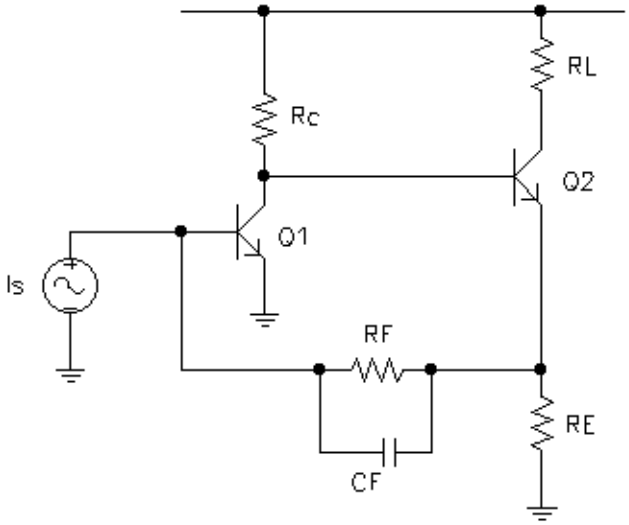
Questo valore di T_0 è decisamente più alto di quello trovato in assenza di compensazione. Considerando che il guadagno ad anello aperto del μA-741 è a_0[dB]=108dB, anche con retroazione massima pari a f=1 non si hanno picchi nella risposta in frequenza.

COMPENSAZIONE CON UNO ZERO NEL CAMMINO DI REAZIONE

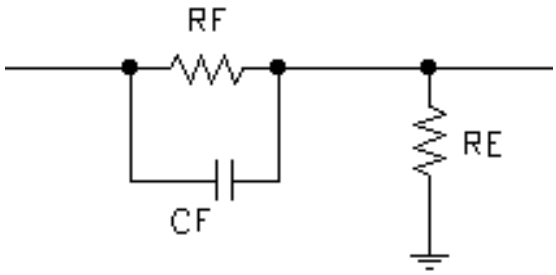
Le tecniche di compensazione descritte precedentemente in questo capitolo comportano la modifica del solo amplificatore base. Questo è il metodo universalmente usato per gli amplificatori operazionali che devono essere compensati per poter essere utilizzati con una gran varietà di reti di controreazione scelte dall'utilizzatore. Tuttavia, questo metodo è assai poco efficiente dal punto di vista della larghezza di banda, come abbiamo ampiamente osservato.

In questo paragrafo descriviamo allora un metodo diverso di compensazione, che comporta la modifica del camino di controreazione ed è solitamente impiegato solo negli amplificatori a guadagno fisso o, comunque, negli amplificatori impiegati in *applicazioni a larga banda*, dove appunto la banda è di primaria importanza.

Nella figura seguente è riportato un amplificatore reazionato negativamente (con una connessione parallelo-serie) con cammino di reazione contenente un condensatore C_F:

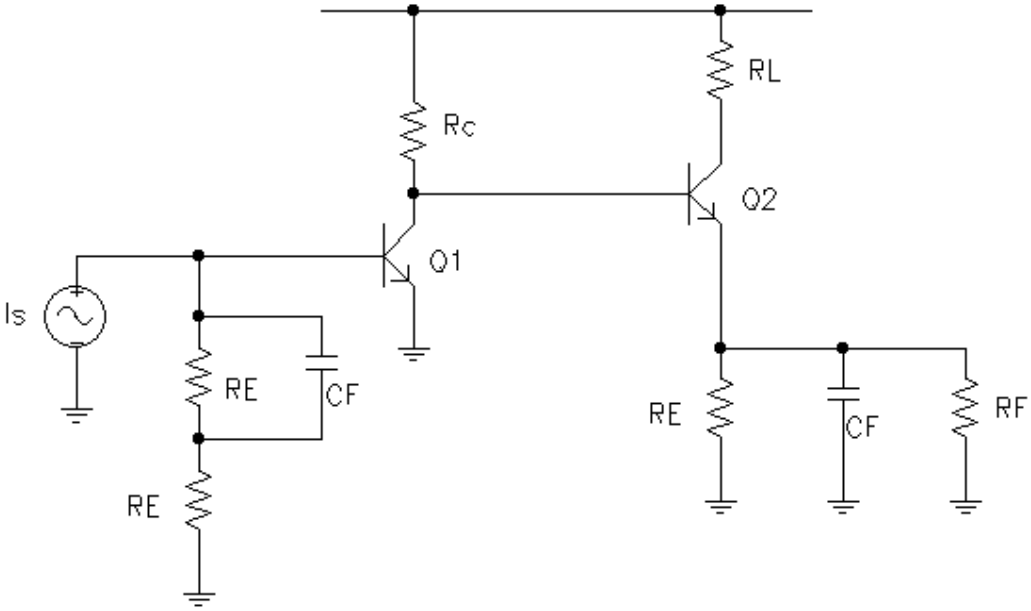


E' facile determinare gli effetti di carico esercitati dalla rete di reazione, che è riportata nella figura seguente:



In ingresso abbiamo una connessione parallelo, in quanto la rete di azione e quella di reazione hanno la stessa tensione di ingresso: per trovare il carico in uscita bisogna quindi cortocircuitare l'ingresso. In uscita abbiamo invece una connessione serie, in quanto la rete di reazione preleva la corrente di uscita della rete di azione (cioè la corrente di collettore di Q2): per trovare il carico in ingresso bisogna quindi aprire l'uscita.

Così facendo, si ottiene la seguente rete di reazione con gli effetti di carico:



In effetti, è facile rendersi conto che ***i condensatori in ingresso ed in uscita hanno un effetto trascurabile sulla funzione di trasferimento del circuito, mentre invece hanno notevole influenza sulla rete di reazione:*** usando infatti il metodo dei doppi bipoli, si trova facilmente che il fattore di reazione ha espressione

$$f(s) = -\frac{R_E}{R_F + R_E} \frac{1 + R_F C_F s}{1 + \frac{R_E R_F}{R_E + R_F} C_F s}$$

Questa funzione di trasferimento presenta

un valore statico $f_0 = -\frac{R_E}{R_F + R_E}$ (pari a quello che si avrebbe in assenza di C_F)

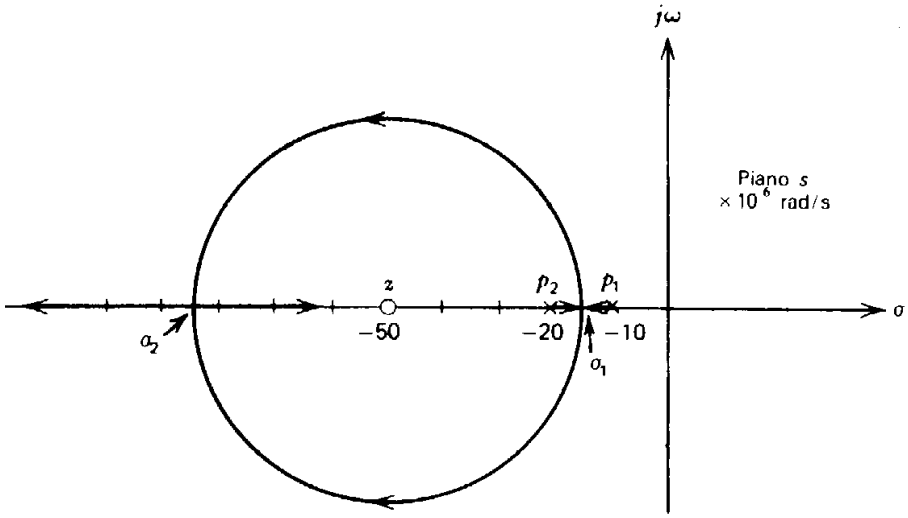
uno zero reale negativo in $z = -\frac{1}{R_F C_F}$

un polo reale negativo in $p = -\frac{R_E + R_F}{R_E} \frac{1}{R_F C_F} = -\frac{1}{f_0} z$.

Il valore $\frac{1}{f_0} = -\frac{R_E + R_F}{R_E}$ è pari approssimativamente al valore statico A_{f0} del guadagno di feedback dell’intero amplificatore reazionato. Questo stesso termine compare anche nell’espressione del polo, che praticamente è pari al prodotto $-\frac{1}{f_0} z$: dato che risulta generalmente $\frac{R_E + R_F}{R_E} >> 1$, deduciamo che la frequenza del polo è generalmente molto maggiore della frequenza dello zero. Mettiamoci allora in questa condizione e trascuriamo tale polo.

Passiamo adesso alla rete di azione con gli effetti di carico, riportata in precedenza: si trova che questo amplificatore presenta due poli importanti dovuti ai due transistor Q1 e Q2; tali due poli risultano senz’altro dominanti rispetto agli altri, situati a frequenze molto maggiori, per cui trascuriamo anche questi ultimi.

In definitiva, quindi, il guadagno d’anello T(s)=a(s)f(s) presenta due poli (associati al ramo diretto) ed uno zero (associato al ramo di reazione). Considerando che i due poli si trovano a frequenza più bassa rispetto a quella dello zero nel cammino di reazione, il luogo delle radici del sistema risulta essere il seguente:



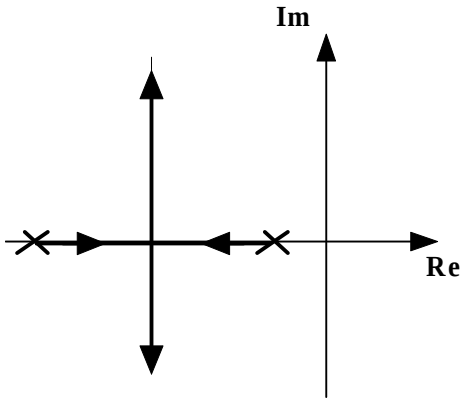
In questa figura, si sono usati valori tipici dei tre poli ed è stata effettuata una normalizzazione dei valori numerici a 10^6(rad/sec). Le coordinate del punto σ_1 (in cui il luogo emerge dall'asse reale) e del punto σ_2 (in cui il luogo ritorna sull'asse reale) si ottengono tramite la *regola 7*:

$$\frac{1}{\sigma_1+10}+\frac{1}{\sigma_1+20}=\frac{1}{\sigma_1+50}\longrightarrow\begin{cases}\sigma_1=-15.4\\ \sigma_2=-84.6\end{cases}$$

Si osserva che questi due punti sono equidistanti dallo zero ed infatti si può dimostrare che la porzione del luogo che non si trova sull'asse reale è in questo caso un cerchio con centro nello zero, come evidenziato nella figura precedente.

Un aspetto generale dell'andamento dei luoghi delle radici, che costituisce un utile ausilio nel tracciamento dei luoghi, è evidente dal luogo appena descritto come da tanti altri: ***il luogo tende ad incurvarsi verso gli zeri, come se ne fosse attratto, ed a curvare via dai poli, come se ne fosse respinto.***

A questo punto, esaminando il luogo appena tracciato, si comprende subito l'efficacia, ai fini della compensazione, dello zero inserito nel cammino di reazione: infatti, se non ci fosse lo zero nel cammino di reazione, l'amplificatore base avrebbe solo i due poli p_1 e p_2 , per cui, chiudendolo in retroazione, il luogo delle radici sarebbe del tipo indicato nella figura seguente:



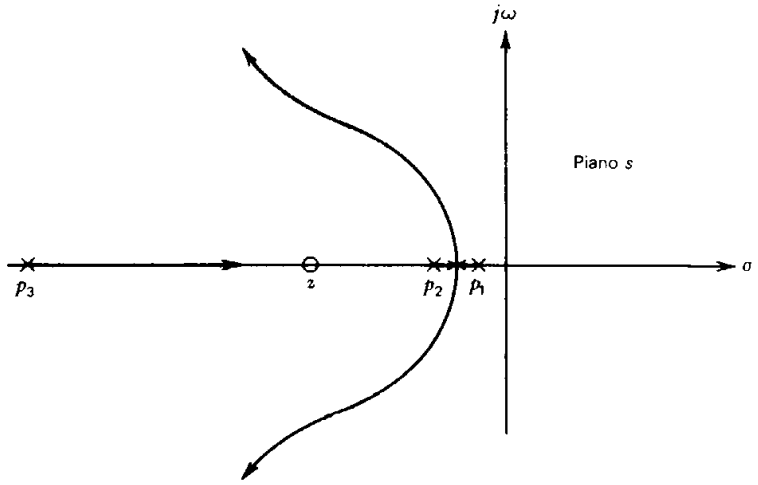
All'aumentare del guadagno statico d'anello T_0, i due poli prima si incontrano a metà strada e poi si separano, muovendosi parallelamente all'asse jω e in direzioni opposte. Per valori elevati di T_0, si avrebbero dunque valori elevati del fattore di qualità Q, dal che risulterebbe, come sappiamo, un picco troppo pronunciato nella risposta in frequenza. Senza poi considerare il fatto che, per valori elevati di T_0, possono subentrare anche i poli in alta frequenza, che potrebbero incurvare il luogo verso destra, col rischio di farlo entrare nel semipiano destro e quindi di causare instabilità.

Al contrario, l'introduzione dello zero nel cammino di reazione produce una curvatura che allontana il luogo dall'asse immaginario, mantenendo i poli all'interno di un settore, nel semipiano sinistro, corrispondente a valori senz'altro accettabili di Q.

E' importante osservare che il luogo delle radici dell'amplificatore appena considerato fornisce solo i poli dell'amplificatore reazionato (negativamente). Lo zero che compare nella figura è quello del cammino di reazione ed è anche uno zero per T(s) (si vedano, a questo proposito, le considerazioni analitiche fatte in precedenza circa l'espressione di T) e serve al tracciamento del luogo. Tale zero, però, NON è uno zero dell'amplificatore reazionato: infatti, sappiamo che gli zeri dell'amplificatore reazionato sono gli zeri dell'amplificatore base a(s) ed i poli della rete di reazione f(s). Dato, allora, che l'amplificatore base non possiede zeri ed abbiamo inoltre trascurato l'unico polo di f(s), deduciamo che l'amplificatore reazionato complessivo possiede due poli e nessuno zero. Dato che lo zero del cammino di reazione interessa il luogo delle radici, ma non appare come uno zero dell'amplificatore complessivo, lo si definisce talvolta **zero fantasma**.

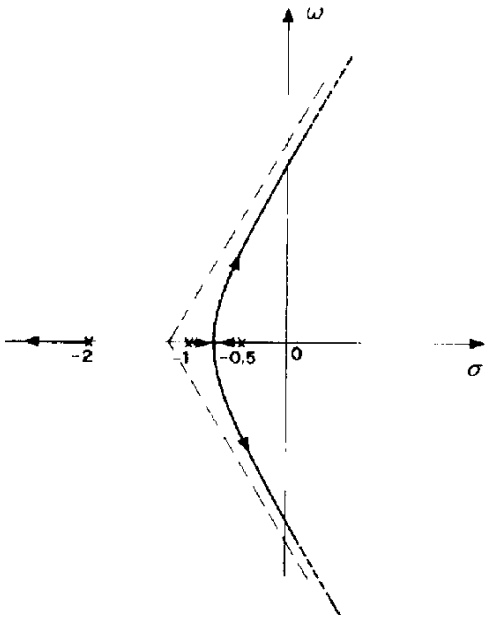
In più, è chiaro che, fissato il valore desiderato del guadagno statico d'anello T_0, ossia fissata, tramite il luogo, la posizione dei poli in anello chiuso, è possibile fare in modo che i poli si trovino in una posizione ben precisa, ad esempio a 45° rispetto all'asse reale negativo (in modo che la risposta in frequenza non presenti alcun picco): infatti, la posizione del luogo nel semipiano sinistro dipende dalla posizione dello zero e quindi dal calore di C_F, che quindi può essere dimensionata in modo da sistemare i poli nella posizione desiderata.

Continuando sempre con questo esempio, è interessante analizzare con maggiore dettaglio il luogo delle radici, includendo un polo remoto p_3 ad alta frequenza, come indicato nella figura seguente:



Il polo comporta una modifica notevole del luogo, in quanto fa deviare il luogo stesso dalla configurazione originale, producendo poli p_1 e p_2 con parte immaginaria più grande di quanto non fosse prima. Tuttavia, se è possibile adottare un valore non eccessivamente alto di T_0, i poli p_1 e p_2 rimangono comunque in posizione tale da dare un accettabile valore di Q e quindi anche una **risposta armonica accettabile**.

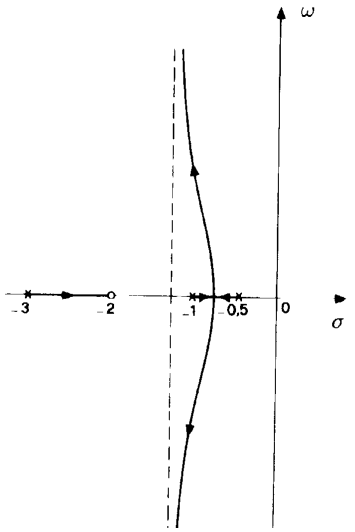
Vediamo adesso rapidamente un altro caso in cui è particolarmente evidente l'azione compensatrice di uno zero nel cammino di reazione. Supponiamo di avere un amplificatore reazionato avente 3 poli reali negativi in anello aperto. Il luogo delle radici di un tale amplificatore è illustrato nella figura seguente:



(dove i valori numerici sono puramente indicativi)

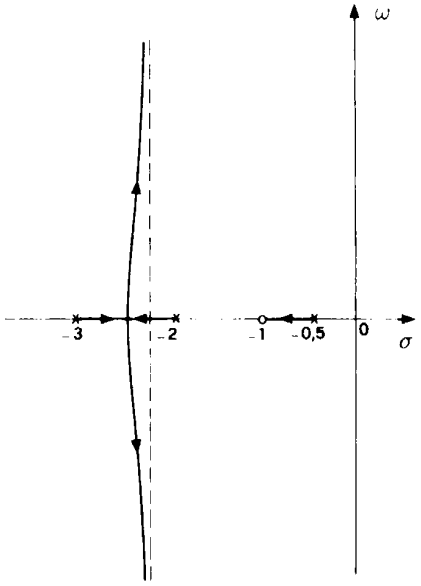
Si osserva chiaramente che questo amplificatore è a stabilità condizionata, nel senso che esiste un valore di T_0 (detto valore critico) oltre il quale due poli finiscono nel semipiano destro causando instabilità.

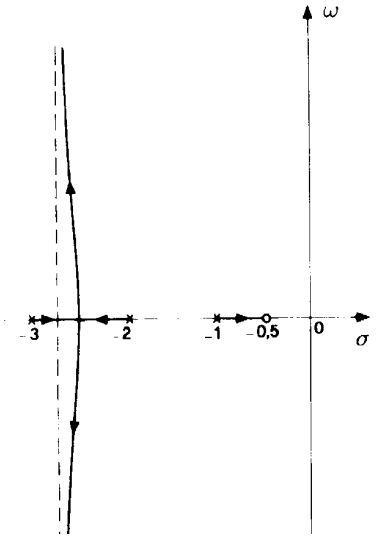
Se, allora, andiamo a sistemare uno zero nel cammino di reazione in modo che si trovi tra il secondo ed il terzo polo, il luogo si modifica nel modo seguente:



E' evidente che lo zero elimina il problema della stabilità condizionata, in quanto evita che il luogo penetri nel semipiano destro. Ci sono tuttavia problemi legati al valore di Q, che può risultare troppo elevato per valori alti di T_0.

Potevamo anche porre lo zero tra il secondo ed il primo polo oppure addirittura a destra del primo polo, ottenendo i luoghi indicati nelle figure seguenti:





In tutti i casi, la stabilità in anello chiuso è garantita per qualsiasi valore di T_0.

E’ possibile dimostrare che ***esiste una posizione precisa dei tre poli in anello chiuso tale da garantire una risposta in frequenza massimamente estesa:*** bisogna fare in modo che i tre poli siano equidistanti dall’origine. Il modo con cui imporre la posizione dei tre poli, una volta fissato il valore di T_0, è quello di posizionare in modo opportuno lo zero nel cammino di reazione.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1