

Appunti di “FISICA TECNICA”

Capitolo 12 - La conduzione

Conduzione monodimensionale in regime permanente	2
Pareti geometricamente semplici	2
<i>Parete piana</i>	2
Esempio numerico	3
<i>Cilindri cavi</i>	3
Osservazione: aria media logaritmica.....	5
Esempio numerico	7
<i>Effetti della conducibilità termica variabile</i>	7
Strutture composte.....	9
<i>Pareti composte: elementi in serie</i>	10
<i>Pareti composte: elementi in serie ed in parallelo</i>	12
<i>Cilindri coassiali</i>	12
<i>Spessore critico dell'isolante</i>	14
Esempio numerico: cavo elettrico coibentato	16
Sistemi con generazione di calore	16
<i>Piastra piana con generazione di calore uniformemente distribuita</i>	17
Esempio numerico	19
<i>Cilindro solido con generazione di calore uniformemente distribuita</i> .	20
Conduzione bidimensionale e tridimensionale.....	22
Metodi di analisi.....	22
Equazione generale della conduzione	22
<i>Soluzione analitica</i>	25
<i>Esempio</i>	26

Conduzione monodimensionale in regime permanente

PARETI GEOMETRICAMENTE SEMPLICI

In questi primi paragrafi vogliamo esaminare il fenomeno della **conduzione** del calore, in regime stazionario, attraverso sistemi semplici in cui la temperatura ed il flusso di calore sono funzioni di una sola coordinata. Vedremo invece in seguito come si procede nei casi generali in cui le coordinate da considerare sono 3.

Parete piana

Il caso più semplice di flusso termico monodimensionale è quello già trattato di conduzione del calore attraverso una parete piana:

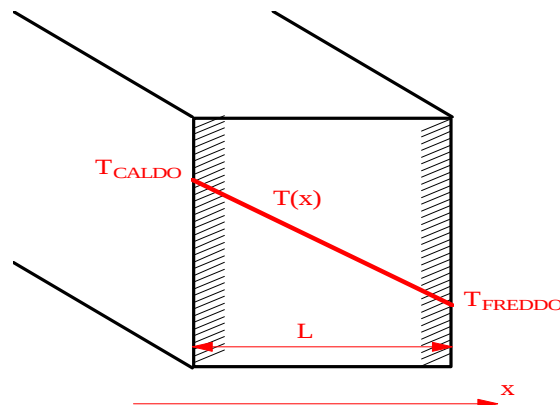


Figura 1 - Andamento della temperatura nella conduzione, a regime stazionario, attraverso una parete piana. L'asse delle x presenta l'origine in corrispondenza del bordo sinistro della parete

Questo semplice caso si può risolvere mediante separazione di variabili nell'equazione

$$q_k = -kA \frac{dT}{dx}$$

caratteristica del flusso di calore per conduzione:

$$q_k dx = -kAdT \xrightarrow{\text{integrando tra i due bordi della parete}} \int_0^L q_k dx = - \int_{T_{\text{CALDO}}}^{T_{\text{FREDDO}}} kAdT \longrightarrow q_k \int_0^L dx = -kA \int_{T_{\text{CALDO}}}^{T_{\text{FREDDO}}} dT$$

Da qui possiamo dunque concludere che

$$q_k = -k \frac{A}{L} (T_{\text{FREDDO}} - T_{\text{CALDO}}) = k \frac{A}{L} (T_{\text{CALDO}} - T_{\text{FREDDO}})$$

I limiti di integrazione impiegati sono sulla faccia sinistra ($x=0$ e $T=T_{\text{CALDO}}$) e sulla quella destra ($x=L$ e $T=T_{\text{FREDDO}}$) della parete. L'integrazione è stata inoltre compiuta ritenendo k indipendente dalla temperatura: questa è una approssimazione della realtà, che però non comporta quasi mai errori rilevanti.

Esempio numerico

Le superfici interne delle pareti di un grande edificio devono essere mantenute a 22°C mentre la superficie esterna è a -23°C . Le pareti hanno uno spessore di 25cm e sono costruite con mattoni aventi una conducibilità termica di $0.5\text{kcal/hm}^{\circ}\text{C}$. Vogliamo calcolare il calore disperso, per unità di area e di tempo, attraverso le pareti.

Se trascuriamo l'effetto degli angoli in cui le pareti si incontrano nonché l'effetto delle giunzioni tra i mattoni, vale l'equazione

$$\frac{q_k}{A} = k \frac{1}{L} (T_{\text{CALDO}} - T_{\text{FREDDO}})$$

Dobbiamo semplicemente sostituire le varie grandezze coinvolte, non prima di averle convertite nelle opportune unità di misura:

$$\frac{q_k}{A} = 0.5 \cdot \frac{1}{0.5} (22 - (-23)) = 90 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2} \right)$$

Abbiamo dunque trovato che 90kcal saranno disperse dall'edificio ogni ora e attraverso ogni metro quadro di area delle pareti.

Cilindri cavi

Consideriamo adesso un cilindro circolare cavo e la trasmissione di potenza termica, in direzione radiale, all'interno di esso: si tratta di un altro tipico problema di conduzione monodimensionale notevolmente importante nella pratica. Esempi classici sono la conduzione attraverso i tubi ed i rivestimenti di questi.

Facciamo dunque riferimento ad uno schema del tipo seguente:

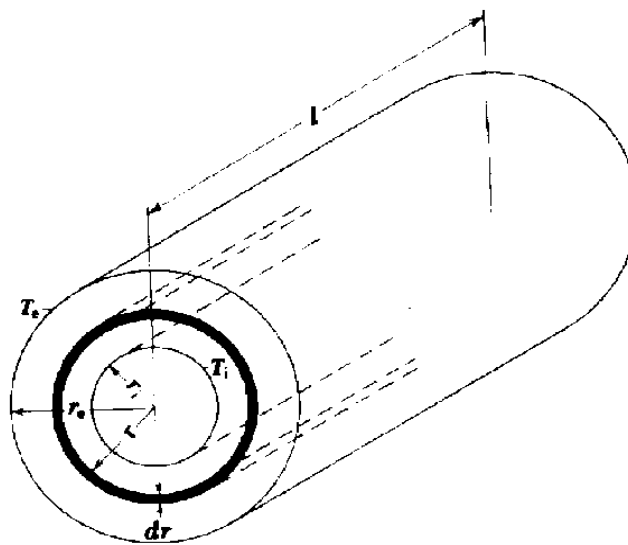


Figura 2 - Schema della nomenclatura per la conduzione attraverso un cilindro cavo

Facciamo l'ipotesi che il cilindro sia omogeneo (cioè a conducibilità termica k costante) e sia anche abbastanza lungo da poter trascurare gli *effetti delle estremità*. Indichiamo inoltre con T_i la temperatura (supposta uniforme) della superficie interna e con T_e la temperatura (supposta anch'essa uniforme) della superficie esterna. Sotto queste ipotesi, l'equazione da applicare è sempre quella indicata dal *postulato di Fourier*:

$$q_k = -kA \frac{dT}{dr}$$

dove il termine $\frac{dT}{dr}$ rappresenta questa volta la variazione di temperatura in direzione radiale.

Per il cilindro cavo della figura, l'area è funzione del raggio in quanto vale $A=2\pi r\ell$, dove r è la distanza (variabile) dall'asse del cilindro ed ℓ la lunghezza del cilindro stesso. La formula di prima diventa allora

$$q_k = -k2\pi\ell \frac{dT}{dr}$$

In questa equazione possiamo ancora una volta separare le variabili, che sono T ed r :

$$\frac{q_k}{2k\pi\ell} \frac{1}{r} dr = -dT$$

Possiamo adesso integrare ambo i membri, scegliendo opportunamente gli estremi di integrazione:

$$\frac{q_k}{2k\pi\ell} \int_{r_e}^{r_i} \frac{1}{r} dr = - \int_{T_e}^{T_i} dT \longrightarrow \frac{q_k}{2k\pi\ell} \ln \frac{r_i}{r_e} = T_e - T_i$$

Esplicitando la potenza termica q_k , possiamo dunque concludere che essa vale

$$q_k = \frac{2k\pi\ell}{\ln \frac{r_e}{r_i}} (T_i - T_e)$$

Questa relazione consente dunque il calcolo della potenza termica trasmessa per conduzione attraverso un cilindro circolare cavo come può essere considerato un **tubo**.

La relazione mostra che *la potenza termica trasmessa è direttamente proporzionale alla lunghezza del cilindro, alla conducibilità termica ed alla differenza di temperatura tra superficie interna ed esterna; è invece inversamente proporzionale al logaritmo naturale del rapporto r_e/r_i .*

E' facile accorgersi che, così come abbiamo fatto anche per la parete piana, possiamo definire una **resistenza termica conduttiva** anche per il cilindro cavo: ricordando che tale resistenza deve essere tale che $q_k = \Delta T / R_k$, deduciamo che risulta

$$R_k = \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2k\pi\ell}$$

Per ultimo, possiamo determinare come varia la temperatura all'interno della parete passando da T_i a T_e : riprendendo infatti l'equazione

$$\frac{q_k}{2k\pi\ell} \frac{1}{r} dr = -dT$$

possiamo nuovamente integrarla, scegliendo però degli estremi di integrazione diversi rispetto a prima: in particolare, possiamo fissare uno dei due estremi, ad esempio la parete interna, e considerare l'altro generico, in modo da ottenere

$$\frac{q_k}{2k\pi\ell} \int_{r_i}^r \frac{1}{r} dr = - \int_{T_i}^{T(r)} dT \longrightarrow \frac{q_k}{2k\pi\ell} \ln \frac{r}{r_i} = T_i - T(r)$$

Esplicitando la temperatura $T(r)$ a distanza r generica dall'asse del cilindro, possiamo dunque concludere che essa vale

$$T(r) = T_i - \frac{q_k}{2k\pi\ell} \ln \frac{r}{r_i}$$

In base a questa equazione, *in un cilindro circolare cavo la temperatura è una funzione logaritmica del raggio r* , mentre in una parete piana avevamo trovato un andamento lineare.

Osservazione: aria media logaritmica

Quando abbiamo studiato la conduzione attraverso la parete piana, abbiamo trovato la seguente espressione per la potenza termica trasmessa:

$$q = \frac{A \cdot k}{L} \cdot \Delta T$$

Studiando invece la conduzione attraverso il cilindro circolare cavo, abbiamo trovato che la potenza termica valeva

$$q = \frac{2k\pi\ell}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \Delta T$$

In entrambi i casi, si osserva che q è pari al prodotto di un coefficiente (la **conduttanza**), che tiene conto della geometria del sistema e delle proprietà del materiale, per la differenza di temperatura ΔT che genera il flusso termico. In alcune applicazioni risulta utile disporre dell'equazione per la conducibilità in una parete curva nella forma $\frac{A \cdot k}{L} \cdot \Delta T$ ricavata per la parete piana. Per ottenere questa equazione, basta eguagliare le due precedenti espressioni di q , a patto però di sostituire lo spessore L della parete con la quantità $(r_e - r_i)$ e l'area A della parete stessa con un parametro $\bar{A}$ per ora generico: ciò che si ottiene è quindi che

$$\frac{2k\pi\ell}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \Delta T = \frac{\bar{A}k}{r_e - r_i} \Delta T$$

Da questa uguaglianza si ricava evidentemente che

$$\bar{A} = \frac{2\pi\ell}{\ln \frac{r_e}{r_i}} (r_e - r_i)$$

L'area $\bar{A}$, definita da questa espressione, prende il nome di **area media logaritmica**: essa consente evidentemente di scrivere che la potenza termica trasmessa per conduzione attraverso un cilindro circolare cavo vale

$$q = \frac{k}{r_e - r_i} \cdot \bar{A} \cdot \Delta T$$

Tornando adesso all'espressione di $\bar{A}$, osserviamo che la possiamo anche porre nella forma

$$\bar{A} = \frac{2\pi\ell r_e - 2\pi\ell r_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = \frac{2\pi\ell r_e - 2\pi\ell r_i}{\ln \frac{2\pi\ell r_e}{2\pi\ell r_i}} = \frac{A_e - A_i}{\ln \frac{A_e}{A_i}}$$

dove, evidentemente, A_e è l'area della superficie esterna del cilindro, mentre A_i quella della superficie interna.

E' possibile anche approssimare $\bar{A}$ con la media aritmetica di A_e ed A_i :

$$\bar{A} \cong \frac{A_e + A_i}{2}$$

Questa approssimazione è accettabile quando $A_e/A_i < 2$, ossia per $r_e/r_i < 2$. Per pareti più spesse, invece, l'approssimazione non è generalmente accettabile.

Esempio numerico

Calcolare il calore dissipato da un tubo, lungo 300 cm e di diametro esterno 89 mm, rivestito di uno spessore di 38 mm di isolante (la cui conducibilità è di 0.06 kcal/h m°C), nell'ipotesi che le temperature delle superfici interna ed esterna siano rispettivamente di 200°C e di 26°C

Dobbiamo semplicemente applicare la relazione

$$q = \frac{k}{r_e - r_i} \cdot \bar{A} \cdot \Delta T$$

L'unico parametro da determinare è l'area media logaritmica: dato che $r_i=89\text{mm}$ ed $r_e=165\text{mm}$, possiamo approssimare l'area media logaritmica con la media aritmetica tra area interna ed area esterna, ossia

$$\bar{A} \cong \frac{A_e + A_i}{2} = \frac{2\pi\ell(r_e + r_i)}{2} = \pi\ell(r_e + r_i) = \pi \cdot 3 \cdot (0.165 + 0.089) = 2.4\text{m}^2$$

Tornando allora all'espressione della potenza termica dispersa, abbiamo che

$$q = \frac{k}{r_e - r_i} \cdot \bar{A} \cdot \Delta T = \frac{0.06}{0.165 - 0.089} \cdot 2.4 \cdot (200 - 26) = 329.7 \frac{\text{kcal}}{\text{h}}$$

Effetti della conducibilità termica variabile

Abbiamo già osservato che la conducibilità termica k del materiale è, in generale, variabile con la temperatura. Vediamo allora più nei dettagli come si procede in questi casi per la valutazione della potenza termica scambiata.

Consideriamo, in particolare, un caso molto semplice, peraltro verificato in molti materiali (specialmente entro un limitato intervallo di temperatura): supponiamo che la variazione della conducibilità termica con la temperatura possa esprimersi mediante la funzione lineare

$$k(T) = k_0(1 + \beta T)$$

dove k_0 è la conducibilità termica alla temperatura di 0°C, mentre β è una costante chiamata **coefficiente di temperatura della conducibilità termica**.

L'equazione da cui partire è sempre quella fornita dal postulato di Fourier:

$$q_k = -kA \frac{dT}{dx}$$

Sostituendo la dipendenza di k da T , questa diventa

$$q_k = -k_0(1 + \beta T)A \frac{dT}{dx}$$

Separando le variabili T ed x, otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$\frac{q_k}{A} dx = -k_0 (1 + \beta T) dT$$

Questa equazione, con riferimento, ad esempio, ad una parete piana del tipo considerato in precedenza, può essere facilmente integrata tra i due bordi della parete:

$$\int_0^L \frac{q_k}{A} dx = - \int_{T_{\text{CALDO}}}^{T_{\text{FREDDO}}} k_0 (1 + \beta T) dT \longrightarrow \frac{q_k}{A} \int_0^L dx = -k_0 \int_{T_{\text{CALDO}}}^{T_{\text{FREDDO}}} dT - k_0 \beta \int_{T_{\text{CALDO}}}^{T_{\text{FREDDO}}} T dT$$

Risolvendo i tre integrali, otteniamo che

$$\frac{q_k}{A} L = -k_0 (T_{\text{FREDDO}} - T_{\text{CALDO}}) - \frac{k_0 \beta}{2} (T_{\text{FREDDO}}^2 - T_{\text{CALDO}}^2)$$

Esplicitando la potenza termica, abbiamo dunque che

$$q_k = k_0 \frac{A}{L} \left[(T_{\text{CALDO}} - T_{\text{FREDDO}}) + \frac{\beta}{2} (T_{\text{CALDO}}^2 - T_{\text{FREDDO}}^2) \right]$$

Questa può essere riscritta nel modo seguente:

$$q_k = \frac{A}{L} k_0 \left(1 + \beta \frac{T_{\text{CALDO}} + T_{\text{FREDDO}}}{2} \right) (T_{\text{CALDO}} - T_{\text{FREDDO}})$$

Si è soliti allora considerare un valore medio della conducibilità termica, in modo da scrivere quanto segue:

$$k_m = k_0 \left(1 + \beta \frac{T_{\text{CALDO}} + T_{\text{FREDDO}}}{2} \right) \longrightarrow \boxed{q_k = \frac{A}{L} k_m (T_{\text{CALDO}} - T_{\text{FREDDO}})}$$

L'espressione ricavata per q_k è quella nella *forma classica* $q = \frac{A \cdot k}{L} \cdot \Delta T$, dove la conducibilità usata è quella media.

In alcune situazioni, la variazione della conducibilità termica con la temperatura è disponibile sotto forma di una curva su un piano cartesiano (T,k). Un possibile diagramma potrebbe essere, ad esempio, il seguente:

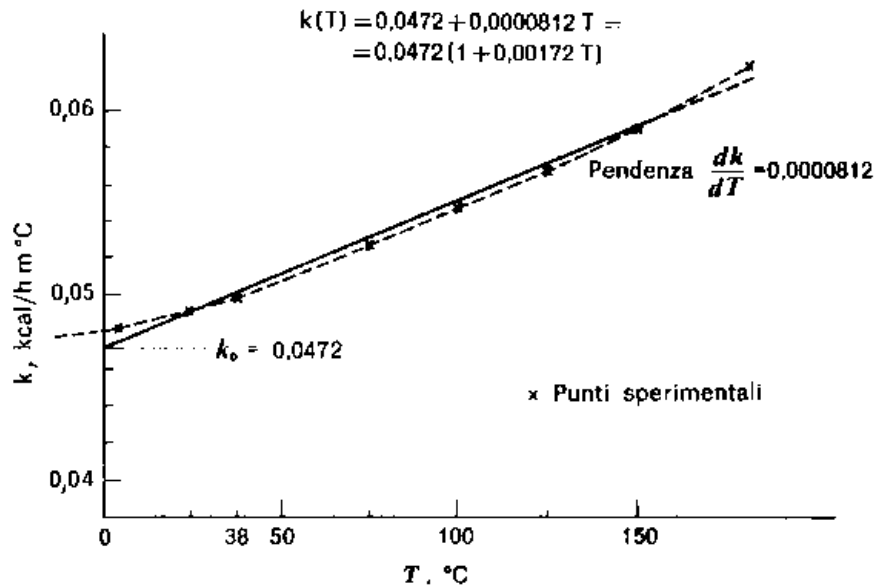


Figura 3 Determinazione grafica del coefficiente di temperatura b della conducibilità termica

In un caso come questo, si può considerare una variazione lineare di k con T , ossia un andamento descritto dall'equazione $k(T) = k_0(1 + \beta T)$, per cui tutto sta a calcolare k_0 e β . Si può allora procedere approssimando l'andamento reale, riportato sul diagramma, mediante una retta, ad esempio quella che congiunge i punti del diagramma corrispondenti alle due temperature di interesse. Una volta ottenuta questa retta, k_0 ne è l'intercetta con l'asse delle ordinate, mentre $k_0\beta$ ne è il coefficiente angolare.

STRUTTURE COMPOSTE

Il metodo generale di studio dei problemi riguardanti il flusso di calore a regime stazionario attraverso **strutture composte** è stato già presentato in precedenza. Adesso saranno considerati 2 casi di strutture composte in cui il flusso termico può essere ritenuto monodimensionale.

In entrambi i casi supporremo il sistema a contatto da un lato con un mezzo ad alta temperatura e dall'altro lato con un mezzo a bassa temperatura; i due mezzi sono a temperatura costante nonostante lo scambio termico con il sistema in esame: sono cioè due **sorgenti**, usando una terminologia tipica della termodinamica¹.

¹ Ricordiamo infatti che una **sorgente** di calore, in termodinamica, è stata definita come un sistema chiuso (che cioè non scambia materia ma solo energia) che è in grado di scambiare una qualsiasi quantità di calore senza che vari la propria temperatura. Tipica approssimazione di una sorgente è l'acqua del mare.

Pareti composte: elementi in serie

Consideriamo una parete composta come quella indicata nella figura seguente:

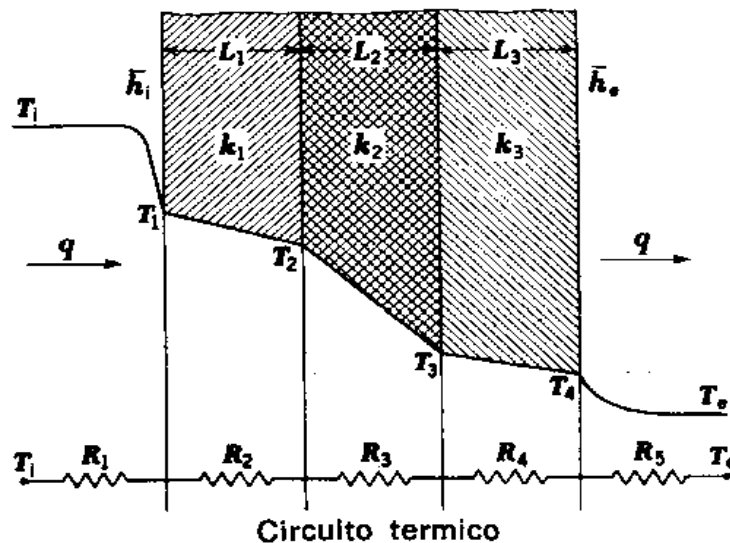


Figura 4 - Andamento della temperatura e circuito termico per la trasmissione del calore attraverso una parete piana composta con elementi in serie

Lo strato interno, di conducibilità k_1 , è a contatto con un fluido a temperatura elevata T_i e presenta, sulla superficie, una conduttanza unitaria $\bar{h}_i$; lo strato intermedio ha conducibilità k_2 ; lo strato esterno, di conducibilità k_3 , è a contatto con un fluido a bassa temperatura T_e e presenta, sulla superficie, una conduttanza unitaria $\bar{h}_e$.

In questo sistema, a causa della differenza di temperatura $\Delta T = T_e - T_i$ tra l'esterno e l'interno della parete, è presente un flusso continuo di calore, che si muove dall'interno verso l'esterno, come indicato dalle frecce in figura. In particolare, il flusso termico attraverso una data area A è lo stesso in ogni elemento, per cui abbiamo un classico collegamento in serie tra vari elementi. Quanti elementi? Sicuramente, ci sono i 3 elementi che costituiscono la parete, ma ad essi se ne devono aggiungere altri 2 per tenere conto, da un lato, della convezione tra la faccia interna della parete ed il fluido caldo in contatto con essa e, dall'altro, della convezione tra la faccia esterna della parete ed il fluido freddo in contatto con essa.

Possiamo allora scrivere, per questi 5 elementi, quanto segue:

$$\text{convezione sulla faccia interna della parete} \rightarrow q = \bar{h}_i A (T_i - T_1)$$

$$\text{conduzione nel primo strato della parete} \rightarrow q = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2)$$

$$\text{conduzione nel secondo strato della parete} \rightarrow q = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3)$$

$$\text{conduzione nel terzo strato della parete} \rightarrow q = \frac{k_3 A}{L_3} (T_3 - T_4)$$

$$\text{convezione sulla faccia esterna della parete} \rightarrow q = \bar{h}_e A (T_4 - T_e)$$

Tutte e 5 le potenze termiche appena valutate sono state indicate allo stesso modo (q) in quanto, come detto, sono tutte uguali:

$$q = \bar{h}_i A (T_i - T_1) = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) = \frac{k_3 A}{L_3} (T_3 - T_4) = \bar{h}_e A (T_4 - T_e)$$

Il problema, a questo punto, è che non sono note le temperature intermedie T_1, T_2 e T_3 . Allora, per determinare la potenza termica scambiata, possiamo procedere nel modo seguente: in primo luogo, possiamo esprimerci in termini di resistenze termiche, il che significa che

$$\text{resistenza convettiva sulla faccia interna della parete} \rightarrow \frac{1}{R_i} = \frac{\bar{h}_i A}{1} \rightarrow q = \frac{T_i - T_1}{R_i}$$

$$\text{resistenza conduttiva del primo strato della parete} \rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{k_1 A}{L_1} \rightarrow q = \frac{T_1 - T_2}{R_1}$$

$$\text{resistenza conduttiva del secondo strato della parete} \rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{k_2 A}{L_2} \rightarrow q = \frac{T_2 - T_3}{R_2}$$

$$\text{resistenza conduttiva del terzo strato della parete} \rightarrow \frac{1}{R_3} = \frac{k_3 A}{L_3} \rightarrow q = \frac{T_3 - T_4}{R_3}$$

$$\text{resistenza convettiva sulla faccia esterna della parete} \rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{\bar{h}_e A}{1} \rightarrow q = \frac{T_4 - T_e}{R_e}$$

Adesso, esprimendo le differenze di temperatura in funzione di q e delle resistenze, otteniamo quanto segue:

$$q R_i = T_i - T_1$$

$$q R_1 = T_1 - T_2$$

$$q R_2 = T_2 - T_3$$

$$q R_3 = T_3 - T_4$$

$$q R_e = T_4 - T_e$$

A questo punto, sommando membro a membro scompaiono le temperature intermedie e si può quindi calcolare q :

$$q = \frac{T_i - T_e}{R_i + R_1 + R_2 + R_3 + R_e}$$

Il procedimento è ovviamente generale: in presenza di N elementi in serie, la potenza termica è data da

$$q = \frac{T_i - T_e}{\sum_{i=1}^N R_i}$$

Tutto sta a calcolare le singole resistenze termiche.

Pareti composte: elementi in serie ed in parallelo

In molte applicazioni pratiche si incontrano combinazioni di elementi connessi in serie ed in parallelo attraversati dal flusso termico. Ne è un esempio la parete composta indicata nella figura seguente:

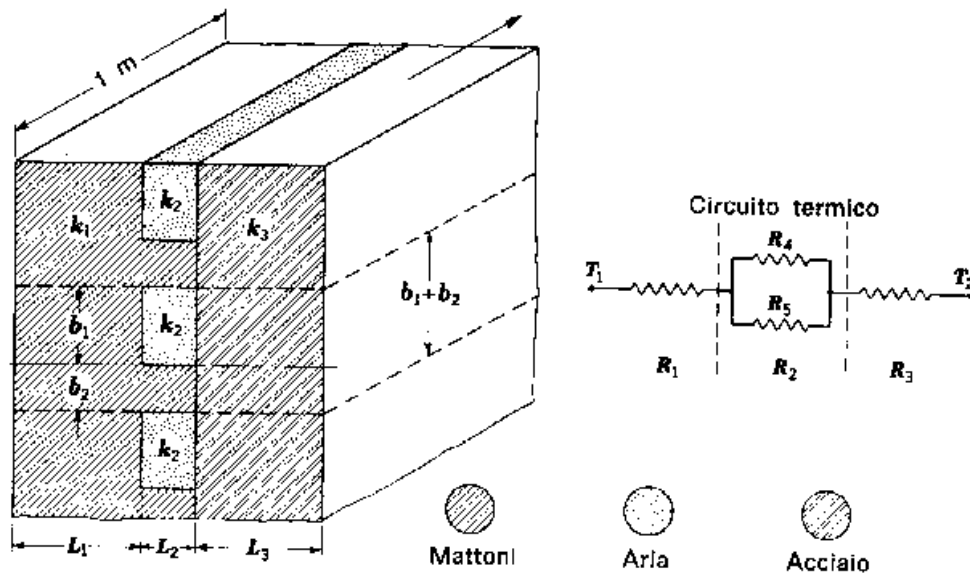


Figura 5 - circuito termico per una parete composta con elementi in serie ed in parallelo

Per esaminare una situazione di questo tipo, si può fare l'approssimazione di flusso termico monodimensionale: con questa ipotesi, si tratta di dividere la parete in 3 elementi (di conducibilità k_1 , k_2 e k_3 rispettivamente) e di calcolare la resistenza termica di ciascuno di essi.

Cilindri coassiali

Spesso si incontra flusso termico radiale attraverso cilindri coassiali di diversa conducibilità termica. Un tipico problema di questo tipo è quello di un tubo isolato, in cui scorre un fluido, immerso in un mezzo più freddo, come schematizzato nella figura seguente:

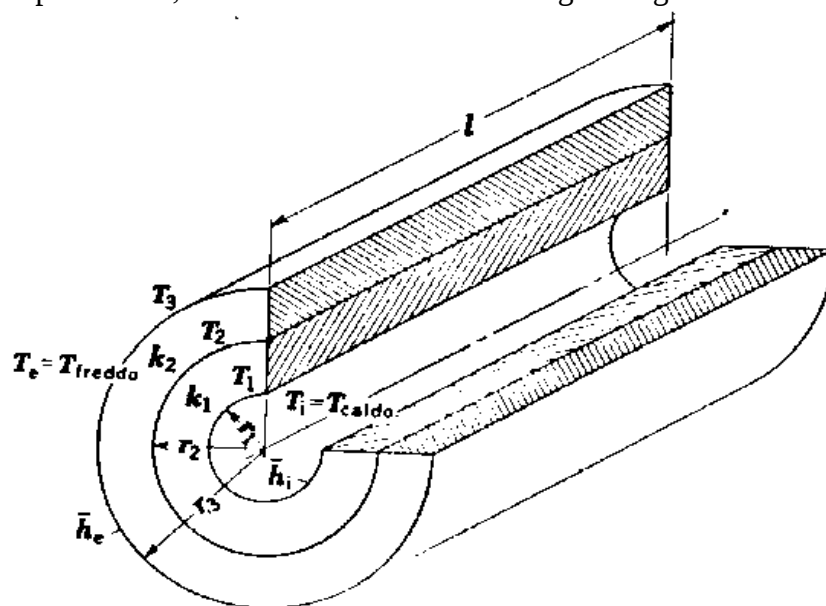


Figura 6 - Schema della nomenclatura per una parete cilindrica composta

Se il tubo è sufficientemente lungo, il flusso di calore attraverso le pareti è in direzione radiale.

A regime stazionario, la potenza termica che attraversa ciascun elemento è la stessa; nel dettaglio, possiamo allora scrivere quanto segue:

$$\text{per la convezione sulla superficie interna} \rightarrow q = 2\pi r_1 \ell \bar{h}_i (T_i - T_1)$$

$$\text{per la conduzione nel cilindro interno}^2 \rightarrow q = \frac{2k_1 \pi \ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$$

$$\text{per la conduzione nel cilindro esterno} \rightarrow q = \frac{2k_2 \pi \ell}{\ln \frac{r_3}{r_2}} (T_2 - T_3)$$

$$\text{per la convezione dalla superficie esterna} \rightarrow q = 2\pi r_3 \ell \bar{h}_e (T_3 - T_e)$$

Così come abbiamo fatto nel caso della parete piana composta, ci conviene esprimere tutto in funzione delle resistenze termiche, in modo da poter calcolare q senza dover conoscere la temperature intermedie:

$$\text{per la convezione sulla superficie interna} \rightarrow q = \frac{T_i - T_1}{R_i} = \frac{T_{\text{caldo}} - T_1}{R_i}$$

$$\text{per la conduzione nel cilindro interno} \rightarrow q = \frac{T_1 - T_2}{R_1}$$

$$\text{per la conduzione nel cilindro esterno} \rightarrow q = \frac{T_2 - T_3}{R_2}$$

$$\text{per la convezione dalla superficie esterna} \rightarrow q = \frac{T_3 - T_e}{R_e} = \frac{T_3 - T_{\text{freddo}}}{R_e}$$

Sempre in analogia a quanto fatto prima, possiamo adesso esplicitare le 4 differenze di temperatura e sommare membro a membro: il risultato che si ottiene è identico a prima, ossia

$$q = \frac{T_{\text{caldo}} - T_{\text{freddo}}}{\sum_{i=1}^N R_i}$$

Cambiano ovviamente le espressioni delle resistenze termiche:

$$q = \frac{T_{\text{caldo}} - T_{\text{freddo}}}{\frac{1}{2\pi r_1 \ell \bar{h}_i} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2k_1 \pi \ell} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2k_2 \pi \ell} + \frac{1}{2\pi r_3 \ell \bar{h}_e}}$$

Possiamo anche esprimere il tutto in funzione del **coefficiente globale di scambio termico U** : a questo proposito, dobbiamo ricordarci che U può essere riferito a qualsiasi area, per cui conviene scegliere quella più facile da determinare. Sicuramente, possiamo scegliere l'area esterna, in

² L'analisi matematica della conduzione attraverso cilindri coassiali è stata svolta già in precedenza

quanto il diametro esterno, ove non fosse noto, è comunque il più facile da misurare: ponendo dunque $A_e = 2\pi r_3 \ell$, possiamo scrivere che

$$q = U \cdot A_e \cdot (T_{\text{caldo}} - T_{\text{freddo}})$$

Confrontando le ultime due espressioni, deduciamo evidentemente che

$$UA_e = \frac{1}{\frac{1}{2\pi r_1 \ell h_i} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2k_1 \pi \ell} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2k_2 \pi \ell} + \frac{1}{2\pi r_3 \ell h_e}}$$

da cui possiamo concludere che

$$U = \frac{1}{2\pi r_3 \ell} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2\pi r_1 \ell h_i} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2k_1 \pi \ell} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2k_2 \pi \ell} + \frac{1}{2\pi r_3 \ell h_e}} = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln \frac{r_2}{r_1}}{k_1} + \frac{r_3 \ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e}}$$

Questa espressione, una volta sostituiti i valori numerici, serve, tra le altre cose, a valutare l'importanza relativa, sul valore di U, dei vari meccanismi di scambio termico.

Spessore critico dell'isolante

In questo paragrafo vogliamo chiarire il seguente concetto: l'aggiunta di un isolante all'esterno di tubi piccoli o di fili non sempre riduce la trasmissione del calore.

Riconsideriamo quanto ricavato nel precedente paragrafo e, in particolare, l'espressione del coefficiente globale di scambio termico:

$$U = \frac{1}{2\pi r_3 \ell} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2\pi r_1 \ell h_i} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2k_1 \pi \ell} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2k_2 \pi \ell} + \frac{1}{2\pi r_3 \ell h_e}} = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_i} + \frac{r_3 \ln \frac{r_2}{r_1}}{k_1} + \frac{r_3 \ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e}}$$

Questa espressione, del tutto generica, è valida anche nel caso di un tubo rivestito da un isolante: in questo caso, il tubo ha raggio interno r_1 e conducibilità termica k_1 , mentre l'isolante ha conducibilità k_2 ed uno spessore d tale che il raggio esterno sia $r_3 = r_1 + s + d$, dove s è lo spessore del tubo.

Nella maggior parte dei casi pratici di tubi rivestiti da isolanti, la scelta dei materiali è tale che la resistenza termica sia concentrata sull'isolante, il che significa che possiamo approssimare

$$U \cong \frac{1}{\frac{r_3 \ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e}}$$

Sostituendo nell'espressione della potenza termica scambiata, otteniamo allora che

$$q = U \cdot A_e \cdot (T_{\text{interna}} - T_{\text{esterna}}) = \frac{1}{\frac{r_3 \ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e}} \cdot 2\pi r_3 \ell \cdot (T_{\text{interna}} - T_{\text{esterna}}) = \frac{2\pi \ell}{\frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e}} (T_{\text{interna}} - T_{\text{esterna}})$$

Il termine per cui viene moltiplicata la differenza di temperatura è la conduttanza termica complessiva:

$$\frac{1}{R_{\text{TOT}}} = \frac{2\pi \ell}{\frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e}} \longrightarrow R_{\text{TOT}} = \frac{1}{2\pi \ell} \left(\frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{k_2} + \frac{1}{h_e r_3} \right)$$

Questa espressione di R_{TOT} è molto significativa, in quanto mostra due cose:

- in primo luogo, dato che la **resistenza conduttiva** dell'isolante è direttamente proporzionale al logaritmo del raggio esterno r_3 , *il flusso termico attraverso l'isolante è inversamente proporzionale allo stesso logaritmo*;
- in secondo luogo, dato che la **resistenza convettiva** dell'isolante è inversamente proporzionale ad r_3 , *la potenza termica dissipata per convezione sulla superficie esterna dell'isolante è direttamente proporzionale ad r_3* .

Dato che la resistenza complessiva R_{TOT} è la somma delle due resistenze, il suo andamento con r_3 è complesso; di conseguenza, *non è detto, come ci si aspetterebbe, che la potenza termica trasmessa diminuisca quando un tubo nudo o un filo viene rivestito con dell'isolante*; tutto dipende dallo spessore dell'isolante stesso: è possibile che, per piccoli spessori dell'isolante, la dissipazione di potenza venga aumentata; se invece lo spessore dell'isolante viene ulteriormente aumentato, allora effettivamente la dissipazione di calore scende gradualmente a valori inferiori a quello relativo alla superficie nuda.

Vediamo allora di studiare analiticamente la questione. Ci basta calcolare per quale valore di r_3 la potenza trasmessa risulta massima: dobbiamo perciò derivare q rispetto ad r_3 ed uguagliare a 0 la derivata. Facendo questo conto, si trova che il valore del raggio esterno per il quale la trasmissione di calore è massima è

$$r_{\text{critico}} = \frac{k_2}{h_e}$$

Quindi, come detto prima, la dissipazione del calore, in presenza di un isolante che riveste il tubo o il filo, aumenta, all'aumentare dello spessore dell'isolante, fino ad un valore massimo che si ha quando il raggio esterno assume il valore critico. Aumentando ulteriormente lo spessore dell'isolante, invece, la dissipazione va via via diminuendo, scendendo anche al di sotto del valore che aveva in assenza dell'isolante stesso.

Nella pratica, la scelta dello spessore di isolante dipende anche da altri parametri, come il costo ed il deterioramento dell'isolante stesso.

Esempio numerico: cavo elettrico coibentato

Le considerazioni appena fatte per un tubo cilindrico rivestito da isolante valgono anche per un filo elettrico percorso da corrente: anche in questo caso, infatti, in cui la temperatura superficiale del cavo è fissata dalla densità di corrente, lo spessore dell'isolante può essere scelto per aumentare o diminuire la dissipazione di potenza. In particolare, in molte applicazioni elettriche il rivestimento di cavi e fili è previsto proprio per aumentare la dissipazione di calore. Facciamo allora un esempio numerico.

Consideriamo un cavo elettrico di 6 mm di raggio, avente una temperatura superficiale di 66°C. Vogliamo coibentare il cavo con un isolante, ad esempio di gomma (avente conducibilità termica $k=0.18$ kcal/hm°C). Studiamo allora l'andamento della dissipazione di potenza, al variare dello spessore dell'isolante, nell'ipotesi che il mezzo circostante sia aria ($\bar{h}_e = 10$ kcal/hm²°C) alla temperatura di 21°C.

Ci basta applicare la formula ricavata prima per il calcolo della potenza termica trasmessa:

$$q = U \cdot A_e \cdot (T_{\text{interna}} - T_{\text{esterna}}) = \frac{2\pi\ell}{\ln \frac{r_{\text{est}}}{r_{\text{int}}} + \frac{1}{\frac{k}{h_e r_{\text{est}}}}} (T_{\text{interna}} - T_{\text{esterna}})$$

Osserviamo che in questa formula abbiamo sostituito r_2 con r_{int} in quanto non si tratta più di un tubo percorso al suo interno da un fluido, ma di un conduttore cilindrico.

Dato che non conosciamo la lunghezza del cavo, possiamo riferirci alla potenza trasmessa per unità di lunghezza:

$$\frac{q}{\ell} = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_{\text{est}}}{r_{\text{int}}} + \frac{1}{\frac{k}{h_e r_{\text{est}}}}} (T_{\text{interna}} - T_{\text{esterna}}) = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_{\text{est}}}{6} + \frac{1}{\frac{0.18}{10 \cdot r_{\text{est}}}}} (66 - 21)$$

Sostituendo i valori numerici, la quantità q/ℓ viene dunque a dipendere solo da r_{est} (espresso in questo caso in mm). Il primo termine a denominatore è proporzionale al logaritmo della resistenza termica dell'isolante, mentre l'altro alla resistenza sulla superficie dello stesso. Con lo stesso procedimento analitico seguito prima si trova che il massimo valore di q/ℓ si ottiene per $r_{\text{est}}=18$ mm, che quindi è il raggio critico: in corrispondenza di questo valore, la potenza termica, per unità di lunghezza, vale **24 kcal/hm** ed è appunto il massimo valore.

Se l'isolante non ci fosse, dovremmo semplicemente calcolare la potenza termica dissipata per convezione sulla superficie del cavo: si otterrebbe in questo caso il valore di 17 kcal/hm, ossia una diminuzione del 41% rispetto al valore **24 kcal/hm**.

SISTEMI CON GENERAZIONE DI CALORE

In molte branche della tecnica si usano **sistemi con generazione di calore**: esempi tipici sono le bobine elettriche, le resistenze elettriche o la combustione in una caldaia. Inoltre, la dissipazione del calore generato internamente è anche importante nella taratura di motori elettrici, generatori e trasformatori.

In questo paragrafo esamineremo due casi semplici: conduzione del calore, a regime stazionario, in una piastra piana ed in un cilindro circolare con generazione omogenea di calore all'interno.

Piastra piana con generazione di calore uniformemente distribuita

Consideriamo dunque una piastra piana con generazione uniforme di calore: per esempio, si potrebbe trattare di una barra piatta di distribuzione in cui il calore viene generato dal passaggio di corrente elettrica. Facciamo 3 ipotesi semplificative:

- in primo luogo, facciamo la solita ipotesi di regime permanente (per cui la potenza termica non varia nel tempo e quindi la temperatura in ciascun punto è costante);
- in secondo luogo, supponiamo che il materiale della piastra sia omogeneo, ossia di conducibilità termica k costante;
- infine, supponiamo che la piastra sia sufficientemente grande da poter trascurare gli effetti di bordo.

Sulla base di queste ipotesi, possiamo applicare il bilancio di potenza ad un elemento infinitesimo della piastra, quale quello indicato nella figura seguente:

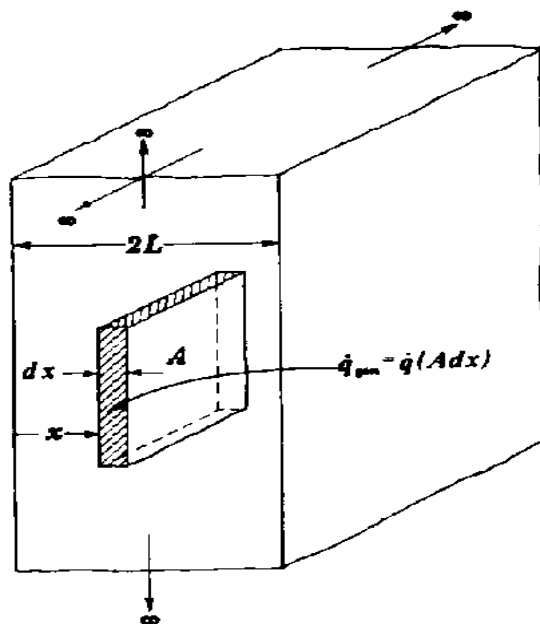


Figura 7 - Schema della nomenclatura in una parete piana con generazione interna di calore

Il *bilancio di potenza* è quello classico di un sistema con generazione interna di energia: la potenza termica che esce, per conduzione, dall'elemento considerato attraverso la faccia destra (ascissa $x+dx$) è pari alla somma di due termini: uno è la potenza termica che entra, sempre per conduzione, nell'elemento considerato attraverso la faccia sinistra (ascissa x); l'altro è invece la potenza termica generata nell'elemento considerato (quindi in uno spessore dx).

Analiticamente, questo bilancio si scrive nel modo seguente:

$$-kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_x + \dot{q}A dx$$

dove abbiamo semplicemente applicato il *postulato di Fourier* per la conduzione ed abbiamo indicato con $\dot{q}$ la quantità di calore generata per unità di volume e unità di tempo (cioè la potenza per unità di volume).

Adesso, possiamo sviluppare in modo più esplicito il termine $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx}$: abbiamo infatti che

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+dx} = \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \frac{d}{dx} \left(\left. \frac{dT}{dx} \right|_x \right) dx$$

Sostituendo nel bilancio energetico scritto prima, abbiamo che

$$-kA \left[\left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \frac{d}{dx} \left(\left. \frac{dT}{dx} \right|_x \right) dx \right] = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_x + \dot{q} A dx$$

Eliminando i termini comuni ai due membri dell'equazione e riarrangiando, otteniamo dunque che

$$\dot{q} = -k \frac{d}{dx} \left(\left. \frac{dT}{dx} \right|_x \right) = -k \frac{d^2 T}{dx^2}$$

Abbiamo dunque ottenuto che, in presenza di conducibilità termica costante³ e di generazione di calore uniforme, l'equazione di bilancio energetico si riduce a

$$\dot{q} = -k \frac{d^2 T}{dx^2}$$

Questa equazione, nella quale il termine di generazione $\dot{q}$ si ritiene chiaramente noto, può essere risolta mediante due successive integrazioni, in modo da ricavare il profilo di temperatura:

- dalla prima integrazione ricaviamo il *gradiente di temperatura*:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k} x + C_1$$

- dalla seconda integrazione otteniamo il *profilo di temperatura*:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$$

Adesso bisogna calcolare le due costanti di integrazione per rendere univoco il profilo ottenuto: possiamo per esempio supporre che entrambe le facce della piastra siano alla temperature T_e (uniforme), il che significa imporre che

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_e \\ T(x=2L) &= T_e \end{aligned}$$

dove evidentemente $2L$ è lo spessore della piastra.

³ E' bene osservare che, nella maggior parte dei sistemi reali, la conducibilità termica dipende dalla temperatura, la generazione di calore dipende dalle coordinate e le condizioni al contorno sono complicate. Di conseguenza, sono davvero pochi i problemi reali la cui soluzione sia ricavabile da equazioni differenziali semplici.

Imponendo tali condizioni e risolvendo, si conclude facilmente che

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}L}{k}x + T_e$$

Osserviamo dunque che la distribuzione di temperatura all'interno della piastra è una parabola: ai bordi la temperatura è T_e , mentre al centro ($x=L$), dove si trova il vertice della parabola, la temperatura è

$$T_{\max} = T(x=L) = +\frac{\dot{q}}{2k}L^2 + T_e$$

C'è dunque un incremento di temperatura, tra il centro ed i bordi, pari a $\frac{\dot{q}}{2k}L^2$.

Adesso perfezioniamo ulteriormente il problema, supponendo che la piastra appena esaminata sia immersa in un fluido alla temperatura T_∞ . Supponiamo inoltre che la conduttanza superficiale sulle due facce sia $\bar{h}_e$.

Applicando nuovamente il bilancio energetico, nell'ipotesi di regime permanente, possiamo affermare quanto segue: il flusso termico generato all'interno della piastra deve eguagliare il flusso termico trasmesso per conduzione sulla superficie e questo deve a sua volta uguagliare il flusso termico trasmesso per convezione ed irraggiamento dalla superficie al mezzo circostante.

Esprimendo analiticamente questo bilancio, con riferimento all'unità di area, abbiamo quanto segue:

$$\dot{q}L = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \bar{h}_e (T_e - T_\infty)$$

Dall'uguaglianza tra primo e terzo termine possiamo ricavare la differenza di temperatura necessaria per asportare il calore dalla superficie:

$$T_e - T_\infty = \frac{\dot{q}L}{\bar{h}_e}$$

Esempio numerico

Consideriamo un fluido (alla temperatura $T_f=70^\circ\text{C}$), dalla bassa conducibilità elettrica, che viene riscaldato da una lunga piastra di ferro (avente conducibilità $k=37 \text{ kcal/hm}^\circ\text{C}$), spessa 13 mm e larga 76 cm. Nella piastra si ha una generazione uniforme di calore (caratterizzata da $\dot{q}=8.9 \cdot 10^5 \text{ kcal/hm}^3$) dovuta al passaggio di corrente elettrica. Vogliamo determinare la conduttanza per unità di superficie $\bar{h}_e$ necessaria a mantenere la temperatura della piastra inferiore a 150°C .

Il problema soddisfa le ipotesi utilizzate prima, per cui valgono gli stessi discorsi e le stesse formule. Dai dati forniti possiamo calcolare la differenza di temperatura tra il piano mediano della piastra (dove si ha la massima temperatura) e la superficie della piastra stessa: ricordando infatti che tale differenza vale $\frac{\dot{q}}{2k}L^2$, abbiamo che

$$T_{\max} - T_e = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 = \frac{8.9 \cdot 10^5}{2 \cdot 37} \cdot \left(\frac{13 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 = 0.5^\circ\text{C}$$

Abbiamo ottenuto un valore molto piccolo della differenza di temperatura, per il semplice fatto che il ferro ha una elevata conducibilità termica. A rigore, dato che vogliamo $T_{\max}=150^{\circ}\text{C}$, dovrebbe essere $T_{e,\max}=145.5^{\circ}\text{C}$, ma possiamo sicuramente prendere $T_{e,\max}=150^{\circ}\text{C}$ anch'essa.

A questo punto, ricordando che $T_e - T_{\infty} = \frac{\dot{q}L}{h_e}$, possiamo calcolare il valore richiesto per $\bar{h}_e$:

$$\bar{h}_{e,\min} = \frac{\dot{q}L}{T_{e,\max} - T_{\infty}} = \frac{(8.9 \cdot 10^5) \left(\frac{13 \cdot 10^{-3}}{2} \right)}{150 - 70} = 72 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right)$$

Abbiamo dunque concluso che la minima conduttanza per unità di superficie che mantiene la temperatura nella piastra inferiore a 150°C è $\bar{h}_{e,\min} = 72 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{hm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right)$.

Cilindro solido con generazione di calore uniformemente distribuita

Consideriamo un *bobina elettrica*, nella quale la generazione di calore è dovuta al passaggio della corrente elettrica nel filo. Un sistema reale di questo tipo può essere comodamente schematizzato mediante un cilindro solido circolare con generazione interna di calore:

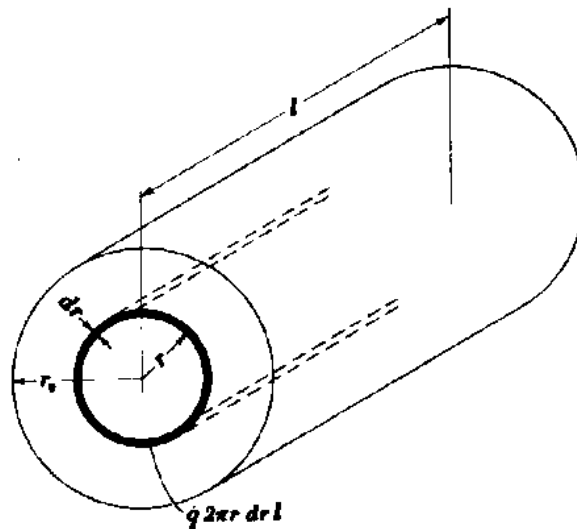


Figura 8 - Schema della nomenclatura per la conduzione in un cilindro circolare lungo con generazione interna di calore

Per condurre le nostre analisi matematiche, dobbiamo supporre che il cilindro sia lungo, per trascurare gli *effetti di bordo*, e che la generazione di calore sia uniforme.

Sotto queste ipotesi, così come abbiamo fatto nel caso della piastra piana possiamo fare un bilancio energetico, riferendoci in questo caso ad un elemento anulare (evidenziato in figura in neretto) individuato da un cilindro interno di raggio r e da un cilindro esterno di raggio $r+dr$: eguagliando la potenza che esce (per conduzione) dal cilindro di raggio $r+dr$ alla somma della potenza che entra (per conduzione) nel cilindro di raggio r e della potenza internamente generata dall'elemento di spessore dr , otteniamo

$$-kA_{r+dr} \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} = -kA_r \frac{dT}{dr} \Big|_r + \dot{q} \ell 2\pi r dr$$

dove $A_r = 2\pi r \ell$ e $A_{r+dr} = 2\pi(r+dr)\ell$.

Sostituendo le espressioni di queste aree, otteniamo

$$-k(r+dr) \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} = -kr \frac{dT}{dr} \Big|_r + \dot{q} r dr$$

A questo punto, correlando il termine $\frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr}$ al termine $\frac{dT}{dr} \Big|_r$ e facendo qualche semplificazione, si riesce a porre quell'equazione in quest'altra forma:

$$\dot{q} r = -k \left(\frac{dT}{dr} + r \frac{d^2 T}{dr^2} \right)$$

Dobbiamo integrare questa relazione: lo si può fare tenendo conto che

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2 T}{dr^2}$$

In base a quest'ultima relazione, l'equazione differenziale può essere evidentemente posta nella forma

$$\dot{q} r = -k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

Nell'ipotesi che k sia costante, possiamo integrare una prima volta per ottenere dT/dr :

$$\dot{q} r dr = -k d \left(r \frac{dT}{dr} \right) \longrightarrow \frac{\dot{q} r^2}{2} = -kr \frac{dT}{dr} + C_1 \longrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r + \frac{1}{kr} C_1$$

Possiamo subito determinare il valore di C_1 , imponendo l'opportuna condizione al contorno: possiamo infatti imporre che il gradiente di temperatura, calcolato in $r=0$ (cioè al centro del cilindro) sia nullo. L'unica possibilità che questo accada è che $C_1=0$, per cui possiamo scrivere che

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r$$

A questo punto possiamo integrare nuovamente per risalire al profilo di temperatura: otteniamo facilmente che

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r \longrightarrow dT = -\frac{\dot{q}}{2k} r dr \longrightarrow T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_2$$

La seconda costante di integrazione si ricava, per esempio, imponendo il valore della temperatura sulla superficie esterna:

$$T(r_e) = T_e \longrightarrow T_e = -\frac{\dot{q}}{4k} r_e^2 + C_2 \longrightarrow C_2 = T_e + \frac{\dot{q}}{4k} r_e^2$$

Concludiamo che la distribuzione radiale della temperatura è la seguente:

$$T(r) = \frac{\dot{q}}{4k} (r_e^2 - r^2) + T_e$$

Ancora una volta, osserviamo che la massima temperatura si ottiene lungo l'asse del cilindro, dove essa vale $T(r=0) = \frac{\dot{q}}{4k} r_e^2 + T_e$.

Conduzione bidimensionale e tridimensionale

METODI DI ANALISI

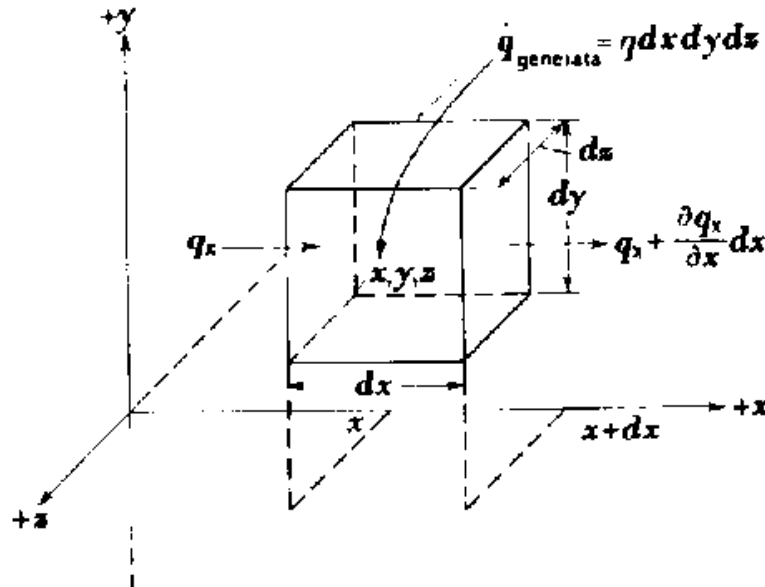
Nei paragrafi precedenti ci siamo interessati a problemi nei quali sia la temperatura sia la potenza termica possono essere trattate come funzioni di una sola variabile e, in effetti, molti problemi pratici rientrano in questa categoria. Tuttavia, *quando il sistema non è regolare o quando la temperatura lungo il contorno non è uniforme, la trattazione unidimensionale non è più sufficiente, in quanto la temperatura diventa funzione di 2 o 3 coordinate*. Esempi tipici di questi problemi sono il flusso termico in prossimità di uno spigolo o di un vortice, la conduzione del calore attraverso le pareti di un cilindro cavo corto o la dispersione di calore da una tubazione interrata.

Vogliamo allora capire come si analizza la conduzione nei sistemi bi-dimensionali e tri-dimensionali, con particolare attenzione ai primi.

EQUAZIONE GENERALE DELLA CONDUZIONE

In questo paragrafo vogliamo ricavare una equazione, del tutto generale, che consenta di analizzare una qualsiasi situazione in cui ci sia un processo di scambio termico per conduzione.

Consideriamo allora, all'interno di un corpo solido, un piccolo elemento di materiale, avente la forma di un parallelepipedo rettangolo di spigoli dx, dy, dz (paralleli rispettivamente agli assi x, y, z):



Vogliamo ottenere una equazione per la distribuzione di temperatura. Per fare questo, dobbiamo intanto scrivere il bilancio di energia per l'elemento considerato: in generale, sappiamo che tale bilancio è dato da

$$\left| \begin{array}{c} \text{potenza} \\ \text{termica} \\ \text{entrante} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{potenza termica} \\ \text{generata da} \\ \text{sorgenti interne} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{potenza} \\ \text{termica} \\ \text{uscente} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{variazione} \\ \text{dell'energia interna} \\ \text{nell'unità di tempo} \end{array} \right|$$

Con riferimento allora alla figura precedente, questo bilancio può essere posto nella seguente forma simbolica:

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{q}(dxdydz) = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + \rho c(dxdydz) \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

dove c è il **calore specifico** e ρ la **densità** e dove la *potenza termica generata per unità di volume* $\dot{q}$ e la *temperatura* T sono, in generale, funzione delle tre coordinate x, y, z e del tempo.

Adesso, la potenza termica q_x che, nell'unità di tempo, entra per conduzione nell'elemento considerato, lungo la direzione x e attraverso la faccia di sinistra, è valutabile tramite la già incontrata relazione

$$q_x = \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz$$

(dove la derivata di T è parziale in quanto abbiamo detto che T è funzione, in generale, sia di x sia di y sia di z). In modo del tutto analogo, la potenza termica q_{x+dx} che, nell'unità di tempo, esce, sempre per conduzione, dall'elemento considerato, lungo la direzione x e attraverso la faccia di destra, sarà

$$q_{x+dx} = \left[\left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz$$

Facendo allora un bilancio tra l'energia entrante e quella uscente, nella direzione x, otteniamo

$$q_x - q_{x+dx} = \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz - \left[\left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dydz$$

Analoghe relazioni varranno ovviamente per le direzioni y e z:

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dydz$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dydz$$

Possiamo allora andare a sostituire nell'equazione di bilancio dell'energia: mettendo subito in evidenza il termine $dx dydz$, otteniamo

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dydz + \dot{q} (dx dydz) = c\rho (dx dydz) \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

e quindi, semplificando $dx dydz$, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Se adesso supponiamo che anche k , oltre c e ρ , sia indipendente dalle 3 coordinate spaziali, questa equazione diventa

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

La costante $k/c\rho$ prende il nome di **diffusività termica** (misurata in m^2/h) e si indica generalmente con a , per cui la forma conclusiva di quella equazione diventa

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta}}$$

Questa è l' **equazione generale della conduzione del calore**: essa governa la distribuzione di temperatura ed il flusso termico per conduzione in un solido con proprietà fisiche uniformi.

Ci sono poi alcuni casi in cui quella equazione si semplifica:

- il primo caso è quello in cui nel sistema non ci sono sorgenti di calore: ciò significa che è nulla la potenza termica $\dot{q}$ generata all'interno del sistema, per cui l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Questa è la cosiddetta “**equazione di Fourier**”;

- il secondo caso è quello in cui il sistema è a regime permanente, ma non vi sono sorgenti di calore all'esterno: parlare di “regime permanente” significa parlare di temperatura costante nel tempo, per cui $\partial T / \partial \theta = 0$ e quindi l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Questa è la cosiddetta “**equazione di Poisson**”;

- il terzo caso è la combinazione dei primi due: quando il sistema non presenta sorgenti né al suo interno né al suo esterno e si trova in regime permanente, l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Questa è la cosiddetta “**equazione di Laplace**”.

Ovviamente, se il problema in esame può essere analizzato in modo unidimensionale, allora le 4 equazioni precedenti risultano identiche, salvo a considerare la derivata seconda di T rispetto ad una sola delle tre coordinate spaziali: per esempio, nel caso di conduzione mono-dimensionale lungo la coordinata x , in regime permanente e in assenza di sorgenti interne al sistema, l'equazione di Laplace si riduce a $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$; questa equazione, una volta integrata, fornisce evidentemente $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cost}$ e questo è proprio il risultato ottenuto, nel capitolo precedente, per la conduzione monodimensionale (in regime permanente).

Un'altra osservazione importante è che ci sono molti problemi di conduzione che possono essere trattati, in modo più conveniente, con un sistema di *coordinate sferiche* o *cilindriche*. In queste coordinate, l'equazione generale della conduzione assume le forme seguenti:

$$\text{coordinate cilindriche} \longrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\text{coordinate sferiche} \longrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Soluzione analitica

Lo scopo di ogni studio di trasmissione del calore è la determinazione o del flusso termico o della distribuzione di temperatura. Se consideriamo un sistema bi-dimensionale senza generazione di calore,

l'equazione che regge la distribuzione di temperatura, a regime permanente, è l'equazione di Laplace in due coordinate:

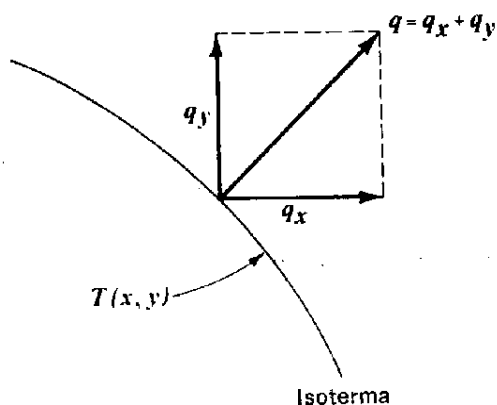
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

La soluzione di questa equazione fornirà la funzione $T(x,y)$, ossia la temperatura in funzione delle coordinate spaziali x ed y . Noto l'andamento della temperatura, la potenza termica che fluisce, per unità di area, nelle direzioni x ed y si può poi ottenere usando il **postulato di Fourier** applicato alle due direzioni coordinate:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

Naturalmente, da queste due ultime relazioni si deduce che, mentre $T(x,y)$ è una funzione scalare, il flusso termico dipende dal gradiente di $T(x,y)$ ed è perciò un vettore (di tante componenti quante sono le coordinate spaziali utilizzate). Il "**flusso termico totale**", in un dato punto x,y , è la risultante di q_x e q_y in quel punto ed è diretto perpendicolarmente alla curva isoterma $T(x,y)$, come indicato nella figura seguente:



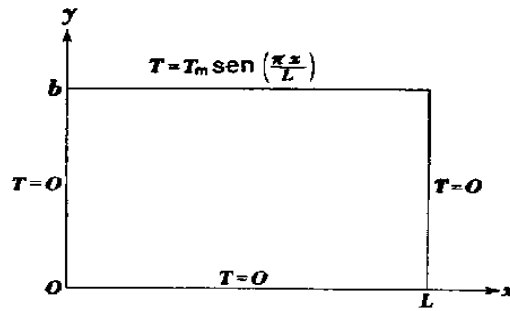
Possiamo dunque affermare che, nota la distribuzione di temperatura in un sistema, il flusso termico può essere calcolato facilmente ed ecco perché gli studi di scambio termico sono solitamente rivolti alla determinazione del campo di temperatura.

Infine, sottolineiamo che la soluzione analitica di un problema di trasmissione del calore per conduzione deve soddisfare sia l'equazione della conduzione prima introdotta sia le "**condizioni al contorno**" determinate dalle condizioni fisiche del problema particolare in esame.

Esempio

Vogliamo adesso illustrare come si risolve l'equazione generale della conduzione in un caso abbastanza semplice.

Consideriamo perciò una piastra rettangolare sottile, senza sorgenti di calore all'interno, con le superfici inferiore e superiore isolate:



Facendo l'ipotesi che sia trascurabile la variazione della temperatura con la coordinata z ortogonale al piano del disegno, la temperatura risulta funzione soltanto di x ed y : siamo dunque in un caso bi-dimensionale.

Nell'ipotesi che la conducibilità termica sia uniforme, la distribuzione di temperatura $T(x,y)$ dovrà dunque soddisfare l'equazione di Laplace in due coordinate:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Questa è una equazione differenziale del 2° ordine, lineare, omogenea, a derivate parziali: è possibile risolverla ipotizzando che la soluzione sia del tipo $T(x,y) = X(x)Y(y)$, dove $X(x)$ è una funzione solo della coordinata x e $Y(y)$ funzione solo di y .

Andando dunque a sostituire, otteniamo

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Abbiamo in questo modo ottenuto la separazione delle variabili: dato che $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ non può variare rispetto ad y e $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$ non può variare rispetto ad x , ambedue queste quantità devono avere necessariamente un valore costante: indicato allora con λ^2 questo valore, abbiamo cioè che

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda^2 = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases}$$

Queste sono dunque due equazioni differenziali a derivate totali, le cui rispettive soluzioni sono

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$Y(y) = C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}$$

dove A, B, C e D sono delle costanti da determinare imponendo le opportune condizioni al contorno, che sono quelle indicate nella figura precedente, ossia

$$T(y = 0) = 0$$

$$T(x = 0) = 0$$

$$T(x = L) = 0$$

$$T(y = b) = T_m \sin \frac{\pi x}{L}$$

Per imporre queste condizioni al contorno, dobbiamo prima determinare l'andamento del campo di temperatura: ricordando allora che $T(x, y) = X(x)Y(y)$, possiamo scrivere che tale campo è

$$T(x, y) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] [C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}]$$

Andiamo allora ad applicare le 4 condizioni:

$$T(y = 0) = 0 \longrightarrow T(y = 0) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] [C + D] = 0$$

$$T(x = 0) = 0 \longrightarrow T(x = 0) = [A] [C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}] = 0$$

$$T(x = L) = 0 \longrightarrow T(x = L) = [A \cos(\lambda L) + B \sin(\lambda L)] [C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}] = 0$$

$$T(y = b) = T_m \sin \frac{\pi x}{L} \longrightarrow T(y = b) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] [C e^{-\lambda b} + D e^{\lambda b}] = T_m \sin \frac{\pi x}{L}$$

La prima condizione può essere soddisfatta solo se $C = -D$, mentre la seconda solo se $A = 0$: l'espressione del campo di temperatura è dunque

$$T(x, y) = B C \sin(\lambda x) [e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}] = -2 B C \sin(\lambda x) [e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}] = 2 B C \sin(\lambda x) \sinh(\lambda y)$$

e le rimanenti due condizioni al contorno impongono che

$$T(x = L) = 2 B C \sin(\lambda L) \sinh(\lambda y) = 0$$

$$T(y = b) = 2 B C \sin(\lambda x) \sinh(\lambda b) = T_m \sin \frac{\pi x}{L}$$

La prima equazione è verificata quando $\sin(\lambda L) = 0$, ossia quando $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ con $n = 1, 2, 3, \dots$: ciò significa che esiste una soluzione differente, di questa equazione, per ogni n intero e, ovviamente, ogni soluzione ha una diversa costante di integrazione C_n : sommando allora tutte le infinite soluzioni al variare di n , possiamo scrivere il campo di temperatura nella forma

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}$$

A questa espressione possiamo applicare l'ultima condizione al contorno, $T(y = b) = T_m \sin \frac{\pi x}{L}$: otteniamo in tal modo che

$$T(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi b}{L} = T_m \sin \frac{\pi x}{L}$$

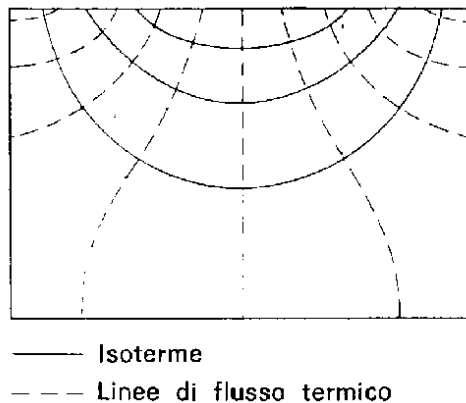
Da qui si osserva che, di tutti gli infiniti termini della serie, è sufficiente il primo (per $n=1$) e quindi si ha che

$$C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sinh \frac{\pi b}{L} = T_m \sin \frac{\pi x}{L} \longrightarrow C_1 = \frac{T_m}{\sinh \frac{\pi b}{L}}$$

Possiamo dunque concludere che il campo di temperatura ha la seguente espressione analitica:

$$T(x, y) = \frac{T_m}{\sinh \frac{\pi b}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \sinh \frac{\pi y}{L}$$

La figura seguente mostra l'andamento di questo campo (le linee continue sono le isoterme, mentre quelle tratteggiate sono le linee di flusso termico, ortogonali alle isoterme):



Ovviamente, se le condizioni al contorno del problema in esame non dovessero essere così semplici come quelle proposte in questo esempio, ci sarebbe una maggiore complessità dei calcoli.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>