Appunti di "FISICA TECNICA"

Capitolo 13 - Irraggiamento

IRRAGGIAMENTO TERMICO

Un corpo, posto in una cavità avente pareti a temperatura inferiore rispetto al corpo stesso, si raffredda anche se la cavità è vuota. Il meccanismo con il quale il calore viene trasmesso da un corpo, a causa della sua stessa temperatura, senza l'aiuto di un altro mezzo, è detto **irraggiamento termico**. Ci occupiamo, in questo capitolo, delle principali caratteristiche dell'irraggiamento termico e del relativo scambio di calore, ossia appunto della **trasmissione del calore per irraggiamento**.

Il meccanismo fisico dell'irraggiamento non è ancora del tutto chiaro: l'energia raggiante viene vista trasportata a volte per *onde elettromagnetiche*, altre volte per mezzo di *fotoni*, ma nessuna delle due trattazioni chiarisce completamente la natura di tutti i fenomeni che vengono osservati sperimentalmente.

E' comunque noto che le radiazioni viaggiano con la *velocità della luce*[1]: secondo la **teoria elettromagnetica**, le onde si propagano con questa velocità, mentre, secondo la teoria quantica, l'energia è trasportata da fotoni che viaggiano a questa velocità. Nonostante tutti i fotoni abbiano la stessa velocità, è bene precisare che tra loro esiste sempre una distribuzione di energia: l'energia

[1] che ricordiamo essere nel vuoto di circa **$3*10^8$ m/sec**

associata ad ogni fotone è $\boxed{E = h\nu}$, dove h è la **costante di Planck**, mentre ν è la *frequenza* della radiazione. Si può anche esprimere E in funzione della *lunghezza d'onda* λ della radiazione: infatti, la lunghezza d'onda è legata alla velocità di propagazione ed alla frequenza dalla relazione $\lambda=c/\nu$, per cui possiamo scrivere che $E=hc/\lambda$.

I fenomeni di irraggiamento sono in genere classificati secondo la loro lunghezza d'onda caratteristica. Nella figura seguente è indicato uno spettro abbastanza completo delle onde elettromagnetiche:

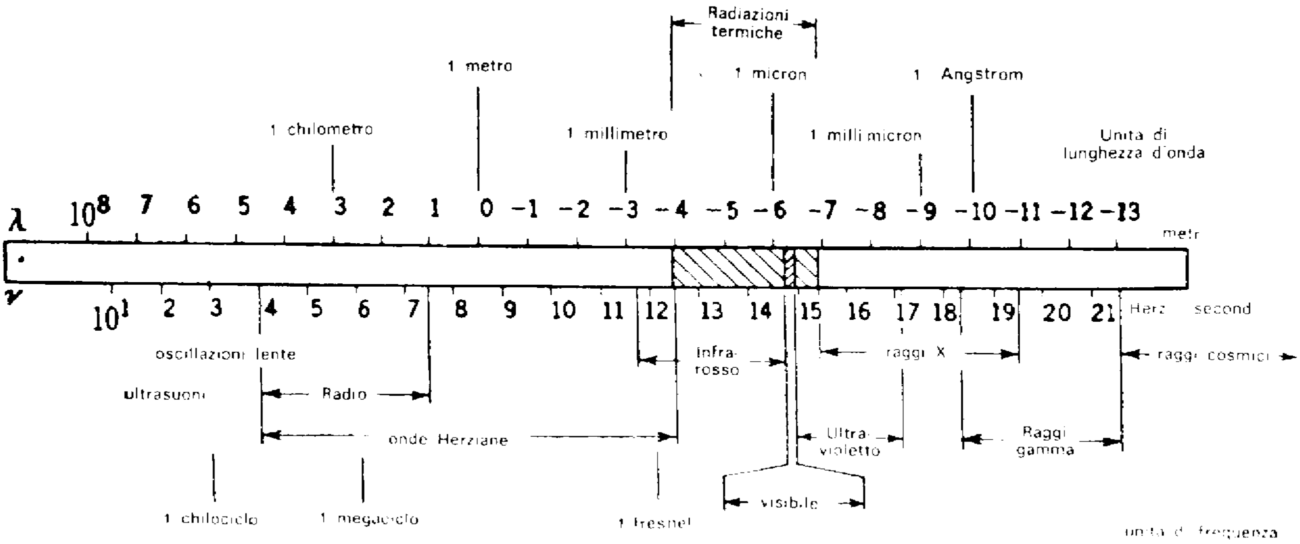

Figura 1 - Spettro delle radiazioni elettromagnetiche

I **fenomeni elettromagnetici** abbracciano molti tipi di radiazioni: dai raggi γ ed X, caratterizzati da piccole lunghezze d'onda, alle *onde radio*, aventi elevata lunghezza d'onda.

Il valore della lunghezza d'onda di una radiazione dipende da come è prodotta la radiazione stessa. A questo proposito, *l'irraggiamento termico è definito come l'energia raggiante emessa da un mezzo a causa della sua temperatura:* ciò significa che l'emissione di radiazioni termiche dipende dalla temperatura del corpo che emette.

*Il campo di lunghezze d'onda delle radiazioni termiche è approssimativamente quello compreso tra **0.1** mm e **100** mm.* Tale campo è usualmente diviso in tre zone (come indicato nel diagramma di prima) che sono l'**ultravioletto**, il **visibile** e l'**infrarosso**. La regione del visibile comprende lunghezze d'onda che variano da **0.38 μm** a **0.78 μm**, per una estensione, quindi, di appena 0.4μm.

Il sole, che ha una temperatura superficiale di circa 5500°C, emette la maggior parte della sua energia[2] sotto forma di radiazioni di lunghezza d'onda inferiore a **3 μm**, mentre il filamento di una lampadina a 1100°C emette il 90% della propria radiazione tra 1 μm e 10 μm.

I corpi condensati (vale a dire quelli non gassosi, ossia liquidi e solidi) emettono radiazioni a tutte le lunghezze d'onda ($\lambda\in\,]0,\infty[$), per cui lo spettro di tali radiazioni è un tipico **spettro continuo**; al contrario, i gas emettono solo per specifici valori di λ, il che significa che lo spettro delle loro radiazioni è uno **spettro a righe**. Inoltre, ogni sostanza gassosa ha una

[2] Si veda, a questo proposito, il capitolo sugli impianti fotovoltaici

precisa **banda di emissione**: per esempio, il *sodio* (lampade a vapori di sodio) emette radiazioni su 2 sole lunghezze d'onda, centrate intorno a quella del giallo (massima visibilità).

Ricordiamo inoltre che ogni materiale assorbe e trasmette energia in modo diverso al variare della lunghezza d'onda: ad esempio, il vetro è un materiale trasparente alla luce (cioè si fa attraversare dalle radiazioni con λ compresa tra 0.38μm e 0.78μm), ma è invece opaco per λ>0.78μm. Questo determina il cosiddetto **effetto serra microscopico**.

IRRAGGIAMENTO DEL CORPO NERO

Si definisce **corpo nero** *un corpo che, ad ogni temperatura e per ogni lunghezza d'onda, emette ed assorbe la massima quantità possibile di radiazione*[3]*.* Esso, inoltre, emette **energia diffusa**, ossia emette la stessa energia in ogni direzione: si parla di **radiatore omnidirezionale**.

Il corpo nero è solo un concetto teorico, che però è utile in quanto pone un limite massimo all'emissione di radiazioni in accordo con il *secondo principio della termodinamica*: si tratta essenzialmente di un campione con il quale si confrontano le caratteristiche di irraggiamento degli altri corpi.

Legge di Planck

Consideriamo dunque un corpo nero: l'energia che esso complessivamente emette, per unità di tempo e per unità di superficie, alla lunghezza d'onda λ e nell'intervallo di lunghezze d'onda $d\lambda$, sarà indicata con $\boxed{E_{n\lambda} d\lambda}$, dove $E_{n\lambda}$ è chiamato **potere emissivo monocromatico** del corpo nero (il pedice "*n*" sta appunto per "*nero*"). Si usa a volte anche l'espressione **potere emissivo spettrale** per indicare la dipendenza della radiazione dalla lunghezza d'onda, mentre *il termine monocromatico chiarisce che è una quantità di energia raggiante relativa alla lunghezza d'onda l considerata.*

Il potere emissivo monocromatico $E_{n\lambda}$ di un corpo nero dipende dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura assoluta del corpo secondo la seguente relazione (nota come **legge di Planck** e ottenuta mediante la *teoria quantica*):

$$E_{n\lambda}(T,\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)}$$

dove abbiamo adottato le seguenti posizioni:

$E_{n\lambda}$ (W/m^3) è il *potere emissivo monocromatico* del corpo nero alla temperatura T;

λ (m) è la lunghezza d'onda della radiazione

T (K) è la temperatura assoluta del corpo

$C_1 = 3.741 * 10^{-16} (W \cdot m^2)$

$C_2 = 1.439 * 10^{-2} (m \cdot K)$

[3] Il corpo nero è dunque un **radiatore ideale** (dato che emette la massima energia possibile) ed un **assorbitore ideale** (dato che assorbe tutta l'energia su esso incidente).

Nella figura seguente viene diagrammata la funzione $E_{n\lambda}(T,\lambda)$ ponendo la lunghezza d'onda in ascisse e tracciando le curve alle varie temperature:

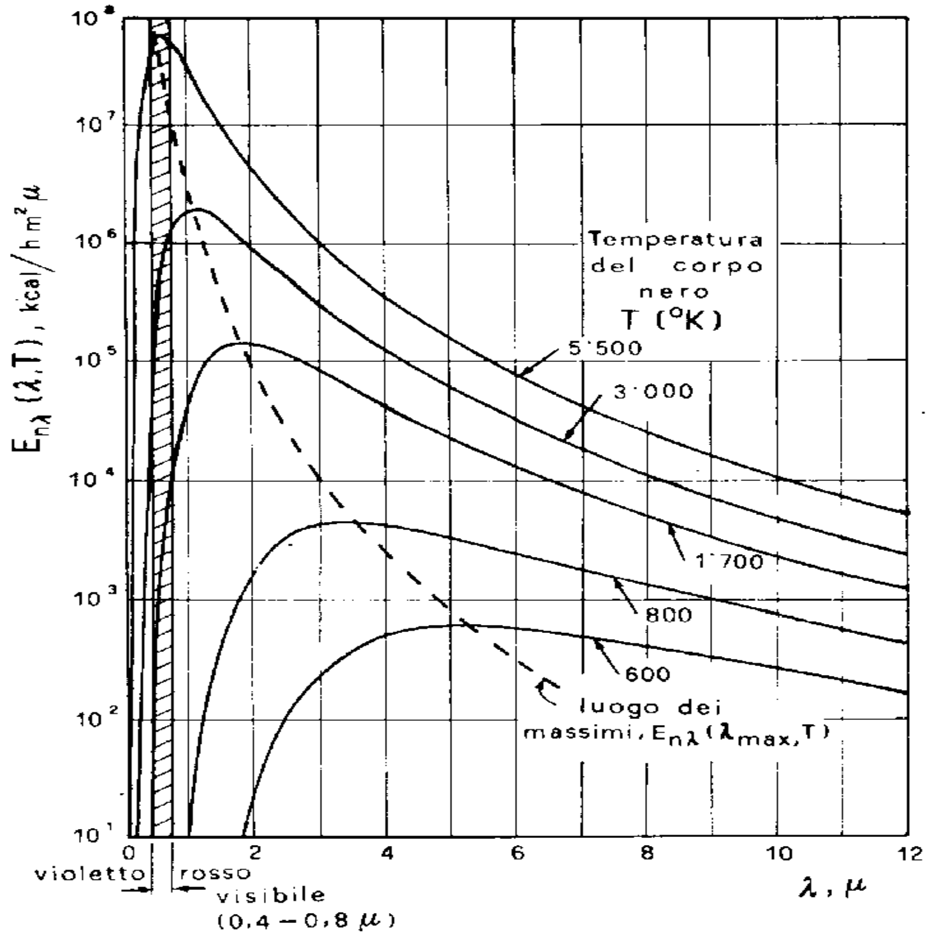

Figura 2 - Potere emissivo spettrale emisferico di un corpo nero per diversi valori della temperatura ed in funzione della lunghezza d'onda

In questo diagramma si osservano varie cose interessanti:

- intanto, a temperatura minore di 5500°C (cui corrisponde la curva superiore), l'emissione di energia raggiante è apprezzabile solo tra 0.2 μm e circa 50 μm, mentre, per lunghezze d'onda superiori, diventa quasi trascurabile;
- in secondo luogo, la lunghezza d'onda alla quale il potere emissivo monocromatico è massimo si sposta, all'aumentare della temperatura, verso valori minori (la curva tratteggiata unisce i valori di massimo); in particolare, si trova che la relazione tra la lunghezza d'onda λ_{max} alla quale $E_{n\lambda}$ è massimo e la temperatura assoluta è

$$\boxed{\lambda_{max} T = 2898(\mu m \cdot K)}$$

ossia una legge di proporzionalità inversa (detta **legge dello spostamento di Wien**)[4];

[4] Osserviamo che la legge dello spostamento di Wien è quella utilizzata per la determinazione della temperatura superficiale del sole.

- ancora, ricordando che il <u>*campo di lunghezze d'onda del visibile*</u> è costituito da uno stretto intervallo (indicato nel diagramma da una banda tratteggiata) che va da circa 0.4 μm e circa 0.7 μm, si nota che solo una piccolissima frazione dell'energia complessiva cade in questo campo di lunghezze d'onda per temperatura minori di 900K; invece, per temperature maggiori di 900K, la quantità di energia raggiante che cade nel visibile aumenta e l'occhio umano comincia dunque ad essere sensibilizzato dalle radiazioni.

<u>La sensazione prodotta sulla retina dalla radiazione e trasmessa al nervo ottico dipende dalla temperatura</u>:

- a circa 1000K, è emessa una quantità di energia, percepita dall'occhio, in un campo di lunghezze d'onda comprese tra 0.6μm e 0.7μm: un corpo a questa temperatura risulta di un colore rosso sbiadito;
- se la temperatura è superiore a 1000K, il colore diventa rosso brillante poi giallo e quindi bianco a circa 1600K; nello stesso tempo aumenta anche la luminosità, dato che cade nel visibile una quantità di energia raggiante sempre maggiore.

Legge di Stefan-Boltzmann

Quando abbiamo introdotto l'irraggiamento, abbiamo detto che l'energia raggiante emessa complessivamente, per unità di superficie e per unità di tempo, da un corpo nero è legata alla quarta potenza della temperatura assoluta secondo la **legge di Stefan-Boltzmann**:

$$\boxed{E_n(T) = \frac{q_I}{A} = \frac{\sigma A T^4}{A} = \sigma T^4 \qquad \frac{\text{kcal}}{\text{h}}}$$

In questa relazione compaiono i seguenti termini:

- A è l'area della superficie (misurata in m^2)
- T è la temperatura della superficie (misurata in gradi Kelvin K)
- σ è una costante adimensionale (detta **costante di Stefan-Boltzmann**) che vale $4.88 \cdot 10^{-8} \left(\text{kcal}/\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4\right)$ nel Sistema Tecnico (nel qual caso q_I è misurata in kcal/h) oppure $5.67 \cdot 10^{-8} \left(\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4\right)$ nel Sistema Internazionale (nel qual caso q_I è misurata in W).

Il termine $E_n(T)$ fornito da quella relazione prende il nome di **potere emissivo totale** *e rappresenta la radiazione termica complessivamente emessa nell'intero campo di lunghezze d'onda.* Ad una data temperatura T, $E_n(T)$ corrisponde all'area sotto una curva del tipo di quelle riportate nell'ultimo diagramma. In termini analitici, infatti, tra il potere emissivo totale $E_n(T)$ ed il potere emissivo monocromatico $E_{n\lambda}(T)$ sussiste la seguente relazione:

$$E_n(T) = \sigma T^4 = \int_0^\infty E_{n\lambda}(T) d\lambda$$

D'altra parte, avendo detto in precedenza che

$$E_{n\lambda}(T,\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)}$$

possiamo calcolare il valore di quell'integrale. Calcolando tale valore, si trova una interessante relazione tra la costante di Stefan-Boltzmann σ e le costanti C_1 e C_2 che compaiono nella legge di Planck appena riportata:

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{C_2}\right)^4 \frac{C_1}{15} = 4.88 * 10^{-8} \qquad \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

Nei calcoli ingegneristici che riguardano superfici reali, è spesso importante conoscere, più che l'energia complessivamente emessa nell'intero campo di lunghezze d'onda (cioè il potere emissivo totale), l'energia irraggiata in corrispondenza di una particolare lunghezza d'onda (cioè il potere emissivo monocromatico) oppure quella irraggiata in una banda compresa tra due particolari valori λ_1 e λ_2 di lunghezza d'onda: in quest'ultimo caso, basta evidentemente calcolare la quantità

$$E_n(T,\lambda_1,\lambda_2) = \int_{\lambda_2}^{\lambda_2} E_{n\lambda}(T)d\lambda$$

Diagrammi di utilità pratica

I calcoli numerici sono spesso facilitati dall'uso di alcune particolari curve, che andiamo ad illustrare.

Intanto, abbiamo detto prima che, ad ogni temperatura, il potere emissivo monocromatico $E_{n\lambda}(T)$ ha un massimo in corrispondenza della lunghezza d'onda $\lambda_{max} = 2898 / T$. Possiamo allora calcolare quanto vale questo valore massimo:

$$\text{dato che } E_{n\lambda}(T,\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)} \longrightarrow E_{n\lambda,max}(T,\lambda_{max}) = \frac{C_1}{\lambda_{max}^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda_{max} T}} - 1\right)} = \ldots = 12.87 \cdot 10^{-6} \cdot T^5 \qquad \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$$

Questa relazione illustra dunque come varia il massimo potere emissivo monocromatico in funzione della temperatura. Il diagramma seguente mostra appunto questa dipendenza:

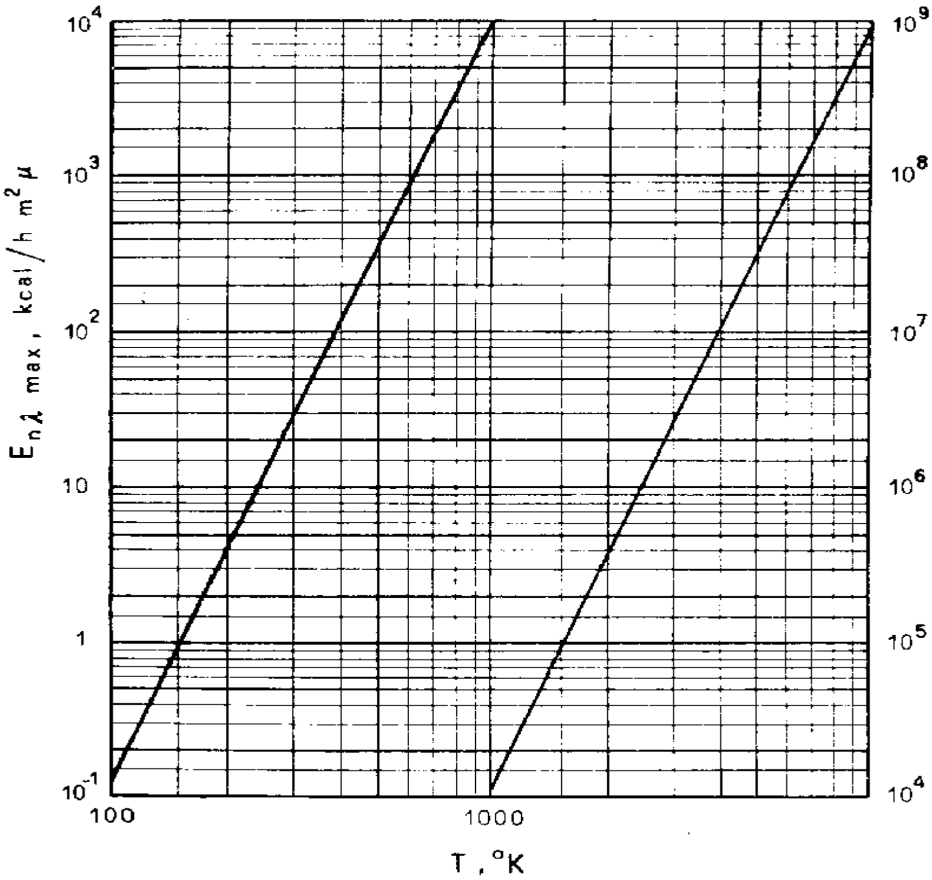

Figura 3 - Potere emissivo monocromatico massimo in funzione della temperatura assoluta

Un'altra quantità molto importante si ottiene facendo il rapporto tra $E_{n\lambda}(T)$ ed il suo valore massimo $E_{n\lambda,max}(T)$ alla stessa temperatura:

$$\frac{E_{n\lambda}(T)}{E_{n\lambda,max}(T)} = \frac{\dfrac{C_1}{\lambda^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1\right)}}{\dfrac{C_1}{\lambda_{max}^5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda_{max}T}}-1\right)}} = \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda}\right)^5 \frac{\left(e^{\frac{C_2}{\lambda_{max}T}}-1\right)}{\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1\right)}$$

Ricordando poi che $\lambda_{max} = 2898/T$ e sostituendo inoltre i valori delle costanti C_1 e C_2, il rapporto diventa

$$\frac{E_{n\lambda}(T)}{E_{n\lambda,max}(T)} = \left(\frac{2898}{\lambda T}\right)^5 \frac{\left(e^{4.965}-1\right)}{\left(e^{\frac{14390}{\lambda T}}-1\right)}$$

Si osserva dunque che il secondo membro di questa equazione è una funzione univoca di λT, per cui possiamo diagrammare il rapporto $\dfrac{E_{n\lambda}}{E_{n\lambda,max}}$ in funzione proprio di λT :

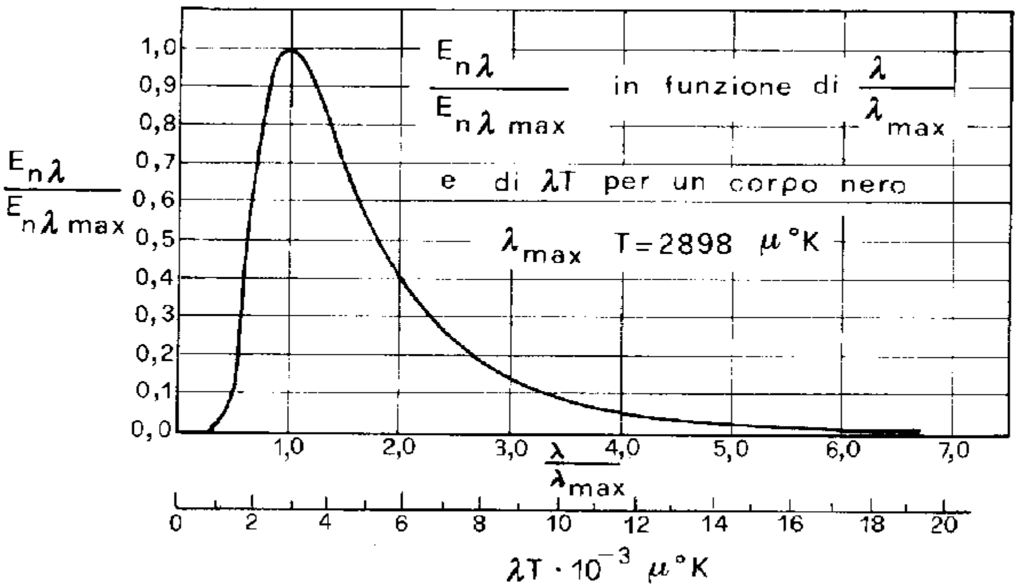

Figura 4 - Rapporto tra il potere emissivo monocromatico ed il potere emissivo monocromatico massimo in funzione di l/l_{max} e di lT

Questa figura è utile per il motivo seguente: per determinare il potere emissivo monocromatico $E_{n\lambda}(T,\lambda)$ del corpo nero, per diversi valori di λ e di T, si deve leggere $\frac{E_{n\lambda}}{E_{n\lambda,max}}$ dal diagramma di figura 4 e poi moltiplicare per il valore di $E_{n\lambda,max}$ letto dal diagramma di figura 3. L'esempio seguente chiarisce questo procedimento.

Esempio

Supponiamo di voler determinare il potere emissivo monocromatico di un filamento di tungsteno a 1100°C, alla lunghezza d'onda alla quale è massimo ed alla lunghezza d'onda di 5mm.

Per prima cosa, dato che tutti i diagrammi sono riportati per temperature assolute, passiamo dai Celsius ai gradi Kelvin: T=1100°C=1373K.

A questa temperatura, il potere emissivo totale massimo, ricavato dal diagramma della figura 3, vale circa $E_{n\lambda,max} = 5.5 \cdot 10^4 (kcal/hm^2\mu)$. Questo valore si ottiene in corrispondenza della lunghezza d'onda fornita dalla equazione $\lambda_{max} = 2898/T$ per T=1373K: 2898/1373=2.11μm.

Infine, in corrispondenza del valore $\lambda T = 5 \cdot 1373 = 6865(\mu K)$, il potere emissivo monocromatico fornito dal diagramma di figura 4 risulta essere $E_{n\lambda} = 1.5 \cdot 10^4 (kcal/hm^2\mu)$ ed è pari al 28% del valore $E_{n\lambda,max}$ trovato prima.

Consideriamo adesso l' energia raggiante emessa da un corpo nero nell'intervallo [0,λ]: in base alle considerazioni fatte precedentemente, si tratta della quantità

$$E_n(T,0,\lambda) = \int_0^\lambda E_{n\lambda}(T)d\lambda$$

Ricordando che, in generale, il potere emissivo totale è $E_n(T) = \sigma T^4$, possiamo scrivere che

$$\frac{E_n(T,0,\lambda)}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda} \frac{E_{n\lambda}(T)}{\sigma T^4} d\lambda = ..?.. = \int_0^{\lambda T} \frac{E_{n\lambda}(T)}{\sigma T^5} d(\lambda T)$$

In tal modo, abbiamo ottenuto come calcolare la quantità $\frac{E_n(T,0,\lambda)}{\sigma T^4}$, ossia la frazione del potere emissivo totale del corpo nero che, alla temperatura T, è compresa nell'intervallo $[0,\lambda T]$. I valori di quell'integrale, al variare di λT, sono riportati nella figura seguente:

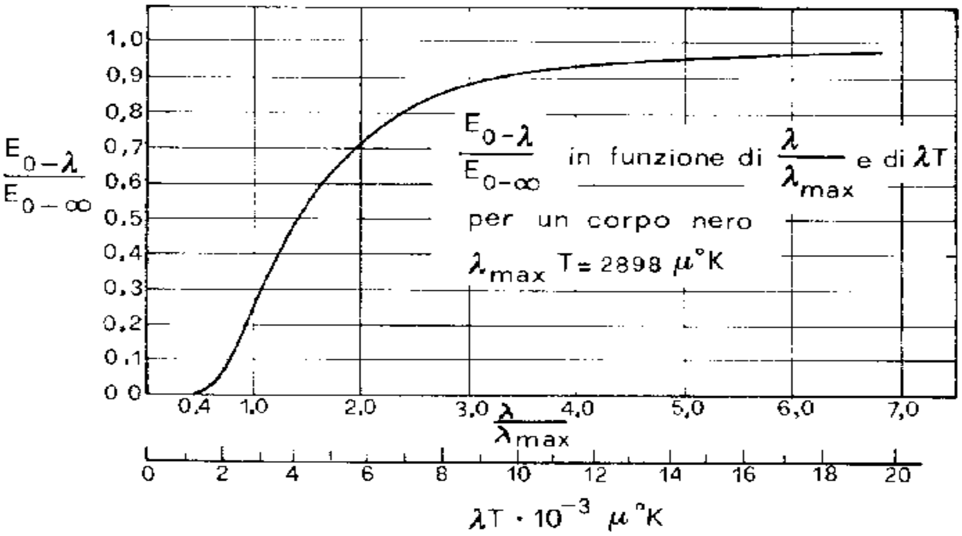

Figura 5 - Frazione del potere emissivo totale emessa nell'intervallo spettrale [0,l] in funzione di lT

Con questo diagramma è possibile calcolare la quantità di energia raggiante compresa in un generico intervallo $[\lambda_1,\lambda_2]$, come illustrato nell'esempio che segue.

Esempio

Un particolare tipo di vetro trasmette il 92% delle radiazioni comprese nel campo 0.35mm-2.73mm ed è opaco alle lunghezze d'onda maggiori e minori. Vogliamo calcolare la percentuale di energia raggiante solare che il vetro trasmettendo, supponendo, per semplicità, che il sole irraggi come un corpo nero a 5500°C.

Per prima cosa, individuiamo il valore del prodotto λT in corrispondenza di T=5500°C e dei limiti dell'intervallo di lunghezze d'onda nel quale il vetro è trasparente: risulta λT=1900μmK al limite inferiore e λT=15000μmK al limite superiore. Allora, usando il diagramma della figura 5, otteniamo quanto segue:

$$\frac{E_n(T,0,0.35)}{\sigma T^4} = 5.2\%$$

$$\frac{E_n(T,0,2.73)}{\sigma T^4} = 96.9\%$$

Da qui deduciamo allora che il 96.9-5.2=91.7% dell'energia raggiante solare incidente sul vetro si trova nel campo di lunghezze d'onda comprese tra 0.35μm e 2.73μm: di conseguenza, la percentuale di energia raggiante trasmessa dal vetro è il 92% del 91.7%, ossia l' 84.4%.

REALIZZAZIONE DI UN CORPO NERO IN LABORATORIO

Come abbiamo detto in precedenza, *il concetto di corpo nero è una idealizzazione, dato che tutte le superfici riflettono una parte delle radiazioni incidenti.* Ad ogni modo, un corpo nero può comunque essere realizzato, con ottima approssimazione, in laboratorio, mediante una cavità, ad esempio sferica, le cui pareti interne siano mantenute a temperatura uniforme T:

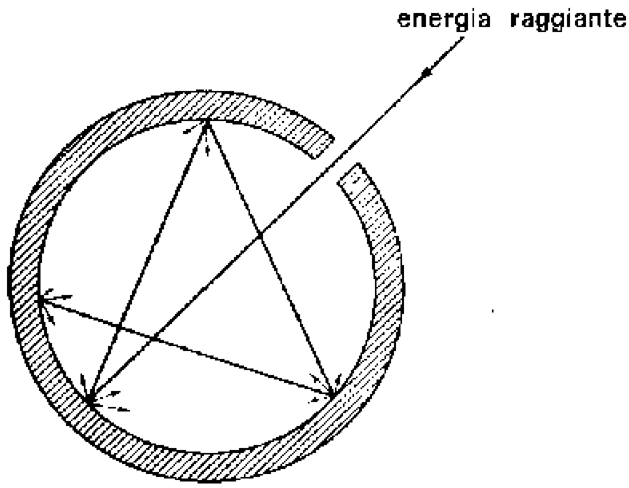

Figura 6 - *Riflessioni in una cavità: approssimazione in laboratorio di un corpo nero*

Se nella parete della sfera è praticato un piccolo foro, qualunque radiazione vi penetra è in parte assorbita dalla superficie interna ed in parte riflessa; tuttavia, la radiazione riflessa, come si nota dalla figura, non lascia immediatamente la cavità, ma incide ripetutamente sulla superficie interna e, ogni volta che la colpisce, viene parzialmente assorbita. Alla fine, quando il fascetto di radiazioni raggiunge nuovamente il foro ed esce dalla cavità, è stato così indebolito dalle ripetute riflessioni che la sua energia è sicuramente trascurabile. E’ successo, cioè, che una radiazione incidente è stata quasi totalmente assorbita, cosa che è caratteristica appunto dei corpi neri.

Questo discorso vale ovviamente a prescindere dalla forma e dal materiale della parete cavità: in altre parole, *un piccolo foro, in una parete che chiude una grande cavità, si comporta da corpo nero in quanto tutte le radiazioni che incidono su di esso rimangono praticamente assorbite.*

C’è anche un altro risultato importante da osservare. Intanto, la radiazione emessa dalla superficie interna di una cavità, essendo assorbita e riflessa ripetutamente, riempie la cavità stessa in modo uniforme. Immaginiamo allora di porre un corpo nero all’interno di una cavità chiusa e di fare in modo che la temperatura di tale corpo sia uguale a quella della superficie interna della cavità: in base a quanto detto, il corpo riceve radiazioni in modo uniforme (ossia, come suol dirsi, è *irraggiato isotropicamente*), ma, soprattutto, assorbe tutta la radiazione incidente. Non solo, ma, dato che il sistema (comprendente il corpo stesso e la cavità) è a temperatura uniforme, la potenza raggiante emessa dal corpo nero deve necessariamente essere uguale alla potenza raggiante incidente: se non fosse così, infatti, ci sarebbe uno scambio detto di energia tra due corpi alla stessa temperatura in un sistema isolato, il che sarebbe una palese violazione del 2° principio della termodinamica. Allora, se indichiamo con G_n la potenza raggiante emessa dalle pareti della cavità e incidente sul corpo nero (cioè il cosiddetto **irraggiamento del corpo nero**) ed indichiamo con E_n la potenza raggiante emessa dal corpo nero (cioè il suo potere emissivo totale), deve necessariamente risultare $G_n=E_n$. Questa uguaglianza significa questo: *all’interno di una cavità, l’irraggiamento* *che incide su una superficie è pari alla potenza raggiante emessa da un corpo nero che si trova alla stessa temperatura delle pareti della cavità.*

Un piccolo foro nella parete di una cavità non altera apprezzabilmente la situazione appena descritta e la radiazione che lascia la cavità ha perciò le caratteristiche del corpo nero. Tale radiazione è indipendente dalla natura della superficie e quindi *il potere emissivo di un corpo nero dipende solo dalla sua temperatura.*

INTENSITÀ DI RADIAZIONE

Finora abbiamo considerato solo l'energia che complessivamente lascia una superficie, ossia il cosiddetto **potere emissivo** (sia totale sia monocromatico). Questo concetto non è però sufficiente per una analisi dello scambio termico nel caso in cui si deve considerare la radiazione che passa in una certa direzione ed è intercettata da un altro corpo. In questo caso, infatti, bisogna considerare la quantità di energia raggiante che si trasmette in una certa direzione: tale quantità prende il nome di **intensità**[5] **di radiazione** e si indica col simbolo **I**.

Per poter introdurre analiticamente l'intensità di radiazione, dobbiamo prima capire come è possibile avere una misura della direzione e dello spazio nel quale il corpo irraggia energia.

La quantità di energia emessa, per unità di tempo e per unità di superficie, che passa in una certa direzione può essere misurata determinando la radiazione che attraversa un *elemento di superficie emisferica* costruita intorno alla superficie raggiante. Se il raggio di questa emisfera è unitario, l'emisfera stessa ha una superficie di area 2π e, allo stesso tempo, sottende dal centro della sua base un angolo solido di 2π steradianti. Si ha cioè che l'area della superficie della sfera unitaria ha lo stesso valore numerico dell'angolo solido ω misurato a partire dall'elemento di superficie: questo fatto consente di utilizzare proprio la suddetta area per definire sia la direzione sia lo spazio in cui si propaga la radiazione.

Facciamo allora riferimento alla figura seguente:

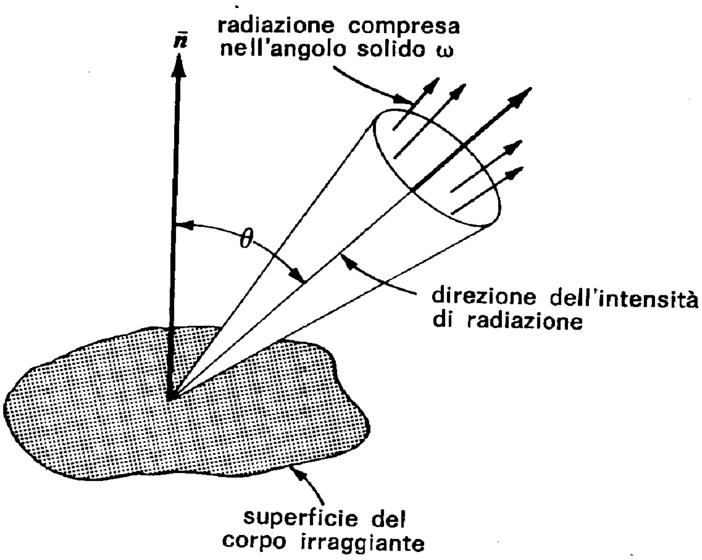

Figura 7 - Intensità di radiazione

[5] Ricordiamo che, dimensionalmente, una intensità è una potenza per unità di superficie, ossia energia per unità di tempo e di superficie

L' **intensità di radiazione** *è definita come l'energia emessa, per unità di tempo e per unità di superficie di emissione proiettata normalmente alla direzione q, in un angolo solido unitario che ha per asse la direzione q del pennello di raggi.*

Per comprendere questa definizione, indichiamo con $d(q/A)_i$ l'energia raggiante, per unità di tempo e per unità di superficie, che passa in un angolo solido infinitesimo $d\omega$ inclinato di un angolo θ rispetto alla normale alla superficie emittente: l'intensità è data allora da

$$I(\omega,\theta)=\frac{d(q/A)_i}{d\omega\cdot\cos\theta}$$

E' possibile mettere in relazione l'intensità di radiazione con il potere emissivo. Per fare questo, bisogna determinare l'energia che da una superficie viene irraggiata nella semisfera posta sulla superficie stessa, come indicato nella figura seguente:

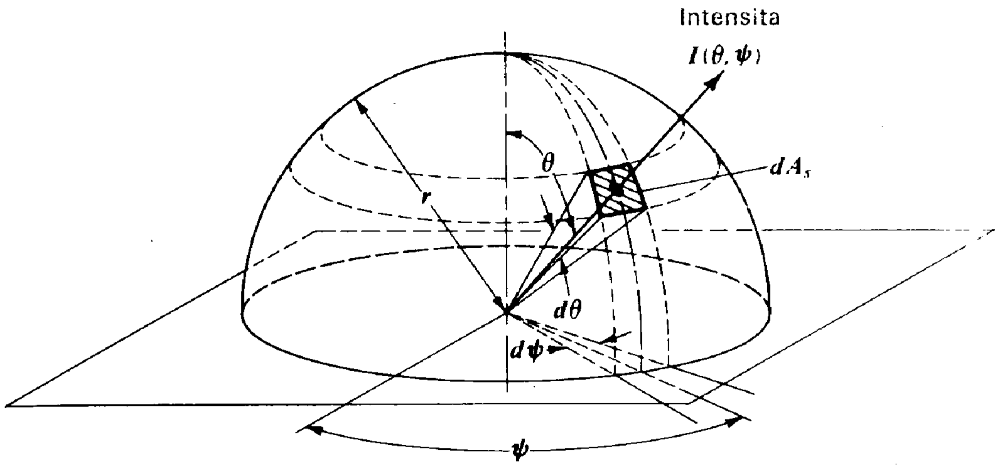

Figura 8 - Nomenclatura per l'intensità di radiazione in un sistema di coordinate sferiche

Poiché l'emisfera intercetta tutti i raggi uscenti dalla superficie, la quantità totale di energia raggiante che passa attraverso la superficie emisferica è pari proprio al potere emissivo.

L'angolo solido $d\omega$ sotteso da una superficie che riceve la radiazione è pari al rapporto tra l'area della proiezione della superficie stessa nella direzione della radiazione incidente e il quadrato della distanza tra la superficie emittente e la superficie ricevente. Come si osserva dalla figura, l'angolo solido differenziale $d\omega$ può essere allora comodamente espresso, in un sistema di coordinate sferiche, in funzione del raggio e degli angoli θ e ψ: esso è infatti uguale all'elemento di superficie dA_S dell'emisfera diviso il quadrato del raggio dell'emisfera, ossia

$$d\omega=\frac{dA_S}{r^2}=\frac{rd\theta\cdot r\sin\theta\cdot d\psi}{r^2}=\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\psi$$

Sostituendo nell'espressione $I(\omega,\theta)=\frac{d(q/A)_i}{d\omega\cdot\cos\theta}$ dell'intensità, otteniamo

$$I(\psi,\theta) = \frac{d(q/A)_i}{\cos\theta \cdot (\sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi)}$$

Da qui ricaviamo quindi che

$$d(q/A)_i = I(\psi,\theta) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

Allora, se integriamo questa quantità sull'intera emisfera, possiamo ottenere la quantità totale di radiazione emessa, ossia il potere emissivo E_n:

$$E_n = (q/A)_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I(\psi,\theta) \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta d\psi$$

Naturalmente, per poter calcolare quell'integrale doppio, è necessario conoscere la funzione $I(\psi,\theta)$, ossia come varia l'intensità in funzione degli angoli θ e ψ. A questo proposito, *si verifica che I non presenta variazioni apprezzabili con nessuno di questi due angoli, il che equivale a dire che l'intensità della radiazione che lascia una superficie è uniforme in tutte le direzioni:* si dice, in questo caso, che la superficie in esame segue la cosiddetta **legge del coseno di Lambert** . Indicato allora con I_n il valore (costante) dell'intensità di radiazione, possiamo scrivere che

$$E_n \cong I_n \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta d\psi$$

Risolvendo dunque i due integrali, otteniamo

$$\boxed{E_n = \pi I_n}$$

Abbiamo dunque trovato che, *per una superficie diffusa*[6]*, il potere emissivo E_n è π volte l'intensità di radiazione I_n.*

Abbiamo adesso fatto riferimento alla cosiddetta **intensità di radiazione totale**, nel senso che abbiamo considerato le radiazioni su tutto lo spettro di lunghezza d'onda. Possiamo ora legare l'intensità di radiazione totale alla **intensità di radiazione monocromatica** (simbolo: $I_\lambda(\psi,\theta,\lambda)$), cioè quella relativa ad una data lunghezza d'onda: il legame è espresso dalla relazione

$$I(\psi,\theta) = \int_0^{\infty} I_\lambda(\psi,\theta,\lambda) d\lambda$$

Con riferimento proprio a $I_\lambda(\psi,\theta,\lambda)$, si trova ancora una volta che $\boxed{E_\lambda = \pi I_\lambda}$ nel caso in cui la superficie irraggia diffusamente: infatti, in questo caso l'intensità dipende solo da λ, per cui risulta $I_\lambda(\psi,\theta,\lambda) = I_\lambda(\lambda)$.

Quindi, possiamo affermare, in generale, che, *in caso di superficie che irraggia diffusamente, il potere emissivo, relativo sia ad una specifica*

[6] Parlare di superficie *diffusa* significa dire che l'intensità di radiazione che lascia la superficie stessa è uniforme in tutte le direzioni

lunghezza d’onda sia a tutto lo spettro di lunghezze d’onda, è p volte l’intensità di radiazione, relativa, rispettivamente, ad una specifica lunghezza d’onda o a tutto lo spettro di lunghezze d’onda.

CARATTERISTICHE DI IRRAGGIAMENTO: LEGGE DI KIRCHOFF

Nelle applicazioni pratiche, la maggior parte delle superfici non hanno comportamento da corpo nero. Per caratterizzare il loro comportamento, con riferimento appunto all’irraggiamento, si usano delle **grandezze adimensionali** che collegano la capacità di tali superfici di emettere o assorbire energia a quelle che corrispondentemente avrebbe un corpo nero. Si fa, quindi, un confronto tra la situazione reale, della superficie reale considerata, e la situazione ideale rappresentata dal corpo nero corrispondente.

Per esempio, indicando con E_λ il **potere emissivo monocromatico** di una superficie reale (cioè l’energia che essa emette, per unità di tempo e per unità di superficie, alla lunghezza d’onda λ), si definisce **emittenza emisferica monocromatica** della superficie stessa la quantità

$$\boxed{\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{n\lambda}}}$$

dove, ovviamente, $E_{n\lambda}$ è il potere emissivo monocromatico del corpo nero corrispondente alla superficie considerata. In altre parole, e_l *è la percentuale di radiazione di corpo nero emessa dalla superficie considerata alla lunghezza d’onda l considerata.* In altre parole, l’emittenza emisferica monocromatica consente di passare dal comportamento del corpo nero a quello del corrispondente corpo reale. Ovviamente, quindi, risulta $0<\varepsilon_\lambda<1$.

In modo del tutto analogo, si definisce **coefficiente di assorbimento monocromatico** *di una superficie reale, non nera, la quantità* α_λ *pari alla percentuale di energia raggiante monocromatica, incidente sulla superficie, che viene assorbita.* Anche qui non può che risultare $0<\alpha_\lambda<1$.

Esiste una importante relazione tra ε_λ e α_λ, che va sotto il nome di **legge di Kirchoff**: questa legge stabilisce che, *per qualunque superficie, l’emittenza monocromatica è pari al coefficiente di assorbimento monocromatico.*

E’ possibile fare una dimostrazione rigorosa di questa proprietà, ma noi ci limitiamo ad una dimostrazione essenzialmente qualitativa.

Supponiamo di porre un piccolo corpo nero in una cavità nera le cui pareti siano alla temperatura T; una volta raggiunto l’equilibrio termico, anche il corpo nero dovrà avere la temperatura T e, in accordo al 2° principio della termodinamica, in queste condizioni esso emetterà, per ciascuna lunghezza d’onda, tanta energia raggiante E_λ quanta ne assorbe. Se, allora, indichiamo con $G_{n\lambda}$ l’energia raggiante monocromatica che, nell’unità di tempo, incide sulla superficie di un corpo, la suddetta condizione di equilibrio è espressa dalla relazione

$$E_\lambda = \alpha_\lambda G_{n\lambda}$$

dalla quale ricaviamo che $G_{n\lambda} = E_\lambda / \alpha_\lambda$. D’altra parte, la radiazione incidente $G_{n\lambda}$ dipende solo dalla temperatura della cavità ed è perciò la stessa a prescindere da quale sia il corpo in equilibrio con la cavità ed a prescindere dal coefficiente di assorbimento della superficie del corpo. Questo comporta che, *per ogni lunghezza d'onda, il rapporto* E_λ/α_λ *tra il potere emissivo monocromatico ed il coefficiente di assorbimento è lo stesso per tutti i corpi.* Inoltre, dal momento che α_λ è generalmente minore di 1 ed è =1 solo per un corpo nero, la relazione $E_\lambda = \alpha_\lambda G_{n\lambda}$ indica che, a qualunque temperatura, E_λ è massimo per un corpo nero: ciò significa che, se $\alpha_\lambda=1$, risulta $E_\lambda=E_{n\lambda}$ e quindi, avendo detto che $E_\lambda = \varepsilon_\lambda E_{n\lambda}$, risulta $G_{n\lambda} = E_{n\lambda}$.

A questo punto, ponendo $E_\lambda = \varepsilon_\lambda E_{n\lambda}$ nell'equazione $E_\lambda = \alpha_\lambda G_{n\lambda}$, otteniamo

$$\varepsilon_\lambda E_{n\lambda} = \alpha_\lambda G_{n\lambda}$$

e da qui, essendo $G_{n\lambda} = E_{n\lambda}$, deduciamo che $\boxed{\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda}$ ad ogni lunghezza d'onda e ad ogni temperatura.

Questa uguaglianza è stata dunque dimostrata nel caso particolare in cui il corpo considerato sia in equilibrio con l'ambiente. In realtà, si tratta di una relazione assolutamente generale, applicabile in qualsiasi condizione: infatti, sia α_λ sia ε_λ dipendono solo dalle caratteristiche della superficie e dalla sua temperatura e quindi, *a meno che le variazioni di temperatura non causino alterazioni fisiche delle caratteristiche superficiali, il coefficiente di assorbimento emisferico monocromatico di una superficie è uguale alla sua emittenza emisferica monocromatica.*

Mentre ε_λ è l'emittenza emisferica monocromatica, siamo adesso in grado di calcolare anche l'**emittenza totale emisferica** di una superficie non nera: infatti, avendo detto che $E_\lambda = \varepsilon_\lambda E_{n\lambda}$ e ricordando che l' energia raggiante emessa da un corpo nero nell'intervallo [0,λ] è data da

$$E_n(T,0,\lambda) = \int_0^\lambda E_{n\lambda}(\lambda,T)d\lambda$$

deduciamo che, ad una data temperatura T, l'**emittenza totale emisferica** vale

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda,T)E_{n\lambda}(\lambda,T)d\lambda}{\int_0^\infty E_{n\lambda}(\lambda,T)d\lambda}$$

Questa relazione indica, in particolare, che *l'emittenza totale emisferica di una superficie varia con la temperatura della superficie stessa anche nel caso in cui l'emittenza monocromatica* e_l *non dovesse dipendere dalla temperatura:* il motivo analitico si coglie direttamente dalla formula, mentre il motivo fisico sta nel fatto che la percentuale di energia raggiante compresa in un dato intervallo di lunghezze d'onda dipende dalla temperatura della superficie emittente.

In modo del tutto analogo, partendo dal coefficiente di assorbimento emisferico monocromatico α_λ possiamo ottenere il **coefficiente di assorbimento totale** di una superficie. Intanto, consideriamo una superficie a temperatura T che sia sottoposta ad una radiazione incidente complessiva data da

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda^*, T^*) d\lambda$$

dove l'apice * serve ad indicare le condizioni della sorgente. Se la variazione con λ del coefficiente di assorbimento della superficie ricevente è espressa da $\alpha_\lambda(\lambda)$ (che poi coincide con $\varepsilon_\lambda(\lambda)$ in base alla legge di Kirchoff), il **coefficiente di assorbimento totale** risulta espresso dalla relazione

$$\alpha(\lambda^*, T^*) = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda^*, T^*) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda^*, T^*) d\lambda}$$

In base a questa relazione, *a dipende dalla temperatura e dalle caratteristiche spettrali della radiazione.* Questo comporta che, mentre l'uguaglianza $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$ è sempre valida, lo stesso non accade per α ed ε, che sono invece generalmente diversi. Confrontando le rispettive definizioni, si osserva, tuttavia, che ci sono due casi particolari in cui risulta anche $\alpha = \varepsilon$:

- il primo caso, considerando che $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$, si verifica quando $\boxed{G_\lambda(\lambda^*, T^*) = E_n(\lambda, T)}$, ossia quando l'energia emisferica incidente ha la distribuzione spettrale di una sorgente nera alla temperatura della superficie;
- il secondo caso è, invece, quello in cui α_λ e ε_λ sono uniformi (cioè costanti) in tutto il campo di lunghezze d'onda: in questo caso, risulta infatti $\boxed{\alpha(\lambda^*, T^*) \equiv \alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \equiv \varepsilon(T)}$. Superfici che godano di questa proprietà sono dette **corpi grigi**: *nelle applicazioni pratiche, è spesso possibile scegliere opportuni valori dell'emittenza e del coefficiente di assorbimento con i quali considerare valida l'ipotesi di corpi grigi,* ipotesi che, peraltro, non è mai verificata rigorosamente.

Caratteristiche di irraggiamento delle superfici reali

L'irraggiamento delle superfici reali differisce per molti aspetti da quello dei corpi neri. Intanto, per quanto visto prima, una superficie reale irraggia sempre meno di un corpo nero alla stessa temperatura.

Se, ad una certa temperatura, il rapporto tra potere emissivo monocromatico E_l di un corpo reale ed il potere emissivo monocromatico E_{nl} del corpo nero, alla stessa temperatura, è costante nell'intero campo di lunghezze d'onda, il corpo considerato è detto **corpo grigio** ed il suo **potere emissivo totale** è dato da

$$\boxed{E_g = \varepsilon_g \sigma T^4 = \varepsilon_g E_n}$$

In base a questa relazione, si comprende che *la forma della curva spettro-radiometrica di una superficie grigia è simile a quella di una* *superficie nera alla stessa temperatura, ma l'altezza è ridotta del valore numerico dell'emittenza e_g.*

Nei calcoli di scambio termico, le superfici sono solitamente considerate grigie anche se le caratteristiche della maggior parte di tali superfici non sono quelle di corpi grigi.

La figura seguente mostra le caratteristiche spettrali di un corpo nero e di una superficie metallica, a 1650°C:

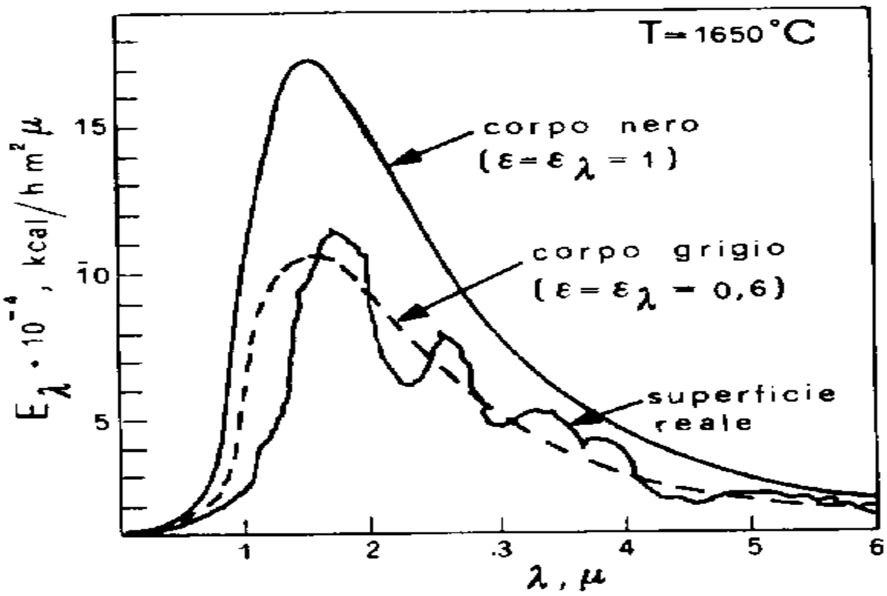

Figura 9 - Confronto dei poteri emissivi del corpo nero e di un corpo grigio con quello di una superficie reale

Alla curva spettrale della superficie reale è sovrapposta la curva del potere emissivo monocromatico di un corpo grigio avente $\varepsilon_\lambda = \varepsilon = 0.6$: questo valore particolare dell'emittenza è stato scelto in modo tale che il potere emissivo totale della superficie reale sia uguale a quello del corpo grigio.

Nonostante le caratteristiche spettrali della superficie reale differiscano da quelle del corpo grigio, *nei calcoli di scambio termico è sempre sufficiente approssimare la superficie reale con un corpo grigio di emittenza e=0.6. E' inoltre ragionevole supporre che anche il coefficiente di assorbimento sia a=0.6,* a meno che la radiazione incidente non sia nello spettro solare, ossia al di sotto di λ=2μm, nel qual caso l'emittenza spettrale della superficie reale è notevolmente minore di quella del corpo grigio corrispondente. Il coefficiente di assorbimento solare per questa superficie è circa 0.3 ed è questo valore, non 0.6, che dovrebbe essere usato, se si vuol adottare l'ipotesi di corpo grigio, al fine di calcolare la percentuale di energia solare assorbita dalla superficie.

Segnaliamo inoltre che esistono apposite tabelle in cui sono riportate le emittenze emisferiche totali, a diverse temperature centigrade, per le superfici reali più utilizzate.

Nella figura seguente è invece riportato, in funzione di λ, l'andamento (ricavato sperimentalmente) dell'emittenza monocromatica ε_λ (uguale peraltro al coefficiente di assorbimento monocromatico α_λ) di alcuni conduttori elettrici:

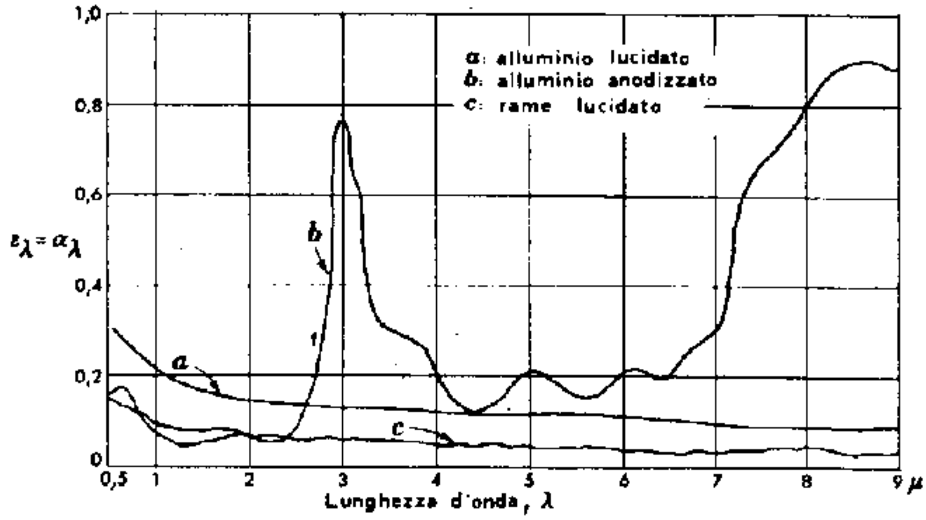

Figura 10 - Variazione del coefficiente di assorbimento monocromatico (o dell’emittenza monocromatica) con l per conduttori elettrici a temperatura ambiente

La figura mostra che *l’emittenza monocromatica di un conduttore elettrico in generale aumenta al diminuire della lunghezza d’onda:* ciò comporta, in base alla equazione

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda}$$

che l’*emittenza totale di un conduttore elettrico aumenti all’aumentare della temperatura*, come è illustrato nella figura seguente per parecchi metalli e per un dielettrico:

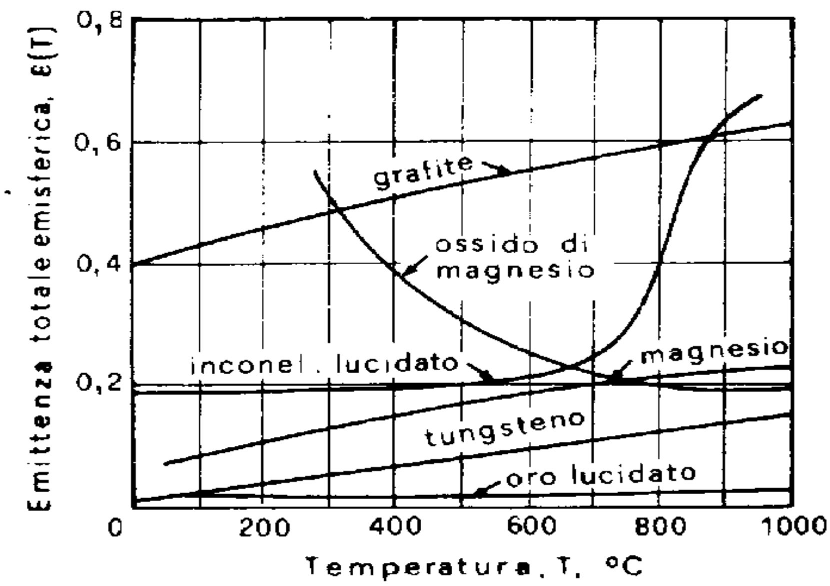

Figura 11 - Influenza della temperatura sull’emittenza totale emisferica di parecchi metalli e di un dielettrico (ossido di magnesio)

Un'altra cosa interessante rivelata dai diagrammi sperimentali è la seguente: in generale, le superfici metalliche lucidate hanno bassi valori dell'emittenza monocromatica ε_λ; tuttavia, come si nota nella figura seguente (relativa solo al rame), la presenza di uno strato di ossido può aumentarla considerevolmente:

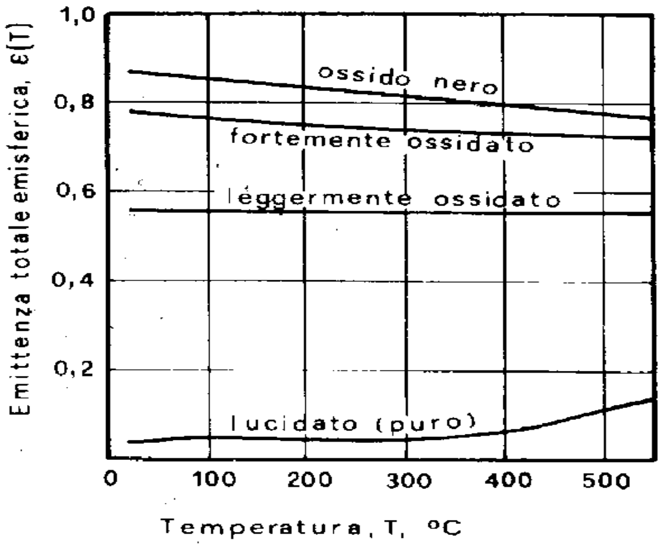

Figura 12 - Influenza di uno strato di ossido sulla emittenza emisferica totale del rame

Passiamo adesso ai materiali elettricamente non conduttori, i quali hanno un comportamento opposto rispetto a quello dei conduttori. Infatti, come indicato nella figura seguente, *i materiali elettricamente non conduttori hanno una emittenza monocromatica che aumenta all'aumentare della lunghezza d'onda:*

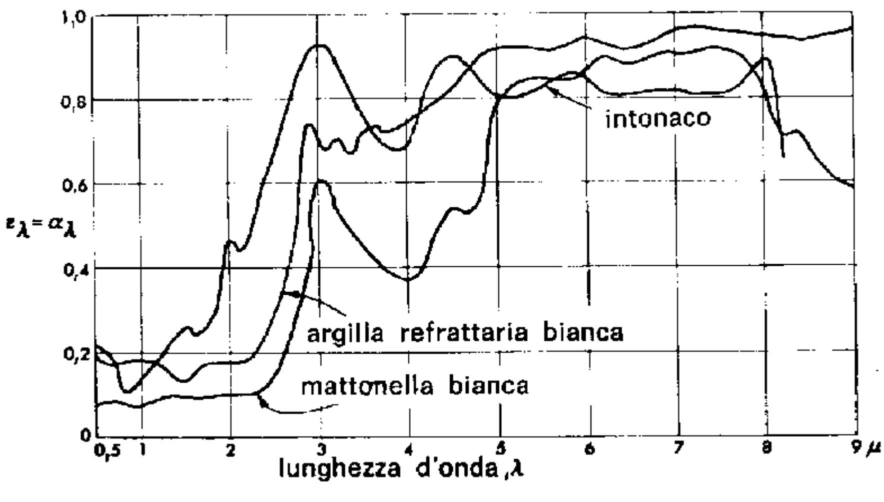

Figura 13 - Variazione dell'emittenza monocromatica (o, ciò che è lo stesso, del coefficiente di assorbimento monocromatico) con la lunghezza d'onda, per materiali elettricamente non conduttori

Per i calcoli di scambio termico si utilizza una **emittenza media** (o un coefficiente di assorbimento medio) per l'intervallo di lunghezze d'onda nel quale è emessa o assorbita la maggior parte delle radiazioni. L'intervallo di lunghezze d'onda di interesse dipende dalla temperatura del corpo dal quale proviene la radiazione. Una volta nota la distribuzione dell'emittenza monocromatica ε_λ, l'emittenza totale ε si può ricavare mediante la già citata equazione

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda(\lambda, T) E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda}$$

mentre invece il coefficiente di assorbimento totale α (che ricordiamo essere, in generale, diverso da ε) può essere calcolato mediante l'equazione

$$\alpha(\lambda^*, T^*) = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda^*, T^*) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda^*, T^*) d\lambda}$$

a patto che siano note la temperatura e le caratteristiche spettrali della sorgente.

Sieber valutò il **coefficiente di assorbimento totale** delle superfici di parecchi materiali in funzioni della temperatura della sorgente, con le superfici riceventi poste a temperatura ambiente e usando un corpo nero come sorgente. Questi risultati sono riportati nel diagramma seguente, nel quale in ordinata è posto il coefficiente di assorbimento totale α (valutato per energia raggiante che incida normalmente alla superficie) mentre in ascissa c'è la temperatura della sorgente:

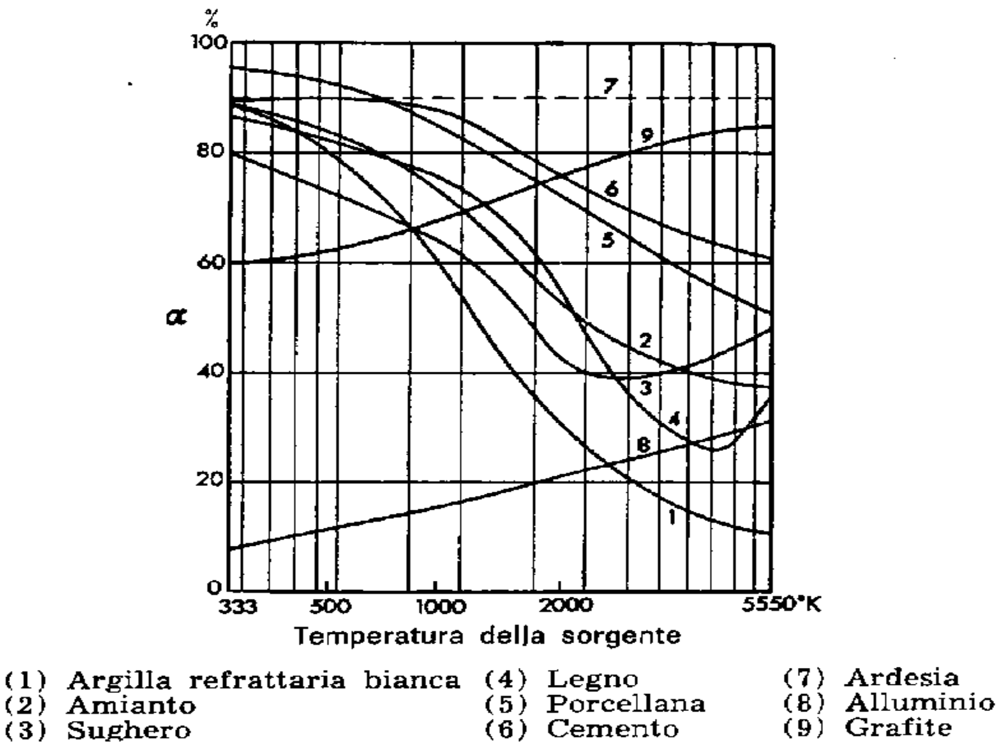

Figura 14 - Variazione del coefficiente di assorbimento totale con la temperatura della sorgente per alcuni materiali a temperatura ambiente

Si osservi che *il coefficiente di assorbimento dell'alluminio, tipico dei buoni conduttori, aumenta al crescere della temperatura della sorgente, mentre quello dei cattivi conduttori ha un comportamento opposto.*

Proprietà direzionali dell'emittenza

Fino ad ora abbiamo considerato le variazioni dell'emittenza solo con la temperatura e, soprattutto, con la lunghezza d'onda. In effetti, *si verifica che e ha delle proprietà direzionali che non sono in accordo con la legge del coseno di Lambert.* Per esempio, la figura seguente mostra, in un diagramma polare, come varia l'**emittenza direzionale** ε_θ per alcuni metalli lucidati:

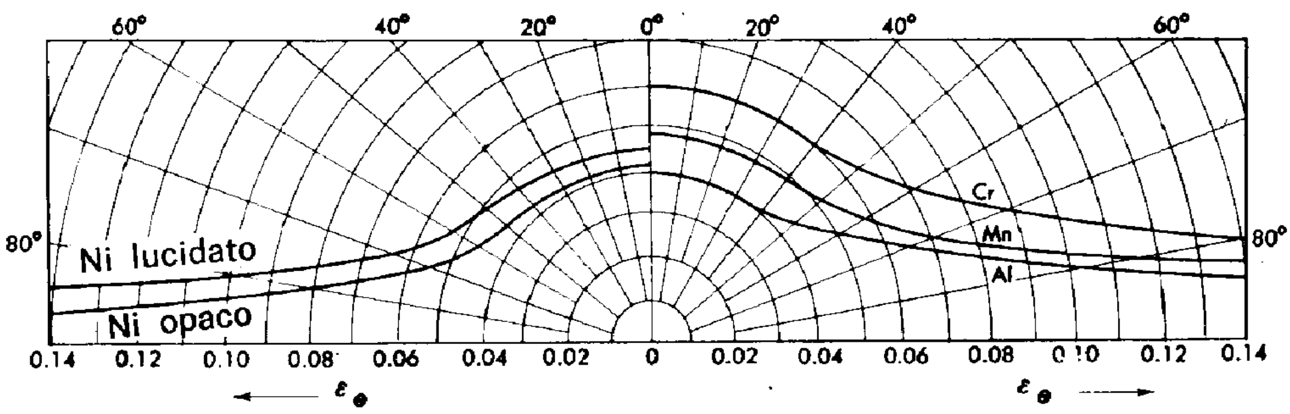

Figura 15 - Variazione dell'emittenza direzionale di alcuni metalli

Se l'intensità di radiazione seguisse, per le superfici considerate, la legge del coseno di Lambert (e quindi dipendesse solo dalla proiezione dell'area), le curve dell'emittenza sarebbero delle circonferenze. Al contrario, la figura mostra che *l'emittenza aumenta all'aumentare del valore dell'angolo di emissione q:* ad esempio, l'emittenza del cromo lucidato, largamente impiegato per *schermi di radiazione*, vale appena 0.06 nella direzione normale ma aumenta fino a 0.14 quando si passa ad un valore di 80° per l'angolo θ. Comportamento opposto hanno invece i materiali non conduttori, per i quali l'emittenza diminuisce all'aumentare dell'angolo di emissione θ:

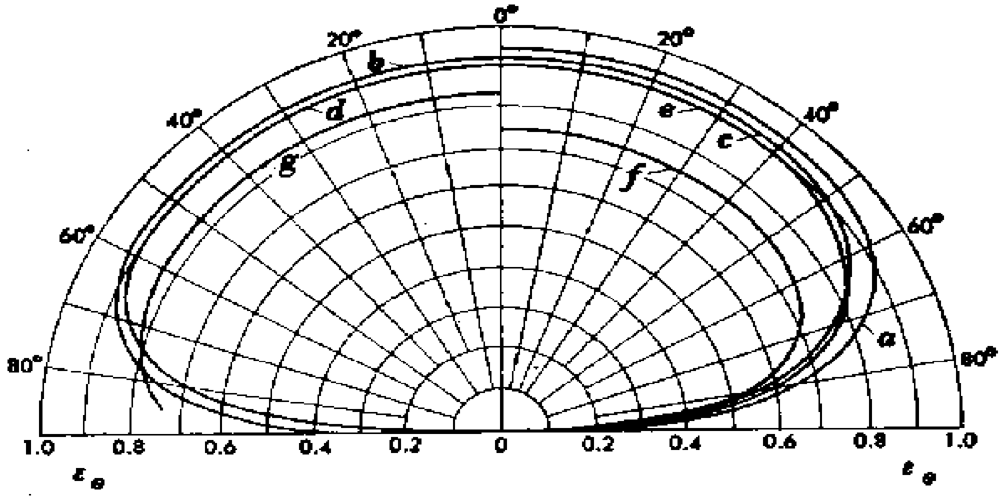

Figura 16 - Variazione dell’emittenza direzionale per alcuni materiali elettricamente non conduttori

*Nei calcoli ingegneristici, allora, si assume per le superfici metalliche lucidate un valore medio e/e_n=**1.2** e per le superfici non metalliche un valore medio e/e_n=**0.96**,* dove ε è l’emittenza media relativa ad un angolo solido emisferico di 2π steradianti ed ε_n l’emittenza nella direzione normale alla superficie.

Coefficiente di riflessione e coefficiente di trasmissione

Quando una superficie non assorbe tutta la radiazione incidente, la parte non assorbita sarà o trasmessa oppure riflessa. La maggior parte dei solidi sono **opachi** e quindi non trasmettono radiazioni: la parte di radiazione non assorbita è perciò rinviata nello spazio. Questo comportamento può essere caratterizzato mediante due parametri:

- il cosiddetto **coefficiente di riflessione emisferico monocromatico**, definito come

$$\rho_\lambda = \frac{\dfrac{\text{energia raggiante riflessa}}{\text{tempo} \cdot \text{area} \cdot \text{lunghezza d'onda}}}{G_\lambda}$$

- il cosiddetto **coefficiente di riflessione emisferico totale**, definito come

$$\rho_\lambda = \frac{\dfrac{\text{energia raggiante riflessa}}{\text{tempo} \cdot \text{area}}}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}$$

Se consideriamo un materiale che non trasmette energia, è ovvio che l'energia non assorbita viene completamente riflessa, il che significa che devono valere le seguenti due relazioni:

$$\text{per una specifica lunghezza d'onda} \longrightarrow \rho_\lambda = 1 - \alpha_\lambda$$
$$\text{per tutto lo spettro di lunghezze d'onda} \longrightarrow \rho = 1 - \alpha$$

Nel caso più generale di materiali che in parte assorbono, in parte riflettono e in parte trasmettono la radiazione incidente, si definiscono altri due parametri:

- si indica con τ_λ la frazione di energia incidente che viene trasmessa, in corrispondenza di una data lunghezza d'onda;
- si indica invece con τ la frazione di energia incidente che viene trasmessa, per tutto lo spettro di lunghezze d'onda

Tra le proprietà esposte fino ad ora, sussistono ovviamente le seguenti relazioni:

$$\text{per una specifica lunghezza d'onda} \longrightarrow \rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda = 1$$
$$\text{per tutto lo spettro di lunghezze d'onda} \longrightarrow \rho + \alpha + \tau = 1$$

Il vetro, il salgemma ed altri cristalli inorganici sono esempi delle poche eccezioni tra i solidi che, se sufficientemente sottili, hanno una certa trasparenza per alcune lunghezze d'onda. Sono anche trasparenti molti liquidi e tutti i gas.

Riflessione speculare e riflessione diffusa

Consideriamo un corpo che riflette una certa quantità dell'energia che incide su di esso. Ci sono due tipi fondamentali di riflessione di energia raggiante:

- se l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza, si parla di **riflessione speculare**;
- se invece un raggio incidente è riflesso uniformemente in tutte le direzioni, si parla di **riflessione diffusa**[7].

Nessuna superficie reale è o speculare o diffusa: in generale, possiamo affermare che la riflessione delle superfici ben lucidate e lisce si avvicina a quella speculare, mentre la riflessione delle superfici rugose approssima quella diffusa. Un comune **specchio** è un corpo che riflette specularmente solo nel campo del visibile, mentre non riflette necessariamente in modo speculare per le altre lunghezze d'onda.

[7] Questa definizione è perfettamente analoga a quella data in acustica a proposito del *campo sonoro diffuso*.

FATTORE DI VISTA

Ci soffermiamo adesso su problemi di irraggiamento termico in cui siano coinvolte più superfici emittenti e riceventi.

In generale, la radiazione che si scambiano due o più superfici dipende dal mezzo interposto tra le superfici stessa; tuttavia, questa dipendenza è estremamente bassa, per il semplice motivo che i gas monoatomici e la maggior parte dei gas biatomici (come l'aria) sono trasparenti alle radiazioni[8]. Appurato questo, nel calcolo dello scambio termico per irraggiamento tra superfici, lo scopo principale è il seguente: data l'energia raggiante che lascia complessivamente (e in modo diffuso) una data superficie, si vuole calcolare la frazione di tale superficie che intercetta un'altra superficie.

Consideriamo allora, per semplicità, due sole superfici A_1 e A_2, come evidenziato nella figura seguente:

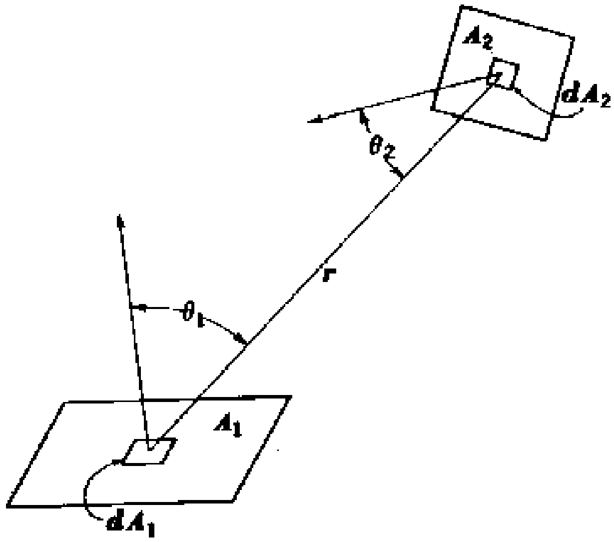

Figura 17 - Nomenclatura per la definizione del fattore di vista tra due superfici

Facciamo due ipotesi semplificative: supponiamo che le due superfici siano entrambe nere, cioè con caratteristiche ideali di assorbimento e trasmissione di energia, e che il mezzo che le separa sia perfettamente trasparente alle radiazioni.

Allora, data l'energia raggiante che, in maniera diffusa, lascia la superficie A_1, si definisce **fattore di vista** la frazione della suddetta energia che raggiunge la superficie A_2: con questa definizione, indicheremo il fattore di vista con $\mathbf{F_{1\text{-}2}}$, dove cioè il primo pedice indica la superficie di provenienza della radiazione, mentre il secondo indice indica la superficie che riceve la radiazione. Scambiando i ruoli delle due superfici, otterremo, con analoga definizione, il fattore di vista $\mathbf{F_{2\text{-}1}}$.

Vediamo adesso, sulla base delle ipotesi fatte, una descrizione analitica della situazione.

La radiazione che lascia la superficie A_1 può essere semplicemente quantificata come $q_1 = E_{n1}A_1$. Una frazione di questa energia raggiunge A_2: in base alla definizione di $F_{1\text{-}2}$, tale frazione è

$$q_{1\to 2} = F_{1-2}q_1 = F_{1-2}E_{n1}A_1$$

Invertendo il discorso, la radiazione che lascia A_2 e raggiunge A_1 sarà

$$q_{2\to 1} = F_{2-1}q_2 = F_{2-1}E_{n2}A_2$$

[8] Questo almeno fin quando la temperatura non è tanto elevata da causare ionizzazioni o dissociazioni.

Dato che entrambe le superfici sono nere, esse assorbono tutta la radiazione incidente, per cui possiamo calcolare la potenza termica scambiata complessivamente tra le due superfici:

$$q_{1\Leftrightarrow 2} = F_{1-2}E_{n1}A_1 - F_{2-1}E_{n2}A_2$$

Possiamo inoltre fare un'altra considerazione: se le due superfici sono alla stessa temperatura, risulta necessariamente che $E_{n1}=E_{n2}$ e non è nemmeno possibile alcun flusso termico tra di esse: ciò significa che deve risultare $q_{1\Leftrightarrow 2}=0$. D'altra parte, dato che i fattori di vista e le aree non sono funzioni della temperatura, la condizione $q_{1\Leftrightarrow 2}=0$, con $E_{n1}=E_{n2}$, è verificata solo se

$$\boxed{F_{1-2}A_1 = F_{2-1}A_2}$$

Questa equazione è nota come **teorema della reciprocità**. Siamo arrivati ad essa supponendo uguali le temperature dei due corpi, ma è ovvio che il risultato è generale, ossia valido per qualsiasi temperatura dei corpi stessi.

Applicando dunque il teorema della reciprocità, possiamo riscrivere la potenza termica che si scambiano due superfici nere in due forme del tutto equivalenti:

$$\boxed{q_{1\Leftrightarrow 2} = F_{1-2}A_1\left(E_{n1}-E_{n2}\right) = F_{2-1}A_2\left(E_{n1}-E_{n2}\right)}$$

In pratica, queste due espressioni dicono quanto segue: *la potenza termica scambiata tra due corpi neri può essere determinata valutando l'irraggiamento dell'una all'altra delle superfici e sostituendo il potere emissivo con la differenza dei poteri emissivi delle due superfici.*

Inoltre, il risultato finale è indipendente dalla scelta della superficie emittente: di conseguenza, converrà sempre scegliere quella il cui fattore di vista può essere determinato più facilmente. Tanto per fare un esempio semplice, il fattore di vista F_{1-2} di una qualunque superficie A_1 completamente contenuta in un'altra superficie A_2 unitario, dato che A_2 riceve sicuramente tutta l'energia emessa da A_1.

Possiamo ancora proseguire nei calcoli, ricordando che, per un corpo nero, il potere emissivo totale vale $E_n(T)=\sigma T^4$: possiamo perciò scrivere che

$$q_{1\Leftrightarrow 2} = F_{1-2}A_1\left(\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4\right) = F_{1-2}A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la costante σ ha un valore fisso, indipendente dal problema in esame.

Supponiamo adesso che le superfici considerate siano N e calcoliamo la potenza termica trasmessa da una qualsiasi di tali superfici verso tutte le altre. In base a quanto visto poco fa, la potenza $q_{k\Leftrightarrow i}$ che raggiunge una generica superficie i-sima partendo dalla superficie k è calcolabile come

$$q_{k\Leftrightarrow i} = F_{k-i}A_k\sigma\left(T_k^4 - T_i^4\right)$$

Dato che le superfici da considerare sono N-1, la potenza complessiva trasmessa dalla k-sima superficie non può che essere

$$q_k = \sum_{i=1}^{N-1} q_{k\Leftrightarrow i} = \sum_{i=1}^{N-1} F_{k-i}A_k\sigma\left(T_k^4 - T_i^4\right) = A_k\sigma\sum_{i=1}^{N-1} F_{k-i}\left(T_k^4 - T_i^4\right)$$

IRRAGGIAMENTO IN CAVITÀ CON SUPERFICI NERE

Quando si vuole determinare lo scambio termico per irraggiamento di una superficie, è evidentemente necessario tener conto delle radiazioni provenienti da tutte le direzioni. Un modo molto semplice di affrontare questo problema è quello di immaginare che la superficie considerata sia circondata completamente da una cavità della quale siano specificate le caratteristiche radianti:

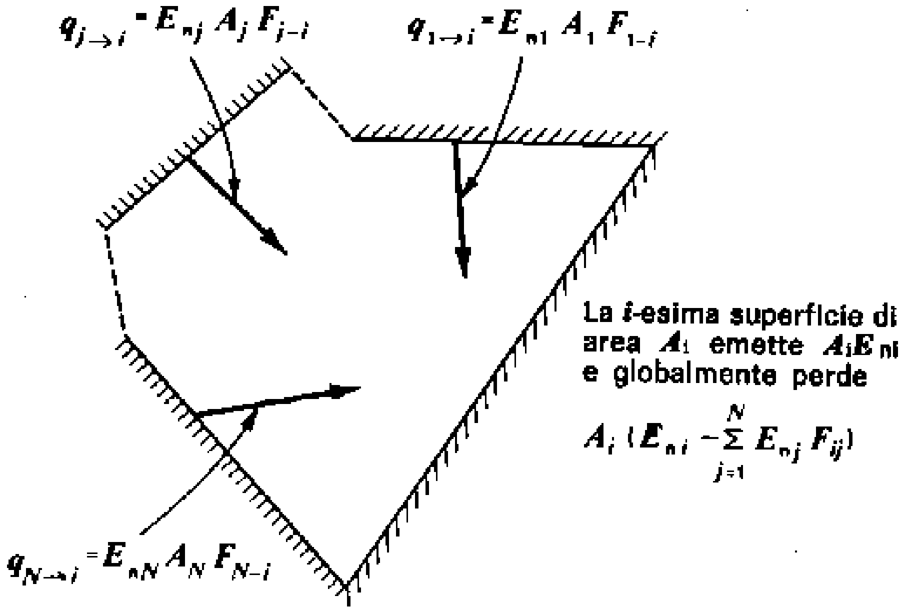

Figura 18 - Disegno schematico di una cavità con N superfici nere, con la specificazione dell’energia che incide sulla superficie i-sima e lascia la stessa superficie i-sima

In questa situazione, tutte le superfici da cui è costituita la cavità sono visibili da un osservatore posto sulla superficie considerata, la quale quindi risente dell’irraggiamento di ciascuna di esse[9].

Consideriamo dunque la cavità come la somma di N generiche superfici nere[10] di area A_j e temperatura T_j opportuna (j=1,2,.,i,..,N) e indichiamo con A_i e T_i, rispettivamente, l’area e la temperatura della superficie in esame. Quest’ultima superficie viene raggiunta dall’energia raggiante proveniente dalla cavità e la assorbe tutta, essendo a sua volta una superficie nera; allo stesso tempo, essa emette un certo quantitativo di energia. Possiamo perciò fare un bilancio energetico: indicata con G_i la cosiddetta **irradiazione**, ossia la radiazione incidente sulla superficie *i* per unità di tempo e per unità di area[11], la differenza tra la potenza termica emessa e quella assorbita rappresenta la potenza termica netta perduta dalla superficie stessa:

$$q_{i\Leftrightarrow \text{cavità}} = q_{\text{emessa}} - q_{\text{assorbita}} = A_i E_{ni} - A_i G_i = A_i (E_{ni} - G_i)$$

[9] E’ bene precisare una cosa: una cavità non necessariamente deve essere costituita da superfici solide, ma può anche comprendere degli spazi aperti, **detti finestre**. Una finestra può essere considerata equivalente ad un corpo nero, del quale però va scelta opportunamente la temperatura: infatti, attraverso la finestra penetra nella cavità una data radiazione, la quale può essere vista come irradiata dalla finestra stessa; di conseguenza, la temperatura andrà scelta in modo che la radiazione emessa dal corpo nero equivalente alla finestra corrisponda esattamente alla radiazione che penetra attraverso la finestra stessa. Evidentemente, se non entra alcuna radiazione, la temperatura del corpo nero equivalente non potrà che essere nulla: il corpo nero, in questo caso, assorbe tutta la radiazione, senza emetterne né rifletterne alcuna.

[10] inclusa quella di nostro interesse

[11] si tratta quindi ancora una volta di una intensità (energia per unità di tempo e di superficie)

D'altra parte, la radiazione che incide su A_i è quella proveniente dalle N superfici (nere) da cui è costituita la cavità, per cui possiamo scrivere che

$$A_i G_i = A_1 F_{1-i} E_{n1} + A_2 F_{2-i} E_{n2} + .. + A_i F_{i-i} E_{ni} + . + A_N F_{N-i} E_{nN} = \sum_{j=1}^{N} A_j F_{j-i} E_{nj}$$

In questa relazione, è importante osservare il senso del termine $A_i F_{i-i} E_{ni}$, che rappresenta il contributo di energia raggiante che lascia la superficie A_i e colpisce la stessa superficie A_i: questo termine si riferisce al caso in cui la superficie A_i è concava, in quanto, solo in questo caso, parte dell'energia che lascia la superficie A_i incide direttamente su A_i stessa. Quindi, se la superficie è concava, allora $F_{i-i} \neq 0$, altrimenti $F_{i-i} = 0$.

Sostituendo adesso l'espressione trovata per $A_i G_i$ in quella di $q_{i \Leftrightarrow \text{cavità}}$, otteniamo

$$q_{i \Leftrightarrow \text{cavità}} = A_i E_{ni} - \sum_{j=1}^{N} A_j F_{j-i} E_{nj}$$

Possiamo inoltre sfruttare il *teorema della reciprocità*, in base al quale abbiamo visto che vale l'uguaglianza $F_{i-j} A_i = F_{j-i} A_j$: abbiamo dunque che

$$q_{i \Leftrightarrow \text{cavità}} = A_i E_{ni} - \sum_{j=1}^{N} A_i F_{i-j} E_{nj} = A_i E_{ni} - A_i \sum_{j=1}^{N} F_{i-j} E_{nj} = A_i \left(E_{ni} - \sum_{j=1}^{N} F_{i-j} E_{nj} \right)$$

Una tipica applicazione di questa relazione è la seguente. Supponiamo che ci sia una superficie della cavità, di area A_k, della quale non si conosce la temperatura, ma il flusso termico $q_{k \Leftrightarrow \text{cavità}}$: l'incognita del problema è dunque la temperatura T_k di tale superficie.

Per calcolare questa temperatura, possiamo sfruttare la relazione di prima, nella quale consideriamo, al posto di A_i, proprio la superficie A_k:

$$q_{k \Leftrightarrow \text{cavità}} = A_k \left(E_{nk} - \sum_{j=1}^{N} F_{k-j} E_{nj} \right)$$

Possiamo inoltre tirar fuori dalla sommatoria il termine corrispondente alla superficie A_k, ossia il termine $F_{k-k} E_{nk}$ che è presente solo se la superficie considerata è concava:

$$q_{k \Leftrightarrow \text{cavità}} = A_k \left(E_{nk} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} F_{k-j} E_{nj} - F_{k-k} E_{nk} \right) = A_k \left((1 - F_{k-k}) E_{nk} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} F_{k-j} E_{nj} \right)$$

A questo punto, ci basta ricordare che, per un corpo nero, risulta $E_{nj} = \sigma T_j^4$, per cui, sostituendo, otteniamo

$$q_{k \Leftrightarrow \text{cavità}} = A_k \left((1 - F_{k-k}) \sigma T_k^4 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} F_{k-j} \sigma T_j^4 \right)$$

Da qui possiamo esplicitare proprio T_k:

$$T_k = \left[\frac{\frac{q_{k\Leftrightarrow cavità}}{A_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} F_{k-j}\sigma T_j^4}{\sigma\left(1 - F_{k-k}\right)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Una volta nota T_k, è possibile riapplicare sempre la formula di prima per calcolare le potenze termiche di tutte le altre superfici.

IRRAGGIAMENTO IN CAVITÀ CON SUPERFICI GRIGIE

Abbiamo dunque considerato, nel paragrafo precedente, l'irraggiamento tra superfici nere. E' ovvio che il fatto di considerare superfici <u>nere</u> semplifica il problema, dato che tutta la radiazione incidente sulla generica di tali superfici viene assorbita. Nella pratica, abbiamo detto che i corpi neri non esistono, per cui non si può fare a meno di considerare la riflessione parziale, da parte di un corpo, dell'energia incidente. In realtà, i casi che si possono presentare sono sostanzialmente due:

- *se il coefficiente di assorbimento a delle superfici interessate all'irraggiamento è maggiore di 0.9, allora si può effettivamente trascurare la riflessione,* senza commettere grossi errori;
- al contrario, quando sono coinvolte superfici a basso coefficiente di assorbimento, la riflessione va necessariamente considerata.

Consideriamo dunque il caso di superfici non nere: la cosa risulta molto complicata, a meno di non considerare le superfici come **grigie**. Vediamo allora come si procede quando si ha a che fare con <u>superfici grigie</u> che seguono la *legge del coseno di Lambert* e che riflettono diffusamente.

Per queste superfici, si definisce **radiosità** (simbolo: **J** - unità di misura: **kcal/hm^2**) la quantità di radiazione che, in un'ora, lascia una data superficie per unità di area. <u>*La radiosità è, quindi, la somma dell'energia raggiante emessa, di quella riflessa e di quella trasmessa.*</u> Se ci mettiamo nel caso semplice di un corpo opaco, che cioè non trasmette radiazioni, la radiosità diventa la somma dell'energia raggiante emessa e riflessa. Per un corpo grigio, abbiamo visto che l'energia raggiante emessa vale $\varepsilon_i E_{ni}$ (dove ricordiamo che ε_i è l'*emittenza* del corpo, mentre E_{ni} è il *potere emissivo* del corpo nero corrispondente, misurata in kcal/hm^2), mentre quella riflessa vale $\rho_i G_i$, ossia è proporzionale, secondo il *coefficiente di riflessione* ρ_i, alla potenza incidente per unità di area G_i (misurata in kcal/hm^2). Possiamo perciò scrivere che la radiosità di un corpo grigio vale

$$\boxed{J_i = \rho_i G_i + \varepsilon_i E_{ni} \qquad \left[\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2}\right]}$$

Vediamo allora, sulla base di questa definizione, come affrontare un problema analogo a quello descritto nel paragrafo precedente, cioè il problema di una superficie di area A_i soggetta all'irraggiamento di una cavità costituita da N superfici:

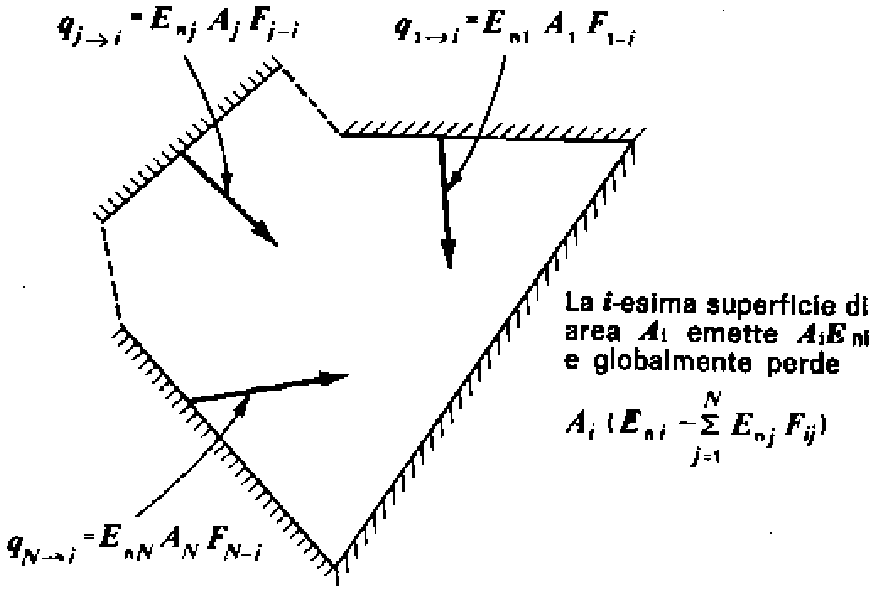

Figura 19 - Disegno schematico di una cavità con N superfici nere, con la specificazione dell'energia che incide sulla superficie i-sima e lascia la stessa superficie i-sima

Intanto, affinché la superficie A_i rimanga a temperatura T_i in condizioni di regime permanente, è necessario che una certa quantità di calore q_i, proveniente da una qualche sorgente esterna, compensi le perdite per irraggiamento.

La potenza termica netta che, per irraggiamento, la superficie A_i perde è pari alla differenza tra la potenza raggiante che arriva alla superficie e quella che lascia la superficie stessa: tale potenza (che, come detto, deve essere compensata da una sorgente esterna) vale dunque

$$q_i = A_i (J_i - G_i)$$

Questa relazione è assolutamente analoga a quella vista per corpi neri, con la differenza che al posto del potere emissivo è stata usata la radiosità, in modo appunto da tener conto della riflessione.

Ricordiamo inoltre che questa relazione vale solo quando sia la temperatura sia l'irraggiamento di A_i sono uniformi.

Adesso, se le superfici che si scambiano le radiazioni sono grigie, possiamo usare per J_i l'espressione definita prima, per cui

$$q_i = A_i (\rho_i G_i + \varepsilon_i E_{ni} - G_i) = A_i ((\rho_i - 1) G_i + \varepsilon_i E_{ni})$$

D'altra parte, sappiamo anche che per i corpi grigi risulta $\varepsilon_i = \alpha_i$ e $\rho_i = 1 - \varepsilon_i$, per cui

$$q_i = A_i (-\varepsilon_i G_i + \varepsilon_i E_{ni}) = A_i \varepsilon_i (E_{ni} - G_i)$$

In alternativa, potremmo anche procedere in altro modo: dalla relazione $q_i = A_i (J_i - G_i)$ esplicitiamo G_i, sostituiamo nell'espressione di J_i ed infine esprimiamo q_i in funzione di E_{ni} e J_i. Così facendo, si ottiene

$$G_i = J_i - \frac{q_i}{A_i} \longrightarrow J_i = \rho_i\left(J_i - \frac{q_i}{A_i}\right) + \varepsilon_i E_{ni} \longrightarrow q_i = \frac{A_i}{\rho_i}\left[\varepsilon_i E_{ni} - (1-\rho_i)J_i\right] = \frac{A_i}{\rho_i}\varepsilon_i\left(E_{ni} - J_i\right)$$

Un'altra espressione per la potenza termica raggiante netta relativa ad A_i si può ottenere esprimendo l'irraggiamento in funzione della radiosità di tutte le altre superfici che possono essere viste da A_i stessa. Possiamo infatti calcolare la radiazione incidente su A_i con lo stesso discorso fatto prima per la cavità nera: la radiazione incidente è costituita da aliquote che incidono su A_i, provenendo dalle altre N superfici. Non solo, ma se A_i vede una parte di se stessa, all'irraggiamento contribuisce anche una parte della radiazione emessa da A_i.

Possiamo dunque scrivere, analogamente al caso della cavità nera, che

$$A_i G_i = A_1 F_{1-i} J_{n1} + A_2 F_{2-i} J_{n2} + \ldots + A_i F_{i-i} J_{ni} + \ldots. + A_N F_{N-i} J_{nN} = \sum_{j=1}^{N} A_j F_{j-i} E_{nj}$$

I fattori di vista che compaiono in questa relazione sono relativi a superfici grigie, ma sono uguali a quelli relativi a superfici nere, dato che tali coefficienti non dipendono dalle proprietà di emissione/assorbimento, bensì solo da relazioni geometriche.

Sfruttando ancora una volta il *teorema di reciprocità*, possiamo fare in modo da far comparire solo l'area A_i della superficie di interesse:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^{N} A_j F_{j-i} E_{nj} = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{i-j} E_{nj} = A_i \sum_{j=1}^{N} F_{i-j} E_{nj}$$

Da qui deduciamo dunque che

$$\boxed{G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{i-j} E_{nj}}$$

Sostituendo allora questa espressione nella relazione $q_i = A_i(J_i - G_i)$ definita prima, otteniamo che

$$q_i = A_i\left(J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{i-j} E_{nj}\right)$$

Questa espressione di q_i e quella trovata prima (in funzione di E_{ni} e J_i) possono essere scritte per ognuna delle N superfici della cavità, per cui si ottiene un sistema di 2N equazioni in 2N incognite: N incognite sono le radiosità $J_1, J_2, \ldots, J_i, \ldots, J_N$, mentre le altre N sono costituite da q o da T, a seconda delle condizioni al contorno del problema. Eventualmente, le radiosità possono essere eliminate combinando le equazioni, in modo da ricondursi ad un sistema di N equazioni in N incognite.

Se adesso consideriamo due superfici opache e diffuse di area A_1 ed A_2, possiamo facilmente calcolare l'energia raggiante che esse si scambiano direttamente: vale infatti lo stesso discorso visto per le superfici nere, con la differenza di sostituire la radiosità al potere emissivo. Possiamo dunque scrivere che

$$\boxed{q_{1\Leftrightarrow 2} = F_{1-2} A_1 (J_1 - J_2) = F_{2-1} A_2 (J_1 - J_2)}$$

CENNI ALL'IRRAGGIAMENTO SOLARE

L'**irraggiamento solare** è spesso di grande importanza: tutte le fonti di energia che l'uomo utilizza derivano dal sole; le piante dipendono dall'energia solare per la fotosintesi e la crescita; interagendo con l'ossido di azoto che si trova nell'atmosfera, l'energia solare influisce anche sulla densità della nebbia e sulla contaminazione dell'aria. Benché attualmente l'energia solare non sia utilizzata per scopi industriali, vi è tuttavia un crescente interesse per l'utilizzazione diretta dell'energia solare nel riscaldamento degli edifici e nella distillazione dell'acqua di mare. L'irraggiamento solare è anche un fattore importante nei progetti dei veicoli spaziali.

Calcolo dell'irraggiamento solare

L'energia solare che nell'unità di tempo incide sull'unità di area di una superficie disposta normalmente ai raggi del sole all'esterno dell'atmosfera terrestre, la cosiddetta **costante solare**, vale circa **1200 kcal/hm²** . La potenza solare che raggiunge la terra è comunque certamente minore di 1200 kcal/hm² , in quanto una parte della radiazione viene assorbita e diffusa nell'attraversamento dello strato che avvolge la terra, strato spesso circa 150 km e costituito da aria, anidride carbonica, vapor d'acqua e polvere. La quantità di energia solare che riceve una superficie posta sulla Terra dipende dall'ora, dal giorno, dalle condizioni atmosferiche, dalla posizione e dall'orientazione della superficie.

La riduzione che subisce l'energia solare passando attraverso l'atmosfera terrestre dipende dalla lunghezza del cammino che compie, che a sua volta dipende dalla posizione del sole. L'energia raggiante che incide su una superficie che si trova sulla terra, disposta normalmente ai raggi del sole, si indica generalmente con G_n e può essere calcolata (20) con la seguente relazione:

$$G_n = G_0 \tau_a^m$$

dove G_0 è la già citata costante solare, *m* è la cosiddetta **massa d'aria relativa**, definita come il rapporto tra la lunghezza del percorso effettivo dei raggi solari e la lunghezza del loro cammino più breve possibile e τ_a è il **coefficiente di trasmissione** per una massa d'aria relativa unitaria.

Il valore di τ_a in estate è leggermente minore che in inverno, dato che in estate l'atmosfera contiene più vapor d'acqua; esso dipende anche dalle condizioni del cielo, variando da 0,81 in un giorno sereno a 0,62 in una giornata nuvolosa. In generale per molte applicazioni si può accettare un valore medio di **0,70**.

Per quanto riguarda, invece, la massa d'aria relativa *m*, essa dipende anche dalla posizione del sole, che è definita dalla cosiddetta ***distanza zenitale***, ossia l'angolo compreso tra la direzione dello zenit e la direzione dei raggi del sole. Assumendo che lo spessore dell'atmosfera sia trascurabile rispetto al raggio della terra, la massa d'aria relativa è uguale alla secante di z. Questa relazione è abbastanza accurata per z compreso tra 0 e 80°, angolo oltre il quale d'altra parte la radiazione solare è quasi trascurabile.

Se la superficie ricevente non è normale alla direzione dei raggi del sole, l'energia raggiante che incide per unità di area va necessariamente ridotta ed il fattore di riduzione è cos(*i*), dove *i* è l'angolo tra la direzione dei raggi del sole e la normale alla superficie: indicando con Gi la suddetta energia, si pone cioè

$$G_i = G_n \cos(i)$$

La determinazione dell'angolo compreso tra la direzione dei raggi solari e la normale alla superficie richiede la conoscenza della posizione del sole nel cielo rispetto ad un osservatore sulla Terra. La posizione del Sole dipende da almeno due movimenti simultanei: la Terra compie una rivoluzione completa intorno all'asse eclittico del sole, nel piano eclittico, ogni 365,25 giorni e nello stesso tempo ruota su se stessa come un giroscopio intorno al suo asse celeste che è inclinato di 23,5° rispetto all'asse eclittico, alla velocità di $\pi/12$ rad/h.

Vedendo il sole dalla Terra, risulta che l'angolo zenitale varia con la latitudine del luogo[12], con l'ora[13] e con la declinazione solare.

Si può dimostrare che il cosiddetto **soleggiamento locale**, definito come la potenza raggiante ricevuta da una superficie orizzontale, è dato da

$$G_i = G_n \left(\sin\varphi \cdot \sin\delta_S + \cos\varphi \cdot \cos\delta_S \cdot \cos h \right)$$

dove δ_S è la **declinazione solare**, ricavabile, per ogni giorno dell'anno, dall'almanacco astronomico.

Per calcolare, allora, la quantità di energia raggiante solare ricevuta durante una intera giornata, ci basta integrare l'equazione $dQ=G_i d\theta$, tra l'alba ed il tramonto.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1

[12] La latitudine di un luogo, φ, può essere ricavata da una carta geografica o da un mappamondo

[13] L'ora viene espressa in termini di *angolo orario*, h, che indica la rotazione apparente della sfera celeste intorno all'asse terrestre. Si tratta cioè dell'angolo di cui la Terra deve ruotare per portare il meridiano del luogo direttamente sotto il sole.