

Appunti di Fisica Tecnica

Capitolo 14 - Convezione

Introduzione	1
Coefficiente di trasmissione del calore per convezione	2
Meccanismo di trasporto dell'energia e fluidodinamica.....	2
<i>Convezione libera e convezione forzata</i>	3
Concetti fondamentali sullo "strato limite"	3
<i>Lunghezza critica e numero di Reynolds</i>	6
Strato limite termico.....	8
Il numero di Nusselt	8
Determinazione del coefficiente di scambio termico convettivo	10
Analisi dimensionale.....	11
<i>Dimensioni fondamentali e formule dimensionali</i>	11
<i>Determinazione del numero di gruppi adimensionali</i>	12
<i>Determinazione dei gruppi adimensionali. Numero di Prandtl</i>	12
<i>Correlazione dei dati sperimentali</i>	14
Viscosità.....	16
Strato limite laminare su una lastra piana.....	17
Caso del moto turbolento.....	20
Convezione forzata interna.....	21
Introduzione	21
<i>Scelta della temperatura di riferimento del fluido</i>	23
Moto laminare e moto turbolento all'interno di condotti	23
<i>Influenza del numero di Prandtl</i>	26
Effetti di imbocco.....	26
Convezione naturale	29
Introduzione	29
<i>Distribuzione di temperatura e di velocità</i>	30
Equazioni principali per la convezione libera	31
Superfici alettate.....	33
Dissipatori termici.....	35

INTRODUZIONE

Riprendiamo quanto già anticipato in precedenza a proposito della convezione: *la "convezione" è un processo di trasporto di energia che avviene mediante l'azione combinata della conduzione, dell'accumulo di energia e del mescolamento. Si tratta del principale meccanismo di scambio di energia tra una superficie solida ed il fluido circostante.*

Questo meccanismo non dipende solo da una differenza di temperatura ed è per questo che, come già osservato, non è strettamente conforme alla definizione di trasmissione del calore. Tuttavia, l'effettiva conseguenza è sempre un trasporto di energia che, avvenendo secondo la direzione del gradiente di temperatura, è comunque classificato come un meccanismo di scambio termico.

COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE DEL CALORE PER CONVEZIONE

La conoscenza del meccanismo secondo cui il calore si trasmette tra la superficie di un solido ed il mezzo circostante è spesso la base per la soluzione dei problemi di scambio termico. Nei capitoli precedenti, a proposito della convezione abbiamo semplicemente introdotto il concetto della cosiddetta **conduttanza superficiale unitaria convettiva** all'interfaccia solido-fluido: questo parametro, indicato con \bar{h}_c , consente di affermare che la potenza termica scambiata per convezione tra la suddetta superficie ed il fluido adiacente è data da

$$q_c = \bar{h}_c A \Delta T \quad \frac{\text{kcal}}{\text{h}}$$

dove $\Delta T = T_s - T_\infty$ è la differenza di temperatura tra la temperatura T_s della superficie e la temperatura T_∞ di un punto del fluido, scelto ad opportuna distanza dalla superficie stessa.

In questa forma, l'**equazione della convezione** sembra molto semplice, quando in realtà non è così, in quanto tutte le complicazioni derivano proprio dal calcolo del parametro \bar{h}_c : esso è, infatti, una funzione molto complicata della fluidodinamica, delle proprietà termiche del fluido e della geometria del sistema. Il suo valore numerico, in generale, non è uniforme sulla superficie e dipende anche dal punto in cui si misura T_∞ .

In definitiva, quindi, la *risoluzione di un problema di scambio termico per convezione consiste essenzialmente nel calcolo di un valore medio per il parametro \bar{h}_c* . Anche il problema del calcolo del gradiente di temperatura ΔT pone le sue difficoltà, ma la nostra trattazione non si occuperà di questo aspetto.

Altro aspetto della questione è che l'equazione $q_c = \bar{h}_c A \Delta T$ non chiarisce in alcun modo il meccanismo di scambio termico per convezione: ecco perché, se si vuole capire come calcolare \bar{h}_c , bisogna necessariamente partire dallo studio della **fluidodinamica**.

MECCANISMO DI TRASPORTO DELL'ENERGIA E FLUIDODINAMICA

Come anticipato più volte, la **trasmissione di energia per convezione** da una superficie, la cui temperatura sia superiore a quella del fluido (liquido o gas) circostante, avviene principalmente secondo due stadi:

- inizialmente, il calore passa per conduzione dalla superficie alle particelle di fluido più vicine, in modo tale che l'energia così trasmessa faccia aumentare l'energia interna e la temperatura delle particelle;
- tali particelle "riscaldate" vanno poi a muoversi verso una regione del fluido a temperatura minore e si mescolano con esso: in tal modo, esse cedono, ancora per conduzione, parte della propria energia alle particelle più fredde.

Deduciamo che *l'energia è effettivamente immagazzinata nelle particelle ed è trasportata dal loro moto*.

Da questa descrizione, visto che il meccanismo della convezione appare strettamente legato al moto del fluido, risulta evidente l'importanza dello studio dei principi di **fluidodinamica**. A questo proposito, il problema principale da porsi è quello di stabilire, caso per caso, se il moto del fluido sia *laminare o turbolento*:

- nel **moto laminare**, il fluido si muove a strati ed ogni particella del fluido segue un cammino regolare e continuo; di conseguenza, in ogni strato le particelle del fluido rimangono nello stesso ordine, senza mescolarsi;
- al contrario, le particelle in **moto turbolento** si muovono ciascuna secondo cammini irregolari e a zig-zag; nonostante questo, però, da un punto di vista statistico il moto di tali particelle continua ad essere regolare e prevedibile.

Premesso questo, vediamo come differisce lo scambio termico tra una superficie ed il fluido circostante (ovviamente a temperatura diversa) a seconda del moto di quest'ultimo:

- se il fluido scorre in moto laminare lungo la superficie, il calore si trasmette soltanto per conduzione, su scala molecolare, all'interno del fluido e ancora solo per conduzione si trasmette all'interfaccia solido-fluido. Il motivo è che non si hanno correnti turbolente di mescolamento né vortici che consentano il trasporto, attraverso le linee di corrente, dell'energia connessa con le particelle di fluido: il calore si trasmette tra gli strati del fluido mediante movimenti molecolari;
- se il fluido è in condizioni di moto turbolento, invece, le cose cambiano, in quanto il meccanismo di conduzione è favorito dagli innumerevoli vortici che trasportano gruppi di particelle di fluido attraverso le linee di corrente: le particelle di fluido agiscono dunque come trasportatori di energia e la trasmettono mescolandosi con altre particelle. Da qui si deduce anche che un incremento della turbolenza (quindi della velocità di mescolamento) aumenterà anche la potenza termica trasmessa per convezione.

Convezione libera e convezione forzata

Come sappiamo, il moto di un fluido può essere determinato da due cause:

- la prima causa può essere la differenza di densità dovuta alle variazioni di temperatura del fluido: in questo caso, si parla di **convezione libera** (o anche *convezione naturale*). Tipico esempio sono i movimenti che si osservano quando si riscalda su un fornello una pentola di acqua;
- quando invece il moto è causato da qualche fattore esterno, come ad esempio una pompa o un ventilatore, si parla di **convezione forzata**; tipico esempio è il raffreddamento di un *radiatore*¹ di una automobile attraverso dell'aria soffiata sopra da una ventola.

CONCETTI FONDAMENTALI SULLO “STRATO LIMITE”

Consideriamo un fluido che scorre lungo una superficie: a prescindere dal tipo di flusso (laminare o turbolento), le particelle vicine alla superficie sono rallentate da **forze viscosive**². In particolare, si ha quanto segue:

¹ Osserviamo che il termine *radiatore* è un po' improprio, in quanto in esso il calore fluisce principalmente per irraggiamento; un termine più appropriato sarebbe **convettore**.

- le particelle di fluido adiacenti alla superficie hanno una velocità, relativa alla superficie stessa, praticamente nulla;
- le altre particelle, che tentano di scivolare sulle prime, subiscono invece un ritardo.

Questa interazione tra il fluido che si muove più velocemente (quello più lontano dalla superficie) ed il fluido che si muove più lentamente (quello più vicino alla superficie³) dà luogo a **sforzi di taglio**, cioè a *forze tangenziali* (parallele alla superficie):

- se il moto è laminare, l'interazione avviene a livello submicroscopico tra molecole e prende il nome di **sforzo viscoso** (o anche *tensione viscosa*);
- se invece il moto è turbolento, allo sforzo viscoso si somma l'interazione tra particelle di fluido (siamo quindi su scala macroscopica) e tale interazione prende il nome di **sforzo turbolento** (o anche *tensione turbolenta*).

Consideriamo solo gli sforzi viscosi, che sono presenti sia nel moto laminare sia in quello turbolento: gli effetti di tali sforzi hanno origine in corrispondenza della superficie e poi si estendono nel fluido; tuttavia, a breve distanza dalla superficie, tali effetti si smorzano rapidamente, così che la velocità delle particelle raggiunge il *valore caratteristico della corrente indisturbata* (valore che indicheremo con u_∞). Questo fatto consente di definire lo **strato limite idrodinamico**⁴, introdotto da **Prandtl**: esso indica *il fluido contenuto nella regione in cui si hanno sostanziali variazioni di velocità rispetto al valore u_∞* . Quindi, finché la velocità delle particelle è diversa da quella del flusso indisturbato, siamo nello strato limite.

Si attribuisce allo strato limite uno **spessore**, definito convenzionalmente come la *distanza dalla superficie alla quale il valore locale della velocità raggiunge il 99% della velocità esterna u_∞* .

Possiamo dunque dividere la regione attorno alla superficie di un corpo in due parti: un primo strato sottile (appunto lo strato limite) che copre la superficie del corpo, dove le forze viscosi sono grandi ma anche il gradiente di velocità è grande, e poi una regione esterna a tale strato, dove invece la viscosità è trascurabile e la velocità è praticamente uguale a quella u_∞ della corrente libera.

Mediante lo strato limite si possono determinare gli effetti della viscosità sul moto, le forze di attrito esercitate dal fluido sulla superficie e, soprattutto, per i nostri scopi, si può studiare lo scambio termico per convezione.

All'interno dello strato limite, la forma del profilo di velocità dipende dalla natura del moto. Consideriamo, a tal proposito, il caso semplice di un flusso d'aria su una piastra piana parallela alla corrente:

² La **viscosità** misura l'attrito interno di un fluido (un gas o un liquido) per cui uno strato in movimento tende a trascinare con sé quelli adiacenti, appunto per l'attrito tra le molecole. Detto anche in altre parole, *la viscosità è la resistenza opposta dal fluido allo scorrimento dei vari strati gli uni sugli altri*. Nei gas, l'aumento della temperatura determina un aumento della viscosità, poiché aumenta il moto termico delle particelle; nei liquidi, invece, temperatura e viscosità sono inversamente proporzionali, in quanto una maggiore temperatura diminuisce la coesione tra le molecole del liquido.

³ In pratica, esiste un gradiente di temperatura ortogonale alla superficie e diretto dalla superficie verso l'esterno: infatti, la velocità del fluido cresce man mano che ci si allontana dalla superficie. Il valore massimo della velocità si ha nella corrente indisturbata.

⁴ Nel seguito, l'aggettivo *idrodinamico* verrà sottinteso. E' bene però precisare che, più avanti, verrà introdotto anche il concetto di strato limite termico, per cui, in quel caso, i due concetti andranno distinti.

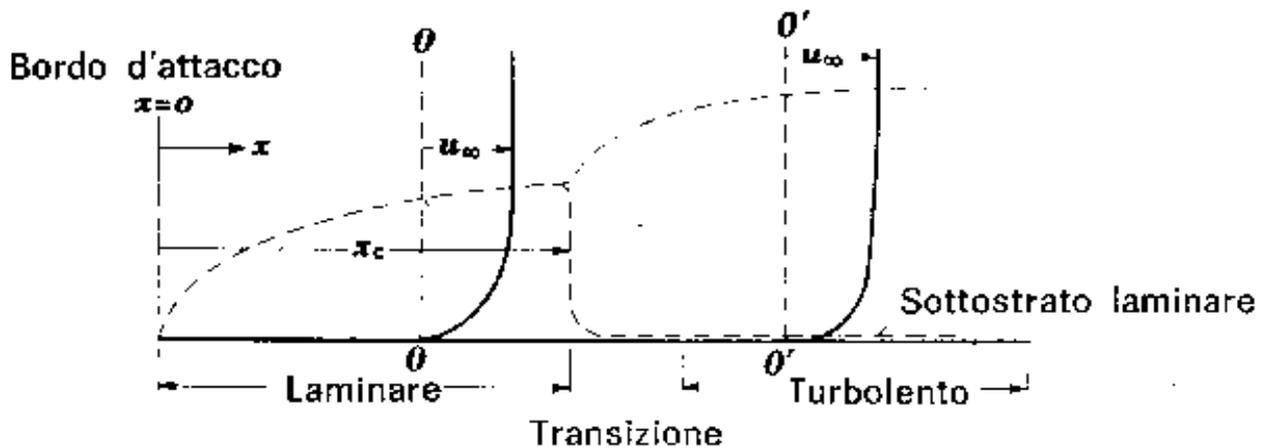


Figura 1 - Profili di velocità per gli strati limite laminare e turbolento nel moto su una piastra (per chiarezza, la scala verticale è stata ampliata)

La piastra è orizzontale e la corrente scorre anch'essa in orizzontale (cioè lungo l'asse x), da sinistra verso destra. Al *bordo di attacco* della piastra (in corrispondenza cioè di $x=0$), solo le particelle di fluido a diretto contatto con la superficie vengono rallentate, mentre le altre continuano a muoversi alla velocità u_∞ della corrente libera indisturbata. Man mano che il fluido procede verso destra lungo la piastra, invece, le forze viscose hanno effetti via via maggiori e rallentano perciò una quantità sempre maggiore di fluido; ciò significa, per la definizione data prima, che lo strato limite aumenta di spessore; lo si nota chiaramente, in figura, nei profili di velocità: il primo profilo è stato tracciato in corrispondenza della sezione O' e si nota che la velocità del fluido diventa pari ad u_∞ entro una certa distanza dalla piastra; il secondo profilo, tracciato in corrispondenza della sezione O , mostra invece che la velocità diventa u_∞ ad una distanza, dalla piastra, maggiore rispetto a prima, il che significa che lo spessore dello strato limite è aumentato, in quanto è aumentata la zona in cui si hanno gradienti di velocità.

Vicino al bordo di attacco della piastra, lo strato limite presenta sempre moto laminare (quindi molto ordinato); il moto rimane laminare fino ad una certa distanza dal bordo d'attacco, oltre la quale diventa invece turbolento, come evidenziato nella figura di prima.

Non è ancora ben chiaro il meccanismo della transizione dall'uno all'altro tipo di moto, per cui ci si limita a descrivere l'aumento dei disturbi nello strato limite laminare: in un fluido in moto, ci sono sempre dei disturbi, ma le forze viscose, finché sono grandi, ne impediscono la crescita; quando lo strato limite laminare diventa più spesso, le forze di inerzia crescono fino a diventare confrontabili con quelle viscose: si arriva così al punto in cui le prime prevalgono sulle seconde, per cui i disturbi non vengono più smorzati e, anzi, aumentano col tempo. A questo punto, lo strato limite diventa instabile e si ha così la *transizione* da moto laminare a moto turbolento.

Di fatto, un moto quasi laminare sussiste solo in un sottile strato nell'immediata vicinanza della superficie: di conseguenza, si parla sempre di **strato limite turbolento**, all'interno del quale si distingue solo una esigua regione laminare, detta perciò **sottostrato laminare**.

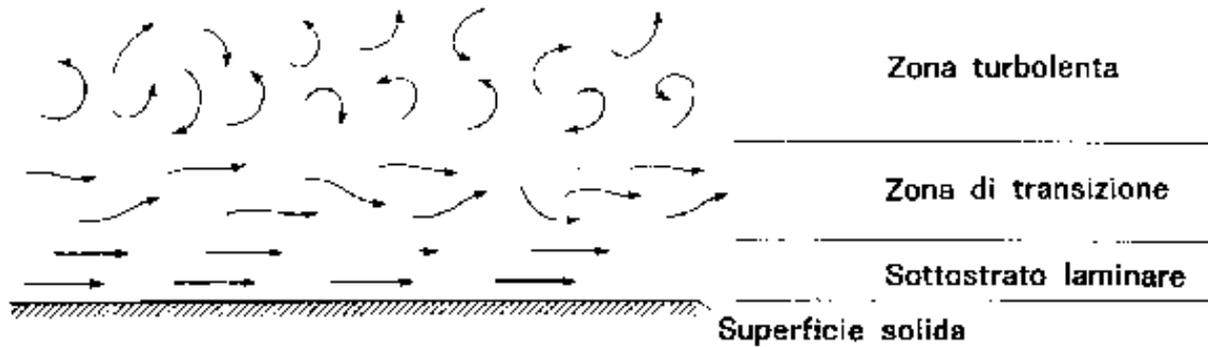


Figura 2 - Struttura del moto turbolento vicino ad una superficie solida

La regione compresa tra questo sottostrato laminare e lo strato limite completamente turbolento si chiama **zona di transizione**.

Lunghezza critica e numero di Reynolds

La distanza dal bordo d'attacco alla quale lo strato limite diventa turbolento prende il nome di **lunghezza critica** (simbolo: x_c). Questa distanza viene generalmente espressa come parametro all'interno di una quantità adimensionale chiamata **numero locale critico di Reynolds**: l'espressione analitica di tale quantità è

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot x_c}{\mu}$$

dove ρ è la *densità* del fluido considerato, u_{∞} la già citata *velocità del fluido indisturbato* (valutata quindi ad una distanza dalla superficie dove il moto del fluido non risente più della presenza della superficie stessa) e μ il *coefficiente di attrito viscoso*.

In pratica, *il numero di Reynolds rappresenta il valore del rapporto tra forze d'inerzia e forze viscosi in corrispondenza del quale i disturbi cominciano a crescere*:

- quando il moto è calmo e non si hanno disturbi, il moto laminare può sussistere, nello strato limite, anche per numeri di Reynolds che arrivano a $5 \cdot 10^6$;
- se la superficie è rugosa oppure sono state volutamente introdotte nel fluido delle cause di disturbo (ad esempio una griglia), il moto laminare non va oltre numeri di Reynolds dell'ordine di $8 \cdot 10^4$; in corrispondenza di questo valore il moto può già essere turbolento;
- in condizioni medie (che poi sono quelle che noi consideriamo generalmente), il moto su una piastra piana diventa turbolento ad una distanza x_c dal bordo di attacco alla quale il numero di Reynolds è approssimativamente pari a $5 \cdot 10^5$.

In generale, dunque, *bassi valori del numero di Reynolds indicano la prevalenza delle forze di attrito viscoso e quindi il moto laminare; alti valori del numero di Reynolds indicano invece la prevalenza delle forze di inerzia e quindi il moto turbolento.*

E' bene sottolineare che il **numero di Reynolds** propriamente detto è solo

$$Re(x) = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot x}{\mu}$$

ed è una funzione di x , ossia della distanza dal bordo di attacco della superficie⁵. Quando al posto di x si pone la distanza critica x_C , allora si parla di **numero di Reynolds critico**, ossia il valore di Re in corrispondenza della distanza alla quale si passa da moto laminare a moto turbolento. Il valore medio che noi considereremo per identificare il passaggio dall'uno all'altro tipo di moto è **$5 \cdot 10^5$** : ciò significa che, noti i parametri ρ, u_{∞} e μ per il problema in esame, calcoleremo x_C assumendo $Re = 5 \cdot 10^5$.

A causa delle differenze nelle caratteristiche fluidodinamiche, le forze di attrito e i fenomeni di scambio termico sono retti da relazioni diverse a seconda che lo strato limite sia laminare o turbolento.

Concludiamo il paragrafo con un'ultima osservazione: il moto nello strato limite, anche quando il contorno della superficie sulla quale il fluido scorre è curvo, è almeno qualitativamente simile al moto nello strato limite su una superficie piana. La differenza sostanziale sta nel fatto che, con la superficie curva, esiste sempre un **punto di separazione**, ossia un punto in cui lo strato limite si separa dalla superficie.

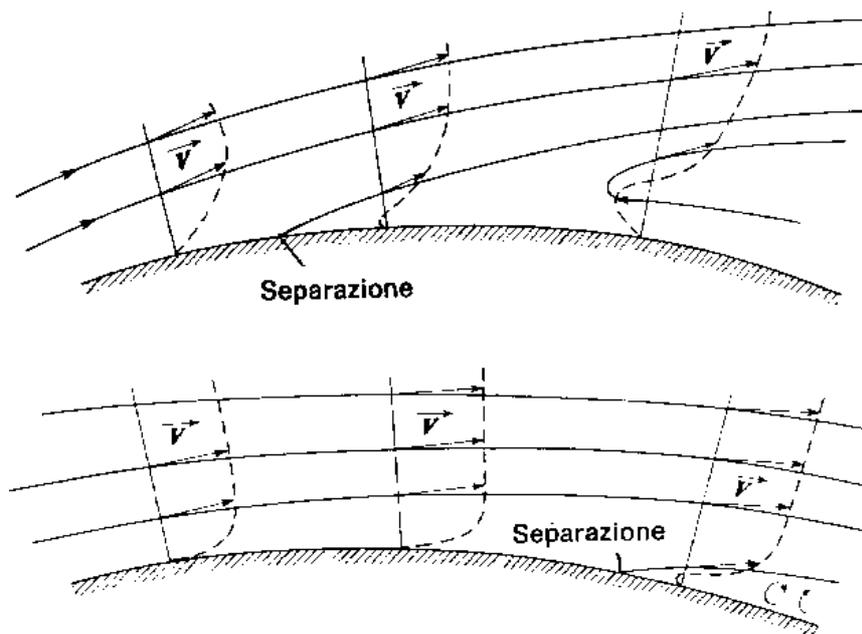


Figura 3 - Schemi della separazione dello strato limite. (In alto: linee di corrente e modello di moto vicino al punto di separazione, nel caso di strato limite laminare. In basso: linee di corrente e modello di moto vicino al punto di separazione, nel caso di strato limite turbolento)

Ad ogni modo, il problema della separazione è troppo complicato per essere trattato in dettaglio qui.

⁵ In effetti, l'espressione riportata vale rigorosamente solo per un flusso di fluido parallelamente ad una superficie piana.

STRATO LIMITE TERMICO

Nei precedenti paragrafi abbiamo dunque parlato dello *strato limite idrodinamico*, ossia di quella porzione di fluido in movimento in cui esistono variazioni di velocità rispetto al valore u_∞ caratteristico della corrente indisturbata. A questo strato limite idrodinamico si associa un altro strato limite, legato alle variazioni di temperatura.

Consideriamo perciò nuovamente una lastra piana al di sopra della quale viene fatto scorrere un fluido (il cui moto è sempre nella direzione parallela alla lastra stessa). Se il fluido e la lastra sono alla stessa temperatura, non dobbiamo aggiungere niente a quanto detto prima; se, invece, esiste una differenza di temperatura, allo strato limite idrodinamico si affianca uno **strato limite termico**, nel quale esiste un gradiente di temperatura. Per definire questo strato limite termico, si usa ancora una volta il suo **spessore** (indicato in questo caso con δ_t), definito come la distanza dalla superficie solida alla quale la temperatura T verifica la seguente condizione:

$$\frac{T_p - T}{T_p - T_\infty} = 0.99$$

dove T_p è la temperatura della lastra (supposta uniforme per tutta la lunghezza della lastra stessa), mentre T_∞ è la temperatura della corrente indisturbata⁶.

E' bene precisare che, nonostante le varie analogie tra strato limite termico e idrodinamico, i due non necessariamente coincidono: in generale, anzi, essi sono diversi, per il semplice motivo che il primo dipende da gradienti termici mentre il secondo da fenomeni di tipo viscoso.

IL NUMERO DI NUSSELT

Abbiamo ormai capito che, per la descrizione del meccanismo di trasporto di calore per convezione, sono importanti sia lo scambio per conduzione sia il trasporto di materia. In generale, dato che la conducibilità termica dei fluidi è abbastanza piccola⁷, *la velocità di trasporto dell'energia dipende principalmente dal moto di mescolamento delle particelle di fluido*:

- quando la velocità del fluido e la turbolenza sono piccole, il trasporto di energia non è aiutato materialmente dalle correnti macroscopiche di mescolamento;
- quando la velocità è grande, invece, il mescolamento tra parti calde e parti fredde di fluido contribuisce notevolmente al trasporto di energia e, in questo caso, il meccanismo della conduzione diventa spesso meno importante.

Queste considerazioni indicano che per trasmettere una certa potenza termica per convezione attraverso un fluido, è opportuno avere un gradiente di temperatura più grande in una regione a bassa velocità che in una regione ad alta velocità (dove lo scambio termico è comunque favorito dal mescolamento).

Sempre in base alle stesse considerazioni qualitative, vediamo di fare qualche passaggio analitico. Facciamo riferimento ad un fluido che scorre su una piastra riscaldata:

⁶ Si tratta perciò della temperatura in un punto al di fuori dello strato limite termico

⁷ tranne quella dei metalli liquidi.

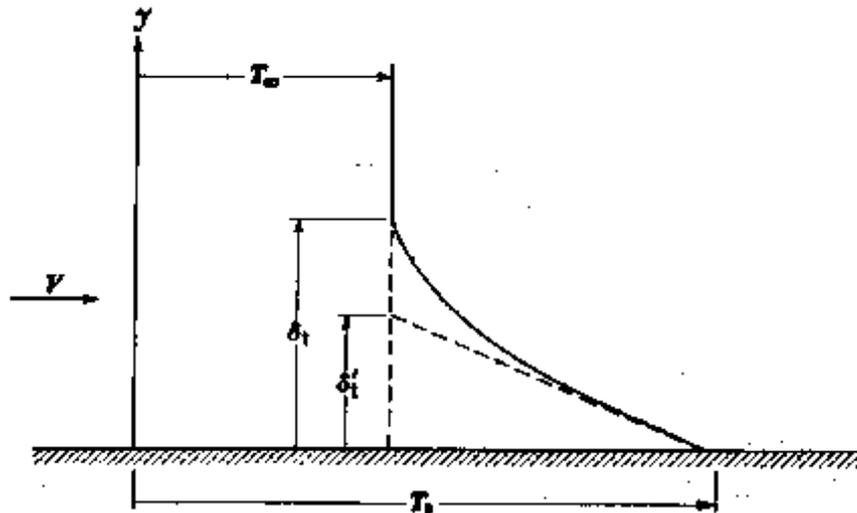


Figura 4 - Distribuzione di temperatura in uno strato limite turbolento per un fluido che scorre (con velocità v diretta verso destra) su una piastra riscaldata

All'interfaccia ($y=0$) tra il solido ed il fluido, le particelle di fluido sono ferme rispetto alla parete, per cui il calore può fluire soltanto per conduzione: di conseguenza, la potenza termica scambiata può essere calcolata tramite il postulato di Fourier, per cui risulta

$$q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}} = -k_f A \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \left[\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right]$$

dove ricordiamo che k_f è la *conducibilità termica* del fluido ed il segno negativo deriva dal fatto che il flusso termico avviene nella direzione opposta del gradiente di temperatura, cioè dalle zone più calde a quelle più fredde. D'altra parte, in un regime stabilizzato di temperatura, questa stessa potenza si trasmette per convezione nella parte rimanente del fluido, per cui possiamo applicare anche la già citata **equazione della convezione** (o **equazione di Newton**):

$$q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}} = \bar{h}_c A (T_s - T_\infty)$$

Uguagliando allora le due espressioni, otteniamo che

$$-k_f A \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{h}_c A (T_s - T_\infty)$$

L'area A scompare da entrambi i membri. Possiamo inoltre riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$\frac{\bar{h}_c}{k_f} = - \frac{1}{T_s - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

A questo punto, osserviamo le dimensioni del secondo membro: abbiamo l'inverso di una lunghezza, in quanto la temperatura si trova sia a numeratore sia a denominatore. Allora, anche il primo membro è, dimensionalmente, l'inverso di una lunghezza. Si è allora deciso di rendere

adimensionali i membri di questa equazione, introducendo un parametro detto **lunghezza caratteristica** (simbolo: **L**); tale parametro, col quale noi caratterizziamo la geometria dell'oggetto dal quale fluisce il calore, modifica l'equazione nel modo seguente:

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\overline{h_c L}}{k_f} = - \frac{1}{L} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{T_s - T_\infty}{L}$$

La quantità (adimensionale) a primo membro prende il nome di **numero (medio) di Nusselt**. A cosa serve? L'espressione di $\overline{\text{Nu}}$ suggerisce di interpretare tale quantità come rapporto tra il gradiente di temperatura nel fluido immediatamente a contatto con la superficie ed un gradiente di temperatura di riferimento $\frac{T_s - T_\infty}{L}$.

E' chiaro che $\overline{\text{Nu}}$ rappresenta, di fatto, una misura del coefficiente di convezione $\overline{h_c}$: nota infatti la conducibilità del materiale, che è un dato del problema, e nota la lunghezza caratteristica del sistema, basta calcolare

$$\overline{h_c} = \frac{k_f}{L} \overline{\text{Nu}}$$

La conclusione del discorso è dunque la seguente: *nei problemi di scambio termico per convezione, il problema è essenzialmente quello di calcolare di volta in volta il numero di Nusselt, da cui risalire, in base alla geometria del sistema (L) ed alle proprietà del materiale (k_f) al coefficiente di scambio termico per convezione $\overline{h_c}$.*

DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI SCAMBIO TERMICO CONVETTIVO

Per la determinazione del coefficiente di scambio termico convettivo sono utilizzabili 4 metodi generali:

- **analisi dimensionale:** si tratta di un metodo semplice da un punto di vista matematico, ma con la limitazione per cui i risultati ottenibili sono spesso incompleti e inutili senza il conforto dei dati sperimentali;
- **soluzione matematica esatta delle equazioni dello strato limite:** le analisi matematiche rigorose richiedono la soluzione delle equazioni che descrivono il moto del fluido ed il trasporto di energia nel fluido in movimento. Tale procedura presuppone quindi che i meccanismi fisici siano compresi tanto bene da essere descritti in termini matematici: questa è una condizione preliminare che limita il campo di applicazione di questo metodo, in quanto delle equazioni matematiche complete che descrivano il moto del fluido ed i meccanismi di scambio termico possono essere individuate solo per il moto laminare; tra l'altro, si tratta anche di equazioni piuttosto complicate, risolvibili per un numero limitato di sistemi semplici (come ad esempio il moto su una superficie piana). Ad ogni modo, le soluzioni esatte hanno comunque una grande importanza, in quanto le ipotesi fatte nel corso dell'analisi possono essere precisate accuratamente e la loro validità può essere verificata sperimentalmente. Non solo, ma servono anche come base di confronto e di verifica per i metodi più semplice ed approssimati;

- **analisi approssimata dello strato limite:** in questo caso, non è più necessaria la descrizione matematica dettagliata del moto, in quanto si preferisce usare una equazione plausibile ma semplice, che descrive la distribuzione di velocità e di temperatura. Si tratta di un metodo relativamente semplice, che tra l'altro fornisce soluzioni per problemi che non possono essere trattati con una analisi matematica rigorosa;
- **analogia tra il trasporto di calore, di materia e di quantità di moto:** questo è un utile metodo di analisi dei fenomeni di trasporto turbolento, in quanto richiede modelli matematici abbastanza semplici. Il moto di mescolamento può essere descritto su base statistica con un metodo simile a quelli usati per rappresentare il moto delle molecole nella teoria cinetica dei gas.

ANALISI DIMENSIONALE

L'analisi dimensionale differisce da altri metodi per un fatto essenziale: non comporta equazioni da risolvere. Il motivo è che essa prevede di combinare le variabili in gioco in cosiddetti **gruppi adimensionali**, come i già citati *numero di Reynolds* e *numero di Nusselt*, che facilitano l'interpretazione dei dati sperimentali. In pratica, i coefficienti di convezione vengono calcolati tramite equazioni empiriche ottenute correlando, mediante l'analisi dimensionale, i dati sperimentali.

Il limite maggiore dell'analisi dimensionale consiste nel fatto che non dà alcuna informazione sulla natura di un fenomeno: infatti, per applicare l'analisi dimensionale è necessario conoscere prima quali variabili influenzano il fenomeno, dopo di che il successo, o il fallimento, del metodo dipende dalla opportuna scelta di tali variabili. Si deduce che è necessario disporre di una teoria preliminare sul fenomeno o, comunque, di una completa comprensione fisica del fenomeno stesso, prima di usare l'analisi dimensionale. Vediamo allora come si procede, a grandi linee, per l'applicazione dell'analisi dimensionale, una volta note le variabili del problema.

Dimensioni fondamentali e formule dimensionali

La prima operazione da compiere è la scelta di un **sistema di dimensioni fondamentali**; la scelta di tali dimensioni è del tutto arbitraria, ma deve soddisfare un preciso quanto evidente vincolo: le formule dimensionali di tutte le variabili coinvolte devono potersi esprimere in funzione delle dimensioni scelte come fondamentali. Ad esempio, se avessimo a che fare con un problema di natura geometrica, non potremmo esimerci dal considerare, tra le dimensioni fondamentali, la lunghezza.

Nel caso dei fenomeni di scambio termico, le dimensioni fondamentali che conviene scegliere sono le seguenti 4:

- lunghezza (simbolo: L);
- tempo (simbolo: t);
- temperatura (simbolo: T);
- massa (simbolo: M).

Data, adesso, una grandezza fisica, la sua **formula dimensionale** può derivare sia da una semplice definizione sia da una precisa legge fisica. Ad esempio, la formula dimensionale per la *lunghezza* di una barra è, per definizione, data da $[L]$, dove le parentesi quadre aiutano a distinguere una equazione dimensionale da una matematica. Se invece consideriamo la *velocità* di una particella di

fluido, essa corrisponde ad una distanza diviso il tempo necessario a percorrerla, per cui la formula dimensionale è $[L/t]$ o anche $[Lt^{-1}]$.

Determinazione del numero di gruppi adimensionali

Una volta scelte le dimensioni fondamentali e individuato il fenomeno da descrivere, *bisogna capire quanti gruppi adimensionali indipendenti servono per esprimere la relazione che descriva il fenomeno stesso*. A questo scopo, esiste un preciso teorema (**teorema π di Buckingham**) che dice questo:

Teorema - Il numero necessario di gruppi adimensionali indipendenti che si possono formare dalla combinazione delle variabili fisiche di un problema è uguale al numero totale di queste n grandezze fisiche (ad esempio densità, viscosità, coefficiente di scambio termico, ecc.) meno il numero m delle dimensioni fondamentali richieste per esprimere le formule dimensionali delle n grandezze fisiche.

Consideriamo, ad esempio, un problema comprendente $n=5$ grandezze fisiche, descrivibili mediante $m=3$ dimensioni fondamentali: in base al teorema, avremo bisogno di solo 2 gruppi adimensionali. Ciò significa che, se indichiamo con π_1 e π_2 tali due gruppi adimensionali, l'equazione che li lega potrà essere posta nella forma $F(\pi_1, \pi_2) = 0$ o, meglio ancora, nella forma

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

I dati sperimentali, per tale problema, possono essere correlati diagrammando π_1 in funzione di π_2 . La curva empirica risultante fornisce la relazione funzionale tra π_1 e π_2 , relazione che non può essere dedotta dall'analisi dimensionale.

Per un fenomeno che può essere descritto mediante 3 gruppi dimensionali (quindi $n-m=3$), l'equazione da considerare sarà nella forma $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$, che potrà anche essere scritta come

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

In questo caso, i dati sperimentali possono essere correlati diagrammando π_1 in funzione di π_2 e per vari valori di π_3 . In alcuni casi si può fare anche qualcosa in più, come ad esempio combinare due dei 3 gruppi adimensionali e diagrammare il nuovo gruppo in funzione di quello rimanente. Si ottiene in tal modo un'unica curva anziché più curve.

Determinazione dei gruppi adimensionali. Numero di Prandtl

In definitiva, dunque, *il passo fondamentale dell'analisi dimensionale è nell'individuazione dei gruppi adimensionali necessari alla descrizione del fenomeno e nell'individuazione della relazione che li lega*. Facciamo allora un esempio concreto, al fine anche di introdurre un nuovo gruppo adimensionale (dopo i numeri di Reynolds e Nusselt) molto utile ai nostri scopi.

Il problema è quello di correlare i dati sperimentali relativi allo scambio termico convettivo per un fluido che scorre all'interno di un tubo riscaldato.

Il primo passo, come detto prima, è nella individuazione delle *grandezze fisiche* da utilizzare per la descrizione del fenomeno. E' ragionevole prevedere che si tratti delle seguenti:

- diametro del tubo (simbolo: D)
- conducibilità termica (simbolo: k), velocità (simbolo: V), densità (simbolo: ρ) e viscosità (simbolo: μ) del fluido;
- calore specifico a pressione costante (simbolo: c_p);
- coefficiente di convezione (simbolo: \bar{h}_c).

Dobbiamo adesso scegliere le *dimensioni fondamentali* in modo da poter esprimere le equazioni dimensionali di tutte le 7 grandezze appena individuate. E' facile verificare che si tratta proprio delle dimensioni fondamentali citate in precedenza, ossia lunghezza, tempo, temperatura e massa.

A questo punto, dato che $n=7$ e $m=4$, deduciamo che i *gruppi adimensionali indipendenti* necessari alla descrizione del fenomeno sono $n-m=3$.

Per determinare quali sono questi gruppi adimensionali, possiamo procedere scrivendo il generico π come prodotto di variabili, ciascuna elevata ad un esponente incognito:

$$\pi = D^a k^b V^c \rho^d \mu^e c_p^f \bar{h}_c^g$$

A questo punto, dobbiamo sostituire a ciascuna grandezza la corrispondente equazione dimensionale: fatto questo ci basta imporre che gli esponenti di ciascuna dimensione fondamentali diano come somma zero.

Facendo la sostituzione e annullando la somma degli esponenti di ciascuna dimensione fondamentale, si ottiene un sistema di 4 equazioni nelle 7 incognite rappresentate dai 7 coefficienti:

$$\begin{cases} b + d + e + g = 0 & \text{per M} \\ a + b + c - 3d - e + 2f = 0 & \text{per L} \\ -3b - c - e - 2f - 3g = 0 & \text{per t} \\ -b - f - g = 0 & \text{per T} \end{cases}$$

Avendo un sistema di 4 equazioni in 7 incognite, le soluzioni sono ∞^3 , il che significa che possiamo fissare arbitrariamente 3 esponenti, dopo di che gli altri saranno univocamente determinati. Allora, dato che nei problemi di scambio termico convettivo il nostro interesse è la determinazione di \bar{h}_c , fissiamo il suo esponente uguale ad 1 ($g=1$), in modo che nel primo gruppo dimensionale compaia proprio \bar{h}_c ; successivamente, ci conviene porre $c=d=0$ per semplificare i calcoli. Con queste scelte, risolvendo il sistema, si trova $a=1$, $b=-1$, $e=f=0$, da cui scaturisce che il primo gruppo dimensionale è

$$\pi_1 = \frac{\bar{h}_c D}{k}$$

Questo non è altro che il *numero di Nusselt*.

Adesso, per determinare il secondo gruppo dimensionale, fissiamo $g=0$ (in modo che non compaia più \bar{h}_c). Ci conviene poi scegliere $f=0$ (in modo che risulti $b=0$) e poi $a=1$, da cui scaturisce che $e=-1$ e che $c=d=1$. Il conseguente gruppo dimensionale è

$$\pi_2 = \frac{VD\rho}{\mu}$$

Anche questo gruppo adimensionale è conosciuto, in quanto corrisponde al *numero di Reynolds* con il diametro D usato come lunghezza caratteristica.

Come ultima scelta, poniamo ancora $g=0$ e poniamo inoltre $e=1$ e $c=0$. Il conseguente gruppo dimensionale risulta essere

$$\pi_3 = \frac{c_p \mu}{k}$$

A questo parametro si dà il nome di **numero di Prandtl** e lo si indica con **Pr**:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k}$$

A questo punto, possiamo combinare le 3 espressioni ottenute per giungere ad un'unica relazione funzionale nella forma $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$. Ad esempio, possiamo scrivere una relazione del tipo

$$\overline{Nu} = f(Re, Pr)$$

Così facendo, i dati sperimentali possono essere correlati in termini di 3 variabili invece delle 7 originali.

Correlazione dei dati sperimentali

Vediamo allora come si possono correlare i dati sperimentali in base alle conclusioni trovate nel paragrafo precedente.

Supponiamo che siano state eseguite delle prove sperimentali con aria che fluisce in un tubo di diametro $D=25\text{mm}$. Supponiamo che sia stato misurato il valore di \overline{h}_c in varie prove, compiute per diversi valori della velocità V del fluido, compresi tra 0.03 m/s e 30 m/s. Questo ci consente allora di tracciare un grafico di \overline{h}_c in funzione V:

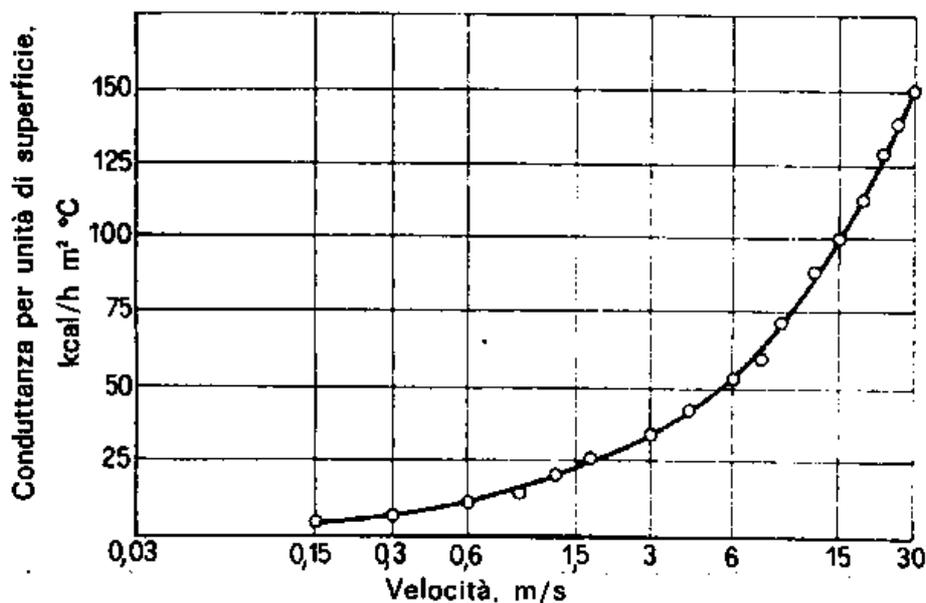


Figura 5 - Variazione del coefficiente di scambio termico con la velocità nel moto di aria su un tubo di 25 mm di diametro esterno

Interpolando i punti corrispondenti alle misure effettuate, abbiamo una curva che ci consente di calcolare \bar{h}_c per qualsiasi valore di V .

Questo, però, vale solo per il sistema in esame, ma non permette, ad esempio, di calcolare \bar{h}_c per tubi più grandi o più piccoli oppure per pressioni e densità dell'aria diversi da quelli usati nelle prove. Sarebbe necessario effettuare prove sperimentali per ogni diametro del cilindro, per ogni densità, per ogni pressione, con un notevole dispendio di tempo.

Al contrario, l'analisi dimensionale consente di applicare a molti altri problemi i risultati di una serie di prove. Infatti, tramite i dati sperimentali possiamo costruire un altro diagramma cartesiano, in cui riportiamo il numero di Nusselt $\frac{\bar{h}_c D}{k}$ in funzione del numero di Reynolds $\frac{VD\rho}{\mu}$:

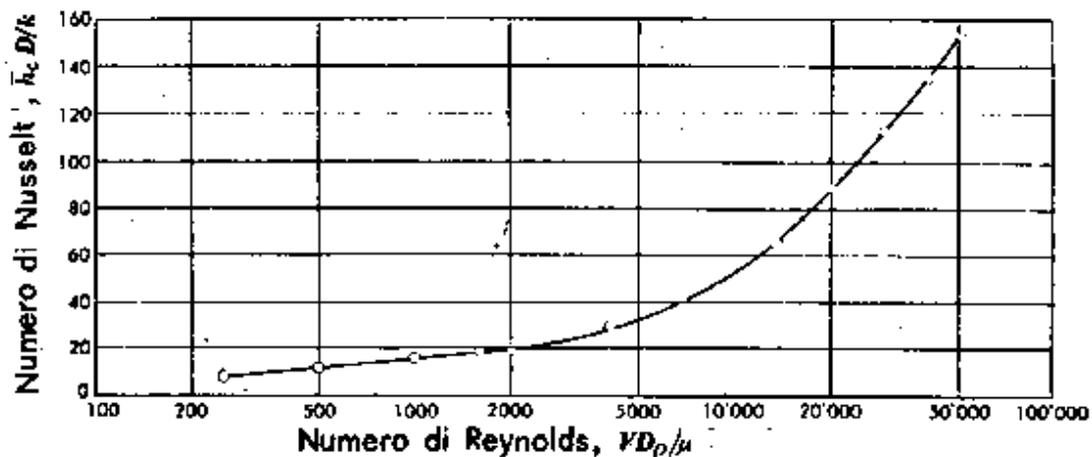


Figura 6 - Variazione del numero di Nusselt con il numero di Reynolds nel moto di aria su un tubo di 25 mm di diametro esterno

Per ogni assegnato valore di V , abbiamo un assegnato valore del numero di Reynolds, da cui risaliamo al corrispondente valore del numero di Nusselt e quindi al corrispondente valore di \bar{h}_c .

Tuttavia, a differenza di prima, possiamo fare molto di più: infatti, possiamo fissare V e possiamo scegliere un altro valore di D o di ρ o di μ : otterremo, in corrispondenza, un preciso valore del numero di Nusselt e quindi il corrispondente valore di \bar{h}_c .

Quindi, tramite i gruppi adimensionali, riusciamo a determinare \bar{h}_c per tubi di qualunque altra dimensione o per qualunque altro valore di ρ o di μ rispetto al tubo usato nelle sperimentazioni. In realtà, i campi di variazione non sono proprio arbitrari: infatti, le nostre scelte devono essere comunque tali che il numero di Reynolds, nel suo complesso, vari sempre nello stesso campo osservato per le prove sperimentali iniziali.

E' importante adesso fare una osservazione: nel diagramma in cui riportiamo \bar{Nu} in funzione di Re , non si nota alcuna dipendenza di \bar{Nu} stesso dal numero di Prandtl; il motivo è che il numero di Prandtl è una combinazione di proprietà fisiche il cui valore, per i gas, non varia di molto. Allora, se volessimo determinare l'influenza del numero di Prandtl, non avremmo altra scelta che quella di provare diversi fluidi.

In generale, l'**equazione empirica di correlazione** tra i 3 gruppi adimensionali è nella forma seguente:

$$\bar{Nu} = f(Re, Pr) = \text{cost} \cdot Re^x \cdot Pr^y$$

Si tratta perciò di determinare i valori dei parametri x, y e cost. Ad esempio, utilizzando un campo di numeri di Reynolds compresi tra 3 e 100, si trova la seguente relazione:

$$\overline{Nu} = f(Re, Pr) = 0.82 \cdot Re^{0.4} \cdot Pr^{0.3}$$

VISCOSITÀ

Gli sforzi viscosi sono una conseguenza dell'interazione molecolare tra gli strati più veloci e meno veloci di un fluido. Tali sforzi danno luogo al cosiddetto **sforzo d'attrito** (simbolo: τ), che è proporzionale al gradiente di velocità lungo la direzione normale al moto: il fattore di proporzionalità è una proprietà del fluido detta **viscosità**⁸ (simbolo: μ - unità di misura: $\frac{kg}{m \cdot s}$). Consideriamo il caso semplice di una piastra piana sulla quale scorre un fluido:

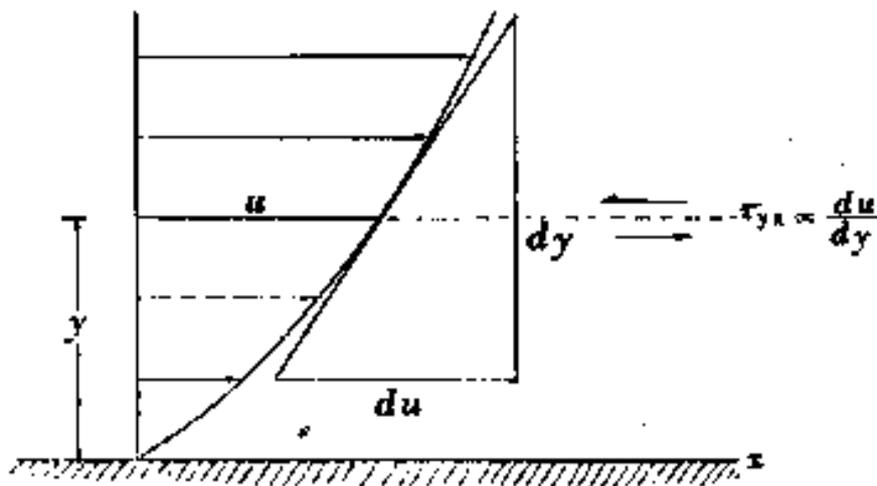


Figura 7 - Sforzo di taglio nello strato limite laminare

Se supponiamo che la velocità vari solo lungo la direzione verticale y (cioè la direzione ortogonale alla piastra), lo sforzo di taglio, per unità di area, in un piano parallelo alla piastra è dato da

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

dove u è la velocità del fluido e y la distanza dalla superficie della piastra.

Osserviamo che il simbolo τ_{yx} indica uno sforzo di taglio così caratterizzato: il pedice y indica l'asse a cui è ortogonale l'area sede dello sforzo; il pedice x , invece, indica la direzione dello sforzo. In pratica, quindi, τ_{yx} è lo sforzo di taglio lungo la direzione x in un piano perpendicolare all'asse y .

⁸ Si parla anche di **viscosità dinamica**

STRATO LIMITE LAMINARE SU UNA LASTRA PIANA

Consideriamo adesso il problema della trasmissione di calore tra una piastra piana ed un fluido incomprimibile che scorre parallelamente ad essa. Si tratta di un sistema tra i più semplici da studiare e presenta risultati che poi trovano applicazione in molti altri casi: essi valgono, con buona approssimazione, nella convezione forzata lungo le superfici di corpi affusolati e nelle zone di imbocco dei tubi.

Intanto, abbiamo già osservato che, a causa delle differenze nelle caratteristiche del moto, le forze di attrito e lo scambio termico sono retti da relazioni diverse a seconda che lo strato limite sia laminare o turbolento. In questa sede, consideriamo perciò il caso di strato limite laminare, caso che, tra l'altro, è suscettibile sia di una analisi matematica esatta sia di una trattazione approssimata. Intendiamo riportare, senza dimostrazione, i risultati più significativi dell'analisi matematica esatta.

In primo luogo, sono stati sperimentalmente ricavati e diagrammati gli andamenti della velocità u (nella direzione x) del fluido in funzione della distanza adimensionale $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}}$:

$$u = f\left(\frac{y}{x} \sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}}\right)$$

Si è anche trovato che la velocità u raggiunge il 99% del valore u_{∞} relativo al fluido indisturbato per

$$\frac{y}{x} \sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}} = 5$$

Allora, se lo spessore δ dello strato limite (idrodinamico) viene definito come la distanza (dalla superficie) alla quale la velocità locale u raggiunge il 99% del valore u_{∞} , risulta che

$$y = \delta \longrightarrow \frac{\delta}{x} \sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}} = 5 \longrightarrow \delta = \frac{5x}{\sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}}}$$

Ricordando adesso che, per una lastra piana, il numero di Reynolds è $Re(x) = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot x}{\mu}$, concludiamo che

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re(x)}}$$

Tra le altre cose, questa relazione mostra che lo spessore dello strato limite diminuisce se aumenta la velocità u_{∞} del fluido indisturbato.

Adesso, tramite la relazione $u = f\left(\frac{y}{x} \sqrt{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}}\right)$, si può calcolare lo sforzo tangenziale sulla parete: basta infatti applicare la relazione

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

(precedentemente citata) e usare il gradiente di velocità calcolato in $y=0$, cioè appunto in corrispondenza della superficie: si trova che lo sforzo di attrito sulla parete, riferito all'unità di area, è

$$\tau_{\text{superficie}} = 0.332\mu \frac{u_{\infty}}{x} \sqrt{\text{Re}(x)}$$

Da qui si deduce che lo sforzo tangenziale sulla parete è molto grande in prossimità del bordo d'attacco ($x=0$) della piastra e diminuisce al crescere della distanza x da questo.

Volendo rappresentare graficamente la situazione, conviene riferirsi ancora una volta a delle coordinate adimensionali: per fare questo, basta dividere ambo i membri dell'ultima equazione per l'energia cinetica del fluido indisturbato, ossia per $\rho u_{\infty}^2 / 2$: così facendo, si ottiene un numero adimensionale chiamato **coefficiente di attrito locale**⁹ (simbolo: $C_f(x)$):

$$C_f(x) = \frac{\tau_{\text{superficie}}}{\rho u_{\infty}^2 / 2} = \frac{0.664}{\mu} \sqrt{\text{Re}(x)} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}(x)}}$$

In base a questa relazione, è possibile diagrammare C_{fx} in funzione di $\text{Re}(x)$.

Molto spesso, per una piastra piana di lunghezza L , il **coefficiente di attrito medio** (simbolo: \bar{C}_f) è più importante del coefficiente di attrito locale. Allora, si può calcolare \bar{C}_f integrando l'espressione di $C_f(x)$ tra il bordo di attacco ($x=0$) e l'altro estremo della piastra ($x=L$):

$$\bar{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx$$

Per risolvere questo integrale è necessario tener conto del tipo di moto: avendo supposto un moto laminare, quell'integrale si può risolvere comodamente e risulta

$$\bar{C}_f = \frac{1.33}{\sqrt{\frac{u_{\infty} L \rho}{\mu}}}$$

Osserviamo però una cosa: in generale, sappiamo che, per un fluido che scorre su una lastra piana, si distingue una zona di moto laminare, in corrispondenza del bordo d'attacco, seguita da una zona di moto turbolento¹⁰, che comincia a partire dalla distanza critica x_c . Di conseguenza, l'integrale per il calcolo di \bar{C}_f va spezzato in due parti, in quanto l'espressione di $C_f(x)$ cambia dal moto laminare al moto turbolento:

$$\bar{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^{x_c} C_{f,\text{laminare}}(x) dx + \frac{1}{L} \int_{x_c}^L C_{f,\text{turbolento}}(x) dx$$

⁹ Si usa l'aggettivo *locale* in quanto anche il numero di Reynolds che compare nella formula è locale, essendo calcolato per una distanza x generica.

¹⁰ La *zona di transizione* ci interessa poco, per cui la inglobiamo nella zona di moto turbolento.

Proseguendo nell'analisi, che ha come fine il calcolo della potenza termica scambiata per convezione, bisogna calcolare il gradiente di temperatura sulla superficie e quindi, in generale, la distribuzione di temperatura nel fluido: si trova che $T(x,y)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dove v è la velocità del fluido nella direzione y .

Dalla risoluzione di questa equazione si trova che il gradiente di temperatura sulla superficie (cioè per $y=0$) risulta essere

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} (x) = 0.332 \frac{\sqrt{\text{Re}(x)} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}{x} (T_\infty - T_s)$$

Questa quantità consente di applicare l'equazione della conduzione

$$q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}} = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

precedentemente considerata: si ottiene perciò che

$$q_{\text{sup} \rightarrow \text{fluido}}(x) = -k \cdot A \cdot 0.332 \cdot \frac{\sqrt{\text{Re}(x)} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}{x} \cdot (T_\infty - T_s)$$

A questo punto, la potenza termica globale trasmessa da una piastra di larghezza b e lunghezza L si ottiene integrando $q_{\text{sup} \rightarrow \text{fluido}}(x)$ tra $x=0$ e $x=L$: si ottiene

$$q_{\text{sup} \rightarrow \text{fluido}} = 0.664 \cdot k \cdot \sqrt{\text{Re}_L} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}} \cdot b \cdot (T_\infty - T_s)$$

dove abbiamo posto $\text{Re}_L = u_\infty L / \nu$, ossia il numero di Reynolds calcolato in $x=L$.

Sempre utilizzando una relazione già trovata in precedenza, possiamo adesso calcolare il coefficiente locale di scambio convettivo:

$$h_c = -k \frac{1}{T_s - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{q}{A(T_s - T_\infty)} \longrightarrow h_c(x) = 0.332 \cdot \frac{k}{x} \cdot \sqrt{\text{Re}(x)} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}$$

Noto $h_c(x)$, è anche possibile calcolare il corrispondente numero di Nusselt locale:

$$\boxed{\text{Nu}(x) = \frac{x h_c(x)}{k} = 0.332 \cdot \sqrt{\text{Re}(x)} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}$$

dove, nelle situazioni più frequenti, risulta $\text{Pr} \geq 0.6$.

Dai valori locali possiamo poi risalire a quelli medi, che in effetti hanno la rilevanza maggiore dal punto di vista ingegneristico: infatti, partendo da $h_c(x)$, possiamo trovare \bar{h}_c integrando sempre tra $x=0$ e $x=L$ e dividendo poi per L :

$$\bar{h}_c = \frac{1}{L} \int_0^L h_c(x) dx = 0.332 \cdot \frac{k}{L} \cdot \sqrt{\text{Re}_L} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}$$

dove Re_L è sempre il numero di Reynolds calcolato all'estremità della lastra piana opposta al bordo d'attacco, ossia in corrispondenza di $x=L$.

Dopo di che ci basta scrivere che

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{h}_c L}{k} = 0.664 \cdot \sqrt{\text{Re}_L} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}$$

Caso del moto turbolento

Se il moto del fluido, anziché laminare, fosse turbolento, l'equazione empirica per il coefficiente di attrito locale sarebbe

$$C_f(x) = \frac{0.0576}{\sqrt[5]{\frac{u_\infty x}{\nu}}}$$

Questa equazione è in buon accordo con i risultati sperimentali per numeri di Reynolds compresi tra $5 \cdot 10^5$ e 10^7 , finché non avviene alcun distacco dallo strato limite.

Integrando tra $x=0^{11}$ ed $x=L$, si ottiene il coefficiente di attrito medio:

$$\bar{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx = \frac{0.072}{\sqrt[5]{\frac{u_\infty L}{\nu}}}$$

A partire da $h_c(x)$ possiamo poi calcolare il corrispondente numero di Nusselt locale:

$$\boxed{\text{Nu}(x) = \frac{x h_c(x)}{k} = 0.0288 \cdot \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{0.8} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}$$

Dai valori locali possiamo infine risalire a quelli medi: integrando sempre tra $x=0$ e $x=L$ e dividendo poi per L , otteniamo che la conduttanza media convettiva, per moto turbolento, vale

$$\bar{h}_c = \frac{1}{L} \int_0^L h_c(x) dx = 0.036 \cdot \frac{k}{L} \cdot \text{Re}_L^{0.8} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}$$

Da qui possiamo concludere che

$$\boxed{\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{h}_c L}{k} = 0.036 \cdot \text{Re}_L^{0.8} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}$$

¹¹ In pratica, stiamo supponendo che il moto turbolento cominci sul bordo di attacco ($x=0$) della piastra. In realtà, invece, c'è sempre uno strato laminare che precede lo strato turbolento e che è esteso da $x=0$ ad $x=x_c$.

Questa equazione, per le approssimazioni fatte, non tiene conto dello strato laminare prima di quello turbolento ed è quindi rigorosamente valida per $L \gg x_C$, dove ricordiamo che la distanza critica x_C è la distanza, dal bordo di attacco ($x=0$) alla quale comincia la zona di moto turbolento.

Convezione forzata interna

INTRODUZIONE

In questa parte ci occupiamo, più che altro con dei cenni, della **convezione forzata all'interno di tubi e condotti**.

Il riscaldamento ed il raffreddamento di fluidi che scorrono all'interno di condotti sono tra i più importanti processi di scambio termico:

- il progetto e l'analisi di un qualsiasi **scambiatore di calore** richiedono la conoscenza del coefficiente di scambio termico tra le pareti del condotto ed il fluido che scorre al suo interno;
- le dimensioni dei **surriscaldatori** e dei **preriscaldatori** dipendono notevolmente dalla conduttanza convettiva unitaria tra la superficie interna dei tubi ed il fluido;
- nel progetto di impianti di **condizionamento** e di **refrigerazione**, è necessario valutare coefficienti di scambio termico per i fluidi che scorrono all'interno dei condotti.

Una volta specificate le condizioni di moto del fluido e una volta fissata la geometria del sistema, è possibile calcolare il **coefficiente di scambio termico convettivo**, il che consente di determinare la potenza termica scambiata sotto la differenza di temperatura esistente: l'equazione è infatti la solita, ossia

$$q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}} = \bar{h}_c A (T_s - T_\infty)$$

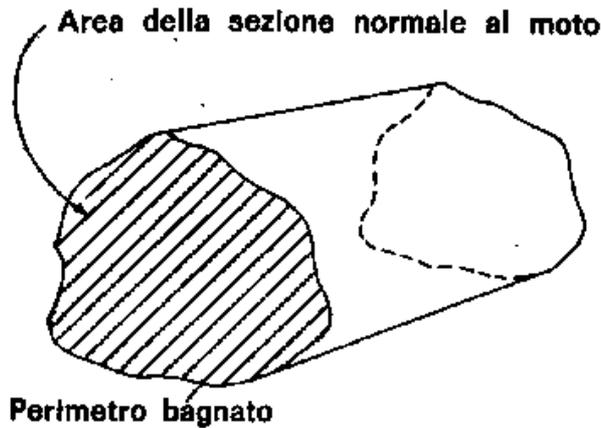
Un uso alternativo di questa relazione potrebbe essere quello di calcolare l'area necessaria per scambiare una data potenza termica in corrispondenza di una specificata differenza di temperatura:

$$A = \frac{q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}}}{\bar{h}_c (T_s - T_\infty)}$$

Per quanto riguarda il coefficiente di scambio termico \bar{h}_c , abbiamo visto che lo si può calcolare a partire dal **numero di Nusselt**:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}_c D_{\text{eq}}}{k}$$

Per moto in tubi o condotti molto lunghi, la lunghezza caratteristica da usare nell'espressione del numero di Nusselt è il cosiddetto **diametro equivalente**, indicato con D_{eq} . La definizione di questo parametro è abbastanza complessa. Consideriamo il caso di fluido in moto in un tubo molto lungo:



Con riferimento alla figura, la definizione del diametro equivalente è la seguente:

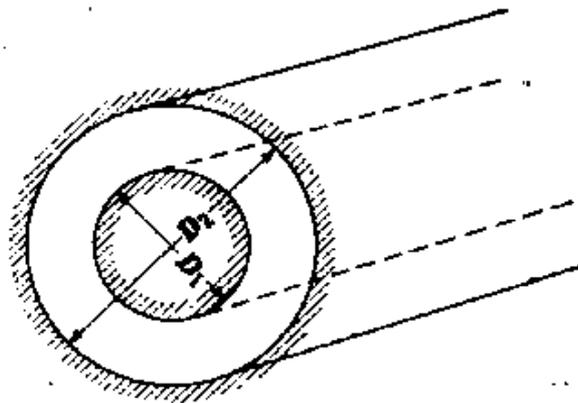
$$D_{eq} = 4 \frac{\text{area della sezione normale al moto}}{\text{perimetro bagnato}}$$

Applichiamo ad esempio questa definizione al caso semplice di un tubo circolare di diametro D : in questo caso, l'area della sezione normale al moto è $\pi D^2/4$, mentre il perimetro bagnato è πD , per cui

$$D_{eq} = 4 \frac{\pi D^2}{\pi D} = D$$

Abbiamo dunque trovato che il diametro equivalente coincide con il diametro del tubo (detto perciò **diametro idraulico**).

Consideriamo ora il caso di uno spazio anulare compreso tra due tubi coassiali:



In questo caso, si ha che

$$D_{eq} = 4 \frac{\frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2)}{\pi(D_1 + D_2)} = \frac{(D_2 - D_1)(D_1 + D_2)}{(D_1 + D_2)} = D_2 - D_1$$

Nella pratica, il numero di Nusselt per il moto in condotti viene generalmente calcolato mediante equazioni empiriche basate su risultati sperimentali. Tipicamente, mediante l'analisi dimensionale

abbiamo visto che i risultati ottenuti in esperimenti di scambio termico per convezione forzata possono essere correlati con una equazione nella forma

$$\overline{Nu} = f(Re, Pr)$$

Scelta della temperatura di riferimento del fluido

Consideriamo ancora l'equazione

$$q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}} = \overline{h}_c A (T_s - T_\infty)$$

Questa è la relazione che, in pratica, definisce il coefficiente di convezione \overline{h}_c che compare nell'espressione del numero di Nusselt. Ciò significa che il valore numerico di \overline{h}_c dipende dalla scelta della temperatura di riferimento T_∞ del fluido. Concentriamoci allora su questo aspetto.

Nel caso di fluido in movimento in contatto con una superficie piana, la temperatura del fluido in punti distanti dalla superficie è generalmente costante, per cui è ovvio che si scelga tale valore costante come temperatura di riferimento.

Nel caso di un fluido che scorre lungo un condotto, invece, la temperatura del fluido non si livella, ma varia; in particolare, ci sono variazioni sia lungo la direzione del moto del fluido sia, ovviamente, nella direzione del flusso termico (ricordiamo, infatti, che il flusso termico avviene da regioni più calde di fluido verso regioni più fredde). Come effettuiamo la scelta di T_∞ in questo caso? Una prima possibilità potrebbe essere quella di scegliere, in una data sezione trasversale del condotto, la temperatura del fluido sull'asse. Tuttavia, ci sono due problemi: il primo è che tale temperatura è difficile da misurare; il secondo è che tale temperatura non è affatto una misura della variazione di energia interna di tutto il fluido che scorre nel condotto.

Convenzionalmente, allora, si sceglie, come temperatura di riferimento del fluido da usare nell'equazione $q = \overline{h}_c \cdot A \cdot (T_s - T_\infty)$, la cosiddetta **temperatura media di massa** (simbolo: T_m), definita come la *temperatura che il fluido, passato in un certo tempo attraverso la sezione trasversale al moto, assumerebbe se fosse raccolto e mescolato in un recipiente.*

L'uso di questa temperatura consente di fare rapidamente i bilanci termici: infatti, nell'ipotesi di regime permanente, la variazione ΔT_m di temperatura di massa tra due sezioni di un condotto consente di scrivere subito che

$$q = m \cdot c_p \cdot (T_{m,2} - T_{m,1})$$

dove m è la *porta massica* (misurata in kg/h) e c_p il *calore specificato a pressione costante* (misurato in kcal/kg°C).

Dal punto di vista pratico, specialmente per calcoli di prima approssimazione, *si considera, come variazione della temperatura di massa nella direzione del moto, la media aritmetica delle temperature di massa nelle sezioni di ingresso e di uscita del condotto.* Questo procedimento va bene quando la temperatura della parete del condotto è costante, ma richiede qualche modifica quando il calore si trasmette tra due fluidi separati da una parete, come per esempio accade negli **scambiatori di calore**, dove un fluido scorre all'interno mentre un altro fluido passa all'esterno di un tubo.

MOTO LAMINARE E MOTO TURBOLENTO ALL'INTERNO DI CONDOTTI

Per un dato fluido, il numero di Nusselt Nu dipende principalmente dalle condizioni del moto, che, come sappiamo, possono essere caratterizzate tramite il **numero di Reynolds** Re . Per il moto all'interno di condotti molto lunghi, la lunghezza caratteristica che compare nel numero di Reynolds ed in quello di Nusselt è il già citato **diametro equivalente**. Ad esempio, l'espressione del numero di Reynolds (quella del numero di Nusselt è stata già considerata prima) è

$$Re = \frac{VD_{eq}\rho}{\mu}$$

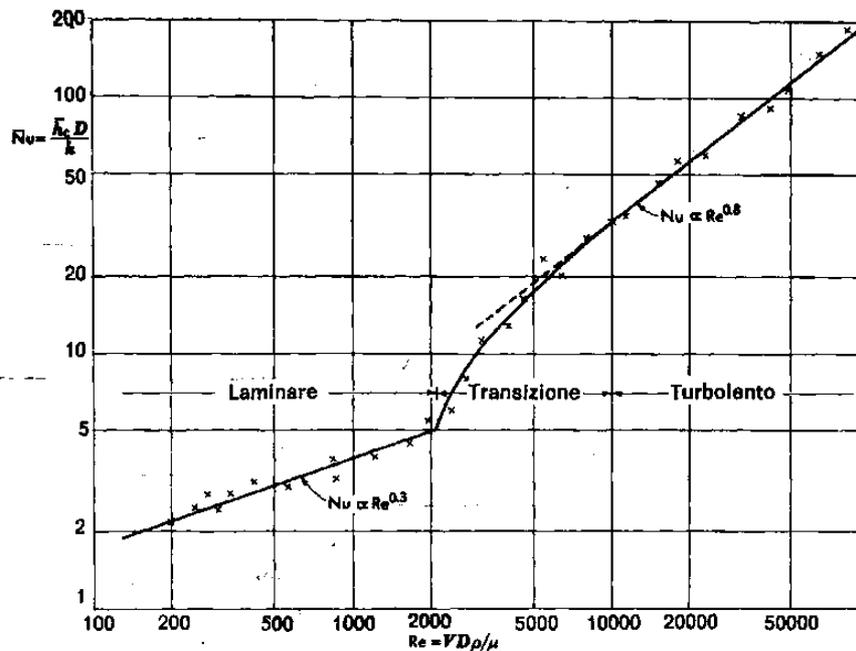
dove V è la *velocità caratteristica* del fluido.

Nei condotti lunghi, in cui gli *effetti di imbocco*¹² non sono importanti, il moto è laminare quando il numero di Reynolds è inferiore a 2100, mentre è turbolento quando il numero di Reynolds è superiore a 10000. Se il valore di Re è compreso tra 2100 a 10000, allora siamo nella regione di transizione.

Consideriamo, in particolare, il moto laminare in un condotto: così come nel caso della piastra piana, in condizioni di moto laminare non c'è mescolamento tra particelle calde e particelle fredde dovuto ai vortici, per cui la trasmissione del calore avviene unicamente per conduzione. Dato, allora, che tutti i fluidi, tranne i metalli liquidi, hanno bassa conducibilità termica, deduciamo che i coefficienti di scambio termico nel moto laminare sono relativamente piccoli.

Passando nella zona di transizione, si comincia ad avere un certo mescolamento dovuto ai vortici, i quali trasportano il fluido più caldo nelle regioni più fredde e viceversa. Dato che il mescolamento incrementa considerevolmente lo scambio termico, deduciamo che per numeri di Reynolds maggiori di 2100 si ha un significativo aumento del coefficiente di scambio termico.

A conferma di quest'ultimo concetto riportiamo gli esiti di una prova sperimentale condotta su aria a pressione atmosferica che fluisce in un tubo riscaldato. In particolare, riportiamo un diagramma del numero di Nusselt in funzione del numero di Reynolds¹³:



¹² Degli *effetti di imbocco* parleremo tra poco

¹³ Ricordiamo che, per l'aria, il numero di Prandtl non varia apprezzabilmente, per cui l'equazione che correla i dati sperimentali è del tipo $Nu=f(Re)$, cioè proprio del tipo raffigurato nel diagramma.

Come si nota dal diagramma, il numero di Nusselt, che è direttamente proporzionale al coefficiente di scambio convettivo \bar{h}_c , rimane molto basso per numeri di Reynolds al di sotto di 2100: in particolare, nella figura stessa è indicata, per questa regione, una proporzionalità tra i due gruppi adimensionali del tipo $Nu \propto Re^{0.3}$.

Quando il numero di Reynolds sale oltre il valore 2100, il numero di Nusselt (e quindi anche \bar{h}_c) subisce un notevole incremento, testimoniando l'aumento dello scambio termico dovuto ad un aumento della turbolenza del moto. La proporzionalità, adesso, è diventata del tipo $Nu \propto Re^{0.8}$.

Cerchiamo allora di spiegare qualitativamente questi risultati. Nella figura seguente sono indicati, schematicamente, i regimi di moto per un fluido che scorre in moto turbolento all'interno di un condotto (si considera la situazione per numero di Reynolds superiore a 8000):

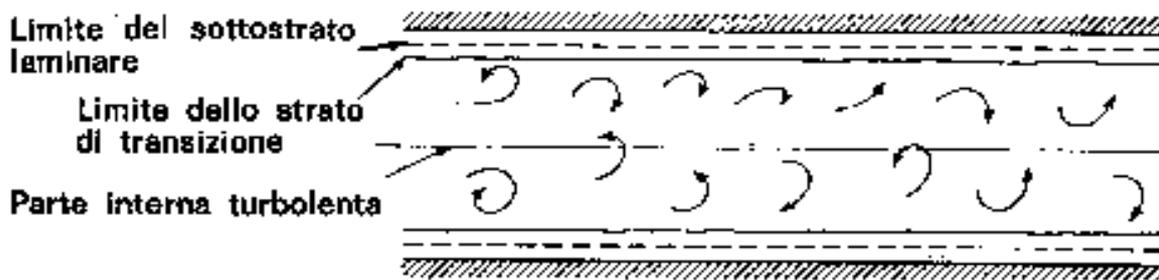


Figura 8 - Regimi di moto per un fluido che scorre in moto turbolento in un tubo

Il moto è dunque turbolento salvo un sottilissimo strato di fluido (delimitato dalla linea tratteggiata) adiacente alla parete: in questo strato, i vortici vengono bloccati sul nascere dalle forze viscosive, che sappiamo essere molto forti in prossimità della parete. In questa zona, quindi, il moto è laminare e lo scambio termico avviene principalmente per conduzione.

Al di fuori di questo **sottostrato laminare**, il moto turbolento è tale per cui i vortici (rappresentati dalle frecce curve) sfiorano lo strato laminare, penetrando talvolta in essa e trascinando via il fluido alla temperatura che vige in quella zona; dopo di che, i vortici mescolando il fluido caldo e quello freddo e questo consente che il calore si trasmetta anche alla massa turbolenta.

Da questa descrizione si deduce che, ad eccezione dei fluidi con alta conducibilità termica (cioè i già citati metalli liquidi), la resistenza termica principale è quella del sottostrato laminare, la quale controlla quindi la potenza termica trasmessa; la maggior parte della caduta di temperatura tra superficie del tubo e massa di fluido avviene in questo strato.

Se allora volessimo aumentare il coefficiente di scambio termico (e cioè, a parità di differenza di temperatura, la potenza termica scambiata), non avremmo altra scelta che diminuire la resistenza dello strato limite laminare. Per fare questo, potremmo ad esempio aumentare la turbolenza nella parte principale della corrente, in modo da ottenere vortici che più profondamente penetrino nel sottostrato laminare. D'altra parte, un aumento della turbolenza ha anche una controindicazione: ci sarebbero maggiori *perdite di carico*¹⁴ a causa dell'attrito tra fluido e condotto. Come al solito, è necessario un compromesso.

In precedenza, abbiamo osservato che, nel caso di moto turbolento di fluidi su una piastra piana, il numero di Nusselt è proporzionale al numero di Reynolds elevato a 0.8. Lo stesso risultato è stato osservato prima nel diagramma sperimentale relativo al moto in un condotto. Non dobbiamo stupirci

¹⁴ Si ricordi, a proposito delle *perdite di carico*, quanto detto in termodinamica a proposito proprio del moto nei condotti (capitolo sui sistemi aperti)

di questo fatto, dal momento che nella convezione forzata turbolenta è il sottostrato laminare che controlla la potenza termica scambiata, indipendente dalla geometria del sistema.

Influenza del numero di Prandtl

Il numero di Prandtl (Pr) è funzione, come sappiamo, soltanto delle proprietà del fluido: in precedenza, lo abbiamo infatti definito come rapporto tra la *viscosità cinematica* e la *diffusività termica* del fluido, cioè

$$\text{Pr} = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{k}{c_p \rho}} = \frac{c_p \mu}{k}$$

La **viscosità cinematica** $v = \frac{\mu}{\rho}$ è una misura della quantità di moto scambiata tra le molecole nell'unità di tempo.

La **diffusività termica** del fluido $a = \frac{k}{c_p \rho}$ è invece una misura del rapporto tra la capacità che hanno le molecole di scambiare calore e la capacità che le stesse hanno di immagazzinare energia.

Il numero di Prandtl è molto importante in quanto consente di legare la distribuzione di temperatura con quella di velocità. A prescindere che si tratti di moto su una piastra o all'interno di un tubo, valgono le seguenti considerazioni generali:

- quando il numero di Prandtl è unitario, i profili di velocità e di temperatura sono simili;
- quando il numero di Prandtl è inferiore ad 1, il gradiente di temperatura in prossimità della superficie è minore di quello di velocità;
- quando il numero di Prandtl è superiore ad 1, il gradiente di temperatura in prossimità della superficie è maggiore di quello di velocità.

I metalli liquidi hanno in genere un'alta conducibilità termica k e un piccolo calore specifico c_p , per cui i loro numeri di Prandtl sono piccoli (0.005÷0.1); i numeri di Prandtl dei gas sono decisamente più elevati, ma sempre inferiore ad 1 (0.6÷0.9), mentre la maggior parte degli oli hanno numeri di Prandtl elevati, dato che la loro viscosità μ è grande, mentre la conducibilità termica è bassa.

EFFETTI DI IMBOCCO

La trasmissione del calore, per convezione forzata, all'interno di condotti è influenzata da altri parametri oltre i numeri di Reynolds e di Prandtl. Ad esempio, quando il condotto è corto (vale a dire quando $L/D_{eq} < 50$), diventano importanti i cosiddetti **effetti di imbocco**.

Se un fluido entra in un condotto con velocità uniforme, il fluido immediatamente vicino alla parete del tubo tende a fermarsi (così come accadeva alla sezione d'attacco nel caso della lastra piana); per un breve tratto iniziale, lungo la parete si forma uno strato limite laminare e, se la turbolenza della corrente entrante è alta, lo strato limite diventa rapidamente turbolento.

A prescindere dal fatto che lo strato limite rimanga laminare o diventi turbolento, comunque il suo spessore aumenta fino a riempire l'intero condotto: da questo punto in poi, il profilo di velocità rimane sostanzialmente invariato.

Lo sviluppo dello strato limite termico in un fluido che viene riscaldato o raffreddato in un condotto è qualitativamente simile a quello appena descritto per lo strato limite idrodinamico: all'imbocco, la temperatura è generalmente uniforme nella direzione trasversale, mentre, lungo la direzione del moto, lo strato riscaldato o raffreddato aumenta di spessore finché il calore non si trasmette al fluido, o dal fluido, sull'asse del condotto. Oltre questo punto, il profilo di temperatura rimane sostanzialmente invariato se il profilo di velocità è completamente sviluppato.

La forma finale dei profili di velocità e di temperatura dipende comunque dal tipo di moto, laminare o turbolento. Nella figura seguente è illustrata qualitativamente, nel caso di moto laminare, la crescita degli strati limite (idrodinamico e termico), nonché l'andamento del coefficiente locale di convezione in prossimità dell'imbocco:

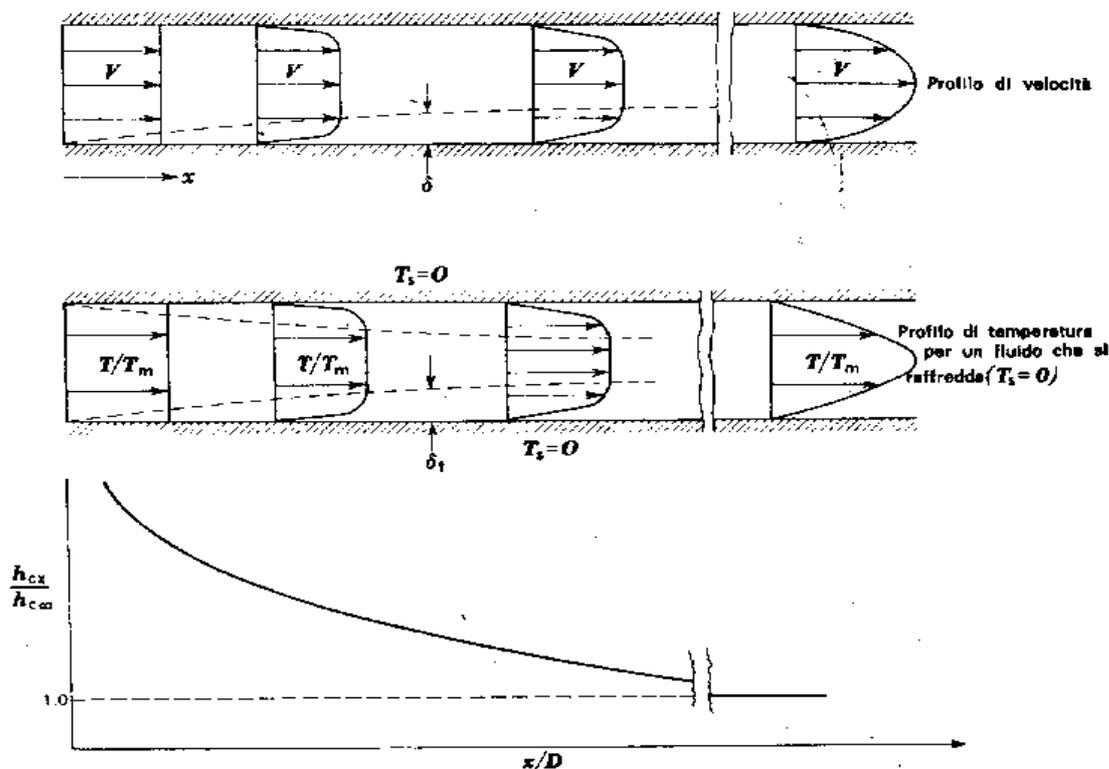


Figura 9 - Distribuzioni di velocità, profili di temperatura e variazione della conduttanza convettiva unitaria in prossimità dell'imbocco di un tubo, per aria raffreddata in moto laminare

Si nota che, in prossimità dell'imbocco, la velocità del fluido è inizialmente uniforme su tutto il condotto, mentre, allontanandoci dall'imbocco, diventa sempre minore in corrispondenza della superficie del condotto, dove le forze viscosi smorzano il moto del fluido¹⁵. Nella parte destra della figura è indicato il profilo in condizioni di regime.

Analogo andamento si ha per la temperatura (si noti che è stato considerato il caso di un condotto con temperatura superficiale $T_s=0$): in corrispondenza della parete, la temperatura del fluido è pari a quella della parete stessa, mentre va via via aumentando man mano che ci si allontana dalla parete, fino a diventare massima in corrispondenza dell'asse del condotto.

¹⁵ Se non ci fosse l'attrito tra il fluido e la parete del condotto, il profilo di velocità rimarrebbe uniforme.

Nella figura seguente sono riportati la crescita dello strato limite, il profilo di velocità nonché l'andamento del coefficiente locale di convezione, ma nel caso di moto turbolento:

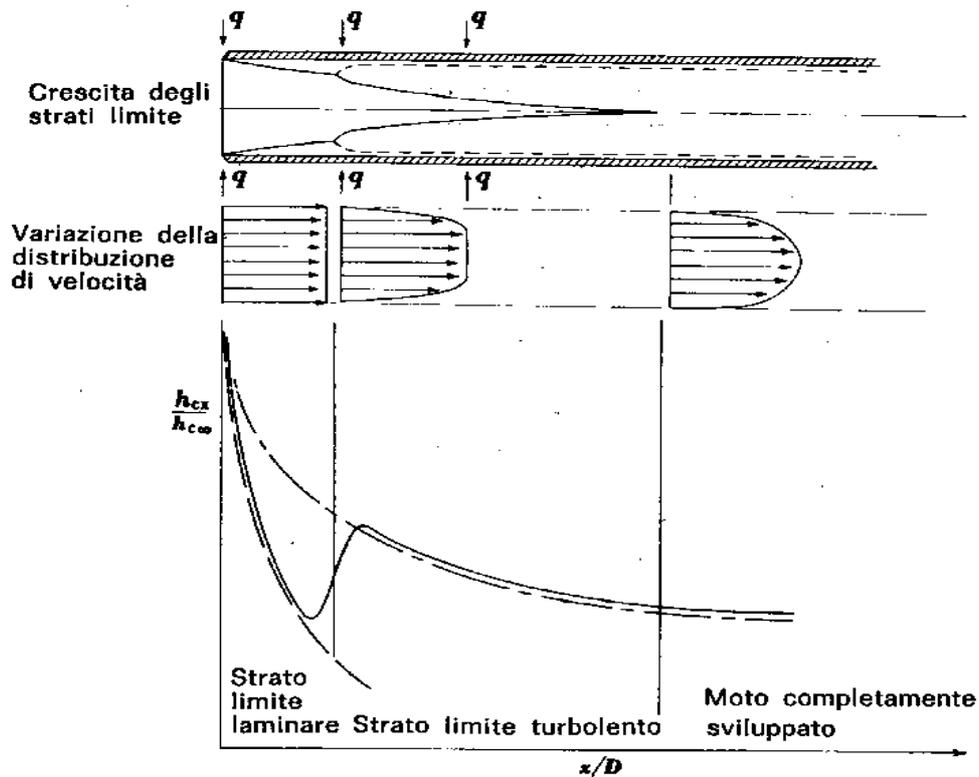


Figura 10 - Distribuzioni di velocità e variazione della conduttanza convettiva unitaria in prossimità dell'imbocco di un tubo, per fluido in moto turbolento

Si nota che il profilo di velocità è grossomodo lo stesso di prima, mentre cambia l'andamento del coefficiente locale di convezione: quest'ultimo, in accordo alle considerazioni fatte in precedenza, subisce una notevole diminuzione all'imbocco, in corrispondenza del sottostrato laminare, dopo di che subisce un rapido aumento per poi riprendere a diminuire per distanze x crescenti dalla sezione di imbocco. Ad ogni modo, confrontando con il diagramma relativo al moto laminare, si notano dei valori di $h_c(x)$ decisamente maggiori.

Convezione naturale

INTRODUZIONE

La trasmissione del calore per convezione naturale ha luogo ogni volta che un corpo viene posto in un fluido che si trovi ad una temperatura maggiore o minore di quella del corpo stesso. A causa della differenza di temperatura, si ha un flusso di calore tra il corpo ed il fluido; tale flusso di calore provoca variazioni della densità degli strati fluidi prossimi alla superficie del corpo. Le differenze di densità determinano il moto del fluido più pesante verso il basso e di quello più leggero verso l'alto.

Se il movimento del fluido è dovuto SOLO alle differenze di densità causate dai gradienti di temperatura, senza l'intervento di pompe o ventilatori, il meccanismo di trasmissione del calore viene detto **convezione naturale** o *convezione libera*¹⁶. Nella convezione libera ed in quella forzata, i moti convettivi trasferiscono l'energia interna del fluido in modo sostanzialmente analogo; la differenza principale è invece nel fatto per cui nella convezione libera l'intensità dei **moti di mescolamento** è generalmente minore, il che comporta che i coefficienti di scambio siano inferiore rispetto alla convezione forzata.

La **trasmissione di calore per convezione libera** è usata nel raffreddamento di molte apparecchiature:

- in campo elettrotecnico, le linee di trasmissione, i trasformatori, i raddrizzatori e così via sono raffreddati per convezione libera: a causa della generazione interna di calore, la temperatura di questi sistemi supera quella dell'ambiente circostante; al crescere di questa differenza di temperatura, cresce la potenza termica scambiata e si raggiunge quindi una condizione di equilibrio, in cui la potenza generata uguaglia quella dissipata;
- la convezione libera è il meccanismo di scambio termico predominante anche nel caso dei radiatori, delle pareti degli edifici ed anche del corpo umano quando è fermo in atmosfera calma;
- sono dovute alla convezione libera anche le dispersioni termiche di condotte che trasportano vapor d'acqua o altri fluidi caldi.

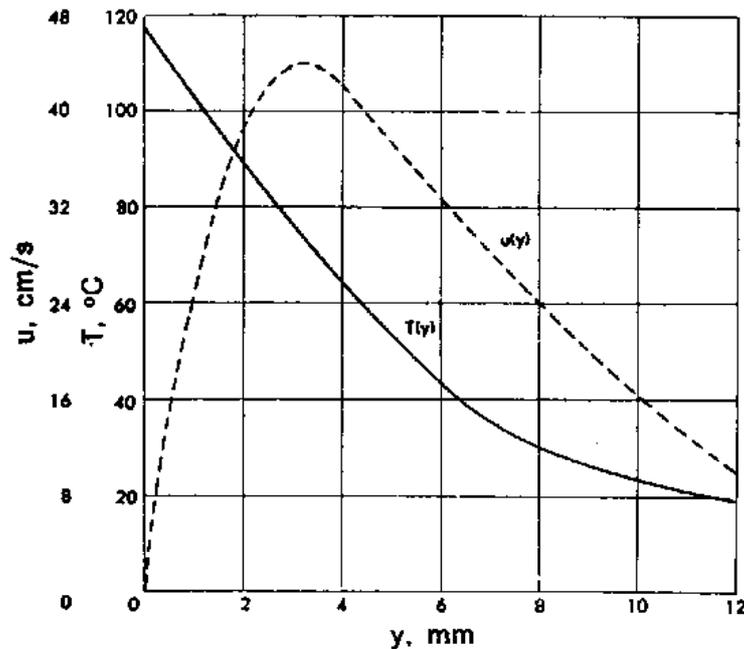
In tutti gli esempi appena citati, la forza che dà luogo ai moti convettivi è la forza di gravità. E' bene però osservare che questa non è l'unica forza che possa dar luogo alla convezione libera: infatti, spesso ci sono degli elementi che ruotano ad alte velocità e a tali velocità sono associate grandi forze centrifughe, la cui intensità, come per la forza di gravità, è proporzionale anche alla densità del fluido, per cui può a sua volta dar luogo a forti moti convettivi.

¹⁶ E' bene osservare che la presenza dei gradienti termici è fondamentale anche nel caso della convezione forzata (in loro assenza, infatti, il fenomeno assumerebbe natura puramente idrodinamica), con la differenza che, in quel caso, il moto del fluido è imposto dall'esterno.

Distribuzione di temperatura e di velocità

Consideriamo dunque i **moti convettivi naturali**: la velocità del fluido, specialmente se generata solo dalla forza di gravità, è generalmente bassa. Nonostante questo, però, in generale le caratteristiche fluidodinamiche in prossimità della superficie sono simili a quelle della convezione forzata: vicino alla superficie si forma uno **strato limite**, ossia una zona in cui sono presenti forti gradienti di velocità, e la velocità del fluido in corrispondenza dell'interfaccia è nulla.

Consideriamo, in particolare, una piastra verticale calda posta in aria. Si può verificare che la distribuzione della velocità e della temperatura in prossimità della piastra è quella indicata nella figura seguente:



Cominciamo dal profilo della velocità, che è quello tratteggiato: in corrispondenza della piastra ($y=0$), la velocità è nulla, come detto prima e come avviene anche nella convezione forzata. Allontanandoci dalla piastra, la velocità aumenta, fino a raggiungere un valore massimo ad una distanza di circa 3 mm. Dopo tale valore massimo, la velocità prende a diminuire, tendendo nuovamente a zero.

E' evidente che si tratta di un profilo diverso da quello osservato per la convezione forzata, dove invece abbiamo osservato che la velocità tende asintoticamente al valore u_∞ della velocità della corrente indisturbato. Nonostante questo, però, in prossimità della superficie i due strati limite sono simili.

Inoltre, così come nella convezione forzata, *il moto può essere laminare o turbolento a seconda della distanza dal bordo d'attacco, delle proprietà del fluido, delle forze di massa e della differenza di temperatura tra la superficie ed il fluido*.

Passiamo adesso alla temperatura: nella convezione libera, il campo di temperatura, così come indicato dal grafico di prima, è analogo a quello osservato nella convezione forzata, per cui è ancora valida l'interpretazione fisica basata sul *numero di Nusselt*. Nelle applicazioni pratiche, l'equazione utilizzata è l'**equazione di Newton**:

$$dq = h_c \cdot dA \cdot (T_s - T_\infty)$$

Questa equazione è stata scritta in forma differenziale in quanto *nella convezione libera il coefficiente di trasmissione del calore h_c non è uniforme sulla superficie*. Questo comporta, così come nel caso della convezione forzata su piastra piana, che

si debba distinguere un valore locale di $h_c(y)$ ed un valore medio, ottenuto mediando $h_c(y)$ su tutta la superficie. Ancora una volta, invece, la temperatura T_∞ è quella in un punto del fluido tanto lontano dalla piastra che la sua temperatura non ne sia influenzata.

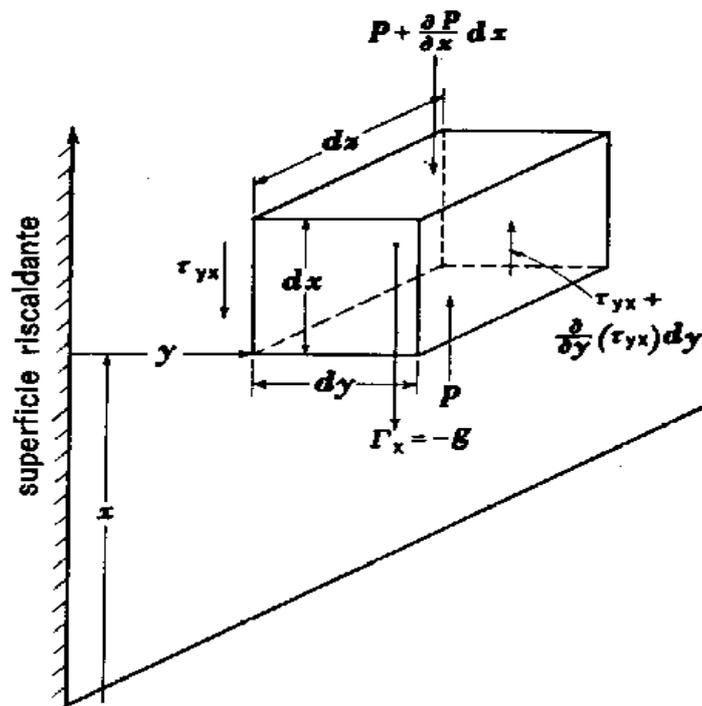
Concludiamo il paragrafo osservando che *una precisa determinazione del coefficiente di scambio termico è molto difficile per la convezione libera*. Il problema è stato risolto solo per geometrie semplici, come appunto una piastra piana verticale ed un cilindro orizzontale.

EQUAZIONI PRINCIPALI PER LA CONVEZIONE LIBERA

Nello studio della convezione libera interviene sempre il noto **principio di Archimede**: un corpo immerso in un fluido è sottoposto ad una forza, rivolta verso l'alto, pari al peso del fluido spostato. Questo significa che un corpo sommerso galleggia se la sua densità è minore di quella del fluido circostante, mentre affonda se la sua densità è maggiore: infatti, il volume di fluido spostato è uguale al volume del corpo, per cui, se la densità (massa per unità di volume) del corpo è maggiore, il peso del corpo è maggiore del peso del fluido spostato, ossia è maggiore della forza che spinge il corpo verso l'alto.

La spinta verso l'alto è la forza che agisce nella convezione libera.

Consideriamo il caso semplice di un pannello di un impianto di riscaldamento: tale pannello può essere assimilato ad una lastra piana verticale, molto lunga e molto larga, disposta nel piano ortogonale al pavimento (cosicché il moto sia bidimensionale)



Quando l'impianto di riscaldamento non funziona, il pannello si trova alla stessa temperatura dell'aria circostante: in questa situazione, la forza di gravità che agisce su ogni elemento di aria è in equilibrio con il gradiente di pressione idrostatica e l'aria non si muove.

Quando, invece, l'impianto viene acceso, il pannello si trova ad una temperatura più calda dell'aria circostante: l'aria prossima al pannello si riscalda e la sua densità diminuisce; di conseguenza, la forza di gravità per l'aria riscaldata è minore rispetto a quella non riscaldata, per cui,

come è ben noto dall'esperienza, questo squilibrio fa sì che il fluido riscaldato vada verso l'altro. Inoltre, quando l'aria è in movimento, la forza ascensionale è accompagnata da forze di pressione e forze di attrito.

In condizioni di regime permanente, la forza che agisce complessivamente su un generico elemento di volume di fluido, in direzione ortogonale al pavimento (cioè in direzione x con riferimento all'ultima figura), è la somma dei seguenti contributi:

- forza dovuta al gradiente di pressione;
- forza di gravità;
- forze tangenziali di attrito dovute al gradiente di velocità.

Valutando analiticamente queste forze e facendo qualche ipotesi semplificativa (come ad esempio quella di ritenere la densità indipendente dalla pressione e dipendente solo dalla temperatura), si giunge ad una **equazione del moto per la convezione libera**:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \beta (T - T_{\infty}) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

In questa equazione, g è l'accelerazione di gravità, μ la viscosità dell'aria e β il cosiddetto **coefficiente di dilatazione termica**, definito nel modo seguente:

$$\beta = \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho(T - T_{\infty})}$$

dove ρ_{∞} è la densità del fluido non riscaldato, lontano dalla lastra (lo stesso fluido cui si riferisce la temperatura T_{∞}).

Si nota allora che l'equazione per la convezione libera è identica all'equazione dello strato limite per la convezione forzata su una lastra piana, fatta eccezione per il termine $\rho g \beta (T - T_{\infty})$ a secondo membro, che tiene conto della forza di gravità, che invece non ha influenza nella convezione forzata.

Ulteriori passaggi analitici conducono alla definizione, come nel caso della convezione forzata, ad un particolare gruppo adimensionale, detto **numero di Grashof** e così definito:

$$\text{Gr} = \rho^2 g \beta \frac{T - T_{\infty}}{\mu^2} L^3$$

In pratica, il *numero di Grashof* rappresenta il rapporto tra le forze ascensionali e quelle viscosi. Ciò significa che questo gruppo adimensionale sostituisce, in pratica, il *numero di Reynolds* usato nella convezione forzata: infatti, si trova che i risultati sperimentali per la trasmissione del calore in convezione libera possono essere correlati mediante una equazione del tipo

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{h}cD}{k} = f(\text{Gr}, \text{Pr})$$

Anzi, si verifica anche qualcos'altro, in quanto si trova che il numero di Nusselt può essere espresso come prodotto di due funzioni, dipendenti una solo da Gr ed una solo da Pr :

$$\overline{\text{Nu}} = \varphi(\text{Gr}) \cdot \phi(\text{Pr})$$

Il prodotto tra numero di Grashof e numero di Prandtl è, ovviamente, a sua volta un gruppo adimensionale che prende il nome di **numero di Rayleigh**:

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

Questo gruppo adimensionale è importante in quanto si verifica sperimentalmente che, quando le forze di inerzia sono trascurabili, il numero di Nusselt diventa funzione proprio di Ra:

$$\overline{Nu} = f(Gr \cdot Pr) = f(Ra)$$

Servendosi allora di una equazione di questo tipo, sono stati correlati, su appositi grafici e tabelle, i dati sperimentali di vari autori relativi a convezione libera da tubi e fili orizzontali. Di particolare importanza è il grafico che riporta il valor medio del numero di Nusselt in funzione del numero di Rayleigh.

Osserviamo infine che queste tabelle non esauriscono tutti i possibili casi di convezione libera: ciò significa che, laddove ci si trovi in una situazione diversa da quelle riportate, non c'è altra scelta che sperimentare sul campo per calcolare i valori dei parametri di interesse.

SUPERFICI ALETTATE

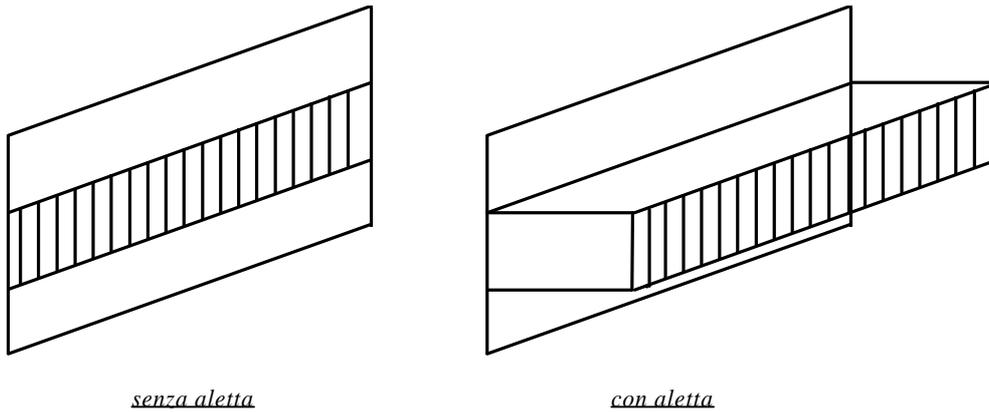
Consideriamo una superficie immersa all'interno di un fluido che si trovi a temperatura diversa. Abbiamo ormai capito che tra la superficie ed il fluido si instaura di un flusso termico per convezione, regolato dall'equazione

$$q_{\text{superficie} \rightarrow \text{fluido}} = \overline{h}_c A (T_s - T_\infty)$$

Se sono fisse le condizioni di moto del fluido (per cui è fisso \overline{h}_c) e quelle di temperatura, è evidente che la potenza scambiata aumenta all'aumentare dell'area A della **superficie di scambio**. Se, allora, volessimo aumentare la potenza scambiata, non avremmo altra scelta se non quella di aumentare A . Per ottenere questo, possiamo pensare di dotare la superficie di una o più **alette**, aventi appunto lo scopo di aumentare A .

Facciamo alcune ipotesi semplificative:

- in primo luogo, consideriamo il caso semplice di aggiunta di una sola aletta;
- in secondo luogo, imponiamo che il coefficiente \overline{h}_c rimanga costante tra la situazione in assenza dell'aletta e quella in presenza dell'aletta; si tratta di una semplificazione, in quanto sappiamo che \overline{h}_c dipende dal numero di Nusselt Nu e quest'ultimo dipende dalla geometria del sistema;
- in terzo luogo, facciamo in modo che la temperatura dell'aletta (che indichiamo con T_B) sia costante su tutta l'aletta (il che impedisce fenomeni di conduzione all'interno dell'aletta stessa) e pari alla temperatura T_s della superficie originaria.



Sotto queste ipotesi, la potenza termica scambiata vale

$$q_A = \bar{h}_c A_{\text{aletta}} (T_B - T_\infty) = \bar{h}_c A_{\text{aletta}} (T_S - T_\infty)$$

Rispetto a prima, come anticipato, la potenza termica è cambiata in quanto risulta $A_{\text{aletta}} > A$.

Facciamo però osservare che la quantità q_A appena riportata va intesa come un caso limite ideale che nella realtà non si verifica mai: questo proprio a causa delle variazioni di temperatura che, inevitabilmente, si stabiliscono sull'aletta. Infatti, sulla porzione della superficie sulla quale è attaccata l'aletta non si fa altro che aggiungere una resistenza di tipo conduttivo, in quanto il calore deve fluire prima, appunto per conduzione, dalla superficie all'aletta e poi da quest'ultima al fluido¹⁷.

Allora, per caratterizzare il comportamento reale dell'aletta, si usa un parametro detto **efficienza dell'aletta**: esso è definito come rapporto tra la potenza termica scambiata realmente dall'aletta e la potenza termica scambiata nel caso ideale:

$$\varepsilon_A = \frac{q_{A,\text{reale}}}{q_{A,\text{ideale}}}$$

Nota l'efficienza dell'aletta, che ovviamente varierà tra 0 ed 1, basta calcolare la potenza termica scambiata idealmente per risalire a quella scambiata realmente.

Si tratta ora di capire come calcolare ε_A . L'unica possibilità è la sperimentazione: sulla base della sperimentazione sono state realizzate delle tabelle sulle quali sono riportati i valori di ε_A per una vasta tipologia di alette.

Leggermente più complesso è il caso di una superficie con più di una aletta: in questo caso, un progetto accurato necessita che si porti in conto l'influenza che ciascuna aletta ha su quelle adiacenti. A tal fine, si definisce un ulteriore parametro, detto **efficienza dell'alettatura** (simbolo: ε_{TOT}) e definito come rapporto tra la potenza scambiata dall'intera superficie alettata e la potenza scambiata dalla stessa area di base su cui sono inserite le alette, ma in assenza delle alette stesse. Numericamente, l'efficienza dell'alettatura è dunque data da

¹⁷ Per questi motivi, l'aggiunta di alette non sempre aumenta la potenza termica scambiata: si è verificato, ad esempio le alette effettivamente comportano un aumento dello scambio termico verso o da i gas, mentre sono meno efficienti quando il mezzo è un liquido in convezione forzata. Non offrono invece alcun vantaggio per liquidi in ebollizione o per vapori che condensano. Ad ogni modo, è sempre desiderabile che le alette siano fatte di materiale ad elevata conducibilità termica, proprio per ridurre al minimo la resistenza conduttiva.

$$\varepsilon_{\text{TOT}} = \frac{\bar{h}_C \cdot \left(A_{\text{singola aletta}} \cdot \varepsilon_A + A_{\text{base totale}} \right) \cdot (T_B - T_\infty)}{\bar{h}_C \cdot A_{\text{base totale}} \cdot (T_B - T_\infty)} = \frac{\left(A_{\text{singola aletta}} \cdot \varepsilon_A + A_{\text{base totale}} \right)}{A_{\text{base totale}}}$$

In base a questa espressione, basta conoscere ε_A (si suppongono evidentemente uguali tutte le alette) per calcolare ε_{TOT} .

Ovviamente, quanto maggiore è l'efficienza dell'alettatura tanto più la potenza scambiata realmente si avvicina a quella massima teorica.

DISSIPATORI TERMICI

I **dissipatori termici** sono dispositivi usati per raffreddare transistor e circuiti integrati, quando questi ultimi non sono in grado, da soli, di dissipare tutta la potenza trasferita su di essi. Questi dispositivi sono usati sia in convezione forzata sia in convezione libera: in quest'ultimo caso, è importante il loro orientamento, che può essere verticale oppure orizzontale.

I costruttori forniscono direttamente le caratteristiche termiche dei dissipatori termici da loro prodotti. Il parametro più importante, a questo proposito, è la **resistenza termica**, definita come l'inverso del rapporto tra la potenza termica che il dissipatore deve scambiare e la differenza di temperatura alla quale deve avvenire lo scambio:

$$R = \frac{\Delta T}{q_{\text{diss}}}$$

In pratica, supponiamo di avere un BJT da 60 W e di non voler superare i 90°C in condizioni di aria a 30°C. Per ottenere questo risultato, dobbiamo utilizzare un dissipatore la cui resistenza termica sia

$$R = \frac{\Delta T}{q_{\text{diss}}} = \frac{90^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}}{60\text{W}} = 1 \left(\frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \right)$$

Dobbiamo dunque consultare i vari cataloghi disponibili e trovare un dissipatore termico, ovviamente di opportune dimensioni, che presenti questo valore di resistenza termica.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>