

Appunti di Misure Elettriche

Capitolo 2 - Parte II

Effetti di carico

Introduzione	1
Voltmetro e amperometro	2
Studio degli effetti di carico per una misura di tensione	2
<i>Caso particolare: misura di tensione con impedenza interna del circuito resistiva</i>	5
<i>Metodo della compensazione in frequenza: sonda compensata</i>	7
Osservazione	9
Regolazione della sonda	10
<i>Riepilogo sulla misura di tensione</i>	11
<i>Osservazioni varie sulla compensazione in frequenza</i>	11
Misura di tempo di salita	14
Misura di corrente	15
Importanza della risposta in frequenza dello strumento di misura	17
Classificazione degli strumenti e delle sorgenti di tensione	20

INTRODUZIONE

Consideriamo in questo capitolo gli strumenti fondamentali per le misure elettriche, dei quali ci interessano in particolare alcune caratteristiche elettriche. Vogliamo infatti studiare la prima sorgente di errore nelle misure sui circuiti elettrici: l'**effetto di carico** (a volte chiamato "**consumo**" dello strumento). Il semplice concetto di base è il seguente: in moltissimi casi (non sempre però) la grandezza elettrica da misurare è apprezzabilmente diversa a strumento collegato rispetto a quando lo strumento è scollegato.

Considereremo due classi fondamentali di strumenti:

- strumenti per **misure a regime**, sia di tensione sia di corrente (**multimetro**)
- strumenti per l'esame di **forme d'onda generiche**, solo di tensione (**oscilloscopio**).

In effetti, non distinguiamo semplicemente tra misure a regime e su forme d'onda generiche, ma consideriamo quattro casi fondamentali:

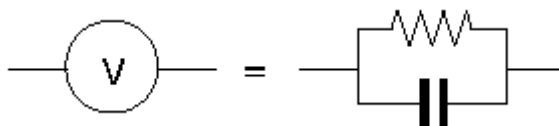
- 1) misure in **corrente continua**;
- 2) misure in **regime sinusoidale**;
- 3) misure in **regime periodico non sinusoidale**;
- 4) misure in **transitorio** (*single shot*);

Ai fini dei problemi di effetto di carico, i casi 3) e 4) sono equivalenti tra loro.

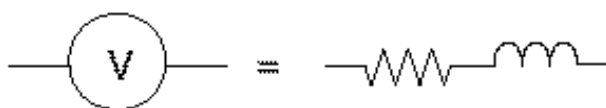
VOLTMETRO E AMPEROMETRO

Cominciamo a caratterizzare il **voltmetro**, ossia lo strumento che usiamo per la misura della tensione. Distinguiamo due distinti dispositivi:

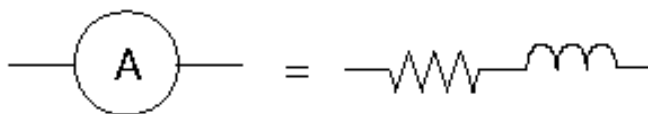
- un **voltmetro elettronico** ha un modello elettrico rappresentato da una resistenza (di valore elevato) in parallelo ad una capacità (di valore piccolo):



- un **voltmetro analogico passivo**¹ ha invece un modello elettrico rappresentato da una resistenza (sempre di valore elevato) in serie ad una induttanza (di valore medio):

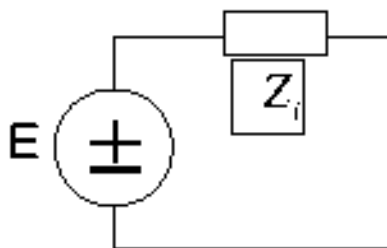


Per quanto riguarda, invece, un **amperometro**, da usare per la misura di correnti, il modello elettrico è lo stesso sia che si tratti di uno strumento elettronico sia che si tratti di uno strumento passivo: si ha sempre una resistenza (di valore piccolo) in serie ad una induttanza (il cui valore è minore negli strumenti elettronici):



STUDIO DEGLI EFFETTI DI CARICO PER UNA MISURA DI TENSIONE

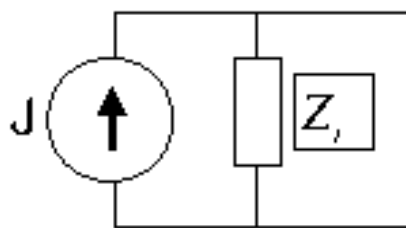
Supponiamo adesso di dover compiere una **misura di tensione** su un circuito. Il modello elettrico del **circuito sotto misura** è il seguente:



In questo schema, **E** è la tensione da misurare, mentre **Z_i** rappresenta l'impedenza interna del circuito.

¹ Per la verità, è un dispositivo ormai abbastanza superato

In modo del tutto analogo, per una misura di corrente, avremo il seguente modello elettrico del circuito sotto misura:

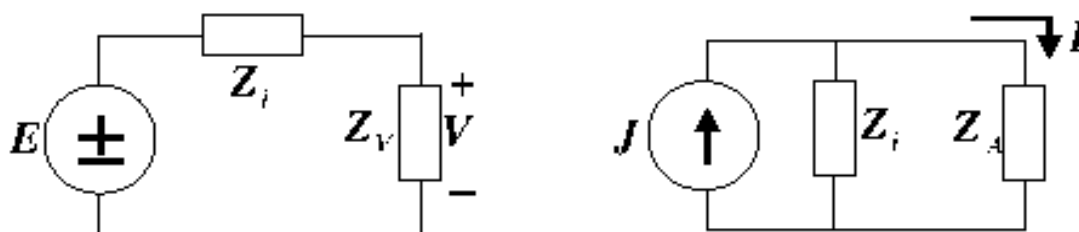


Anche in questo caso, J è la corrente da misurare, mentre Z_i è l'impedenza interna del circuito (in realtà, in questo caso ci conviene far riferimento all'ammettenza interna del circuito, ossia $Y_i = 1/Z_i$).

Il valore di Z_i dipende dal regime in cui ci troviamo:

- se stiamo effettuando una misura in corrente continua, Z_i è solo una **resistenza** (quindi un numero reale);
- se stiamo effettuando una misura in regime sinusoidale, allora Z_i è una classica **impedenza** (quindi un numero complesso, dotato di modulo e fase);
- se invece siamo in regime periodico (non sinusoidale) oppure in transitorio, allora Z_i è una funzione complessa della frequenza (si parla di **impedenza operativa**).

Per compiere la misura, dobbiamo inserire lo strumento, tramite appositi morsetti, all'interno del circuito sotto misura, per cui andiamo a modificare il circuito stesso, introducendo gli **effetti di carico** di cui si è parlato all'inizio. Gli schemi fondamentali, per valutare gli effetti di carico in una misura di tensione ed in una di corrente, sono i seguenti:



Per la misura di tensione, abbiamo inserito una impedenza Z_v , ai capi della quale si va a localizzare una tensione V evidentemente diversa dalla tensione E da misurare.

Analogamente, per la misura di corrente abbiamo inserito una impedenza Z_A , nella quale prende a scorrere una corrente I evidentemente diversa dalla corrente J da misurare.

Quindi, *dopo il collegamento elettrico dello strumento, la grandezza elettrica (corrente o tensione) da misurare cambia.*

Tra l'altro, dobbiamo notare che V ed I sono solo la tensione e la corrente che si presentano all'ingresso dello strumento; non essendo quest'ultimo uno *strumento ideale* (a causa sia di **errori statici** sia di **errori dinamici**), le misure che esso potrà fornire daranno sicuramente un valore a sua volta diverso da V e da I . In altre parole, *l'effetto di carico è solo la prima fonte di errore e va semplicemente ad aggiungersi a tutte le altre.*

Si capisce immediatamente che *l'effetto di carico determina un errore di tipo sistematico*, che cioè si presenta, per misure ripetute di una stessa quantità (nelle stesse condizioni operative), sempre con lo stesso segno e la stessa ampiezza.

I circuiti prima disegnati ci consentono di valutare facilmente il suddetto errore sistematico, inteso semplicemente come la differenza tra misura (V oppure I) e valore vero (E oppure J):

- effetto di carico per la misura di tensione:

$$\text{errore assoluto} \rightarrow e_V = V - E = \frac{Z_V}{Z_V + Z_i} E - E = -\frac{Z_i}{Z_V + Z_i} E$$

$$\text{errore relativo} \rightarrow e_{rV} = \frac{e_V}{E} = -\frac{Z_i}{Z_V + Z_i}$$

- effetto di carico per la misura di corrente:

$$\text{errore assoluto} \rightarrow e_A = I - J = \frac{Y_A}{Y_A + Y_i} J - J = -\frac{Y_i}{Y_A + Y_i} J$$

$$\text{errore relativo} \rightarrow e_{rA} = \frac{e_A}{J} = -\frac{Y_i}{Y_A + Y_i}$$

Ciò che salta immediatamente agli occhi è che l'errore sistematico è negativo in entrambi i casi, il che significa che la misura è in entrambi i casi più piccola del valore vero.

Nel caso della misura di tensione, si nota che l'impedenza Z_V dello strumento deve essere grande rispetto a quella del circuito: infatti, per semplice ispezione del circuito disegnato prima, si nota che, per $Z_V \gg Z_i$, la gran parte della tensione E si ripartisce sull'impedenza dello strumento e quindi la misura V risulta molto prossima al valore vero. In termini analitici, se $Z_V \gg Z_i$, scriviamo che $Z_V + Z_i \cong Z_V$, da cui scaturisce che

$$V = \frac{Z_V}{Z_V + Z_i} E \cong \frac{Z_V}{Z_V} E = E.$$

Questo spiega per quale motivo il voltmetro è costituito sostanzialmente da una impedenza di valore elevato.

Analogamente, per la misura di corrente, l'ammettenza Y_A dello strumento deve essere grande rispetto a quella $Y_i (=1/Z_i)$ del circuito: infatti, per $Y_A \gg Y_i$, la gran parte della tensione J da misurare si ripartisce proprio sull'ammettenza dello strumento. In termini analitici, se $Y_A \gg Y_i$, scriviamo che $Y_A + Y_i \cong Y_A$, da cui scaturisce che

$$I = \frac{Y_A}{Y_A + Y_i} J \cong \frac{Y_A}{Y_A} J = J.$$

Questo spiega per quale motivo l'amperometro è costituito sostanzialmente da una impedenza di valore piccolo.

Ci sono d'altra parte alcune considerazioni da fare:

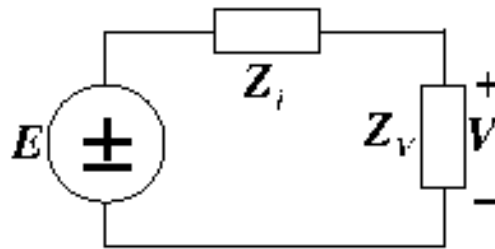
- se stiamo effettuando misure in corrente continua, le impedenze sono in realtà delle resistenze, per cui nelle formule entrano solo numeri reali e quindi l'effetto di carico consiste in una effettiva riduzione della tensione o della corrente rispetto alla realtà;
- se siamo invece in regime sinusoidale, le impedenze sono dei numeri complessi, per cui possiamo aspettarci sia una riduzione sia uno sfasamento della quantità misurata rispetto a quella vera; in realtà, ci sono anche casi particolari in cui l'ampiezza del segnale misurato aumenta rispetto al segnale vero: questo accade quanto intervengono delle reattanze di segno opposto (fenomeni di risonanza);

- per misure in tutte le altre possibili condizioni, l'effetto di carico si traduce, in generale, in una deformazione del segnale; in particolare, si parla di **distorsione lineare**.

Questi discorsi mostrano comunque che un obiettivo importante da perseguire sempre è quello di rendere gli effetti di carico trascurabili o quanto meno correggibili².

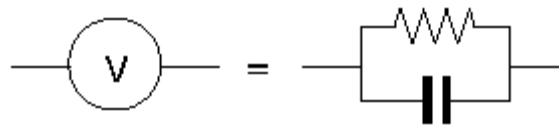
Caso particolare: misura di tensione con impedenza interna del circuito resistiva

Consideriamo ancora una misura di tensione, per cui facciamo riferimento allo schema di misura seguente:



Mettiamoci nel caso particolare in cui l'impedenza interna Z_i del circuito è resistiva, per cui la indichiamo con R_i .

Per quanto riguarda, invece, il voltmetro, adottiamo il modello del **voltmetro elettronico**, che prevede una resistenza R_V (grande) in parallelo ad una capacità C_V (piccola):



Vogliamo ricavare la tensione V ai capi del voltmetro in funzione della tensione E di misura. In particolare, ci mettiamo nel **dominio di Laplace**, per cui sostanzialmente dobbiamo ricavare la seguente funzione di trasferimento:

$$H_{VE}(s) = \frac{V(s)}{E(s)}$$

dove quindi $E(s)$ si comporta da ingresso e $V(s)$ da uscita.

La relazione tra queste due quantità si ricava facilmente per ispezione del circuito e utilizzando le classiche tecniche di analisi dei circuiti nel dominio di Laplace. In primo luogo, applichiamo il partitore della tensione $E(s)$ su Z_V :

$$V(s) = \frac{Z_V}{Z_V + Z_i} E(s) = \frac{Z_V}{Z_V + R_i} E(s)$$

Inoltre, teniamo conto che l'impedenza del voltmetro è il parallelo tra R_V e C_V , per cui vale

$$Z_V = \frac{1}{Y_V} = \frac{1}{\frac{1}{R_V} + sC_V} = \frac{R_V}{1 + sR_V C_V}$$

² Ricordiamo che gli errori sistematici, proprio per il fatto di non essere di natura aleatoria), sono spesso suscettibili di correzioni; l'unico problema è che tali correzioni presuppongono l'adozione di modelli matematici che non saranno mai perfetti, per cui nemmeno le correzioni potranno essere perfette.

Sostituendo nell'espressione di $V(s)$, abbiamo che

$$V(s) = \frac{Z_v}{Z_v + R_i} E(s) = \frac{\frac{R_v}{1 + sR_v C_v}}{\frac{R_v}{1 + sR_v C_v} + R_i} E(s) = \frac{R_v}{R_v + R_i(1 + sR_v C_v)} E(s)$$

Questa espressione può anche essere riscritta nel modo seguente:

$$V(s) = \frac{R_v}{R_v + R_i} \frac{1}{1 + s \frac{R_i R_v}{R_i + R_v} C_v} E(s)$$

Il termine $\frac{R_i R_v}{R_i + R_v} C_v$ ha evidentemente le dimensioni di una costante di tempo, per cui lo indichiamo con τ , in modo da concludere che

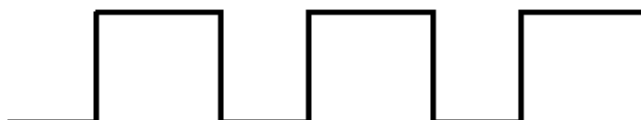
$$V(s) = \frac{R_v}{R_v + R_i} \frac{1}{1 + s\tau} E(s)$$

Questa espressione ci serve a mostrare quello che ci interessa:

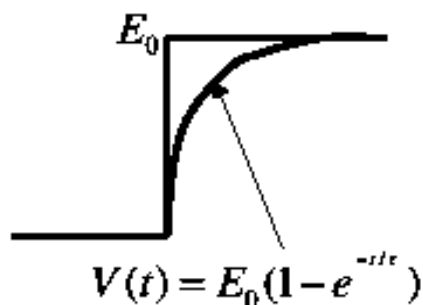
- il termine $\frac{R_v}{R_v + R_i}$ è un partitore resistivo che porta in conto l'attenuazione subita dal segnale misurato rispetto a quello vero; questo termine è chiaramente l'unico presente se siamo in regime stazionario (misura in corrente continua); nell'ipotesi che R_i sia sufficientemente più piccola di R_v , questo termine di attenuazione risulta praticamente unitario;
- il termine $\frac{1}{1 + s\tau}$ è invece la tipica funzione di trasferimento di un sistema del primo ordine, avente una costante di tempo τ : in base all'espressione di τ , si nota che essa è tanto più grande (cioè la risposta è tanto più lenta) quanto maggiore è R_i .

Quindi, a conferma di quanto detto prima, per misure in corrente continua registriamo solo una attenuazione di un fattore $\frac{R_v}{R_v + R_i}$, mentre invece in regime sinusoidale osserviamo anche uno sfasamento (funzione della frequenza); tale sfasamento di solito non ha grande importanza, anche se ci sono dei casi (come le misure di potenza attiva e reattiva) in cui è determinante.

Per tutti gli altri regimi (incluso quello periodico non sinusoidale), avremo la già citata **distorsione lineare**. Un tipico segnale usato per apprezzare la distorsione lineare è l'onda quadra (o comunque il gradino ripido), la cui caratteristica è notoriamente quello di avere uno spettro di frequenza molto esteso:



Questa onda quadra viene trasformata, dall'effetto di carico, in una tipica risposta del primo ordine, che consiste in un andamento esponenziale con assegnata costante di tempo τ :



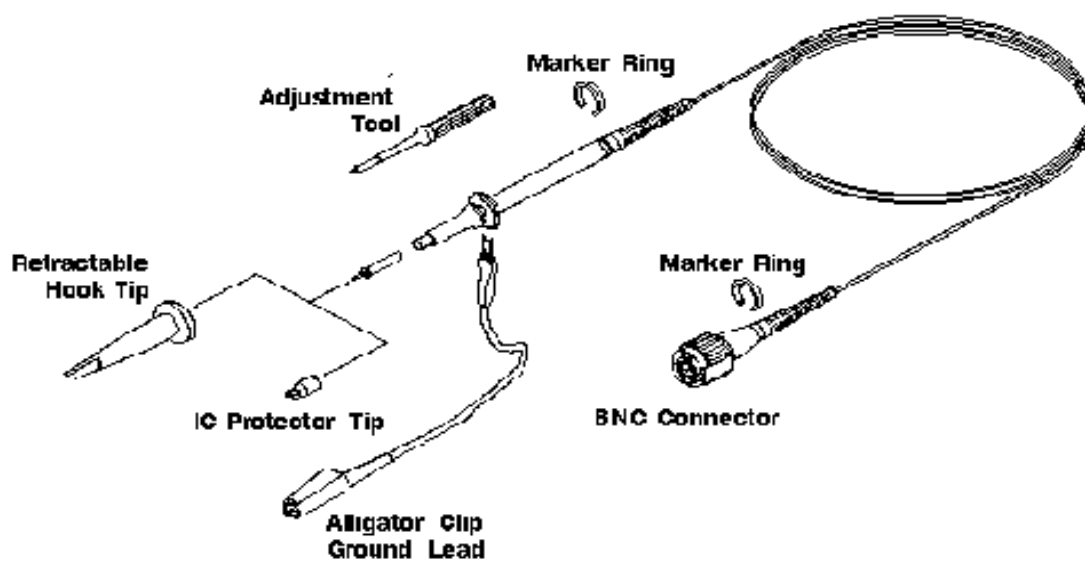
Questa distorsione falsa sia le misure a regime (come ad esempio le misure di valor medio, di valore efficace e così via) sia le misure durante il transitorio (ad esempio quelle del tempo di salita).

Naturalmente, tutto il discorso appena fatto può essere facilmente dualizzato per la misura di corrente in un circuito in cui l'ammettenza interna è reale (per cui è una conduttanza).

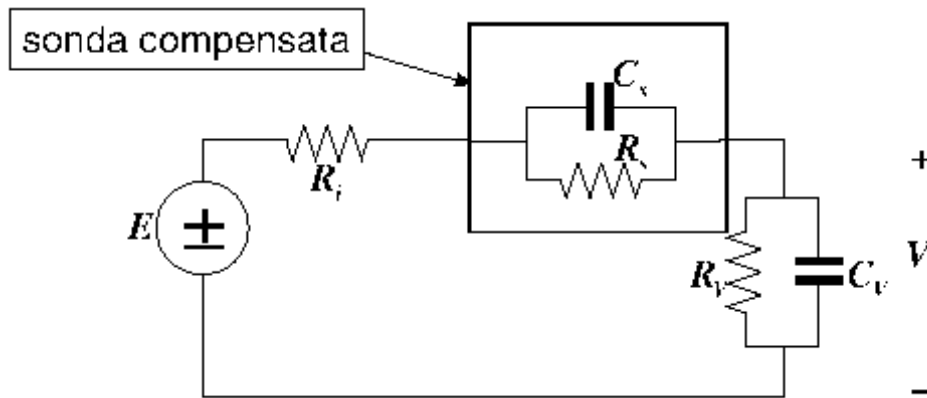
Metodo della compensazione in frequenza: sonda compensata

Abbiamo visto, dunque, come gli effetti di carico, per misure in regime generico, si traducano in una distorsione del segnale da misurare. Ci chiediamo allora se e come questo problema può essere debellato o quanto meno ridotto.

Dobbiamo ricorrere alle cosiddette **sonde compensate**. Per comprendere, a livello intuitivo, di cosa si tratta, pensiamo a come si effettua una misura tramite un voltmetro (o comunque tramite un qualsiasi strumento di misura): lo strumento presenta due morsetti di ingresso, ai quali vengono connessi due cavi (una estremità per ciascun morsetto); le altre due estremità dei cavi vengono posizionate sui due punti tra cui misurare la tensione, in modo che tale tensione si trovi applicata direttamente allo strumento (salvo le differenze di cui si è discusso prima). Con una tecnica di questo tipo abbiamo il problema degli effetti di carico. Allora, modifichiamo leggermente la tecnica, sostituendo ad uno dei due cavi (tipicamente quello che non è connesso a massa), una sonda compensata, della quale è riportata una schematizzazione nella figura seguente:



Per comprendere il funzionamento della sonda³, ci basta dire che il circuito di misura, anziché essere quello visto nel paragrafo precedente, diventa il seguente:



Abbiamo quindi banalmente introdotto, in serie alla impedenza Z_V del voltmetro, una ulteriore impedenza Z_S , formata anch'essa dal parallelo di una resistenza (R_S) e di una capacità (C_S).

Per comprendere l'utilizzo di tale nuove impedenza, andiamo nuovamente a ricavare la funzione di trasferimento tra $E(s)$ e $V(s)$. Senza riportare i dettagli analitici, riportiamo direttamente il risultato finale:

$$V(s) = \frac{R_V}{R_V + R_i} \frac{1 + sR_S C_S}{1 + s \frac{R_S R_V}{R_S + R_V} (C_V + C_S) + \frac{R_i}{R_S + R_V} (1 + sR_V C_V)(1 + sR_S C_S)} E(s)$$

La maggiore complessità deriva evidentemente dalla necessità di calcolare un ulteriore ripartizione della tensione E .

Questa relazione, così com'è, non ci dice molto. Supponiamo però di metterci nella condizione particolare per cui le costanti di tempo della sonda ($\tau_S = R_S C_S$) e del voltmetro ($\tau_V = R_V C_V$) sono uguali:

$$R_S C_S = R_V C_V$$

Imponendo questa condizione e facendo qualche manipolazione algebrica, l'espressione di $V(s)$ diventa la seguente:

$$V(s) = \frac{R_V}{R_V + R_i + R_S} \frac{1}{1 + s \frac{R_i R_V}{R_V + R_i + R_S} C_V} E(s)$$

Questa espressione è nella stessa forma vista prima, in assenza di compensazione:

- in primo luogo, si nota ancora una volta un termine $\alpha = \frac{R_V}{R_V + R_i + R_S}$ di attenuazione, che sarebbe l'unico presente nel caso di misure in corrente continua; supponendo R_i molto piccola rispetto alle altre due resistenze, risulta $\alpha \cong \frac{R_V}{R_V + R_S}$ e questa è già una prima differenza

³ Possiamo anticipare che l'uso tipico delle sonde è con oscilloscopi o schede DAQ, ma, in linea di principio, esse sono utilizzabili ed utili in qualsiasi misura su tensione periodica, specie se non sinusoidale.

rispetto alla misura in assenza della sonda, dove abbiamo visto che l'attenuazione era praticamente unitaria: per questo motivo, si dice che $\frac{R_V}{R_V + R_S}$ è l'**attenuazione della sonda** (sarebbe assente in assenza della sonda ed è perfettamente nota⁴, in quanto non necessita della conoscenza di R_i);

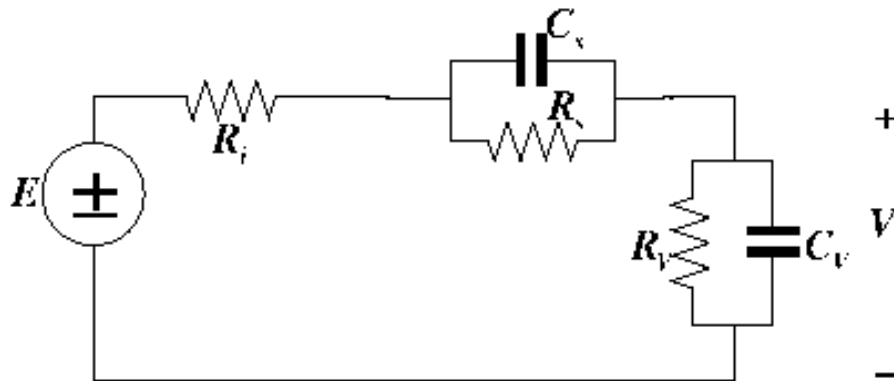
- in secondo luogo, si nota ancora una funzione di trasferimento del 1° ordine, dove però la costante di tempo è adesso $\tau' = \frac{R_i R_V}{R_V + R_i + R_S}$: se scegliamo una R_S molto più grande di R_V , otteniamo (a prezzo di una attenuazione) una costante di tempo molto più piccola rispetto a quella (τ) in assenza della sonda.

In definitiva, *scegliendo una sonda con R_S sufficiente maggiore di R_V , paghiamo in termini di attenuazione (come è ovvio che sia), ma guadagniamo in termini di velocità, in quanto $V(s)$ tende a seguire $E(s)$ con maggiore prontezza (proprio perché t' è piccola).*

I valori tipici di R_S sono $R_S = 9R_V$ (si parla di **sonda 10X**) e $R_S = 99R_V$ (si parla di **sonda 100X**).

Osservazione

Consideriamo ancora lo schema di misura di tensione con sonda compensata:



Con tecniche analoghe a quella dei paragrafi precedenti, valutiamo l'errore (assoluto) che commettiamo con questo schema di misura, ossia la differenza tra V ed E :

$$e_V = V - E = \frac{Z_V}{Z_V + R_i + Z_S} E - E = -\frac{R_i + Z_S}{Z_V + R_i + Z_S} E$$

In corrente continua, abbiamo solo resistenze, per cui

$$e_V = -\frac{R_i + R_S}{R_V + R_i + R_S} E$$

⁴ E' opportuno precisare che l'impedenza Z_V del voltmetro è nota con precisione per quanto riguarda la parte resistiva (R_V) mentre è nota in modo più approssimativo per la parte reattiva (C_V). Tra l'altro, specialmente alle frequenze alte, la parte reattiva risente anche dell'azione di capacità ed induttanze parassite.

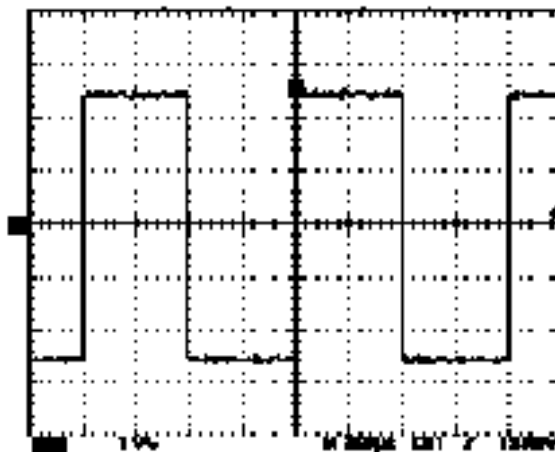
Regolazione della sonda

Abbiamo dunque visto quali vantaggi si traggano, in termini di riduzione della distorsione non lineare provocata dagli effetti di carico, usando una sonda compensata; in particolari, tali vantaggi si ottengono solo se viene verificata la condizione

$$R_S C_S = R_V C_V$$

I termini a secondo membro sono relativi al voltmetro (in generale allo strumento di misura impiegato) e sono quindi da ritenersi fissi; restano da fissare i valori di R_S e C_S che soddisfano quella relazione. Abbiamo visto che, per quanto riguarda R_S , sono possibili essenzialmente due alternative (sonda 10X o 100X) ed esiste perciò un apposito **tasto a scorrimento** che consente di passare dall'una all'altra.

Resta perciò da regolare C_S . Questa è la capacità di un condensatore variabile, il cui valore è regolabile ruotando una apposita **vite** presente sulla sonda. Questa regolazione, si effettua misurando una tensione corrispondente ad un'onda quadra (ad esempio prodotta da un generatore di segnale) e facendo in modo che il display dello strumento (pensiamo ad un oscilloscopio) visualizza a sua volta una forma d'onda quanto più simile possibile all'onda quadra sotto misura.

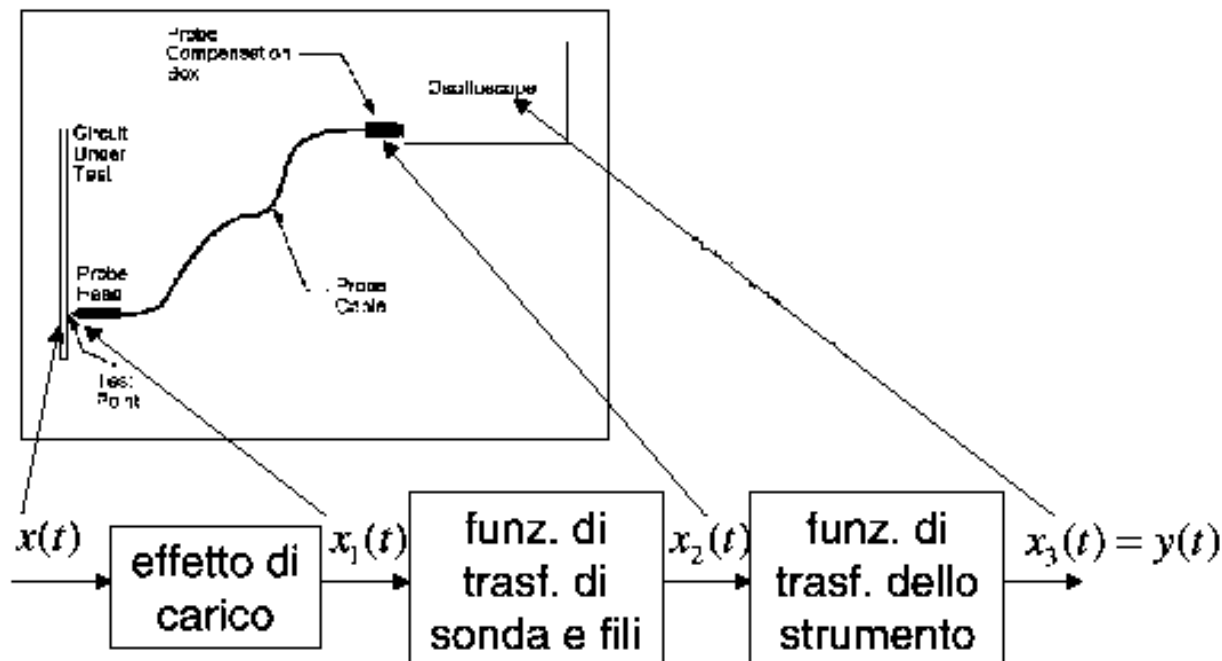


Per capire in quale senso ruotare la vite di regolazione, basta osservare se si sta effettuando una sottocompensazione oppure una sovracompensazione, che danno origine, sul display, a forme d'onda del tipo seguente:



Riepilogo sulla misura di tensione

Possiamo adesso fare un riepilogo di quanto visto nei precedenti paragrafi circa una misura di tensione. A tal proposito, possiamo fare riferimento al seguente schema generale, in cui lo strumento di misura, anziché essere un voltmetro, è un **oscilloscopio** (che può ovviamente fungere anche da voltmetro):



Nella parte di sinistra abbiamo il circuito su cui stiamo compiendo la misura (**circuit under test**) ed in particolare il segnale $x(t)$ che ci interessa rilevare. Nel punto in cui è presente tale segnale (**test point**), andiamo ad applicare la sonda (**probe head**), il che contribuisce, tramite gli effetti di carico, a modificare il segnale, che diventa adesso $x_1(t)$. Quindi, $x(t)$ ed $x_1(t)$ sono i segnali rispettivamente prima e dopo il collegamento della sonda.

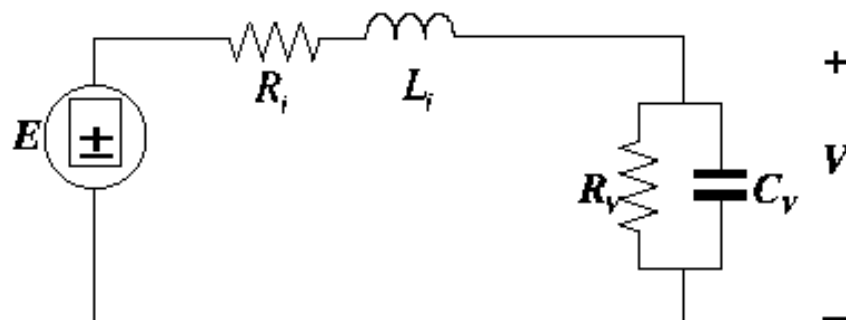
Il segnale $x_1(t)$ si propaga, tramite la sonda ed il successivo cavo di collegamento (**probe cable**), fino allo strumento: dato che sia la sonda sia il cavo hanno una propria funzione di trasferimento, il segnale che arriva allo strumento è diventato adesso $x_2(t)$. Questo segnale, in ingresso allo strumento, passa a sua volta attraverso la funzione di trasferimento dello strumento stesso, dando finalmente il segnale $y(t)$ misurato (e cioè visualizzato sul display).

Osservazioni varie sulla compensazione in frequenza

Prima di proseguire, è opportuno precisare alcuni concetti:

- se stiamo effettuando una misura di tensione tramite un voltmetro e poniamo una resistenza R_S in serie al voltmetro stesso, otteniamo sì una riduzione dell'effetto di carico in corrente continua, ma diminuiamo anche la sensibilità e la risoluzione (aumenta la scala);
- se invece stiamo effettuando una misura di tensione in regime periodico (sinusoidale o non sinusoidale) e inseriamo, in serie allo strumento di misura (tipicamente un oscilloscopio), una impedenza opportuna Z_S (quella della *sonda compensata*), otteniamo sia una riduzione dell'effetto di carico sia un aumento della *prontezza* del sistema (in quanto diminuisce la costante di tempo), ma anche in questo caso riduciamo sensibilità e risoluzione.

Un'altra puntualizzazione riguarda il modello prima ricavato per gli effetti di carico. Abbiamo infatti trovato, come funzione di trasferimento tra il segnale vero $E(s)$ ed il segnale $V(s)$ che risulta in ingresso allo strumento, una funzione di trasferimento del primo ordine. Questo risultato è valido solo quando l'impedenza Z_i del circuito in serie a quella Z_v del voltmetro danno origine ad un carico ohmico-capacitivo. Questo accade nella maggior parte dei casi ma comunque non sempre, in quanto può talvolta comparire, specie nell'impedenza del circuito, un termine induttivo, come nella figura seguente:

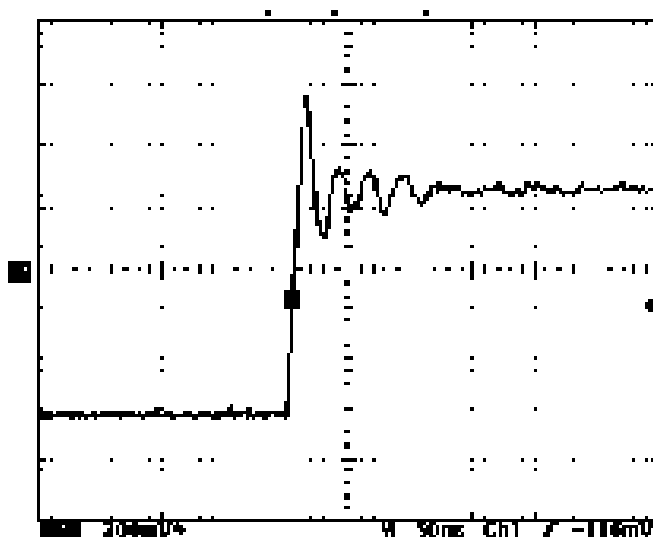


L'induttanza L_i può comparire per vari motivi: ad esempio, può essere il circuito ad avere una impedenza induttiva, ma potrebbe anche trattarsi di effetti parassiti nei fili quando si lavora ad alte frequenze.

La presenza di L_i modifica evidentemente la situazione: gli elementi reattivi sono infatti 2 e quindi la funzione di trasferimento che si ottiene non può che essere del secondo ordine. In particolare, facendo gli opportuni passaggi (semplici ma un po' lunghi), si trova che

$$V(s) = \frac{R_v}{R_v + R_i} \frac{1}{1 + s \left(\frac{R_i R_v}{R_v + R_i} C_v + \frac{L_i}{R_v + R_i} \right) + s^2 \frac{R_v}{R_v + R_i} C_v L_i} E(s)$$

Anche in questo caso, abbiamo una distorsione lineare in presenza di segnali non sinusoidali, con la differenza, rispetto a prima (Z_i resistiva $\rightarrow$ sistema del primo ordine), che possono esserci fenomeni di risonanza: dobbiamo infatti ricordarci quale sia la risposta di un sistema del secondo ordine in risposta, ad esempio, ad un *gradino* posto in ingresso:



Possiamo anche chiederci quali effetti possa avere l'induttanza L_i per misure effettuate in regime sinusoidale. Il discorso è semplice.

Indichiamo genericamente con $\mathbf{Z}_V = \mathbf{R}_V + j\mathbf{X}_V$ ($X_V < 0$, in quanto è una reattanza capacitiva) e $\mathbf{Z}_i = \mathbf{R}_i + j\mathbf{X}_i$ ($X_i > 0$, in quanto è una reattanza induttiva) le impedenze rispettivamente del voltmetro e del circuito. Applicando un banale partitore di tensione, ricaviamo che

$$V(s) = \frac{Z_V}{Z_V + Z_i} E(s) = \frac{R_V + jX_V}{R_V + R_i + j(X_V + X_i)} E(s)$$

Se ci interessiamo al modulo della funzione di trasferimento tra $E(s)$ e $V(s)$, otteniamo evidentemente quanto segue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{V(s)}{E(s)} \right| &= \left| \frac{R_V + jX_V}{R_V + R_i + j(X_V + X_i)} \right| = \frac{\sqrt{R_V^2 + X_V^2}}{\sqrt{(R_V + R_i)^2 + (X_V + X_i)^2}} = \frac{\sqrt{R_V^2 + X_V^2}}{\sqrt{(R_V^2 + R_i^2 + 2R_V R_i) + (X_V^2 + X_i^2 + 2X_V X_i)}} = \\ &= \frac{\sqrt{R_V^2 + X_V^2}}{\sqrt{(R_V^2 + X_V^2) + (R_i^2 + 2R_V R_i + X_i^2 + 2X_V X_i)}} \end{aligned}$$

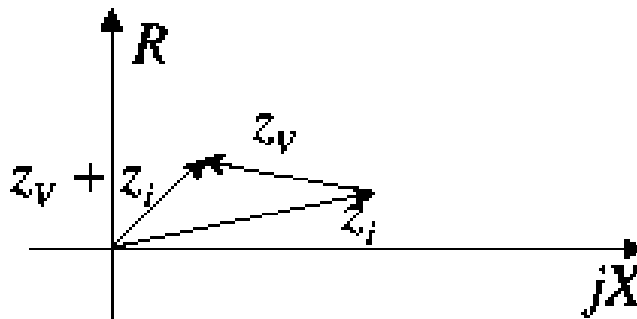
Dall'espressione ricavata risulta evidente che quella frazione è maggiore o minore di 1 a seconda di quanto vale il termine $(R_i^2 + 2R_V R_i + X_i^2 + 2X_V X_i)$: se infatti questo termine fosse minore di 0, il denominatore sarebbe inferiore al numeratore e quindi il modulo della funzione di trasferimento $V(s)/E(s)$ sarebbe maggiore di 1, ossia si avrebbe una amplificazione del segnale.

La condizione per avere amplificazione è dunque

$$R_i^2 + 2R_V R_i + X_i^2 + 2X_V X_i < 0$$

Questa condizione può essere verificata proprio perché X_V e X_i hanno segno opposto. Se fosse $X_i = 0$ oppure $X_i < 0$, invece, quella condizione non potrebbe mai essere verificata.

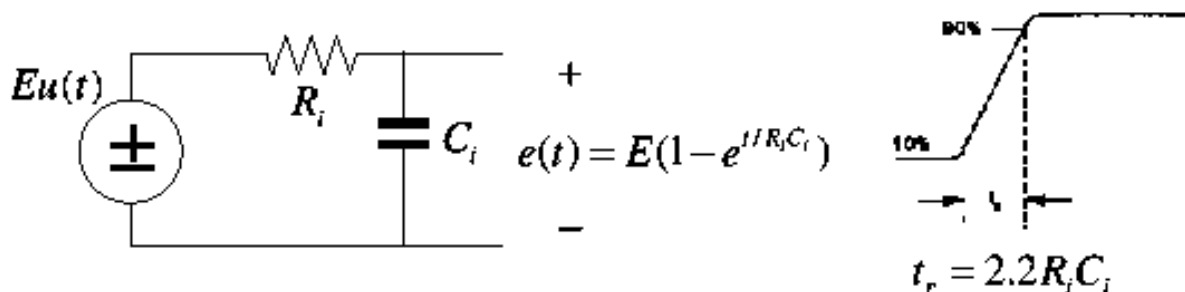
Quindi, *in presenza dell'induttanza L_i , l'effetto di carico esercitato dallo strumento potrebbe anche tradursi come un aumento del segnale da misurare. In effetti, comunque, questa situazione si può verificare, in pratica, solo in presenza di una induttanza L_i di valore elevato.*



MISURA DI TEMPO DI SALITA

Spesso ci si trova a dover misurare il **tempo di salita** di un impulso (ad esempio di tensione). Vediamo allora se e quali effetti di carico si presentano in questo tipo di misura.

Per condurre questa analisi, ci conviene in primo luogo adottare un comodo modello della sorgente che genera l'impulso da analizzare. Generalmente si usa allora il seguente modello circuitale:



Come si vede, l'impulso viene individuato come la tensione $e(t)$ prodotta ai capi di un condensatore C_i che, in serie ad una resistenza R_i , è alimentato da un generatore di tensione $Eu(t)$, che cioè applica un gradino di tensione, di valore di E , a partire da $t=0$.

In pratica, l'impulso è visto come la risposta di un classico sistema RC del primo ordine ad un gradino posto in ingresso.

Come evidenziato in figura, la semplice analisi del circuito porta a individuare la forma d'onda di interesse:

$$e(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{R_i C_i}} \right)$$

Il tempo di salita di un segnale (simbolo t_r) è definito come il tempo necessario affinché tale segnale passi da 10% al 90% del valore finale di regime. Come evidenziato nella figura, nel nostro caso tale tempo di salita è $t_r = 2.2 R_i C_i$, ossia è poco più del doppio della costante di tempo associata al circuito.

A questo punto, supponiamo di voler misurare tale tempo di salita, usando ad esempio un oscilloscopio. Si tratta sostanzialmente di inserire, nel circuito della figura precedente, l'impedenza Z_V dello strumento; tale impedenza, mettendosi in parallelo alla capacità, modifica evidentemente l'andamento di $e(t)$. In particolare, è evidente che il sistema è ancora del primo ordine, in quanto la capacità C_V dello strumento va in parallelo a C_i , ma è chiaro che i valori numerici sono cambiati.

Con semplici passaggi, si può ricavare che il nuovo tempo di salita è

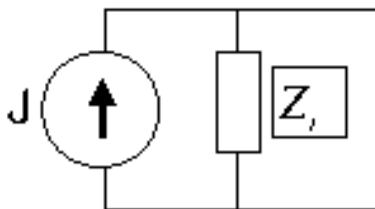
$$t_r = 2.2 \frac{R_i R_V}{R_i + R_V} (C_i + C_V)$$

L'espressione è nella stessa forma di prima (c'è sempre il prodotto del fattore 2.2 per una costante di tempo), ma la costante di tempo è cambiata; abbiamo perciò un errore (sistematico) che dipende dai valori delle varie impedenze.

MISURA DI CORRENTE

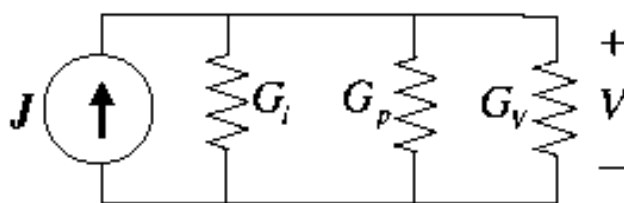
Ci sono vari modi per effettuare una misura di corrente. Uno di questi, anche se poco conveniente per i motivi che vedremo, è quello di usare un **voltmetro**, impiegato in una particolare configurazione circuitale.

Cominciamo col ricordare che, per una misura di corrente, il modello per il circuito sotto misura è il seguente:



La corrente da misurare è J , mentre Z_i è l'impedenza interna del circuito (in questo caso, è una impedenza di Norton). Per semplicità, supponiamo che Z_i sia reale: potremo allora ragionare in termini di conduttanza $G_i = 1/Z_i$.

Andiamo adesso a collegare i morsetti di Z_i a quelli del voltmetro, avendo però cura di inserire una ulteriore resistenza in parallelo (**shunt**), secondo lo schema seguente:

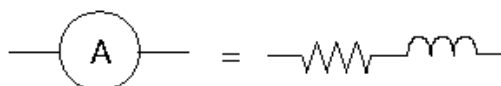


La tensione V ai capi del voltmetro è quella prodotta ai capi dalla corrente J che si ripartisce nel parallelo tra le 3 resistenze: possiamo scrivere che

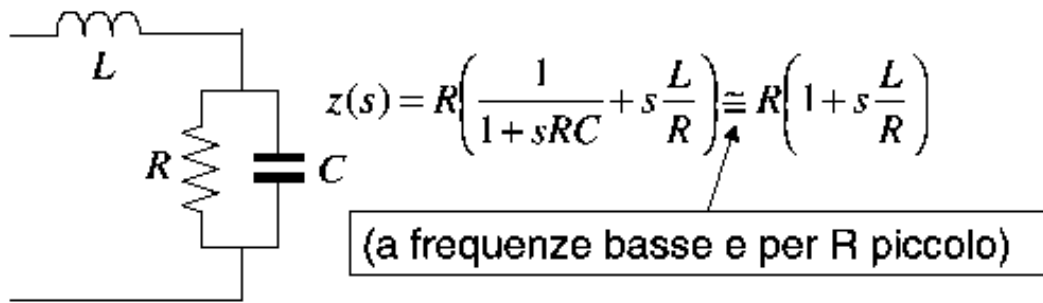
$$V = \frac{1}{G_i + G_p + G_v} J$$

Sappiamo che il voltmetro è caratterizzato da un elevato valore di R_v , ossia da un basso valore di G_v . Allora, se usiamo una G_p abbastanza grande, possiamo approssimare $V \cong \frac{1}{G_p} J$, per cui il valore della corrente si misura come prodotto tra la tensione V misurata dallo strumento e il valore scelto per la G_p .

Volendo usare, invece, un amperometro propriamente detto, avremo un dispositivo che, dal punto di vista dinamico, è caratterizzato (come già detto in precedenza) come un circuito RL serie:



Si tratta dunque di un modello ohmico-induttivo, dove la resistenza è generalmente molto piccola. In realtà, si potrebbe anche complicare il modello aggiungendo una capacità in parallelo alla resistenza:



Come evidenziato nella figura e come è noto dai corsi precedenti, la presenza di due elementi reattivi dà luogo ad un sistema del secondo ordine; l'espressione di $z(s)$, infatti, contiene il termine s^2 , come si può vedere nel riquadro appena riportato. D'altra parte, essendo R molto piccola, il corrispondente polo si trova a frequenza molto alta, per cui, con una dizione vista nel corso di Elettronica Applicata, si tratta di un polo non dominante, che per frequenze non troppo alte può essere trascurate. sotto questa ipotesi, si può approssimare

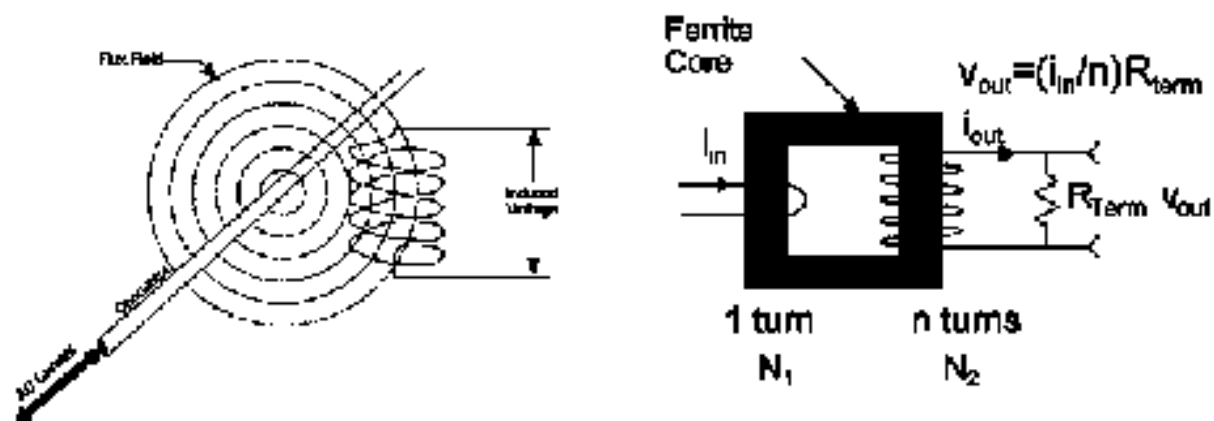
$$z(s) \approx R \left(1 + s \frac{L}{R} \right)$$

per cui risulta ancora un sistema del primo ordine, sui cui effetti di carico si è già discusso prima.

I motivi per cui il modello circuitale dell'amperometro presenta un termine induttivo sono molteplici:

- se stiamo usando un **voltmetro con resistenza di shunt**, dobbiamo tener conto che questa resistenza è spesso un filo di rame avvolto;
- se stiamo usando un **voltmetro passivo**, esso è nient'altro che una bobina;
- in generale, altri tipi di **sonde di corrente** introducono una forte componente induttiva.

A proposito delle sonde di corrente, citiamo un esempio (molto comune) di sonda di corrente con impedenza nettamente induttiva: si tratta della cosiddetta **sonda ad induzione elettromagnetica**, di cui la figura seguente riporta una schematizzazione:



Si tratta chiaramente di una sonda passiva che sfrutta l'accoppiamento tra il primario ed il secondario di un trasformatore. Per questo motivo, essa funziona solo in corrente alternata (per frequenze che variano da un minimo di 0.5 Hz fino ad un massimo anche di 1 GHz). Essa ha il

grosso pregio di permettere la misura senza interrompere il circuito, mentre ha lo svantaggio di presentare una zona di funzionamento non lineare, che va ovviamente evitata.

La sensibilità di questo tipo di sonda è strettamente legata al numero di avvolgimenti attorno al nucleo di ferrite: quanto maggiore è tale numero, tanto maggiore è la sensibilità della sonda.

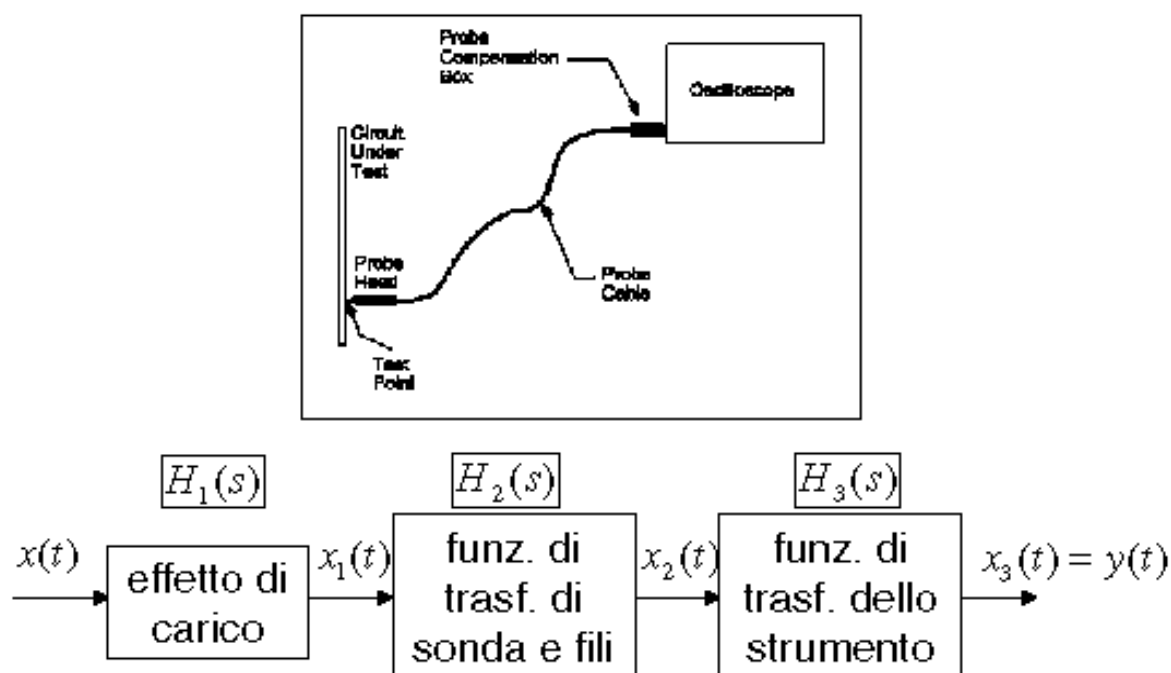
Se si volesse fare una misura di corrente in regime stazionario (corrente continua), si potrebbero invece usare (oltre la tecnica del *voltmetro con resistenza di shunt*) le cosiddette **sonde ad effetto Hall**: queste generano una tensione proporzionale alla corrente anche quando la frequenza è nulla. Il problema di tali sonde è che, per funzionare, devono essere polarizzate (da un campo magnetico fisso generato da una corrente continua) e quindi rientrano nella categoria delle **sonde attive**.

IMPORTANZA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA DELLO STRUMENTO DI MISURA

I discorsi dei paragrafi precedenti fanno capire, tra le altre cose, quanto importante sia la **risposta in frequenza**⁵ del sistema di misura. In particolare, dobbiamo preoccuparci della banda dello strumento di misura in almeno due circostanze:

- quando misuriamo sinusoidi (o simili) a frequenza molto prossima ai limiti dello strumento;
- quando misuriamo segnali a frequenza bassa (rispetto ai limiti dello strumento) ma con fronti ripidi (che sappiamo corrispondere ad armoniche di frequenza elevata).

Occupiamoci allora dei principali aspetti relativi alla risposta in frequenza. Per fare questo, riprendiamo una schematizzazione del generico sistema di misura già proposta in precedenza:



Il riquadro a sinistra indica il circuito sotto misura, la sonda usata per la misura, il cavo di collegamento e lo strumento di misura (in generale un oscilloscopio). Questo sistema è schematizzabile come la cascata di 3 blocchi, ciascuno con propria funzione di trasferimento:

⁵ Ricordiamo che per **risposta in frequenza** (o *funzione di risposta in frequenza*) di un sistema (in generale) intendiamo la trasformata di Fourier $G(j\omega)$ della sua *risposta impulsiva*. E' cosa diversa dalla funzione di trasferimento, che invece è la trasformata di Laplace $G(s)$ della suddetta risposta impulsiva. D'altra parte, ponendo $s=j\omega$, si passa da $G(s)$ a $G(j\omega)$.

l'effetto di carico è modellato da $H_1(s)$, la funzione di trasferimento della sonda e del filo è $H_2(s)$ mentre la funzione di trasferimento dello strumento è $H_3(s)$.

Come è noto, la funzione di trasferimento complessiva dall'ingresso all'uscita è il prodotto delle singole funzioni di trasferimento:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)H_3(s)$$

Delle tre funzioni di trasferimento appena citate, quella più difficile da valutare è $H_1(s)$, quella cioè relativa all'effetto di carico: essa dipende dal modello elettrico del circuito, della sonda e dello strumento.

Se il circuito non è fortemente induttivo, se la sonda è di lunghezza adeguata e se il collegamento a massa è ben eseguito, si può assumere un comportamento del primo ordine, quindi con un singolo polo:

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + s\tau_1}$$

Si tratta ovviamente di valutare la costante di tempo τ_1 , o, ciò che è lo stesso, la posizione $1/\tau_1$ del polo. Come abbiamo già visto per il caso particolare della misura di tensione, τ_1 dipende dalle impedenze del circuito e del complesso formato dalla sonda e dallo strumento. Abbiamo per esempio visto che, per una misura di tensione con sonda compensata, la funzione di trasferimento tra il segnale $E(s)$ da misurare e quello $V(s)$ effettivamente in ingresso allo strumento era

$$V(s) = \frac{R_v}{R_v + R_i + R_s} \frac{1}{1 + s \frac{R_i R_v}{R_v + R_i + R_s} C_v} E(s)$$

Maggiori problemi si hanno invece quando il circuito sotto misura presenta una impedenza con un termine induttivo.

In generale, *la funzione di trasferimento $H_1(s)$ della sonda e quella $H_3(s)$ dello strumento sono fornite dai corrispondenti manuali (anche se non sempre in modo chiaro).* Nella stragrande maggioranza dei casi, sono funzioni del primo ordine, del tipo $\frac{1}{1 + s\tau}$ visto poco fa⁶. Le specifiche sono fornite generalmente in termini di **banda a -3dB** oppure di **tempo di salita**. A tal proposito, le relazioni da considerare sono le seguenti (note dai corsi precedenti):

$$t_r = 2.2 \cdot \tau = \frac{0.35}{B_{-3dB}} \qquad \tau = \frac{0.16}{B_{-3dB}} = 0.45 \cdot t_r$$

Queste relazioni mostrano che è completamente indifferente parlare di tempo di salita t_r , costante di tempo τ oppure banda a -3dB. Questo vale però solo per un sistema modellabile con una funzione di trasferimento del primo ordine. Ad esempio, *se venissero fornite, nelle specifiche di uno strumento, la banda e il tempo di salita e i valori numerici non dovessero rispettare le precedenti relazioni,*

⁶ Fanno eccezione, però, alcuni strumenti che comprendono un *filtro* (analogico o digitale) con particolari caratteristiche. Da valutare attentamente sono invece i casi di misure a frequenza molto alta, per le quali l'induttanza dei fili (anche corti) non è trascurabile.

significherebbe che il sistema non può essere considerato del primo ordine.

Una volta note le funzioni di trasferimento dei tre blocchi, abbiamo detto che la funzione di trasferimento complessiva è il loro prodotto. Se i tre blocchi sono tutti del primo ordine, ciascuno con la propria costante di tempo, il sistema complessivo avrà perciò una funzione di trasferimento del tipo seguente:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)H_3(s) = \frac{1}{1+s\tau_1} \frac{1}{1+s\tau_2} \frac{1}{1+s\tau_3}$$

Questo è, in generale, un sistema del terzo ordine. Anche nell'ipotesi di poli sufficientemente distanti uno dall'altro, difficilmente ci si può ricondurre, anche per $H(s)$, ad un sistema a singolo polo (cioè assumere un polo dominante rispetto agli altri). In generale, quindi, il calcolo della banda del sistema nel suo complesso non è molto semplice. In realtà, *l'obiettivo pratico è di solito, ove possibile, quello di rendere dominante il polo dello strumento. Se si ottiene questo, sarà tale polo a determinare approssimativamente la banda dell'intero sistema.*

E' bene anche stare attenti alla situazione in cui i poli dei tre blocchi sono ravvicinati tra di loro. Supponiamo, per esempio, che il polo del filo di collegamento sia ad una frequenza sufficientemente elevata da poter essere trascurabile rispetto agli altri due, per cui possiamo scrivere che

$$H(s) \cong \frac{1}{1+s\tau_1} \frac{1}{1+s\tau_2}$$

Supponiamo inoltre che sia lo strumento sia la sonda abbiano una banda da 100 MHz. E' facile verificare come il sistema complessivo $H(s)$ non abbia a sua volta una banda da 100 MHz, ma una banda minore.

Un'altra osservazione riguarda il limite massimo di frequenza a cui possiamo fare le nostre misure, nota che sia la banda⁷ del sistema di misura. Ad esempio, supponiamo che la banda del sistema complessivo sia di 100 MHz; possiamo fare misure fino a quella frequenza? La risposta è negativa: ad esempio, una misura di ampiezza su una sinusoide a frequenza pari alla banda del sistema comporta un errore dell'ordine del 30%. Dobbiamo dunque scendere abbastanza con la frequenza della sinusoide: portando tale frequenza ad 1/3 della banda del sistema, l'errore è di circa il 3% e può in taluni casi essere accettabile.

Ad ogni modo, quando si misura l'ampiezza di sinusoidi, l'errore conseguente alla frequenza troppo elevata delle sinusoidi stesse può anche essere corretto (almeno in parte). Sicuramente più difficile è invece l'errore che si commette quando il segnale sotto misura è a spettro largo (ossia contiene più termini armonici). Per avere una idea di quest'ultimo concetto, consideriamo misure su un segnale avente fronti abbastanza ripidi (che quindi determinano componenti spettrali in alta frequenza). Una regola pratica è quella per cui *il tempo di salita dello strumento deve essere 3-5 volte più piccolo del tempo di salita da misurare.* E' ovvio che tale specifica sul t_r si traduce in una specifica sulla banda del sistema: quanto maggiore è la banda dello strumento, tanto migliore sarà la misura effettuata.

⁷ Intendiamo ovviamente la banda a -3dB, in base a quanto detto prima.

CLASSIFICAZIONE DEGLI STRUMENTI E DELLE SORGENTI DI TENSIONE

Sappiamo che uno strumento, ad esempio un oscilloscopio, può avere più ingressi, nel qual caso si parla di **strumento multicanale**. Per questo tipo di strumenti esiste la seguente classificazione:

- differential (differenziali)
- single-ended (con filo "comune")
 - * floating o non-referenced (fluttuanti)
 - * grounded ("atterrati")

Analoga classificazione si può fare per una sorgente di segnale con più di una uscita (ad esempio, una **sorgente multipla** di tensione):

- differenziali
- single-ended
 - * floating
 - ◇ con comune atterrabile
 - ◇ con comune non atterrabile
 - * grounded

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>