Appunti di Misure Elettriche

Capitolo 3 - Il rumore

Introduzione 1
Richiami sul rumore elettronico 2
stazionarietà ed ergodicità del “processo” di rumore 2
Il rumore come segnale 4
Strumenti per l’analisi del rumore 5
Banda equivalente di rumore 6
Tensione e corrente equivalenti di rumore 8
Il rumore termico 10
Il rumore bianco additivo gaussiano 12
Osservazione 12
Potenza disponibile e potenza di rumore disponibile 13
Fattore di rumore e cifra di rumore 15
Rapporto segnale-rumore in ingresso ed in uscita 16
Temperatura equivalente di rumore 19
Fattore di rumore e temperatura equivalente di rumore nei sistemi in cascata 21
Rumore granulare 22
Rumore flicker 23
Rumore burst 24
Rumore quantico 25
Rumore di crepitio 25
Rumore di fase 26

INTRODUZIONE

Uno degli scopi principali della **scienza delle misure** è quello di ridurre le cause di errore, in modo che l’accuratezza e la precisione delle misure rientrino nei limiti prefissati. La più importante sorgente di errore nella strumentazione elettronica è il **rumore**. *Per **rumore** intendiamo, in generale, un qualsiasi segnale estraneo a quello di interesse ma con esso interferente.* Il rumore è dunque sempre un qualcosa di indesiderato, in quanto si sovrappone al segnale di interesse (cioè il segnale da misurare), causando un incremento dello scostamento della misura dal valore atteso.

In generale, il rumore si presenta in modo aleatorio, per cui è causa di un errore accidentale. Talvolta, però, esso può anche non essere una funzione casuale, come ad esempio quando è dovuto a *radiazioni* emesse da altri sistemi oppure ad *accoppiamenti* elettrici o magnetici interni o esterni al sistema. In questi casi, però, è sensato parlare di **interferenza** più che di rumore. Possiamo perciò affermare che, *mentre gli effetti dell’interferenza si valutano con metodi deterministici e determinano errori sistematici, gli effetti del rumore si valutano con metodi probabilistici e determinano errori accidentali.*

L’analisi statistica di misure affette da rumore può permettere una riduzione dell’influenza del rumore sulle misure stesse e quindi un miglioramento della precisione. Naturalmente, in qualsiasi processo di misura l’influenza del rumore può essere rilevante o meno, a seconda della sua ampiezza rispetto a quella del segnale di interesse. E’ questo un concetto generale: *il rumore diventa*

importante solo quando la sua ampiezza è confrontabile con quella del segnale di interesse[1]. A tal fine, un indicatore importante dell'influenza del rumore su un qualsiasi segnale è il cosiddetto **rapporto segnale-rumore** (che potremo indicare indifferentemente con **SNR** o **S/N**).

Quando si effettua una misura, bisogna porre molta attenzione non solo alla riduzione dell'SNR, ma anche al modo con cui si misura l'SNR; ovviamente, questa attenzione è commisurata al livello di precisione che si desidera ottenere.

RICHIAMI SUL RUMORE ELETTRONICO

La definizione di rumore data nel paragrafo precedente è di natura estremamente generale. Esistono altre definizioni, più specifiche (per quanto possibile). Nell'ambito dei dispositivi elettronici, ad esempio, sussiste la seguente definizione: *si definisce "**rumore elettronico**" la fluttuazione casuale di correnti e/o di tensioni ai morsetti di un dispositivo o di un circuito.*

In pratica, se supponiamo di avere un circuito o un dispositivo che riceve in ingresso un certo segnale e ne fornisce un altro in uscita, il "rumore" rappresenta le variazioni sia sul segnale di ingresso sia sul segnale in uscita rispetto ai valori che tali segnali avrebbero teoricamente.

La definizione fa riferimento ad fluttuazione "casuale" della tensione o della corrente. Per "*casuale*" si intende il fatto per cui le cause fisiche che generano questo rumore, pur essendo fisicamente presenti, sfuggono in parte al nostro controllo, ossia non sono da noi ben determinabili.

L'esistenza del rumore elettronico è legata essenzialmente al fatto che la corrente elettrica non è una grandezza continua, ma è trasportata in quantità discrete uguali alla carica dell'elettrone; *il rumore è allora associato proprio ai processi fondamentali di trasporto che avvengono all'interno dei dispositivi che vengono utilizzati per produrre e trattare i segnali.*

Lo studio del rumore è molto importante, in quanto esso consente di individuare due importanti caratteristiche relative al dispositivo o al circuito in esame:

- in primo luogo, esso consente di individuare il limite inferiore per l'ampiezza del segnale elettrico che può essere amplificato, dal dispositivo o dal circuito, senza che si verifichi un significativo deterioramento del segnale in uscita;
- in secondo luogo, lo studio del rumore determina anche un limite superiore per il guadagno ottenibile da un amplificatore: infatti, è possibile, aumentando in modo indiscriminato il guadagno, specialmente negli amplificatori realizzati usando più dispositivi in cascata, che gli stadi di uscita del circuito inizino, ad un certo punto, a passare dalla zona attiva alla zona di interdizione o di saturazione, proprio a causa dell'amplificazione del rumore proveniente dagli stadi precedenti, determinando quindi una inevitabile distorsione.

STAZIONARIETÀ ED ERGODICITÀ DEL "PROCESSO" DI RUMORE

Il fatto di non essere in grado di individuare con precisione le cause fisiche del rumore comporta che il rumore stesso non risulti mai qualcosa di deterministico. Questa "casualità" del rumore

[1] Se pensiamo, ad esempio, ad *un **sistema di trasmissione**, per esso non è importante il livello assoluto del segnale e/o del rumore che arrivano al ricevitore:* infatti, in assenza di qualunque disturbo, se gli amplificatori fossero in grado di amplificare un segnale senza sovrapporgli del rumore, il segnale ricevuto potrebbe anche raggiungere valori estremamente piccoli, visto che basterebbe una successiva amplificazione per riportarlo a valori accettabili. Nella realtà, invece, bisogna fare sempre i conti con il rumore che immancabilmente si sovrappone al segnale utile: questo rumore viene in parte captato direttamente dall'antenna ricevente ed in parte generato internamente ai dispositivi amplificatori.

comporta che esso venga analizzato con metodi statistici anziché deterministici: detto in altre parole, il rumore va considerato e studiato come un "**processo stocastico**".

I parametri fondamentali che analizzare un processo di rumore n(t) sono essenzialmente due:

- la funzione **densità di probabilità delle ampiezze** del rumore, che in generale è una funzione dello spazio e del tempo;
- la **densità spettrale di potenza**, che indicheremo con W(f).

Come vedremo, queste due funzioni sono pienamente sufficienti per definire il rumore.

Con buona approssimazione, *possiamo ritenere che il* ***processo di rumore*** *sia un processo stocastico* ***stazionario****, ossia tale che la sua media e la sua varianza siano costanti nel tempo e che la sua funzione di autocorrelazione dipenda solo dall'ampiezza* t *dell'intervallo di tempo su cui è calcolata.*

Si può esprimere questa definizione in termini più formali. A tal fine, consideriamo N osservazioni del rumore nell'istante t_1; la media, la varianza e la funzione di autocorrelazione sono le seguenti:

$$\bar{n}(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i(t_1)$$

$$\sigma^2(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [n_i(t_1) - \bar{n}(t_1)]^2$$

$$R_{nn}(t_1, t_1+\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} n_i(t_1) n_i(t_1+\tau)$$

La definizione di stazionarietà impone che le prime due quantità siano indipendenti da t_1 e che la funzione di autocorrelazione dipenda solo da τ:

$$\bar{n} = \bar{n}(t_1)$$
$$\sigma^2 = \sigma^2(t_1)$$
$$R_{nn}(\tau) = R_{nn}(t_1, t_1+\tau)$$

Il tutto è ovviamente condizionato matematicamente ad avere un numero N elevato di osservazioni.

Oltre ad essere stazionario, il processo di rumore si può anche ritenere **ergodico**, il che significa, dal punto di vista strettamente analitico, che le stesse quantità descritte prima abbiamo le seguenti espressioni:

$$\bar{n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)\,dt$$

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [n(t) - \bar{n}]^2\,dt$$

$$R_{nn}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t) n(t+\tau)\,dt$$

Ricordiamo che un processo stocastico, per poter essere ergodico, deve necessariamente essere stazionario.

L’ergodicità è una caratteristica importante, in quanto i processi ergodici permettono la valutazione dei parametri caratteristici del fenomeno tramite medie temporali di un’unica funzione osservata. In altre parole, se il processo è ergodico, basta considerarne una sola realizzazione per ricavarne i principali parametri statistici. Le ultime relazioni riportate dicono infatti proprio questo: il valore medio $\bar{n}$, la varianza σ^2 e la funzione di autocorrelazione $R_{nn}(\tau)$ possono essere calcolare sulla base di un’unica osservazione n(t) del processo, purché tale osservazione venga protratta su un intervallo di ampiezza 2T sufficientemente grande.

IL RUMORE COME SEGNALE

Un segnale aleatorio, come è appunto il rumore, può anche essere usato come **segnale di prova** per analizzare le caratteristiche della risposta dei sistemi lineari. Per esempio, consideriamo un **rumore bianco**, ossia un rumore che, come vedremo più avanti, presenta una densità spettrale di potenza W(f) costante su tutte le frequenze di interesse. Supponiamo di mandare tale segnale, che indichiamo con n(t), in ingresso ad un sistema lineare, la cui corrispondente risposta sia y(t). Possiamo calcolare la **funzione di correlazione** tra i due segnali n(t) ed y(t):

$$R_{ny}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)y(t+\tau)dt$$

Si può dimostrare analiticamente che questa funzione coincide con la risposta impulsiva h(τ) del sistema:

$$h(\tau) = R_{ny}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)y(t+\tau)dt$$

Ricordiamo che la funzione di correlazione tra due segnali è una misura della dipendenza di un segnale dall’altro; essa vale evidentemente o quando i due segnali sono indipendenti tra loro.

Il vantaggio di usare l’ultima relazione per stimare la funzione h(τ) è quella per cui il rumore è un fenomeno reale.

Un’altra applicazione in cui è possibile sfruttare il rumore è quando tale rumore si somma ad un segnale periodico s(t), dando il segnale complessivo

$$x(t) = n(t) + s(t)$$

Se calcoliamo la **funzione di autocorrelazione** di tale segnale, otteniamo

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [n(t)+s(t)][n(t+\tau)+s(t+\tau)]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)n(t+\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)s(t+\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)n(t+\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)s(t+\tau)dt$$

Abbiamo ottenuto la somma di 4 termini. Il primo termine è la funzione di autocorrelazione del rumore, che è nulla data la casualità del processo di rumore. L’ultimo termine è invece la funzione di autocorrelazione del segnale periodico (deterministico), che a priori non è nulla. Scriviamo quindi che

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)s(t+\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t)n(t+\tau)dt + R_{ss}(\tau)$$

Questa relazione ci dice che possiamo rilevare la presenza della componente periodica del segnale x(t) semplicemente verificando se $R_{xx}(\tau)$ è nulla oppure no. Se risulta $R_{xx}(\tau)\neq 0$ per almeno un valore di τ, possiamo concludere che x(t) comprende una componente periodica. Ricordiamo infatti che la funzione di autocorrelazione di un segnale quantifica di quanto, in media, siano correlati tra loro i valori del segnale stesso in diversi istanti di tempo.

STRUMENTI PER L'ANALISI DEL RUMORE

Cominciamo adesso a vedere quali strumenti possono essere utilizzati per l'analisi statistica del processo di rumore.

Intanto, per indicare un processo stocastico si usa solitamente la notazione $x(t)$, la quale rappresenta in pratica una variabile aleatoria estratta dal processo al generico istante t. Nel caso del rumore, useremo la notazione **n(t)**.

Il fatto che si ritenga il processo di rumore stazionario ci dice che quella variabile aleatoria ha le stesse caratteristiche statistiche (vale a dire densità di probabilità, media, varianza e così via) quale che sia l'istante t considerato.

Inoltre, abbiamo detto che il rumore consiste nelle fluttuazioni casuali della tensione o della corrente: di conseguenza, con n(t) possiamo teoricamente indicare sia la **corrente di rumore**, nel caso in cui analizziamo le correnti, sia la **tensione di rumore**, nel caso in cui analizziamo le tensioni.

Uno dei parametri maggiormente utilizzati per lo studio di un processo stocastico è il cosiddetto **valore quadratico medio**, che indicheremo con $\overline{n}^2(t)$ oppure con $E\left[n^2(t)\right]$. Essendo il processo stazionario, la dipendenza dal tempo può essere eliminata, per cui scriveremo semplicemente $\overline{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}}$.

Il valore quadratico medio è nient'altro che una misura della ***potenza (statistica)*** *associata ad un segnale aleatorio.*

Legato al valore quadratico medio c'è un altro parametro, chiamato **valore efficace** del processo e definito dalla relazione

$$n_{eff} = \sqrt{\overline{n}^2}$$

(bisogna stare attenti a non confondere il valore efficace con il valore medio).

Sia il valore quadratico medio sia il valore efficace del processo di rumore risultano diversi da zero (ovviamente, sono entrambe quantità positive).

Tutti questi parametri sono relativi al dominio del tempo. Tuttavia, spesso è utile effettuare la propria analisi anche nel dominio della frequenza, al fine di aggirare le difficoltà di calcolo presentate, ad esempio, dagli *integrali di convoluzione*. Il parametro più utile, nel dominio della frequenza, è senz'altro la cosiddetta **densità spettrale di potenza**: questa funzione, solitamente indicata con **W(f)**, è una funzione della frequenza definita in modo tale che sia soddisfatta la relazione

$$\overline{n}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} W(f)df$$

ossia in modo tale che l'area da essa sottesa sia proprio pari al valore quadratico medio del processo stocastico considerato.

La funzione W(f) fornisce la distribuzione della potenza media di rumore in funzione della frequenza e si misura in W/Hz. Il prodotto **W(f)df** è, per definizione, la potenza media che il processo di rumore dissipa in una resistenza di 1Ω nella banda di frequenza (f,f+df).

Una importante proprietà della funzione W(f) è la sua relazione con la funzione di autocorrelazione del processo di rumore, di cui è la trasformata di Fourier:

$$W(f) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} R_{nn}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

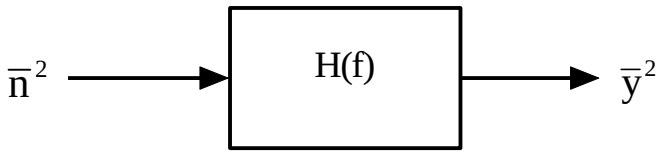
Considerando che $R_{nn}(t)$ è una funzione pari, si può anche scrivere che

$$W(f) = 4\int_{0}^{+\infty} R_{nn}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

Ovviamente, vale anche la trasformazione inversa; in particolare, sfruttando proprio la parità di $R_{nn}(\tau)$, si trova che la trasformazione inversa è

$$R_{nn}(\tau) = \int_{0}^{+\infty} W(f)\cos(2\pi f\tau)df$$

La funzione W(f) risulta particolarmente importante in funzione del discorso seguente: supponiamo che il nostro processo stocastico n(t) entri in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante, il quale produce una certa uscita y(t) che sarà anch’essa un processo stocastico:



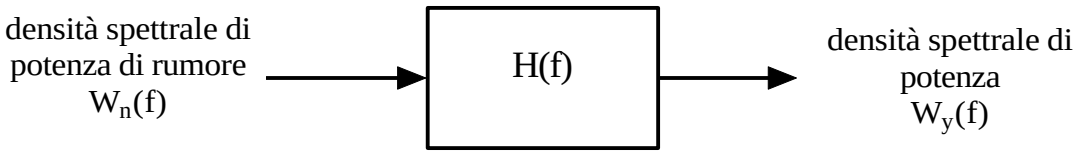
Se $\overline{n}^2$ è il valore quadratico medio del processo in ingresso, si può dimostrare (ed è un risultato molto noto) che il valore quadratico medio del processo in uscita è

$$\overline{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 W(f)df$$

dove H(f) è la **risposta in frequenza** del sistema stesso (cioè la trasformata di Fourier della risposta impulsiva) e la quantità $W_y(f) = |H(f)|^2 W(f)$ è la densità spettrale di potenza del segnale in uscita.

BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE

Consideriamo un generico sistema lineare tempo-invariante avente risposta in frequenza H(f). Supponiamo che l’ingresso del sistema sia rappresentato da un processo di rumore con densità spettrale di potenza $W_n(f)$:



Indicata con $G_y(f)$ la densità spettrale di potenza della tensione in uscita al sistema, abbiamo visto nel paragrafo precedente che la densità spettrale di potenza in uscita è

$$W_y(f) = |H(f)|^2 W(f)$$

per cui il valore quadratico medio del segnale in uscita è dato da

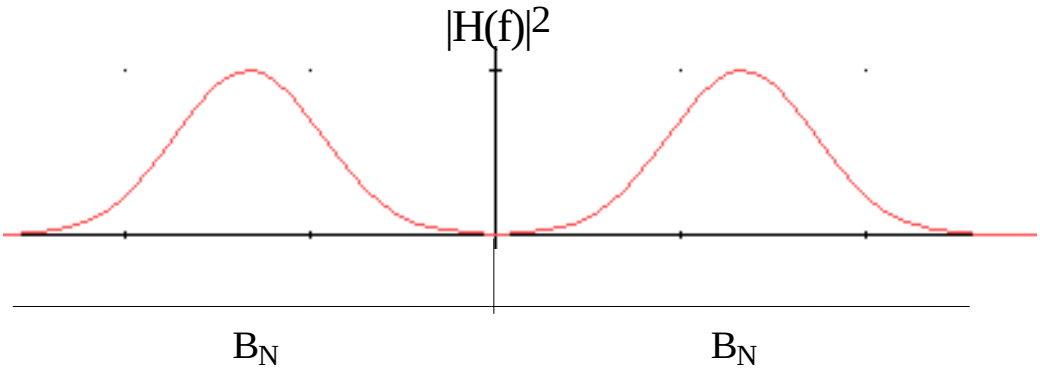
$$\overline{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 W(f) df$$

Mettiamoci in una condizione particolare, in cui la densità spettrale del rumore in ingresso è costante, su un certo valore α, per tutte le frequenze positive ed è nulla altrove. Sostituendo nell'integrale, troviamo che

$$\overline{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 W(f) df = \alpha \int_{0}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

In base a questa formula, il calcolo della potenza di rumore in uscita si può fare solo a patto di conoscere come è fatta la funzione di trasferimento del sistema (nelle frequenze positive) e a patto di poter calcolare quell'integrale. Spesso, la funzione di trasferimento ha una espressione complessa, per cui il calcolo di quell'integrale non è tanto agevole. Si preferisce allora utilizzare, come risultato di quell'integrale, un valore approssimato. Come si ricava questo valore approssimato?

La funzione $|H(f)|^2$ gode evidentemente di due proprietà: la prima è che è a valori non negativi; la seconda è che è una funzione pari, il che significa che presenta, per così dire, due "parti" perfettamente simmetriche rispetto alla frequenza nulla. Un esempio potrebbe essere la seguente funzione:

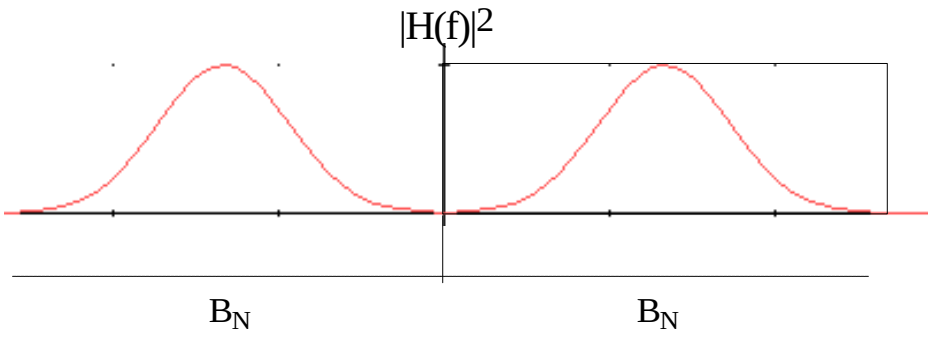


Come indicato anche in questa figura, è chiaro che la funzione $|H(f)|^2$, sia nel campo delle frequenze negative sia in quello delle frequenze positive, sarà non nulla entro un certo intervallo di frequenza di ampiezza B_N mentre sarà nulla al di fuori di tale intervallo.

Allora, calcolare l'integrale (monolatero)

$$\int_{0}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

equivale a calcolare l'area sottesa da una qualsiasi delle due "parti" della funzione $|H(f)|^2$. Quest'area non sarà superiore al rettangolo nel quale la curva è contenuta:



L'area di questo rettangolo è il prodotto del valore massimo della funzione $|H(f)|^2$ per l'ampiezza B_N dell'intervallo: posto allora $g_d = \left(|H(f)|^2\right)_{MAX}$ (è il massimo guadagno di potenza), l'approssimazione che si fa consiste nel porre

$$\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df = B_N g_d$$

per cui l'espressione utilizzata per il valore quadratico di rumore (o potenza di rumore) in uscita risulta essere

$$\boxed{\overline{y}^2 = \alpha \cdot g_d \cdot B_N}$$

All'ampiezza B_N si dà il nome di **banda equivalente di rumore** del sistema considerato ed è il valore usato sempre nei calcoli della potenza di rumore.

Appare ovvio, dalla relazione ricavata, che il valore quadratico medio del rumore in uscita è tanto minore quanto minore è B_N, per cui *è opportuno rendere B_N il più piccola possibile, compatibilmente con il normale funzionamento richiesto dal sistema nei confronti del segnale.*

TENSIONE E CORRENTE EQUIVALENTI DI RUMORE

Abbiamo visto in precedenza che la media, la varianza e la funzione di autocorrelazione di un processo ergodico sono state definite tramite un limite per $T \to \infty$, cioè per un tempo di osservazione infinito:

$$\overline{n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)dt$$

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [n(t) - \overline{n}]^2 dt$$

$$R_{nn}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t)n(t+\tau)dt$$

Non potendo estendere la nostra osservazione ad un tempo infinito, dovremo necessariamente condurre delle stime, facendo riferimento a tempi di osservazione finiti, e dovremo perciò saper valutare gli errori conseguenti.

Consideriamo ad esempio il valor medio $\bar{n}$: stimando questa quantità tramite un tempo di osservazione finito, otterremo una stima che differirà dal valore atteso, per cui avremo un errore; questo può essere visto a sua volta come una variabile aleatoria e possederà perciò una propria funzione di distribuzione; la conoscenza di questa funzione di distribuzione consente di prevedere la probabilità ampiezza dell'errore della stima o, alternativamente, consente di valutare quanto deve essere lungo il periodo T di osservazione per ridurre l'errore ad un livello accettabile.

Un caso che si presenta frequentemente è quello in cui la distribuzione degli errori commessi nella valutazione del valor medio del processo di rumore è di tipo gaussiano; in questo caso, possiamo allora sfruttare tutto quello che sappiamo circa la distribuzione gaussiana. Per esempio, ricordando che l'intervallo di confidenza $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$ ad un livello di confidenza del 68%, potremo dire che il 68% delle misure ha un errore inferiore ad 1 deviazione standard; oppure, ricordando che l'intervallo di confidenza $[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$ ad un livello di confidenza del 95%, potremo dire che il 95% delle misure ha un errore inferiore a 2 deviazioni standard e così via.

Il rumore è una grandezza aleatoria, ma i suoi effetti sulla strumentazione elettronica vanno necessariamente comparati come quelli derivati da segnali in genere deterministici. Allo scopo di quantificare gli effetti del rumore, si introducono allora le seguenti due grandezze caratteristiche:

- **tensione (equivalente) di rumore** di uno strumento: questa quantità, indicata con $\mathbf{V_n}$, è definita come il valore efficace della tensione di rumore ai morsetti di uscita, riportata all'ingresso, in uno strumento, considerato non rumoroso, che abbia i morsetti in cortocircuito. Vediamo di spiegare questa definizione, ossia sostanzialmente vediamo come si misura V_n: chiudendo in cortocircuito i morsetti di ingresso dello strumento (in modo che non ci sia alcun ingresso di segnale), si misura il valore efficace V_y della tensione registrata in uscita (che sarà una tensione di rumore proprio perché non ci sono altri segnali in gioco); successivamente, si calcola la tensione V_n, da porre in ingresso allo strumento supposto adesso non rumoroso, per avere in uscita proprio V_y. Talvolta, in uscita dallo strumento si pone un filtro passa-banda con caratteristiche note, in modo da definire in modo univoco la banda di frequenza alla quale ci si sta riferendo. Capita inoltre che la tensione di rumore di uno strumento non sia costante per tutte le frequenze, ma abbia una certa variabilità (generalmente, è maggiore alle frequenze più basse): per questo motivo, spesso i costruttori forniscono proprio l'andamento di questa tensione in funzione della frequenza. La V_n si misura in $nV/\sqrt{Hz}$ per una specifica frequenza oppure anche in V con riferimento ad una specifica banda di frequenza;
- **corrente (equivalente) di rumore** di uno strumento: questa quantità, indicata con $\mathbf{I_n}$, è definita come il valore efficace della corrente che circola all'interno dello strumento quando questo abbia i morsetti di ingresso aperti. La misura di questa quantità si basa sulla misura della V_n descritta poco fa: per prima cosa, si chiudono i morsetti di ingresso dello strumento su una resistenza R o su un condensatore X_C, in modo che la corrente di rumore dia luogo ad una tensione di rumore V_y data da Ri_n oppure $X_C I_n$; si va quindi a misurare la tensione di rumore in uscita e la si riporta all'ingresso (si calcola cioè la tensione che, posta in ingresso allo strumento, supposto non più rumoroso) dia in uscita proprio V_y), ottenendo una certa V_x; questa tensione, tramite i valori di R o X_C, fornisce la corrente I_n. Bisogna considerare che, se si usa una resistenza R in ingresso, questa produce di suo un rumore (vedremo che si tratta di *rumore termico*), per cui la tensione V_x riportata in ingresso dovrà prima essere depurata di tale tensione e poi potrà essere usata per il calcolo di I_n. Anche nel caso della misura di I_n è possibile predisporre un filtro passa-banda in uscita, in modo da riferirsi ad una specifica banda. Inoltre, anche In possiede una certa variabilità con la frequenza (per i transistor ad effetto di campo essa aumenta all'aumentare della frequenza, mentre invece per gli

amplificatori operazionali ed i transistor bipolari essa è più rilevante alle basse frequenze). La I_n si misura in $nA/\sqrt{Hz}$ per una specifica frequenza oppure anche in A con riferimento ad una specifica banda di frequenza.

IL RUMORE TERMICO

Il tipo di rumore sicuramente prevalente nei dispositivi elettronici è il cosiddetto **rumore termico**[2]: *se prendiamo un resistore fisico generico, mantenuto isolato da qualsiasi circuito (posto cioè in condizioni di circuito aperto), e colleghiamo i suoi morsetti a quelli di un oscilloscopio molto sensibile, osserviamo delle leggere fluttuazioni di tensione, che costituiscono appunto il rumore termico.*

Da un punto di vista fisico, la causa del rumore termico è il continuo e disordinato moto di agitazione termica degli elettroni nel resistore.

Lo studio di questo rumore ha portato a concludere che si tratti di un ***processo stocastico avente distribuzione normale (o gaussiana) delle ampiezze e valore medio nullo*** (come detto già in precedenza). Inoltre, indicata con R la resistenza del resistore, con T la temperatura alla quale esso si trova e con k la costante di Boltzmann (**$1.38*10^{-23}$ Joule/°Kelvin**), la densità spettrale (monolatera) di potenza di tensione di rumore (misurata in V^2/Hz) risulta avere espressione

$$W(f) = 4kTR$$

Le principali caratteristiche di questa funzione sono la diretta proporzionalità con R e con T e l'indipendenza dalla frequenza (da cui discende l'espressione **rumore bianco**). E' bene però precisare che ***questa espressione vale rigorosamente per frequenze inferiori a 10^{12}(Hz):*** considerando che tali frequenze sono quelle in uso nell'elettronica e nei normali sistemi di comunicazioni, essa va più che bene[3]; se invece si sale con la frequenza, allora l'espressione diventa più complicata e precisamente la seguente:

$$W(f) = 4kTR \cdot \frac{\frac{hf}{kT}}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

In pratica, alle alte frequenze bisogna considerare quel termine frazionario, che invece a frequenze inferiori a 10^{12} Hz risulta essere approssimativamente pari ad 1 (basta sviluppare in serie il termine esponenziale, arrestandosi al secondo termine).

Per risalire, dalla densità spettrale di potenza di tensione di rumore, al valore quadratico medio della tensione di rumore, dobbiamo integrare la densità spettrale di potenza su tutte le frequenze positive. Anziché, però, effettuare l'integrazione tra 0 ed ∞, ci limitiamo ad un generico intervallo monolatero di frequenza $[0,+B]$, che supponiamo sia quello nel quale il resistore deve lavorare (oppure quello entro il quale viene effettuata la misura): il risultato della integrazione è allora

[2] Il rumore termico è anche noto come **rumore di Nyquist** o anche **rumore di Johnson**.

[3] Le frequenze considerato coprono in pratica il campo delle **radioonde** attualmente utilizzate; al di sopra di tali frequenze intervengono fenomeni quantistici che fanno decrescere il rumore generato.

$$\bar{v}^2 = \int_0^B W(f)df = \int_0^B 4ktRdf = 4kTRB$$

Questa relazione indica, come è abbastanza ragionevole aspettarsi, che *il rumore termico è direttamente proporzionale alla temperatura.* Esso quindi tende a 0V per T che tende a 0(°K).

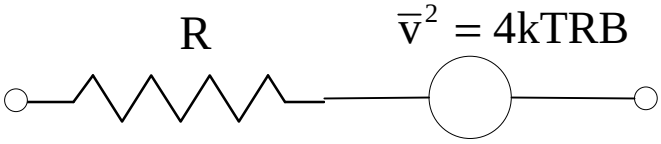
Ovviamente, facendo la radice quadrata di $\bar{v}^2$ si ottiene il valore efficace della tensione di rumore termico:

$$v_{eff} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{4kTRB}$$

Vediamo allora come è possibile tenere conto della presenza del rumore termico nel modello circuitale di un resistore: se non consideriamo il rumore, ossia consideriamo il resistore ideale, sappiamo bene che il modello circuitale è semplicemente

ossia un elemento banalmente caratterizzato dalla equazione di funzione V=RI.

Viceversa, al fine di tenere conto del rumore, basta aggiungere un generatore di tensione di valore quadratico medio pari a $\bar{v}^2 = 4kTRB$, dove B è sempre la banda monolatera del sistema di misura: il modello circuitale diventa perciò il seguente:



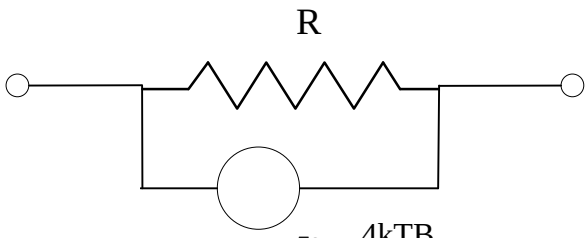
Facciamo osservare che, nel generatore di tensione, non sono stati indicati né il valore istantaneo né le polarità: ciò deriva proprio dal fatto che non possiamo prevedere né l'una né l'altra cosa, per cui possiamo solo considerare il valore quadratico medio di quella tensione. Nel fare i calcoli, dobbiamo ovviamente considerare, come tensione di rumore, la quantità $v_{eff} = \sqrt{\bar{v}^2}$.

Quello è dunque il modello di un resistore reale ed è evidentemente il "*modello di Thevenin*". Ne esiste anche un altro, detto "*modello di Norton*", il quale tiene conto, anziché della tensione di rumore, della corrente di rumore, il cui valore quadratico medio risulta essere

$$\bar{i}^2 = \frac{4kTB}{R} = 4kTBG$$

e deriva dalla funzione densità spettrale di potenza della corrente di rumore $W_I(f) = \frac{4kT}{R}$.

Il modello è il seguente:



Il rumore bianco additivo gaussiano

Abbiamo prima trovato che la densità spettrale di potenza del rumore termico è $W(f) = 4kTR$ e abbiamo sottolineato come si tratti di una funzione costante al variare della frequenza f. In termini di armoniche, ciò significa che tutte le armoniche alle diverse frequenze hanno la stessa ampiezza. Un rumore così fatto prende il nome di “**rumore bianco**”, in contrapposizione al “*rumore colorato*”, per il quale la S(f) è variabile con f.

Un’altra cosa che è stata verificata, come detto, è che questo rumore termico ha una distribuzione di probabilità delle ampiezze di tipo gaussiano ed è questo il motivo per cui si parla di **rumore bianco additivo gaussiano** o, più brevemente, **AWGN**. Il termine “additivo”, come vedremo in seguito, indica che questo tipo di rumore si somma semplicemente al segnale utile.

Osservazione

In genere, la tensione equivalente di rumore termico è molto bassa, dell’ordine dei μV, ma essa può comunque dare problemi, specialmente quando agisce all’ingresso di un amplificatore con un guadagno molto elevato: in questi casi, infatti, proprio l’elevato guadagno può dare in uscita tensioni dell’ordine di frazioni di Volt, anche in assenza di ulteriori segnali applicati all’amplificatore.

Facciamo allora un esempio pratico, considerando un amplificatore con guadagno di tensione pari a 10^6 e una banda equivalente di rumore di 10 kHz. Supponiamo l’amplificatore dotato di una resistenza interna di 1 kΩ, la quale quindi produce una tensione di rumore termico. Il valore quadratico medio della tensione di uscita è

$$\bar{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 W(f) df = 4kTR \int_{0}^{+\infty} |H(f)|^2 df \cong 4kTR \cdot g_d B_N$$

Il corrispondente valore efficace, che quindi rappresenta la tensione equivalente di rumore in uscita dall’amplificatore, è dunque

$$v_{out} = \sqrt{\bar{y}^2} = \sqrt{4kTR \cdot g_d B_N} = \sqrt{4kTRB_N} \cdot \sqrt{g_d}$$

Il termine $\sqrt{g_d}$ non è altro che il guadagno di tensione. Assumendo che la temperatura sia T=300K, quella relazione dà una tensione di uscita di circa 0.2V. Se questo amplificatore è all’interno di uno strumento, questo valore così alto di tensione equivalente di rumore può chiaramente limitare in modo pesante la risoluzione dello strumento stesso.

Per minimizzare la tensione equivalente di rumore termico, che è sempre presente in qualsiasi dispositivo in cui vi sia materiale conduttore, è necessario ridurre quanto più possibile la resistenza

interna dell'amplificatore e limitare l'ampiezza della banda equivalente di rumore, compatibilmente con le esigenze legate al segnale da amplificare. Ad esempio, quando il segnale da amplificare è a banda stretta, conviene scegliere un amplificatore accordato sulla frequenza centrale di quella stessa banda, in modo da amplificare solo le componenti di rumore contenute in quella banda e non quelle situate all'esterno.

POTENZA DISPONIBILE E POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE

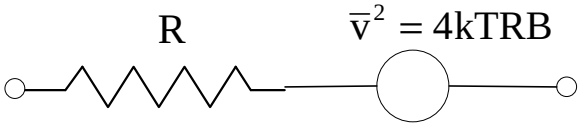
Supponiamo di avere un certo sistema elettronico (sia esso un dispositivo o un semplice circuito) in grado di trasferire potenza al carico collegato ai suoi morsetti: *si definisce* ***potenza disponibile*** *la massima potenza che il sistema può trasferire al carico.* Dall'elettrotecnica ci ricordiamo un fondamentale teorema circa la potenza trasferibile da un sistema ad un carico: si tratta del cosiddetto **teorema del massimo trasferimento di potenza**, secondo il quale *un sistema è in grado di trasferire su un carico, rappresentato da una certa impedenza* $\dot{z}_L$*, la massima potenza possibile solo quando*

$$\boxed{\dot{z}_L = (\dot{z})^*}$$

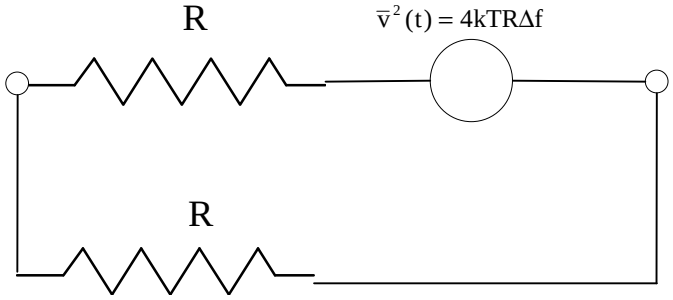
dove $\dot{z}$ *è l'impedenza di uscita del sistema stesso, ossia l'impedenza vista dal carico.*

Vediamo come ci può essere di aiuto questo nei discorsi che stiamo facendo.

Come circuito monoporta consideriamo il modello circuitale prima ricavato per un resistore di resistenza R affetto da rumore termico:



E' chiaro che la presenza di quel generatore di tensione (che poi è la tensione di rumore) conferisce a questo circuito la capacità di trasferire una certa potenza all'eventuale carico connesso ai morsetti. Se questo carico consiste in una certa impedenza $\dot{z}_L$, il teorema prima enunciato ci dice che il massimo trasferimento di potenza si ha quando tale carico è pari al complesso coniugato dell'impedenza del circuito di alimentazione: tale impedenza è reale e pari ad R, per cui il massimo trasferimento di potenza si avrà su un carico pari a sua volta ad R:



Quindi, *in questo circuito la potenza trasferita sul carico è pari esattamente a quella che abbiamo definito potenza disponibile* (che, ovviamente, in questo caso è una *potenza disponibile di rumore*). Vogliamo allora valutare quest'ultima: ovviamente, dato che non conosciamo il valore preciso della tensione del generatore,

ma solo il suo valore quadratico medio, ciò che possiamo calcolare è il valore medio della potenza disponibile, definito, in questo caso, da

$$\overline{P_L(t)} = R\overline{i^2(t)}$$

Dobbiamo dunque calcolare $\overline{i^2(t)}$. Applicando la legge di Kirchoff delle tensioni a l'equazione di funzionamento del resistore, troviamo che $i(t) = \frac{v(t)}{2R}$, da cui si ricava che

$$\overline{i^2(t)} = \frac{\overline{v^2(t)}}{4R^2}$$

e quindi anche che

$$\overline{P_L(t)} = \frac{\overline{v^2(t)}}{4R}$$

Sapendo adesso che $\overline{v}^2(t) = 4kTRB$, dove ricordiamo che B è la banda di frequenza nel quale lavora il circuito, possiamo concludere che

$$\boxed{\overline{P_L(t)} = kTB}$$

Abbiamo dunque trovato, con questo discorso, che *il valor medio della potenza di rumore disponibile generata da un resistore è* $\overline{P_L(t)} = kTB$.

La cosa interessante è che <u>questo valore medio non dipende dalla resistenza R, ma dipende SOLO dalla temperatura e dalla banda di lavoro</u>.

Da questo valore medio, possiamo ricavare la cosiddetta **densità spettrale di potenza disponibile**, che di indica di solito con $\mathbf{G_a(f)}$: restringendo l'analisi solo alle frequenze positive[4] (che sono quelle fisiche) si trova che

$$\boxed{G_a(f) = kT}$$

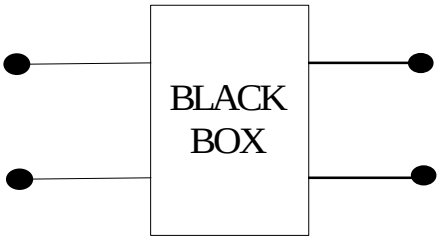
Questa quantità si misura in W/Hz ed è spesso espressa in dB.

In tutti i discorsi in cui è coinvolto il rumore, si fa sempre l'ipotesi che dall'ingresso all'uscita dei dispositivi venga trasferita la massima potenza di rumore, per cui si fa implicitamente riferimento sempre alla potenza disponibile.

[4] Nel seguito, a meno di specifico avviso, gli spettri (cioè le trasformate di Fourier) e le densità spettrali (di potenza o di energia) si intenderanno sempre unilateri, ossia definiti solo per le frequenze positive. Spettri e densità bilatere verranno invece usati in quei casi in cui essi concorrono a semplificare i calcoli.

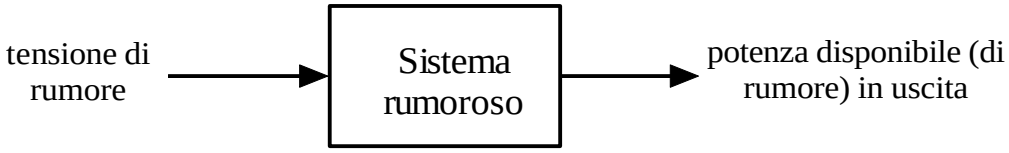
FATTORE DI RUMORE E CIFRA DI RUMORE

Consideriamo un circuito biporta che rappresentiamo mediante un doppio-bipolo:



Supponiamo che questo circuito sia "rumoroso", ossia che esso introduca, quando riceve un segnale in ingresso, un "rumore" (che può essere tensione di rumore termico o corrente di rumore termico) dovuto alla natura fisica degli elementi da cui è costituito.

Supponiamo che il circuito in esame venga alimentato da un generatore che applica una certa tensione ai morsetti di ingresso: questo generatore presenta una propria resistenza e questo implica che esso generi, oltre al segnale utile, anche un certo **rumore termico**, ossia una tensione di rumore che si sovrappone a quella costituita dal segnale utile. Dato che vogliamo studiare il comportamento del circuito dal punto di vista del rumore, supponiamo che l'ingresso al circuito non sia il segnale utile sommato al rumore, ma sia solo il rumore:



Così come in ingresso, in uscita avremo una certa tensione (che sarà evidentemente tensione di rumore): *avendo supposto il circuito rumoroso, ci aspettiamo in uscita un contributo dovuto al rumore in ingresso, più un contributo dovuto al rumore introdotto dal circuito stesso.*

Vediamo allora di quantificare, a livello analitico, tutte queste considerazioni.

Indichiamo con N_{dU} la **potenza di rumore (disponibile) in uscita**, ossia la potenza di rumore in uscita al circuito[5]. Questa potenza di uscita, come detto, sarà la somma del contributo dovuto al rumore in ingresso, che indichiamo genericamente con N_{dI}, e del contributo intrinsecamente introdotto dal sistema, che indichiamo con N_d: quindi

$$N_{dU} = N_{dI} + N_d$$

Si definisce allora **fattore di rumore** il termine

$$F = \frac{N_{dU}}{N_{dI}} = 1 + \frac{N_d}{N_{dI}}$$

ossia il rapporto tra la potenza disponibile totale di rumore in uscita e la frazione di tale potenza dovuta solo all'ingresso di rumore (e indipendente dal rumore introdotto dal sistema).

[5] Usiamo l'aggettivo "*disponibile*" in quanto abbiamo supposto verificata la condizione di adattamento

Da questa relazione risulta evidente che

$$N_{dU} = FN_{dI}$$

ossia che la potenza (disponibile) di rumore in uscita è pari alla potenza (disponibile) di rumore in ingresso moltiplicata per il fattore di rumore: *a parità di guadagno e di rumore in ingresso, sarà migliore, perciò, tra due sistemi, quello che presenta il fattore di rumore più basso. Il valore minimo di F è ovviamente 1 e si ottiene per* ***dispositivi non rumorosi****, che cioè non generano alcun rumore al loro interno.* Nella pratica, la condizione F=1 non è mai ottenibile, ma è ciò a cui bisogna tendere.

Possiamo anche quantificare meglio il termine N_{dI}: infatti, avendo detto che esso corrisponde al contributo proveniente dalla potenza di rumore in ingresso, possiamo scrivere che

$$N_{dI} = kTg_d B_N$$

Vediamo come si giustifica questa relazione: intanto, il prodotto kT è la densità di potenza disponibile di rumore erogata dal generatore in ingresso; B_N è la banda equivalente di rumore definita nel paragrafo precedente; g_d è il guadagno di potenza del circuito. Allora, se in ingresso abbiamo una potenza di rumore kTB_N, questa potenza, entrando nel circuito, viene da esso amplificata secondo un guadagno g_d (in quanto il circuito non può distinguere un segnale utile dal rumore, per cui effettua su entrambi la stessa azione), per cui in uscita essa diventa $N_{dI} = kTg_d B_N$.

Sulla base di ciò, avendo detto che $F = 1 + \frac{N_d}{N_{dI}}$, possiamo scrivere che

$$\boxed{F = 1 + \frac{N_d}{kTg_d B_N}}$$

Da questa relazione si deduce che il fattore di rumore è funzione della temperatura, per cui assume in teoria un valore diverso per ogni valore di T. Nella pratica, allora, si prende come valore di F per un dispositivo (o circuito) il valore misurato alla temperatura T=293°K.

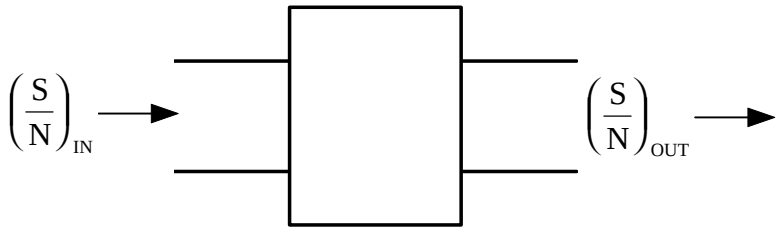
Ricordiamo che il fattore di rumore, essendo un rapporto tra potenze (e quindi una quantità adimensionale), è spesso espresso in dB e, in questo caso, prende il nome di **cifra di rumore** (simbolo: **NF**):

$$NF = 10\log_{10} F = 10\log_{10}\left(1 + \frac{N_d}{kTg_d B_N}\right)$$

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE IN INGRESSO ED IN USCITA

Abbiamo prima definito il fattore di rumore di un circuito secondo la relazione $F = \frac{N_{dU}}{N_{dI}}$, ossia quindi come rapporto tra la potenza totale di rumore in uscita e la quota parte, di tale potenza, dovuta solo al rumore in ingresso al circuito. E' possibile quantificare anche in altro modo la rumorosità del circuito o dispositivo in esame, facendo riferimento questa volta del rapporto segnale-rumore.

Precisamente, dato un generico biporta, indichiamo con $\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}$ il rapporto segnale-rumore in ingresso e con $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$ il rapporto segnale-rumore in uscita:



Una misura quantitativa della rumorosità introdotta dal sistema è data dal rapporto tra il rapporto S/N in ingresso e il rapporto S/N in uscita. Vediamo allora di quantificare meglio questo parametro.

Supponiamo che il segnale in ingresso al sistema sia la somma di un segnale utile $s_i(t)$ e di un rumore additivo $n_i(t)$:

$$x(t) = s_i(t) + n_i(t)$$

Analogamente, in uscita otterremo un segnale y(t) che sarà ancora la somma di un segnale utile e di un rumore, entrambi dovuti alle operazioni che il sistema ha compiuto sui segnali in ingresso:

$$y(t) = s_u(t) + n_u(t)$$

Indichiamo adesso con P_{Si} e P_{Ni} le potenze dei segnali in ingresso e, analogamente, con P_{Su} e P_{Nu} le potenze dei segnali in uscita. Il rapporto S/N in ingresso è allora P_{Si}/P_{Ni}, mentre quello in uscita è P_{Su}/P_{Nu}, per cui possiamo scrivere che

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{P_{Si}}{P_{Ni}}}{\frac{P_{Su}}{P_{Nu}}}$$

Il sistema, nel ricevere il segnale x(t) di ingresso, "compie" sostanzialmente due operazioni: effettua le proprie operazioni sul segnale di ingresso e, al segnale così ottenuto, aggiunge un rumore generato al suo interno, dando origine al segnale di uscita y(t). Questo significa che esiste un preciso legame tra la potenza di segnale utile in ingresso ed in uscita, rappresentato banalmente dal guadagno di potenza del sistema: indicato con g_d tale guadagno, possiamo perciò scrivere che

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{\frac{P_{Si}}{P_{Ni}}}{\frac{P_{Su}}{P_{Nu}}} = \frac{\frac{P_{Si}}{P_{Ni}}}{\frac{g_d P_{Si}}{P_{Nu}}} = \frac{\frac{1}{P_{Ni}}}{\frac{g_d}{P_{Nu}}} = \frac{P_{Nu}}{g_d P_{ni}}$$

E' ovvio che il discorso del guadagno di potenza è legato solo al segnale utile, in quanto per il rumore bisogna anche considerare il contributo di rumore generato internamente dal sistema.

Osservando l’espressione ricavata, notiamo che si tratta semplicemente del fattore di rumore considerato nel paragrafo precedente, per cui concludiamo che

$$F = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}} = \frac{P_{Nu}}{g_d P_{ni}}$$

In definitiva, quindi, ***l’espressione del fattore di rumore può essere ricavata sia facendo un discorso relativo solo al rumore, nel suo passaggio dall’ingresso all’uscita del sistema, sia anche confrontando il rapporto S/N in ingresso con quello in uscita.***

Con riferimento all’espressione $F = \frac{P_{Nu}}{g_d P_{ni}}$ appena trovata, possiamo fare una ulteriore considerazione. Infatti, ricordiamoci che la potenza di un processo aleatorio come il rumore coincide con il valore quadratico medio del processo stesso e noi sappiamo che tale valore quadratico medio è ricavabile integrando la densità spettrale di potenza: scriviamo perciò che

$$F = \frac{P_{Nu}}{g_d P_{ni}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{Nu}(f)df}{g_d \int_{-\infty}^{+\infty} W_{Ni}(f)df}$$

Mettiamoci nel caso particolare in cui il rumore all’ingresso sia bianco su una certa banda B e nullo altrove. Abbiamo che

$$F = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{Nu}(f)df}{g_d \int_{-\infty}^{+\infty} W_{Ni}(f)df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{Nu}(f)df}{g_d \cdot \alpha \cdot B}$$

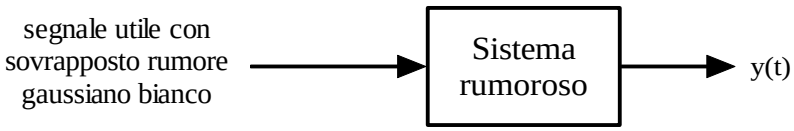
Usando nuovamente il concetto di banda equivalente di rumore, possiamo dare una stima peggiorativa della potenza di rumore in ingresso, approssimando quell’integrale con $g_d \cdot \alpha \cdot B_N$, per cui concludiamo che

$$F = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{Nu}(f)df}{g_d \cdot \alpha \cdot B} = \frac{g_d \cdot \alpha \cdot B_N}{g_d \cdot \alpha \cdot B} = \frac{B_N}{B}$$

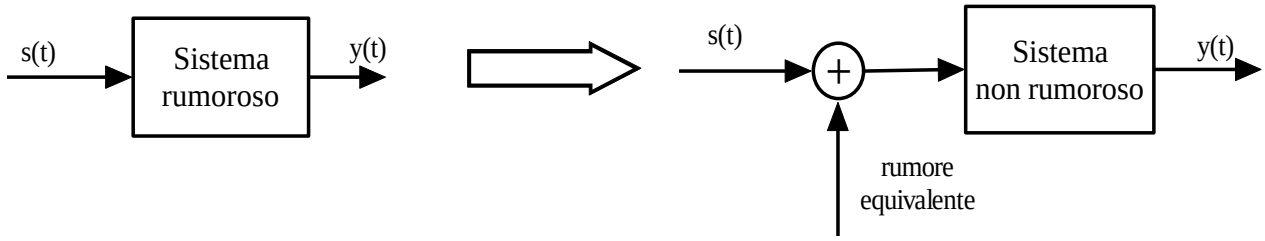
Abbiamo cioè trovato che ***il fattore di rumore del nostro sistema è interpretabile come il rapporto tra la banda equivalente di rumore del sistema stesso e la banda del rumore in ingresso.*** Questo risultato conferma ancora una volta la necessità di rendere B_N la più piccola possibile.

TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE

Supponiamo di avere un generico sistema in ingresso al quale giunga un segnale con sovrapposto del rumore, che supponiamo sempre essere un *rumore gaussiano bianco*. Tale rumore (che, per esempio, può essere il rumore prodotto dalla resistenza interna di un generatore che alimenta il sistema) si può evidenziare mediante un **generatore equivalente di rumore**, la cui densità spettrale di potenza disponibile sarà kT_g (dove il pedice "g" sta per "*generatore*"):

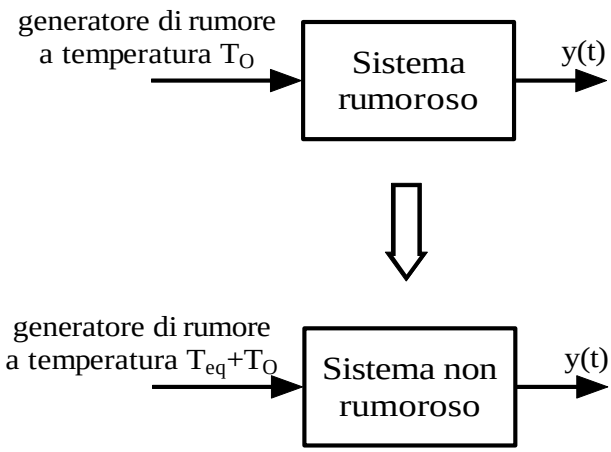


Il sistema che riceve tale segnale affetto da rumore è un sistema reale e quindi, come tale, **rumoroso**: esso aggiunge cioè dell'altro rumore a quello già presente (basti pensare ad un amplificatore che, essendo realizzato mediante dispositivi attivi, comprende svariate cause di rumore). Al fine di includere questo nuovo contributo di rumore nel nostro modello, così come fatto nel caso del singolo resistore rumoroso, è molto comodo rappresentare il sistema come ideale (cioè non rumoroso) e considerare un ulteriore ingresso di rumore, opportunamente quantificato:



Con s(t) si è indicato il segnale, affetto da rumore, in ingresso al sistema rumoroso: la corrispondente uscita y(t) è la stessa che si ottiene dallo stesso sistema, ritenuto però non rumoroso, quando l'ingresso è rappresentato dalla somma di s(t) e di un *rumore equivalente*. Dobbiamo allora capire come quantificare questo *rumore equivalente*: si usa allora il concetto di *temperatura equivalente di rumore* del sistema considerato.

Supponiamo che il rumore in ingresso al sistema reale sia prodotto da un generatore a temperatura T_O (per esempio da un resistore reale a tale temperatura); sia y(t) l'uscita corrispondente; se adesso supponiamo il sistema ideale, ci chiediamo di quanto dobbiamo aumentare la temperatura T_O di funzionamento del generatore per ottenere da tale sistema la stessa uscita y(t) di prima. La schematizzazione è cioè la seguente:



Il suddetto aumento di temperatura è la **temperatura equivalente di rumore**. Questo modo di procedere è utile per la determinazione di T_{eq} sulla base delle formule esaminate nei paragrafi precedenti: infatti, abbiamo trovato nel paragrafo precedente che la potenza disponibile di rumore in uscita è data da

$$N_{dU} = kT_0 g_d B_N + N_d$$

dove il primo termine rappresenta il contributo dovuto al generatore in ingresso, che funziona alla temperatura T_0, mentre il secondo termine rappresenta il contributo del rumore interno al sistema. Nell'ipotesi che il sistema sia ideale, per cui $N_d=0$, e che il generatore in ingresso venga portato alla temperatura di lavoro T_0+T_{eq}, il contributo dovuto al rumore in ingresso diventa $k(T_0+T_{eq})g_d B_N$ e quindi la potenza disponibile di rumore in uscita risulta essere proprio

$$N_{dU} = k(T_0 + T_{eq})g_d B_N$$

Uguagliando le due espressioni ottenute per N_{du}, si ottiene facilmente che

$$\boxed{T_{eq} = \frac{N_d}{kg_d B_N}}$$

Quindi, la temperatura equivalente di rumore è un parametro che ci consente di simulare il comportamento del sistema, dal punto di vista del rumore, assumendo il sistema stesso ideale e facendo risalire il rumore generato interamente a quello che arriva in ingresso. Detto anche in altre parole, il sistema diventa ideale e tutte le cause di rumore vengono poste a monte di esso.

E' facile trovare il legame esistente tra la temperatura di rumore appena definita ed il fattore di rumore, che ricordiamo avere, per una temperatura di funzionamento $T=T_0$, l'espressione

$$F = 1 + \frac{N_d}{kT_0 g_d B_N}$$

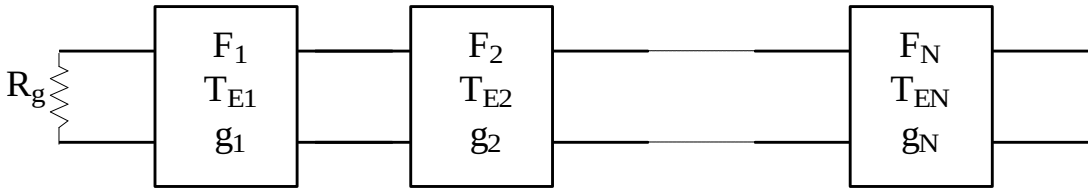
Confrontando questa relazione con l'espressione di T_{eq}, si deduce che

$$\boxed{F = 1 + \frac{T_{eq}}{T_0}}$$

C'è una fondamentale differenza tra il modello che noi otteniamo usando la temperatura equivalente di rumore e quello che otteniamo usando il fattore di rumore: *la temperatura equivalente di rumore esprime infatti il rumore introdotto dal sistema mediante un termine additivo, mentre invece, come visto in precedenza, il fattore di rumore rappresenta tale rumore con un fattore moltiplicativo che, applicato alla densità spettrale del rumore realmente presente in ingresso, fornisce la densità spettrale del rumore da considerare in ingresso.*

FATTORE DI RUMORE E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE NEI SISTEMI IN CASCATA

Supponiamo di avere un certo numero N di sistemi, ciascuno caratterizzato da un proprio fattore di rumore, da una propria temperatura di rumore e da un proprio guadagno di potenza (maggiore o minore di 1 a seconda che si tratti di un amplificatore o di un attenuatore), collegati in cascata come nella figura seguente:



Supponiamo che questi sistemi siano tutti in condizione di adattamento, per cui ricevono ed erogano tutti la massima potenza possibile: sotto questa ipotesi, si può dimostrare che ***il guadagno di potenza del sistema complessivo è dato semplicemente dal prodotto dei singoli guadagni di potenza,*** ossia

$$g_{TOT} = \prod_{k=1}^{N} g_k$$

Supponiamo adesso di chiudere l'ingresso del primo sistema su un resistore fisico, il quale quindi produce, come ingresso al sistema complessivo, una tensione di rumore di valore quadratico medio $\overline{v^2(t)} = 4ktR_gB$. Vogliamo conoscere il fattore di rumore e la temperatura equivalente di rumore del sistema complessivo.

Si può dimostrare che il fattore di rumore del sistema complessivo è il seguente:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} + \frac{F_3 - 1}{g_1 g_2} + \ldots + \frac{F_N - 1}{g_1 g_2 \cdots g_{N-1}}$$

Da questa formula si deduce che F è particolarmente condizionato dal primo sistema e molto meno da tutti gli altri, per cui, *dovendo progettare un sistema in cui più dispositivi sono collegati in cascata, è consigliabile porre, come primo dispositivo, uno con caratteristiche particolarmente buone nei riguardi del rumore, ponendo invece dopo dispositivi con caratteristiche anche meno pregiate.*

Ovviamente, questo discorso è valido quando tutti i sistemi presentano un guadagno maggiore di 1, ossia sono degli amplificatori: in questo caso, infatti, i denominatori delle varie frazioni vanno sempre crescendo e quindi la rilevanza degli ultimi dispositivi diventa sempre minore. Al contrario, invece, se ci sono degli attenuatori, ossia dispositivi con guadagno minore di 1, quel discorso può anche non risultare più valido.

A partire dal fattore di rumore, usando ancora una volta la relazione $T_{eq} = T_0(F-1)$, è immediato calcolarsi la temperatura equivalente di rumore del sistema complessivo:

$$T_{eq} = T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{g_1} + \frac{T_{eq,3}}{g_1 g_2} + \ldots + \frac{T_{eq,N}}{g_1 g_2 \cdots g_{N-1}}$$

RUMORE GRANULARE

A partire da questo paragrafo, intendiamo passare in rassegna altri tipi di rumore presenti nei sistemi elettronici.

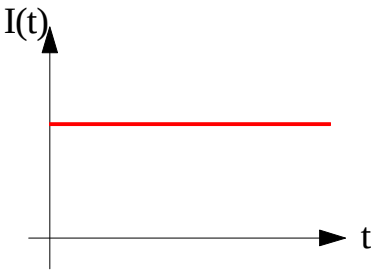
Al contrario del rumore termico, il quale si manifesta anche in assenza di corrente all'interno del resistore, il cosiddetto **rumore granulare** si manifesta solo in presenza di una corrente continua che attraversa il dispositivo considerato: questo accade perché questo tipo di rumore è strettamente legato alla natura discreta della carica elettrica ed ai meccanismi con cui essa viene trasportata. Inoltre, mentre il rumore termico è caratteristico dei resistori, il rumore granulare è tipico dei diodi, dei transistori bipolari e dei FET: in generale, è tipico dei dispositivi che utilizzano delle giunzioni.

Prendiamo come esempio una giunzione p-n polarizzata direttamente: sappiamo che la corrente diretta che la attraversa, in queste condizioni, è data dalle lacune che provengono dalla regione di tipo p e dagli elettroni che provengono dalla regione di tipo n: sia le lacune sia gli elettroni possiedono infatti l'energia necessaria per superare la barriera di potenziale presente alla giunzione. Il passaggio di ciascun portatore attraverso la giunzione dipende dal fatto che il portatore possieda una energia sufficiente ed una velocità diretta appunto verso la giunzione; l'insieme dei meccanismi che consentono l'attraversamento non è per noi noto, da cui ancora una volta la causalità di questo tipo di rumore.

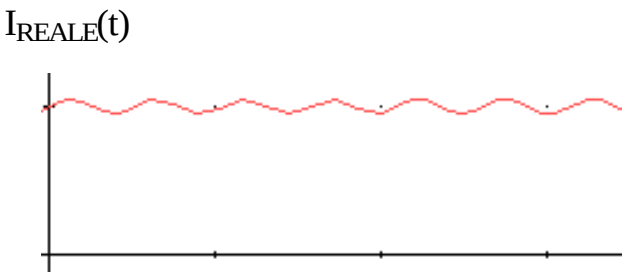
Sappiamo bene che l'equazione corrente-tensione per una giunzione p-n è la seguente:

$$I = I_S\left(e^{\frac{qV_a}{kT}} - 1\right)$$

Fissata la tensione continua di polarizzazione V_A, noi abbiamo dunque una corrente I costante nel tempo, per cui possiamo tracciare il seguente diagramma:



Questo andamento è quello teorico in assenza di rumore. *In presenza del rumore granulare, invece, noi osserviamo delle fluttuazioni della corrente attorno a quel valore medio* (si tenga presente che il valore medio della corrente di rumore, come della tensione di rumore, è sempre nullo, per cui valore medio della corrente complessiva è quello della corrente ideale):



Indicata con I_D la corrente ideale nel diodo, ossia quella prevista dalla equazione prima riportata, e indicata con I quella misurata sperimentalmente, ossia quella influenzata dal rumore granulare, è stato stimato che il valore quadratico medio della corrente di rumore è

$$\bar{i}^2 = \overline{(I - I_D)}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (I - I_D)^2 dt = 2qI_D\Delta f$$

dove ovviamente q è la carica dell'elettrone mentre Δf è l'intervallo di frequenza al quale lavora il dispositivo.

E' chiaro, da quella relazione, che la densità spettrale di potenza della corrente di rumore è

$$\boxed{S_I(f) = 2qI_D}$$

ossia abbiamo ancora una volta un rumore bianco.

Facciamo infine osservare che la relazione $\bar{i}^2 = 2qI_D\Delta f$ è valida solo fino a che la frequenza di lavoro è confrontabile con il fattore $1/\tau$, dove τ è il tempo di transito dei portatori attraverso la regione di carica spaziale (RCS) della giunzione. Dato che, nella maggior parte dei dispositivi, questo tempo è molto piccolo, per cui la corrispondente frequenza è molto alta, quella relazione risulta molto accurata per frequenze che arrivano fino a qualche GHz.

RUMORE FLICKER

Il cosiddetto **rumore flicker** è un tipo di rumore che si trova in tutti i dispositivi attivi ed anche in alcuni elementi discreti passivi, quali vecchi resistori al carbonio.

Le origini di questo tipo di rumore non sono ben note: nei transistori bipolari e nei diodi a giunzione esso risulta causata principalmente dalle cosiddette "trappole" (che sappiamo essere centri di generazione e ricombinazione di elettroni posti a metà tra la banda di valenza e quella di conduzione) associate a contaminazioni e difetti reticolari presenti nella RCS. L'effetto di cattura e rilascio di portatori da parte di queste trappole non è da noi determinabile, da cui ancora una volta la casualità di questo tipo di rumore.

L'unica cosa che possiamo dire è che l'energia del rumore flicker è concentrata per lo più alle basse frequenze, in quanto le costanti di tempo associate al fenomeno della cattura e del rilascio dei portatori sono elevate. Di conseguenza, *il fenomeno del rumore flicker diventa apprezzabile alle basse frequenze mentre diventa sempre più trascurabile man mano che si aumenta la frequenza stessa.*

Anche il rumore flicker, come il rumore granulare, ha la caratteristica di manifestarsi solo in presenza di una corrente nel dispositivo: in particolare, il valore quadratico medio della corrente di rumore flicker risulta dato dalla relazione

$$\boxed{\bar{i}^2 = k_1 \frac{I^a}{f^b}\Delta f}$$

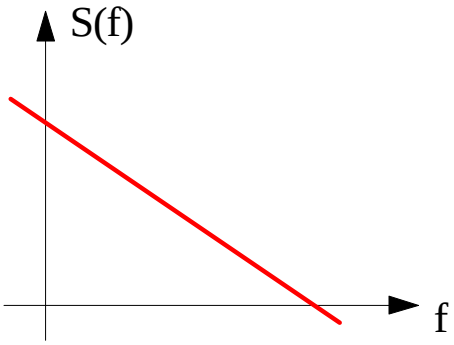
In questa formula, I è la corrente continua che scorre nel dispositivo, Δf l'intervallo di frequenza di lavoro, k_1 è una costante caratteristica del dispositivo in esame, a e b sono dei parametri (il primo compreso in $[0.5,2]$, il secondo pari circa ad 1) da determinare sperimentalmente.

Proprio il fatto per cui b è circa pari ad 1 determina, per questo tipo di rumore, la denominazione di "**1/f noise**": infatti, è chiaro che, per b=1, $\bar{i}^2$ risulta dipendere proprio da 1/f.

La funzione densità spettrale di potenza di questa corrente di rumore è evidentemente

$$S_I(f) = k_1 \frac{I^a}{f^b}$$

Diagrammando questa funzione in scala logaritmica sia in ascisse sia in ordinate, abbiamo qualcosa del tipo seguente:



Anche da questo grafico si intuisce come l’importanza del rumore flicker diventi maggiore alle basse frequenze. Tuttavia, esistono dei dispositivi che presentano un elevato livello del rumore flicker, il che comporta che esso risulti importante anche a frequenze dell’ordine dei MHz.

RUMORE BURST

Anche il cosiddetto **rumore burst**, così come il rumore flicker, è particolarmente importante alle basse frequenze e meno alle alte frequenze. Esso si trova principalmente nei circuiti integrati e nei transistori discreti.

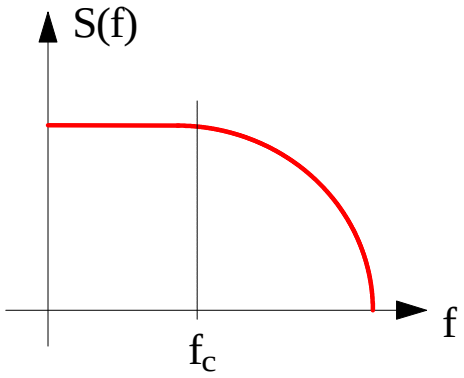
Le cause sono ancora una volta parzialmente sconosciute: genericamente, *questo tipo di rumore è legato alla presenza di contaminazioni nei dispositivi, dovute principalmente alla presenza di ioni metallici.* Per esempio, presentano livelli elevati di rumore burst tutti i dispositivi drogati con oro.

Il termine “burst”, che in inglese significa “*scoppio*”, deriva dal fatto che, registrando su un oscilloscopio questo tipo di rumore, si verificano delle “esplosioni” di rumore in corrispondenza di due o più livelli discreti. Per esempio, se consideriamo la classica onda quadra, riscontriamo che i tratti che teoricamente dovrebbero essere orizzontali, in realtà risultano affetti da oscillazioni.

Si può dimostrare che il valore quadratico medio della corrente di rumore burst è dato dalla seguente espressione:

$$\bar{i}^2(t) = k_2 \frac{I^c}{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^b} \Delta f$$

dove I è la corrente continua di polarizzazione, k_2 una costante empirica caratteristica del dispositivo e determinabile sperimentalmente, c è un’altra costante compresa tra 0.5 e 2, f_C una particolare frequenza caratteristica del dispositivo; in particolare, si tratta della frequenza oltre la quale il rumore burst diventa trascurabile, come si nota dal seguente grafico relativo alla densità spettrale di potenza S(f):



RUMORE QUANTICO

Abbiamo detto prima che il rumore termico ha una densità spettrale costante in un campo abbastanza ampio di frequenze, che, a temperatura ambiente, si estende fino all'infrarosso (da 300 GHz a 400 THz). Oltre questo limite, abbiamo invece specificato che la densità spettrale di potenza comincia a diminuire. Al contrario, per frequenze superiori a **10^{12} Hz**, subentra un altro tipo di rumore, detto **rumore quantico** in quanto ha origine dalla fisica quantistica.

La densità spettrale del rumore quantico è semplicemente data da

$$W(f) = h \cdot f$$

dove h è la costante di Plank ed f la frequenza.

Il rumore quantico, dato il basso valore di h, risulta generalmente trascurabile a frequenze inferiori a quelle ottiche, oltre le quali comincia invece a diventare significativo.

RUMORE DI CREPITIO

Il nome del **rumore di crepitio** deriva dall'effetto sonoro percepibile dall'orecchio umano quando esso agisce in ingresso ad un altoparlante. Il rumore di crepitio è presente anche nei dispositivi a semiconduttore e nei circuiti integrati, dove è addebitabile essenzialmente a difetti nella giunzione del semiconduttore.

La densità spettrale di potenza del rumore di crepitio ha la seguente espressione:

$$W(f) = k_C \frac{1}{1 + f^2 t_C^2}$$

dove k_C è una costante e t_C un parametro inversamente proporzionale al numero di malfunzionamenti che si verificano in un dispositivo in 1 secondo.

RUMORE DI FASE

Il **rumore di fase** si incontra frequentemente nei sistemi di trasmissione a modulazione di fase. Esso è addebitabile a instabilità nella frequenza o nella fase degli oscillatori e dei sintetizzatori di frequenza.

Sostanzialmente, il rumore di fase ha lo stesso ruolo, nel dominio della frequenza, del rumore termico nel dominio del tempo: *mentre il rumore termico altera l’ampiezza del segnale, quello di fase causa fluttuazioni casuali nella fase del segnale.* Ambedue i rumori sono addebitabili all’agitazione termica degli elettroni.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1