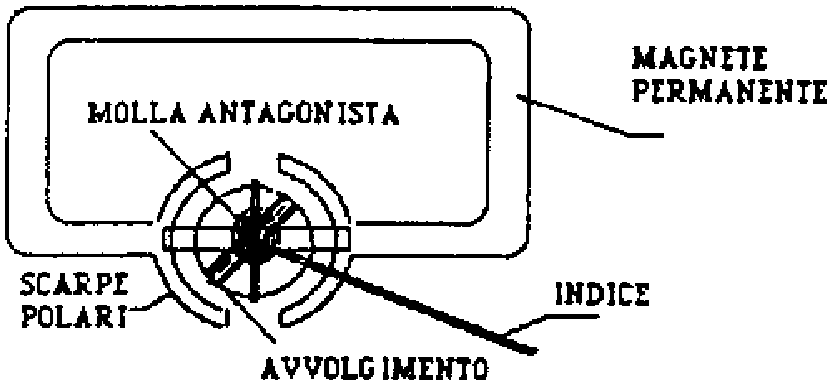
# Appunti di Misure Elettriche
## Capitolo 4
## Strumenti analogici passivi (parte II)



## STRUMENTI MAGNETOELETTRICI

Gli **strumenti magnetoelettrici** sono costituiti essenzialmente da un *magnete permanente* (che fa da sorgente del campo magnetico) e da una *bobina mobile*; per questo motivo, li si indica con l'acronimo **PMMC**, che sta per Permanent Magnet Moving Coil.

Uno schema di massima di questo tipo di strumenti è mostrato nella figura seguente:




Il **magnete permanente** ha la forma di un ferro di cavallo e termina con due espansioni polari di ferro dolce (dette **scarpe polari**); nel progetto dello strumento si tende, una volta fissato lo spazio da occupare, a rendere più grande possibile il magnete, in modo da ottenere, nel traferro, il massimo flusso possibile e quindi la massima sensibilità.

Tra le scarpe polari è presente un **cilindro** di ferro dolce (disposto orizzontalmente nella figura), necessario a creare un campo magnetico radiale uniforme.

La **bobina mobile** è avvolta su un contenitore metallico, in grado di ruotare liberamente nel traferro, in modo da ottenere lo smorzamento elettromagnetico.

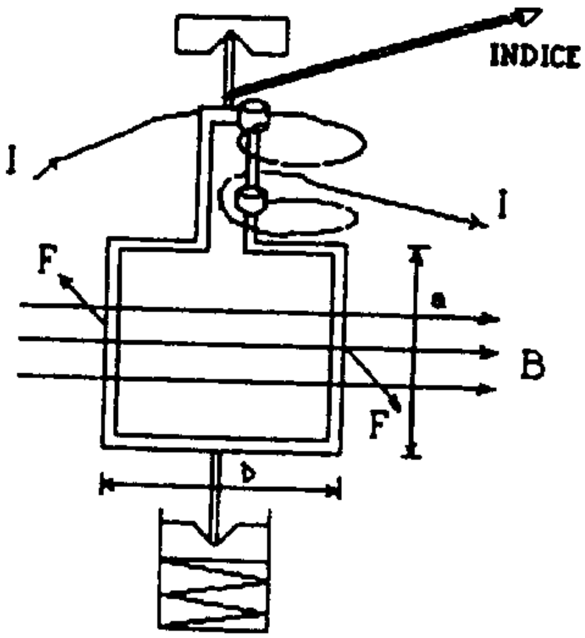
Le scale degli strumenti magnetoelettrici sono sempre lineari, dato che, come si vedrà, la coppia motrice (e quindi la deflessione dell'indice) è direttamente proporzionale al valore della corrente che circola nella bobina mobile.

Per quanto riguarda la portata (in termini di corrente), generalmente è di **50μA**, anche se ci sono alcuni galvanometri per corrente continua, che si annoverano tra i PMMC, che hanno portata anche di **1μA**. Esiste anche un limite minimo di corrente, imposto dalla presenza dell'inevitabile coppia di attrito sul movimento dell'equipaggio mobile, che è dell'ordine di **10÷20μA.**

Il consumo di questo tipo di strumenti è molto basso: la potenza richiesta per consentire il moto dell'equipaggio mobile varia tra i **20μW** ed i **200μW**.

Infine, per quanto riguarda l'accuratezza, varia tra il 95% ed il 99% del valore di fondo scala.

Vediamo adesso il funzionamento del dispositivo, con riferimento alla figura seguente:



La corrente elettrica I, assorbita dallo strumento tramite i propri terminali, circola in successione attraverso la prima molla a spirale, la bobina mobile e la secondo molla; l'interazione tra questa corrente ed il campo magnetico B nel traferro genera due forze F, uguali e di segno contrario, che agiscono sui lati opposti dell'equipaggio mobile e tendono perciò a farlo ruotare (tramite una **coppia motrice di deflessione**) nella stessa direzione; l'indice è solidale con l'equipaggio mobile per cui ruota con esso.

A livello analitico, possiamo valutare sia l'entità di F sia l'entità della coppia motrice:

$$F = n \cdot B \cdot I \cdot a$$

$$C = 2 \cdot F \cdot \frac{b}{2} = 2 \cdot F \cdot b = n \cdot B \cdot I \cdot a \cdot b = n \cdot B \cdot I \cdot S$$

In queste equazioni, *B* è il campo magnetico, *n* è il numero di spire della bobina mobile, *a* e *b* sono le dimensioni della bobina stessa ed *S* la sua superficie. Da notare che l'espressione della forza deriva dal considerare che F risulta ortogonale al piano contenente la bobina, in quanto tale lato è ortogonale al campo magnetico B.

Si nota dunque come la coppia motrice risulti direttamente proporzionale alla corrente di misura, cioè alla corrente che scorre nella bobina mobile. In questo senso, lo strumento ha comportamento da amperometro[1].

L'equipaggio mobile è collegato ad un sistema di molle antagoniste a spirale piana: esso esercita una **coppia resistente Mδ**, dove δ è la deflessione subita dell'equipaggio stesso, mentre M è una costante di proporzionalità che dipende dalle caratteristiche della molla stessa. L'equipaggio mobile si ferma quando la coppia Mδ eguaglia la coppia motrice:

$$C = M \cdot \delta \longrightarrow n \cdot B \cdot I \cdot S = M \cdot \delta \longrightarrow \delta = \frac{n \cdot B \cdot I \cdot S}{M}$$

Il termine $\frac{n \cdot B \cdot S}{M}$ prende il nome di **sensibilità amperometrica** dello strumento e si indica con $\mathbf{S_A}$:

$$\delta = S_A \cdot I$$

Se indichiamo con λ l'indicazione dell'indice sulla scala graduata, dobbiamo ricordarci che tale indicazione è legata alla deflessione δ dalla semplice relazione **λ=hδ**, dove h è la lunghezza dell'indice: scriviamo allora che

$$I = \frac{1}{h \cdot S_A} \lambda$$

L'inverso della sensibilità amperometrica è la **costante strumentale** (simbolo: $\mathbf{k_A}$) dello strumento, per cui concludiamo che la misura di corrente è data da

$$I = \frac{k_A}{h} \cdot \lambda$$

[1] In particolare, si tratta di un **amperometro di piccola portata**, poiché la corrente massima che interessa la bobina mobile è quella che percorre le sottili molle. Queste ultime non si devono riscaldare in modo apprezzabile al passaggio di corrente, in modo che la coppia antagonista risulti ancora linearmente dipendente dalla deflessione δ.

Questa relazione mostra evidentemente, come anticipato prima, il legame lineare tra corrente nello strumento e indicazione sulla scala graduata. Quest'ultima è dunque di tipo lineare e può essere graduata direttamente in ampere.

Come del resto è abbastanza intuitivo, l'espressione $S_A = \frac{n \cdot B \cdot S}{M}$ ci dice che la sensibilità dello strumento aumenta all'aumentare sia del campo nel traferro sia del numero di spire sia della superficie della bobina, mentre invece la costante elastica M della molla di richiamo deve essere la più bassa possibile.

Strumenti di questo tipo hanno, come inconveniente, l'**inerzia** dell'equipaggio mobile: di conseguenza, per le misure in corrente alternata, *questi strumenti riescono a "seguire" le oscillazioni del segnale in ingresso solo se sono lente (quindi a bassa o bassissima frequenza, dell'ordine di frazioni di Hz).* Se invece la frequenza sale (ad esempio al valore della frequenza di rete o più), allora l'indice oscillerebbe in modo impercettibile attorno alla posizione di riposo[2].

Gli strumenti magnetoelettrici sono tipici misuratori di valor medio, per cui difficilmente vengono usati per misure in corrente alternata, a meno di non prevedere a monte (cioè prima della misura) uno stadio di raddrizzamento del segnale, di cui parleremo nel prossimo paragrafo. In questo caso, esso può compiere misure in un range di 5÷10 KHz.

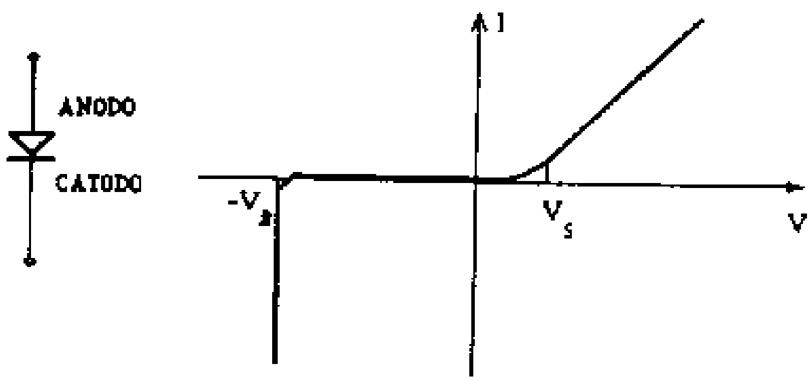
Grazie all'elevato valore di induzione del campo magnetico nel *traferro*, dovuto anche al nucleo fisso di ferro dolce, lo strumento è *praticamente insensibile* alla presenza di campi magnetici esterni ed in particolare al campo magnetico terrestre.

In generale, possiamo infine dire che, riducendo il peso dell' equipaggio mobile a meno di un grammo, si ottiene una coppia di attrito praticamente trascurabile, una compensazione degli errori dovuti alla temperatura ed un ottimo smorzamento. Generalmente, si realizzano strumenti magnetoelettrici di classe **c =0.2 - 0.1**.

## STRUMENTI MAGNETOELETTRICI CON RADDRIZZATORI

Se vogliamo usare un PMMC per misure in corrente alternata, dobbiamo necessariamente dotarlo, a monte, di un **sistema di raddrizzamento** del segnale. Gli elementi passivi più usati per realizzare raddrizzatori sono i diodi. In effetti, gli strumenti magnetoelettrici con raddrizzatori sono in genere classificati come *strumenti analogici attivi* (di cui ci occuperemo nel capitolo successivo), ma è preferibile trattarli sin da ora.

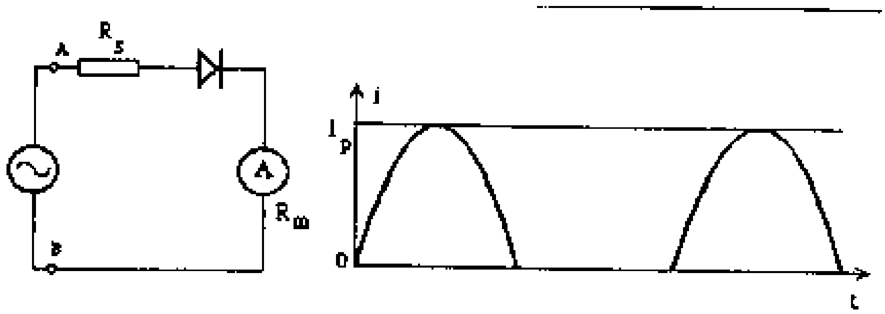
Un **diodo**, come è noto, consente il passaggio della corrente con facilità in una sola direzione (dall'anodo al catodo), come mostrato chiaramente dalla sua caratteristica I-V:




[2] Tale valore è ovviamente zero se il segnale in ingresso è puramente sinusoidale: lo strumento misura infatti in questo caso il valor medio della corrente in ingresso, che è appunto nullo per un segnale sinusoidale.

## *Raddrizzamento a singola semionda*

Sfruttando la curva I-V di un diodo, si può realizzare un semplice **voltmetro in corrente alternata**, come illustrato nella figura seguente:




Per semplicità, supponiamo che il segnale da misurare, applicato ai morsetti A e B dello strumento, sia una tensione puramente sinusoidale con ampiezza (o valore di picco) pari a $V_P$:

$$v(t) = V_P \sin(\omega t)$$

Il circuito raddrizzatore (formato dalla resistenza $R_S$ e dal diodo in serie all'amperometro, cioè il PMMC vero e proprio) è tale per cui il diodo (considerato nel suo funzionamento ideale) lascia passare corrente solo in corrispondenza delle semionde positive della tensione di ingresso, mentre invece interdice il circuito in corrispondenza delle semionde negative.

La forma d'onda della corrente nell'amperometro è dunque del tipo mostrato in figura, dove il valore di picco (ricavato con un semplice partitore di tensione) è

$$I_P \cong \frac{V_P}{R_S + R_m}$$

dove $R_m$ è la resistenza interna (piccola) dell'amperometro.

Il segno di "circa uguale" dipende semplicemente dal fatto di trascurare la resistenza di conduzione del diodo, che andrebbe in serie ad $R_S$ ed $R_m$. Tale resistenza è dell'ordine di qualche decina di Ω, per cui è spesso trascurabile, specialmente quando $R_S$ è sufficientemente grande.

Per quanto riguarda la misura fornita dall'amperometro, trattandosi di un PMMC esso fornirà il valore medio della corrente che lo attraversa. Se il segnale in ingresso è $v(t) = V_P \sin(\omega t)$, con periodo T=2π/ω, la corrente nell'amperometro vale $I_P \sin(\omega t)$ per mezzo periodo e 0 per l'altro, per cui il valor medio risulta essere il seguente:

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_P \sin(\omega t)dt = \frac{I_P}{\omega T}\int_0^{\pi}\sin(x)dx = -\frac{I_P}{\omega T}[\cos(x)]_0^{\pi} = -\frac{I_P}{2\pi}[-1-1] = \frac{I_P}{\pi}$$

Avendo realizzato un voltmetro, *la scala graduata del PMMC è tarata per misurare direttamente il valore efficace della tensione applicata:* tale valore efficace, per una grandezza puramente sinusoidale, è notoriamente pari al valore di picco diviso per $\sqrt{2}$, per cui l'indicazione dello strumento sarà

$$V_{eff} = \frac{V_P}{\sqrt{2}} = \frac{(R_S + R_m)I_P}{\sqrt{2}} = \frac{(R_S + R_m)\cdot \pi I_m}{\sqrt{2}} = 2.22 \cdot (R_S + R_m)\cdot \pi I_m$$

Questa relazione si può usare per scegliere la portata dello strumento, che ovviamente dipende dalla portata $I_{FS}$ (nota a priori) del PMMC ed è regolabile tramite il valore di $R_S$: supponiamo infatti di voler ottenere una data portata $V_{FS}$ (in termini di valore efficace); sostituendo $V_{eff}=V_{FS}$ e $I_m=I_{FS}$, otteniamo

$$V_{FS} = 2.22 \cdot (R_S + R_m) \cdot \pi I_{FS} \longrightarrow R_S = \frac{V_{FS}}{2.22\pi I_{FS}} - R_m = 0.45\frac{V_{FS}}{I_{FS}} - R_m$$

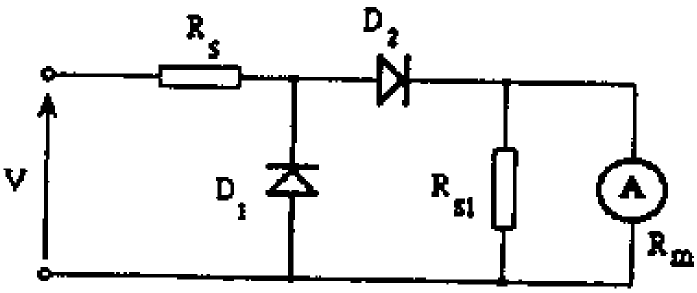
Possiamo anche ricavare la **sensibilità amperometrica** dello strumento così ottenuto: avevamo infatti trovato in precedenza che, per un voltmetro in corrente continua realizzato tramite un amperometro, sussiste la relazione $R_S = S_{AV}V_{FS} - R_m$, da cui deduciamo (per confronto con l'equazione appena ricavata) che

$$S_{AV} = \frac{0.45}{I_{FS}}$$

Nel caso del voltmetro in corrente continua, era risultato $S_{AV} = \frac{1}{I_{FS}}$, dal che deduciamo che la sensibilità amperometrica di un voltmetro in corrente alternata (con raddrizzamento a singola semionda) è minore di quella di un voltmetro in corrente continua.

I principali inconvenienti del circuito appena descritto sono due: gli effetti dovuti alla presenza di una se pur piccola corrente inversa nel diodo e quelli dovuti alla non linearità del diodo stesso per tensioni prossime al valore di soglia[3].

Per ovviare a questi inconvenienti, basta adottare un circuito leggermente più complesso (nella parte del raddrizzatore):




Rispetto al circuito precedente, abbiamo aggiunto un diodo (indicato con $D_1$) ed un resistore (indicato con $R_{S1}$).

Supponiamo che il segnale v(t) in ingresso sia puramente sinusoidale:

- durante le semionde negative, il diodo D1 conduce, per cui è come se fosse un cortocircuito; ciò significa che il circuito di destra (che in pratica coincide con quello visto prima) misuri una tensione nulla ai propri capi;
- durante le semionde positive, il diodo D1 è interdetto, per cui è come se non ci fosse e quindi il circuito si comporta esattamente come visto prima.

Il vantaggio, rispetto al circuito precedente, è che è stato notevolmente ridotto l'effetto della sia pur piccola corrente inversa nel diodo D2.

[3] Ricordiamo infatti che la caratteristica I-V di un diodo è quadratica in corrispondenza della tensione di soglia $V_S$ e solo per tensioni più elevate di $V_S$ è approssimativamente lineare.

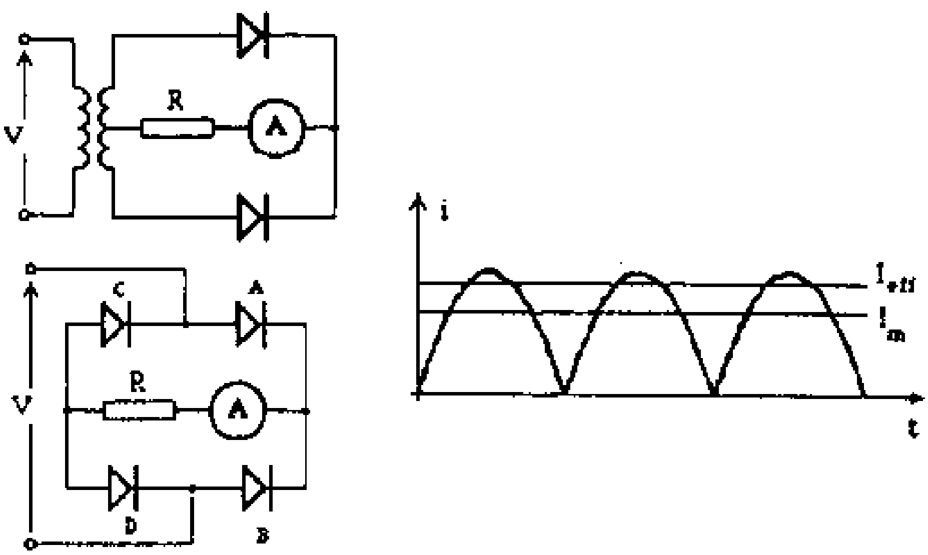
Lo scopo del resistore $R_{S1}$ è il seguente: durante le semionde positive, quando il diodo D2 è in conduzione, la corrente $I_{D2}$ nello stesso D2 è maggiore di quella che circola nell'amperometro (in quanto $I_{D2}$ si ripartisce tra l'amperometro e appunto $R_{S1}$); in tal modo, anche quando sono bassi i valori di tensione e di corrente nell'amperometro, il diodo D2 può comunque operare nella zona lineare della propria caratteristica.

A fronte di questi vantaggi, il voltmetro ha una sensibilità ed una risoluzione peggiori, per cui non fa al caso nostro.

## *Raddrizzamento a doppia semionda*

Allo scopo di migliorare la sensibilità dei voltmetri in corrente alternata, si può usare un sistema di **raddrizzamento a doppia semionda**, in base al quale, mentre le semionde positive del segnale in ingresso rimangono invariate, quelle negative vengono ribaltate (diventando a loro volta positive).

Nella figura seguente sono illustrati due possibili circuiti che lavorano in questo modo, nonché la forma d'onda della corrente che risulta attraversare l'amperometro (il consueto PMMC):




Il circuito più in alto sfrutta un **trasformatore di tensione a presa centrale**. Il problema principale di questo circuito è nei limiti di frequenza, imposti proprio dal trasformatore. Di gran lunga più utilizzato è invece l'altro circuito, che sfrutta un classico **ponte di Graetz** a diodi. Il funzionamento di tale circuito è semplice, nell'ipotesi di ingresso puramente sinusoidale:

- durante le semionde positive della tensione in ingresso, conducono solo i diodi A e D, per cui ai capi della diagonale di misura è applicata praticamente la stessa tensione in ingresso;
- durante le semionde negative, invece, della tensione in ingresso, conducono solo i diodi B e C, per cui ai capi della diagonale di misura è applicato l'ingresso cambiato di segno (cioè ribaltato).

In tal modo la polarità della corrente nell'amperometro è sempre la stessa.

Per questo tipo di voltmetro, nell'ipotesi che l'ingresso sia puramente sinusoidale, si trovano le seguenti relazioni:

$$I_m = \frac{2I_P}{\pi} = 0.636 \cdot I_P$$

$$R_S = 0.9\frac{V_{FS}}{I_{FS}} - R_m \longrightarrow S_{AV} = \frac{0.9}{I_{FS}}$$

Rispetto al caso precedente (con raddrizzamento a singola semionda), notiamo dunque un valore medio di corrente doppio ed anche una sensibilità amperometrica doppia, oltre che abbastanza prossima a quella dei voltmetri in continua (che ricordiamo vale $1/I_{FS}$).

Discorsi analoghi si possono poi fare per forme d'onda in ingresso che non sia puramente sinusoidali. Infatti, ricordiamo che il **valore efficace** ed il **valore medio** di una **grandezza periodica**[4] sono definiti, in generale, dalle relazioni

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt} \qquad\qquad I_m = \frac{1}{T}\int_0^T |I(t)|\,dt$$

Una grandezza periodica generica si approssima tanto più ad una sinusoidale quanto più il suo **fattore di forma** (simbolo: **FF**) si avvicina a **1.11**, dove per *fattore di forma* intendiamo il rapporto tra il valore efficace ed il valore medio della grandezza:

$$FF = \frac{I_{eff}}{I_m} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt}}{\frac{1}{T}\int_0^T |I(t)|\,dt}$$

Allora, nel compiere una misura di valore efficace o di valor medio su una grandezza periodica non sinusoidale, si commette un errore relativo percentuale che risulta essere pari a

$$e_{FF}(\%) = \frac{1.11 - FF}{FF} \cdot 100$$

E' evidente che non si commette alcun errore quando la grandezza considerata è sinusoidale, nel qual caso FF=1.11.

<u>Il circuito in esame presenta una serie di problemi legati ai diodi</u>. Ad esempio, un primo problema è quello per cui la resistenza di conduzione di un diodo reale decresce con l'aumento della temperatura. Al fine di compensare queste variazioni di resistenza dei diodi (ma anche dei resistori aggiuntivi nonché di eventuali derivatori), normalmente si usano ulteriori resistori realizzati in parte in rame ed in parte in manganina.

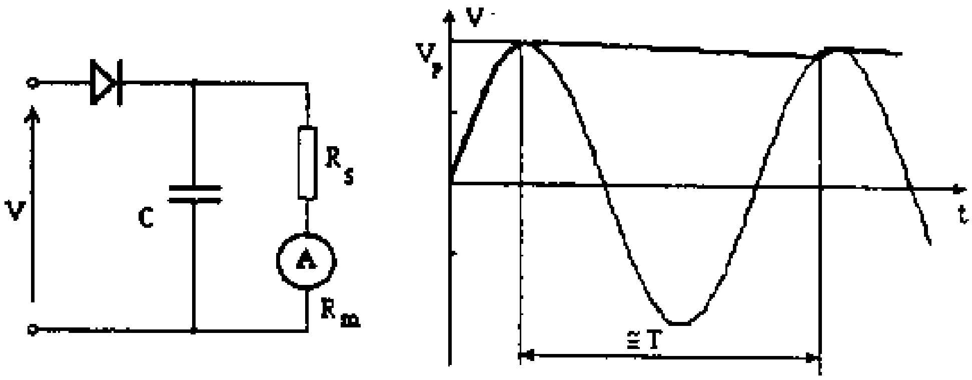
Un secondo problema è legato alla capacità non nulla che un diodo presenta sia in conduzione sia in interdizione; in particolare, in interdizione, tale capacità contribuisce ad aumentare la corrente inversa, specialmente quando la frequenza di lavoro è sufficientemente alta; ciò corrisponde ad una diminuzione del valor medio della corrente misurata e quindi ad un aumento dell'errore dello strumento. Si pone dunque la necessità di compensare questo effetto capacitivo: talvolta, si dispongono dei condensatori in serie alla bobina dello strumento, mentre in altri casi si usano resistori leggermente induttivi.

[4] Ricordiamo che una grandezza alternata è un caso particolare di una funzione periodica: si tratta infatti di una funzione periodica con valor medio nullo.

In generale, possiamo dire che gli *strumenti impieganti diodi a semiconduttore sono in grado di compiere misure in un campo di frequenze che arriva fino a diverse decine di kHz* (ad esempio fino a coprire l'intera banda audio, che si estende notoriamente fino a 16kHz).

## *Voltmetro di cresta*

Gli strumenti magnetoelettrici con raddrizzatori consentono anche la misura del valore di picco delle forme d'onda periodiche (sinusoidali, quadre, a dente di sega o di altro tipo). Un tipico circuito per la realizzazione di un **voltmetro di cresta** è il seguente:




Se ignoriamo per un attimo la presenza dell'amperometro, notiamo che si tratta del classico **circuito di mantenimento** (o *alimentatore* o *demodulatore ad inviluppo*), in cui il diodo fa da raddrizzatore e il parallelo RC fa da cella di mantenimento. Con riferimento ad una sinusoide (come illustrato in figura), il funzionamento è il seguente:

- nel primo quarto di periodo, il diodo conduce ed il condensatore si carica al valore di picco $V_P$ della tensione in ingresso; la corrente nell'amperometro tende quindi al valore $\frac{V_P}{R_S + R_m}$;
- nel secondo quarto di periodo, la tensione di ingresso prende a scendere, per cui il diodo si interdice, favorendo la scarica del condensatore attraverso il ramo di misura; la corrente, quindi, in tale ramo tende a scendere;
- il diodo rimane interdetto fin quando la tensione in ingresso, durante il terzo quarto di periodo, non raggiunge quella di scarica del condensatore; quando questo accade, il diodo riprende a condurre ed il condensatore si ricarica al valore $V_P$.

Se la costante di tempo RC (dove $R=R_m+R_S$) della scarica del condensatore è sufficientemente più alta del periodo T dell'ingresso, il valore della corrente nell'amperometro si mantiene molto prossimo al picco $\frac{V_P}{R_S + R_m}$, con solo un piccolo **ripple** $\Delta V$ verso il basso durante appunto il processo di scarica.

Proprio questo ripple determina l'errore di misura. Per rendercene conto in modo rigoroso, cominciamo a calcolare il valor medio della tensione, cioè la quantità misurata dallo strumento: applicando la definizione di valor medio alla tensione ai capi del ramo di misura (cioè ai capi di C) e tenendo conto che tale tensione è del tipo $V_P e^{-\frac{t}{RC}}$, abbiamo che

$$V_m = \frac{1}{T}\int_0^T V_P e^{-\frac{t}{RC}} dt = \dots = -\frac{RC}{T} V_P \left( e^{-\frac{T}{RC}} - 1 \right)$$

Supponendo, come detto prima, che risulti RC>>T, possiamo espandere quell'esponenziale in serie e trascurare i termini di ordine superiore al secondo: così facendo, otteniamo

$$V_m = -\frac{RC}{T} V_P \left( 1 - \frac{T}{RC} + \frac{T^2}{2R^2C^2} - 1 \right) = V_P \left( 1 - \frac{T}{2RC} \right)$$

Questa relazione mostra evidentemente che la lettura dello strumento differisce dal valore di picco $V_P$ per una diminuzione pari a $\frac{T}{2RC} V_P$. Abbiamo perciò un errore relativo di misura pari a

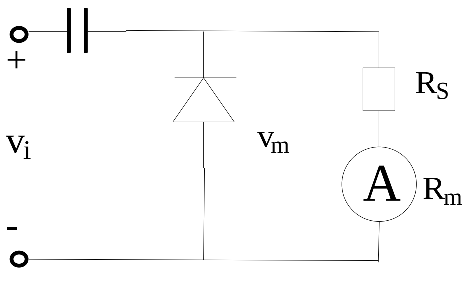
$$e = \frac{V_m - V_P}{V_P} = \frac{V_P \left( 1 - \frac{T}{2RC} \right) - V_P}{V_P} = -\frac{T}{2RC}$$

Quindi, come ci aspettavamo, l'errore commesso è tanto più piccolo quanto più la costante di tempo RC è maggiore del periodo del segnale in ingresso.

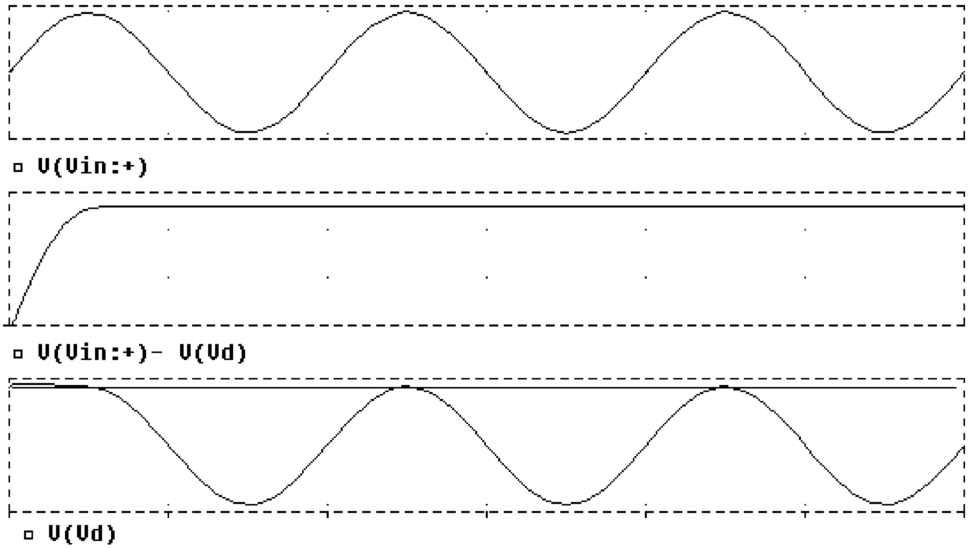
Un'analisi ancora più rigorosa dovrebbe tener conto dell'effetto della resistenza di uscita del circuito dal quale stiamo prelevando la tensione. Indicata tale resistenza $R_u$, il suo effetto è duplice:

- in primo luogo, quando il diodo conduce ed il condensatore di carica, il tempo di carica è determinato dalla costante di tempo $C \cdot (R // R_u)$;
- in secondo luogo, la tensione massima ai capi del condensatore sarà frutto di una partizione di tensione che coinvolge appunto la $R_u$: tale tensione massima sarà $\frac{R}{R + R_u} V_P$. Questo valore è evidentemente tanto più vicino al picco effettivo $V_P$ quanto maggiore è R (resistenza interna del *circuito di misura*) rispetto ad $R_u$ (resistenza interna del *circuito sotto misura*).

E' possibile usare anche un altro circuito per la misura del valore di picco di una grandezza, rappresentato nella figura seguente:




Supponiamo che il condensatore sia inizialmente scarico (per esempio, supponiamo che il circuito sia stato lasciato a se stante da tempo immemore, con $v_{in}(t)=0$ per $t<0$). All'istante t=0, il generatore applica una tensione sinusoidale. Ritenendo il diodo ideale[5], il comportamento del circuito è il seguente:

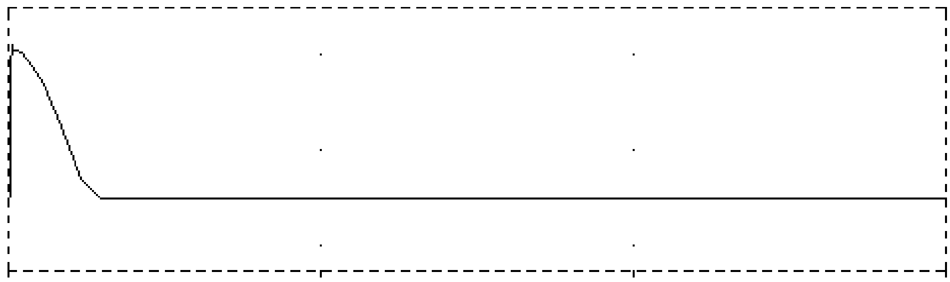



Inizialmente, con la tensione applicata positiva, il diodo conduce e si comporta perciò da cortocircuito, facendo si che la tensione ai capi del condensatore segua perfettamente l'ingresso.

Nel momento in cui l'ingresso raggiunge il suo valore massimo $V_P$, anche la tensione ai capi del condensatore vale $V_P$; quando, allora, l'ingresso prende a scendere, il condensatore rimane alla tensione $V_P$, per cui la tensione ai capi del diodo diventa negativa: il diodo allora interrompe il flusso di corrente, lasciando una tensione $V_P$ ai capi della condensatore.

Quando la tensione di ingresso raggiunge il suo valore massimo negativo ($-V_P$), la tensione ai capi del condensatore è ancora $V_P$, per cui la tensione ai capi del diodo è $-2V_P$.

Ad ogni modo, dato che la tensione sul condensatore non scende più al di sotto di $V_P$, il diodo non conduce più, per cui non circola più alcuna corrente nel circuito, come indicato dal grafico seguente:



Come si nota, la corrente scorre solo inizialmente, quanto basta per caricare il condensatore alla tensione $V_P$, dopo di che il diodo è perennemente interdetto.

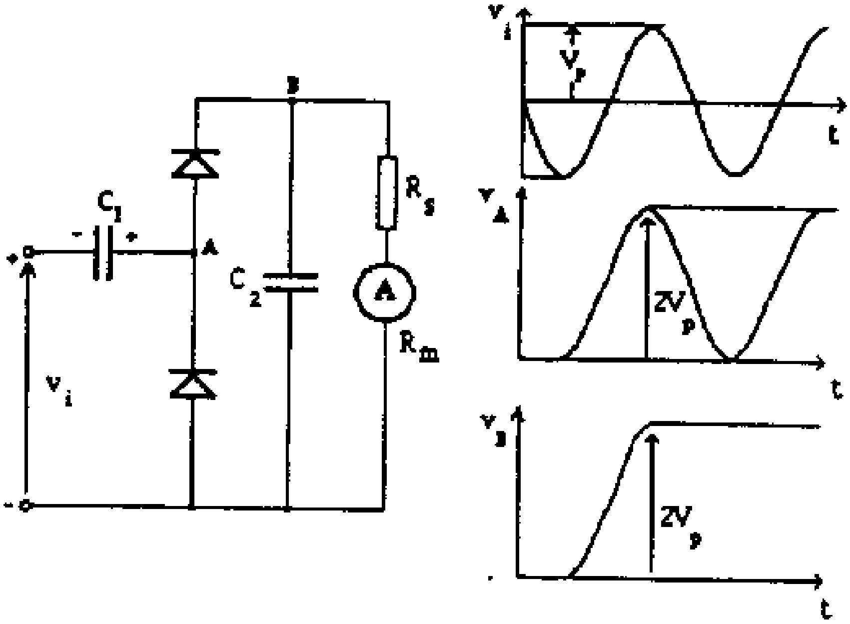
Concentriamoci allora sulla tensione ai capi del diodo e quindi del lato di misura: è ancora una tensione sinusoidale (di picco $2V_P$), ma di valor medio pari a $V_p$, cioè al picco della tensione in ingresso; dato che l'amperometro misura proprio tale valor medio, otteniamo esattamente il parametro che ci interessava.

Notiamo che il circuito appena esaminato prende anche il nome di **ripristinatore di corrente continua**: infatti, senza alterare in modo significativo la forma d'onda in ingresso, abbiamo

[5] ossia ritenendo che si comporti da cortocircuito quando è in conduzione (tensione positiva applicata ai suoi capi) e da circuito aperto quando è interdetto (tensione negativa ai suoi capi)

ottenuto un livello di tensione continuo ai capi del condensatore[6]. Si tratta evidentemente di un **ripristinatore di tipo positivo**, proprio perché il livello continuo di tensione è positivo. Se rovesciassimo il diodo, avremmo un ribaltamento delle curve di tensione nel semipiano negativo, ottenendo così un **ripristinatore di tipo positivo**.

Un ulteriore possibilità per ottenere un voltmetro di cresta è quella di usare il circuito illustrato nella figura seguente:




Questo circuito prende il nome di **moltiplicatore di tensione**. Per analizzarne il funzionamento, consideriamo sempre una tensione in ingresso di tipo sinusoidale e inoltre supponiamo che i due condensatori (con $C_1 >> C_2$) siano inizialmente scarichi.

L'andamento delle tensioni nei terminali A e B del diodo superiore è riportato nella figura. Si nota che sul nodo B abbiamo il ripristino di una tensione continua pari $2V_P$, mentre sul nodo A abbiamo una tensione ancora sinusoidale e isofrequenziale con l'ingresso, ma di valor medio $V_P$. L'amperometro fornisce proprio tale valor medio, ossia la misura desiderata.

La particolarità di questo voltmetro di cresta è quella di consentire la misura anche in presenza di oscillazioni irregolari della forma d'onda intorno allo zero, ossia con valore medio non nullo.

## STRUMENTI ELETTRODINAMICI

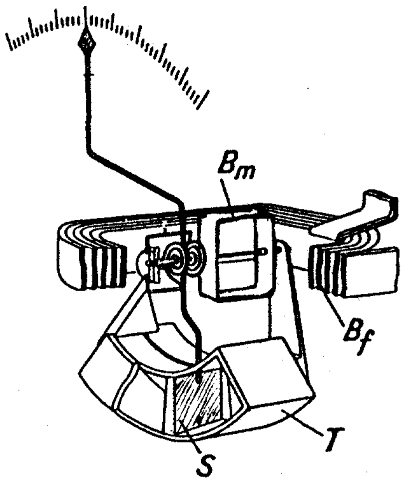
Nei paragrafi precedenti, abbiamo considerato la prima grande classe di strumenti analogici passivi (quella probabilmente dei più diffusi, in quanto sono molto sensibili e possono operare in un vasto campo di frequenza), vale a dire quelli *magnetoelettrici*. Adesso passiamo agli **strumenti elettrodinamici**, molto usati per misure accurate nel campo delle frequenze industriale (e solo parzialmente alle basse frequenze).

La differenza sostanziale con gli strumenti magnetoelettrici riguarda il ruolo della **corrente di misura**: *è questa stessa corrente, invece del magnete permanente dei*

[6] Questo effetto va anche sotto il nome di **clamping**.

*PMMC, a creare l'induzione magnetica necessaria per generare la coppia motrice*[7]*.*

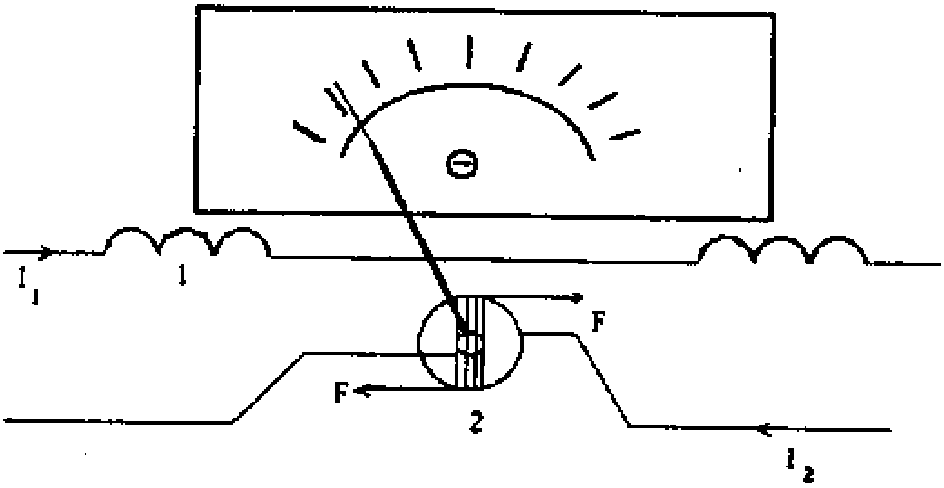
In generale, gli strumenti elettrodinamici sono basati sulle azioni elettrodinamiche esercitate tra due circuiti, di cui uno fisso (**bobina fissa**) e uno mobile (**bobina mobile**), percorsi da correnti differenti:




**– Strumento elettrodinamico: $B_f$ - bobina fissa; $B_m$ - bobina mobile; S - paletta dello smorzatore; T - scatola dello smorzatore.**

Non c'è alcun impiego di elementi ferromagnetici tra le linee di forza dei campi magnetici.

Uno schema di massima, per studiare il funzionamento dello strumento, è riportato nella figura seguente:




Notiamo subito la presenza di <u>due distinte **bobine**</u>: la bobina (1) è fissa ed è attraversata da una corrente continua $I_1$; la bobina (2) è invece mobile ed è attraversata dalla corrente continua $I_2$; tale corrente giunge nella bobina attraverso due **molle antagoniste** collegate agli estremi della bobina stessa; inoltre, alla bobina sono anche collegati l'**indice** dello strumento (che scorre a sua volta su una **scala graduata**) e ovviamente il **sistema di smorzamento** (non visibile in figura).

[7] In questo senso, gli strumenti elettrodinamici possono immaginarsi derivati dagli strumenti magnetoelettrici (cioè a bobina mobile), sostituendo il magnete permanente, responsabile della formazione del campo magnetico costante, con una bobina fissa percorsa da corrente.

Indichiamo con $L_1$ ed $L_2$ le induttanze delle due bobine e con $M_{12}$ l'induttanza mutua. In base ad una nota relazione, possiamo scrivere che l'energia $E_m$ immagazzinata nel campo elettromagnetico vale

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

L'interazione tra le due correnti dà luogo ad una coppia motrice $C_m$ che tende a far ruotare l'equipaggio mobile in una posizione $\delta$ tale da massimizzare l'energia $E_m$. Possiamo perciò valutare la coppia nel modo seguente:

$$C_m = \frac{dE_m}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2\right] = \frac{d}{d\delta}\left[M_{12} I_1 I_2\right] = I_1 I_2 \frac{dM_{12}}{d\delta}$$

In questi passaggi, abbiamo considerato il fatto che le induttanze $L_1$ ed $L_2$ non dipendono dalla posizione dell'equipaggio mobile, per cui sono nulle le rispettive derivate fatte appunto rispetto a $\delta$.

Così facendo, abbiamo dunque trovato che la coppia motrice è direttamente proporzionale alle intensità di corrente nelle bobine e al termine $\frac{dM_{12}}{d\delta}$, che sostanzialmente quantifica la posizione reciproca delle bobine stesse. Si fa allora in modo che questo termine sia costante: risulta cioè $\frac{dM_{12}}{d\delta} = k_a$, da cui consegue ovviamente che

$$C_m = k_a \cdot I_1 I_2$$

D'altra parte, la coppia motrice è bilanciata da una coppia antagonista, $M\delta$, proporzionale alla deflessione. In condizioni di equilibrio, risulta perciò

$$k_a \cdot I_1 I_2 = M\delta$$

Esplicitando la deviazione $\delta$ (cioè sostanzialmente quello che leggiamo sulla scala graduata), concludiamo che essa vale

$$\boxed{\delta = \frac{k_a}{M} I_1 I_2}$$

La deflessione angolare dello strumento (detto **elettrodinamometro**) è dunque direttamente proporzionale al prodotto delle correnti continue che lo attraversano.

Adesso, supponiamo di essere in regime non più continuo, ma alternato. Abbiamo perciò nelle bobine due correnti di valore istantaneo $i_1(t)$ e $i_2(t)$, cui consegue evidentemente una coppia di valore istantaneo $c_m(t) = k_a \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)$.

Possiamo calcolare il valore medio di tale coppia (**coppia motrice media**) in un periodo di durata T:

$$C_m = \frac{1}{T}\int_0^T c_m(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T k_a \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)dt = \frac{k_a}{T}\int_0^T i_1(t) \cdot i_2(t)dt$$

Ipotizziamo adesso che le correnti siano sinusoidali isofrequenziali, di valori efficaci rispettivamente $I_1$ ed $I_2$, e sfasate di un angolo φ: la coppia motrice media risulta essere

$$C_m = \frac{k_a}{T}\int_0^T \sqrt{2}I_1\sin(\omega t)\cdot\sqrt{2}I_2\sin(\omega t-\varphi)dt = \frac{2k_a}{T}I_1I_2\int_0^T \sin(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)dt = \frac{2k_a}{T}I_1I_2\cos(\varphi)$$

Applicando ancora una volta l'equilibrio con la coppia antagonista Mδ, concludiamo dunque che

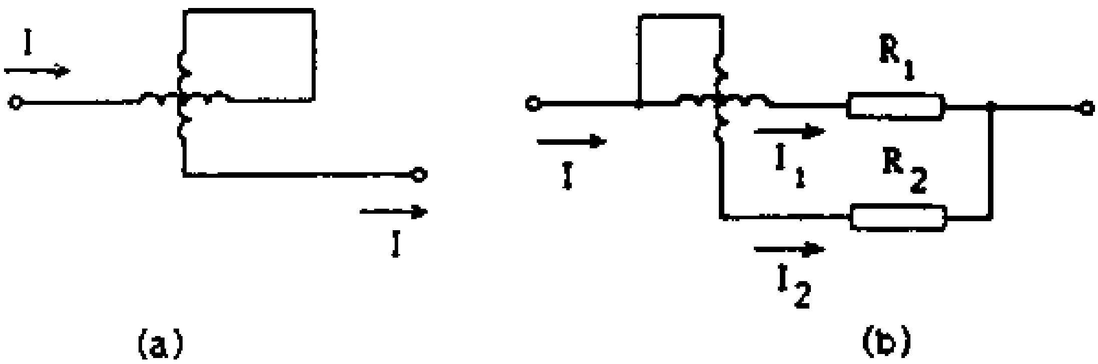
$$C_m = \frac{2k_a}{T}I_1I_2\cos(\varphi) = M\delta \longrightarrow \boxed{\delta = \frac{2k_a\cos(\varphi)}{MT}\cdot I_1I_2}$$

Abbiamo dunque trovato che *la deflessione dello strumento, in caso di correnti sinusoidali, è proporzionale al prodotto dei loro valori efficaci (RMS) ed al coseno dell'angolo di sfasamento tra di esse.*

Fin qui, dunque, i principi di funzionamento di un elettrodinamometro. Vediamo adesso come esso possa essere utilizzato per misurare correnti (funzionamento da amperometro) o tensioni (funzionamento da voltmetro). Si tratta sostanzialmente di decidere come connettere le due bobine

## *Amperometro elettrodinamico*

Esistono due possibili configurazioni, riportate nella figura seguente:




Nella configurazione (a), le due bobine sono connesse in **serie**, in quanto sono attraversate dalla stessa corrente (per cui $I_1=I_2=I$). La deflessione angolare è data allora da

regime stazionario $\rightarrow \delta_{c.c.} = \frac{k_a}{M}I^2$

regime sinusoidale $\rightarrow \delta_{c.a.} = \frac{2k_a}{MT}\cdot I^2$

dove facciamo notare che, nel regime sinusoidale, il termine cos(φ) è unitario in quanto la corrente è la stessa, per cui φ=0.

Nella connessione (b), invece, la connessione è di tipo parallelo, in quanto ciascuna bobina è in serie ad una resistenza e i due rami sono in parallelo, per cui si ripartiscono la corrente I in ingresso

[8]. Applicando sempre le relazioni trovate prima, dobbiamo semplicemente trovare le espressioni di I1 ed $I_2$ in funzione di I e poi sostituire nelle espressioni di $\delta_{c.c.}$ e $\delta_{c.a.}$. E' allora immediato rendersi conto che

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V}{R_1} = \dfrac{(R_1 // R_2)I}{R_1} = \dfrac{R_2 I}{R_1 + R_2} \\ I_2 = \dfrac{V}{R_2} = \dfrac{(R_1 // R_2)I}{R_2} = \dfrac{R_1 I}{R_1 + R_2} \end{cases} \longrightarrow I_1 I_2 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} I^2$$

da cui consegue che

$$\text{regime stazionario} \rightarrow \delta_{c.c.} = \frac{k_a}{M} I_1 I_2 = \frac{k_a}{M} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} I^2$$

$$\text{regime sinusoidale} \rightarrow \delta_{c.a.} = \frac{2k_a}{MT} I_1 I_2 = \frac{2k_a}{MT} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} I^2$$

In entrambi i casi, quindi, la deflessione angolare dell'indice è pari al quadrato delle correnti: si tratta di intensità di corrente in regime stazionario e di valori efficaci in regime sinusoidale.

In effetti, c'è però da osservare che, quando siamo in regime alternato, bisogna considerare l'effetto induttivo delle bobine, per cui, a rigore, vale solo la formula relativa al regime stazionario. In effetti, però, è possibile giungere ad un risultato analogo a quelli appena trovati tramite una scelta opportuna dei valori delle reattanze e delle resistenze[9]. In particolare, se indichiamo con $X_1$ ed $X_2$ le reattanze delle due bobine, bisogna fare in modo che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$\frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}$$

Questa considerazione mostra sostanzialmente che *non sono importanti le reattanze di per se stesse, quanto i loro rapporti con le rispettive parti resistive;* in modo analogo, a parità di valori delle induttanze, non è importante la frequenza di per se stessa, quanto il suo effetto sui rapporti X/R. In altre parole, le relazioni trovate prima valgono, in regime alternato, a qualsiasi frequenza per la quale sia verificata la condizione $\frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}$.

## Parametri caratteristici

Possiamo riepilogare i parametri caratteristici di un amperometro elettrodinamico nel modo seguente:

- se la resistenza della bobina mobile è molto grande rispetto a quella della bobina fissa, la quasi totalità della corrente I da misurare interessa la bobina fissa, che può così essere costituita da poche spire con elevata sezione, mentre solo una piccola frazione (centesimi di ampere) della I passerà attraverso la bobina mobile. Il vantaggio di una configurazione simile si ripercuote nel fatto che la molla adduttrice

[8] Nella connessione serie, in cui appunto le bobine sono in serie, la corrente che può percorrerle (e che quindi può essere misurata direttamente) è ***limitata*** (**0,1±0,2 A**) dal fatto che essa deve passare attraverso le molle antagoniste. Per tale motivo, prevalentemente la realizzazione dell'amperometro prevede il collegamento in parallelo delle bobine fissa e mobile.

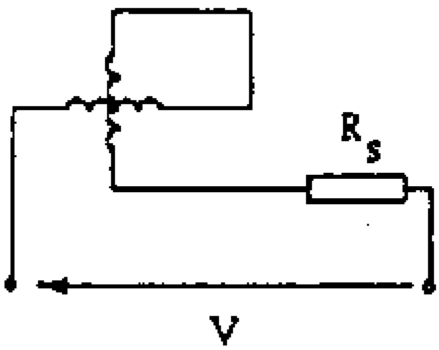
[9] A tal proposito, ricordiamo che nelle resistenze $R_1$ ed $R_2$ abbiamo inteso inglobare anche le resistenze delle due bobine.

non risulta particolarmente sollecitata dal passaggio di corrente e non aumenta notevolmente il peso dell'equipaggio mobile composto essenzialmente dalla bobina mobile;

- per quanto concerne la ***portata,*** il ***limite inferiore*** va da alcuni ***decimi di ampere fino a 10¸20 mA*** mentre il ***limite superiore*** è di circa ***5¸7 A***
- il ***limite superiore di frequenza*** arriva fino a ***100 Hz*** per strumenti amperometrici normali, spingendosi fino a ***circa 1 kHz*** per dispositivi più sofisticati.

## *Voltmetro elettrodinamico*

Volendo usare un elettrodinamometro come voltmetro, basta usare la seguente connessione:




Si tratta perciò di predisporre le due bobine in serie tra di loro ed in serie anche ad un resistore addizionare $R_S$ (realizzato in manganina e con elevato valore) e poi di applicare, ai capi del collegamento, la tensione V da misurare. Sostanzialmente, il resistore $R_S$ ha lo scopo di convertire la tensione in una corrente[10], cui lo strumento è sensibile: nel caso di regime stazionario, abbiamo detto che $\delta_{c.c.} = \frac{k_a}{M} I^2$; nel nostro caso, risulta $I = \frac{V}{R_S}$, per cui scriviamo che

$$\delta_{c.c.} = \frac{k_a}{MR_S^2} V^2$$

Abbiamo dunque una proporzionalità diretta della deflessione angolare con il quadrato della tensione da misurare (la scala dovrà essere perciò di tipo quadratico, con divisioni fitte all'inizio e man mano digradanti verso il fondo scala).

Se fossimo in regime alternato, dovremmo sostituire, al posto di $R_S$, l'impedenza complessiva $Z_S=R_S+jX_S$, che tenga conto anche degli effetti induttivi delle bobine. Nella pratica, però, l'espressione $\delta_{c.c.} = \frac{k_a}{MR_S^2} V^2$ è ritenuta valida anche in corrente alternata, (assumendo che V sia il valore efficace della tensione da misurare), a patto che sia verificata la condizione $\mathbf{R_S >> X_S}$. Se invece tale condizione non è verificata, ad esempio perché siamo in alta frequenza, allora è necessario compensare la parte induttiva del circuito tramite un condensatore (di valore opportuno) in parallelo ad $R_S$.

Possiamo allora trarre una considerazione: la taratura di uno strumento elettrodinamico, eseguita in corrente continua, è valida per misure di valori efficaci sia in corrente alternata sia in tensione

[10] Anche qui, nel resistore $R_S$ inglobiamo sia il valore della resistenza addizionale sia il valore di resistenza delle due bobine in serie.

alternata; tuttavia, per misure di corrente la taratura è valida anche alle basse frequenze, mentre invece per misure di tensione essa è valida solo a frequenza industriale.

La **taratura in corrente continua** è molto importante, in quanto, grazie alla maggiore stabilità e precisione dei riferimenti di tensione (ottenibili, ad esempio, con l’uso di **diodi Zener**), permette di raggiungere ottimi livelli di accuratezza. Quindi, *è opportuno eseguire la taratura di uno strumento elettrodinamico in corrente continua, salvo poi ad adottare gli accorgimenti citati per misure in corrente alternata.*

### Parametri caratteristici

Per funzionamento sia in regime stazionario sia in regime alternato, possiamo riepilogare le seguenti ***prestazioni caratteristiche*** per un voltmetro elettrodinamico:

- frequenza di impiego tipicamente industriale (***da 50 Hz*** per strumenti normali fino a ***circa 1 KHz*** per dispositivi più sofisticati);
- il campo magnetico, per il fatto di essere in aria, è piuttosto debole. Per tale motivo, al fine di ottenere elevate coppie motrici, è necessario impiegare bobine con elevato numero di spire, ottenendo elevati consumi;
- sempre a causa del debole campo magnetico, strumenti di questo tipo sono ***molto sensibili a campi magnetici esterni;*** per ovviare a questo problema, si ricorre a particolari ***sistemi di schermatura***, ma è comunque opportuno evitarne l'impiego in prossimità di sorgenti di ***campi magnetici dispersi*** (*trasformatori, induttanza*, ecc.) aventi la stessa frequenza della grandezza da misurare;
- per minimizzare gli effetti di cui sopra, gli strumenti devono ***essere tarati per frequenze prossime a quella d'uso***; in queste condizioni si può raggiungere un ***notevole grado di precisione*** (**classe 0.2**);
- per quanto riguarda le portate, il ***limite inferiore è di 10:20 V*** con sospensione a perni e di ***circa 1 V con sospensione a filo***, mentre per il ***limite superiore è di circa 100:600 V*** con impiego di trasformatori di tensione e resistori di manganina;
- sono usati prevalentemente in laboratorio per la ***taratura di altri voltmetri*** in quanto sono affidabili (se costruiti correttamente al fine di minimizzare gli inconvenienti di cui sopra) e non soggetti ad invecchiamento, peraltro ***dovuto quasi esclusivamente alle molle***.

## *Problemi di consumo*

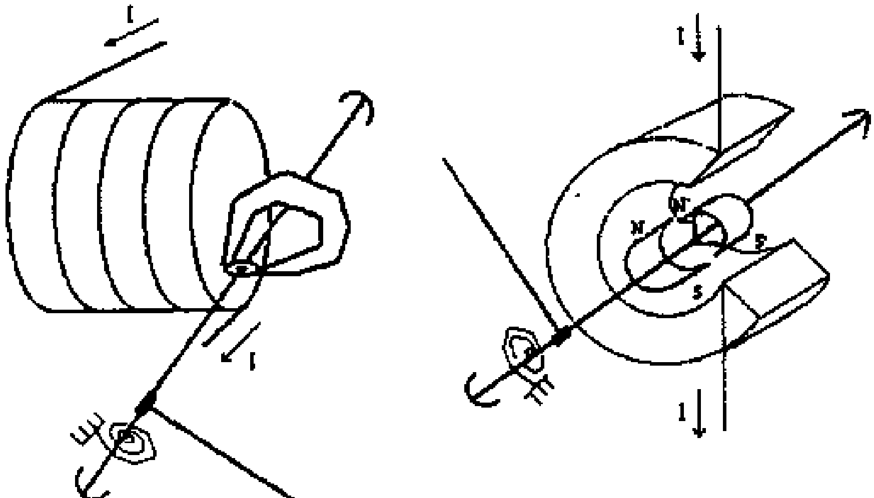
*Il principale difetto degli strumenti elettrodinamici, rispetto ai PMMC, riguarda essenzialmente l’elevato consumo di potenza:* infatti, la corrente o la tensione da misurare devono azionare la bobina mobile (come nei PMMC), ma devono anche creare il campo magnetico; tale campo magnetico deve essere sufficientemente elevato, per cui è necessario avere una elevata forza magnetomotrice. Non solo, ma questo campo risulta anche più piccolo di quello presente in un PMMC, data l’assenza di materiale ferromagnetico all’interno dello strumento.

I bassi valori di induzione magnetica comportano a loro volta una ridotta sensibilità: un voltmetro elettrodinamico ha una sensibilità dell’ordine di 2 Ω/V, a fronte di circa 20 kΩ/V di un voltmetro magnetoelettrico.

## STRUMENTI A FERRO MOBILE

Gli strumenti a ferro mobile sono costituiti da una bobina fissa (di molte spire) e da un equipaggio mobile sul quale è predisposto del materiale ferromagnetico, in grado di ruotare all'interno della bobina. Essi sono prevalentemente usati in quelle applicazioni in cui la robustezza è preferita all'elevato grado di precisione.

Esistono diverse realizzazioni di strumenti a ferro mobile, due delle quali sono riportate nella figura seguente:




Nella figura (a) è riportata la realizzazione **ad attrazione** (o anche *a succhiamento*), mente nella figura (b) è riportata la realizzazione **a repulsione**. In entrambi i casi, notiamo la presenza del solito indice solidale con l'equipaggio mobile e delle solite molle antagoniste. Per quanto riguarda, invece, lo smorzamento, è ottenuto per via elettromagnetica.

### *Strumenti a ferro mobile ad attrazione*

Vediamo di comprendere il funzionamento di uno strumento di questo tipo. Consideriamo, in particolare, la realizzazione ad attrazione. Sia I la corrente continua che scorre nella bobina fissa; a causa di questa corrente, il ferro tende ad essere *risucchiato* (da cui il nome) all'interno della bobina, fin tanto che risulti massima l'energia immagazzinata nel campo magnetico. Tale energia, come visto anche nel precedente paragrafo, vale

$$E_m = \frac{1}{2}LI^2$$

dove L è l'induttanza della bobina.

La corrispondente coppia motrice è allora

$$C_m = \frac{dE_m}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{1}{2}LI^2\right] = \frac{1}{2}I^2\frac{dL}{d\delta}$$

Abbiamo dunque una proporzionalità diretta della coppia motrice sia con l'intensità di corrente circolante sia con la legge di variazione di L con δ. Tale variazione, dovuta appunto alla penetrazione del ferro nella bobina, viene resa costante tramite una scelta opportuna della forma e della posizione del ferro mobile rispetto alla bobina. Si realizza dunque la condizione $\frac{dL}{d\delta} = k$, da cui consegue che la coppia motrice è direttamente proporzionale al quadrato dell’intensità di corrente:

$$C_m = \frac{k}{2} I^2$$

Questa coppia è ovviamente equilibrata dalla “solita” coppia antagonista, proporzionale alla deflessione δ secondo la legge $C_a = M\delta$. In condizioni di equilibrio, scriviamo perciò che

$$C_m = C_a \longrightarrow \frac{k}{2} I^2 = M\delta \longrightarrow \boxed{\delta_{c.c.} = \frac{k}{2M} I^2}$$

Abbiamo dunque concluso che lo spostamento dell’indice sulla scala graduata è proporzionale al quadrato della corrente (continua) che attraversa la bobina fissa.

Questo vale in regime stazionario. Se invece lo strumento è interessato da una corrente alternata, allora abbiamo una coppia motrice istantanea $c_m(t) = \frac{k}{2} i^2(t)$. Data la presenza dell’equipaggio mobile (il quale possiede un momento di inerzia ed un proprio periodo di oscillazione), l’equilibrio tra coppia motrice e coppia antagonista è tale che la deviazione angolare δ sia proporzionale, come negli altri strumenti indicatori elettromeccanici, sia proporzionale al valor medio (sul periodo) della coppia motrice. Tale valore medio vale

$$C_m = \frac{1}{T} \int_0^T c_m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{2} i^2(t) dt = \frac{k}{2T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{k}{2} I^2$$

dove I è il valore efficace della corrente (abbiamo applicato solo la definizione di valore efficace).

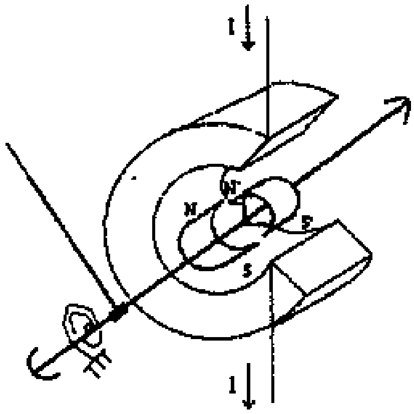
Applicando ancora una volta l’equilibrio con la coppia antagonista Mδ, concludiamo dunque che

$$C_m = \frac{k}{2} I^2 = M\delta \longrightarrow \boxed{\delta_{c.a.} = \frac{k}{2M} \cdot I^2}$$

Abbiamo evidentemente ottenuto lo stesso risultato di prima, con la differenza che in corrente continua consideravamo l’intensità di corrente, mentre adesso consideriamo il valore efficace della corrente.

## *Strumenti a ferro mobile a repulsione*

Consideriamo adesso uno strumento a ferro mobile del tipo **a repulsione**. In questo caso, abbiamo una bobina fissa e due pezzi di materiale magnetico, di cui uno solidale con la bobina fissa e l’altro in grado di ruotare:



Il campo magnetico è generato dalla circolazione della corrente I nella bobina; esso magnetizza nello stesso modo i due pezzi di ferro, che quindi tendono a ruotare uno rispetto all'altro. Per quanto riguarda le equazioni matematica, valgono le stesse viste nel caso ad attrazione.

### *Pregi e difetti degli strumenti a ferro mobile*

L'accuratezza degli strumenti a ferro mobile è limitata essenzialmente dalla curva di magnetizzazione del ferro; questo comporta, tra le altre cose, che non sempre può ritenersi valida la taratura in corrente continua per utilizzazioni in corrente alternata. Ci sono poi ulteriori cause di errore, ad esempio legate agli attriti, al riscaldamento, all'influenza di campi magnetici esterni, a fenomeni di isteresi, alle correnti parassite.

Così come negli strumenti elettrodinamici, la sensibilità è bassa, in quanto l'induzione magnetica è creata da una bobina in aria attraversata da corrente.

Un vantaggio, invece, rispetto agli strumenti elettromeccanici, è nell'assenza di circuiti elettrici interessati dal passaggio di corrente sull'equipaggio mobile. Lo strumento risulta perciò robusto ed in grado di sopportare sovraccarichi elettrici. Sono bassi anche i costi (data la semplicità costruttiva dell'equipaggio mobile) e lo strumento è meno danneggiabile da urti o eccessive sollecitazioni meccaniche.

Anche in questo caso, basta aggiungere derivatori e resistori addizionali per ottenere strumenti (amperometri e voltmetri) a portate multiple.

A causa delle diverse cause di errore, questi strumenti sono usati in un ristretto campo di frequenza (25-125 Hz) e per grandezze alternate sinusoidali.

## STRUMENTI TERMICI

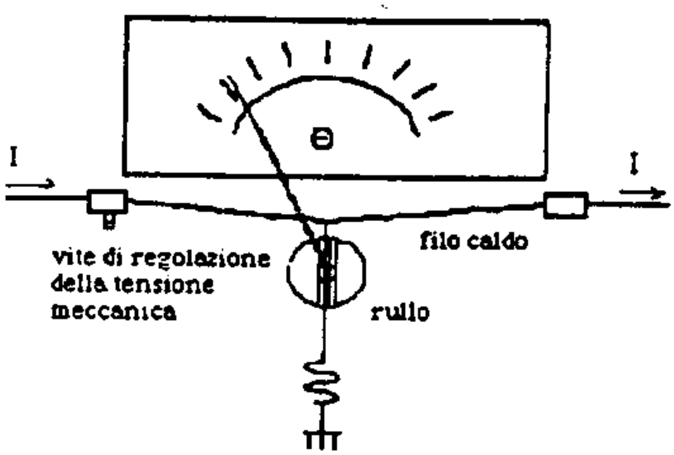
Sappiamo bene che *quando una corrente elettrica attraversa un conduttore, questo si riscalda.* Negli **strumenti termici** si sfrutta proprio questo effetto per la misura della corrente elettrica, che può essere sia continua sia sinusoidale: infatti, la potenza dissipata nel conduttore per effetto Joule è notoriamente proporzionale al quadrato della corrente, per cui la lettura dello strumento fornirà il valore efficace della corrente a prescindere dalla sua forma d'onda.

Questo tipo di strumenti sono particolarmente sensibili alle variazioni di temperatura dell'ambiente, mentre invece non risentono di campi magnetici esterni oppure di effetti induttivi.

Abbiamo sostanzialmente due tipi di strumenti termici: **ad espansione** ed **a termocoppia**.

## Strumenti termici ad espansione

Lo schema di massima di uno strumento termico ad espansione (o a filo caldo) è riportato nella figura seguente:



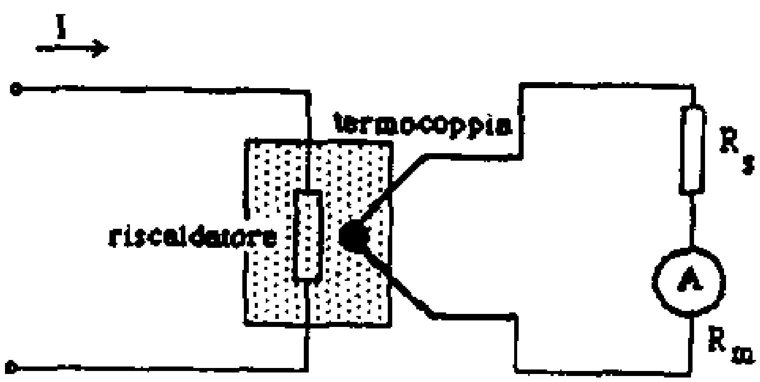

E' presente un primo filo (detto **filo caldo**) disposto orizzontalmente e teso alle due estremità (la tensione meccanica è regolabile tramite una apposita *vite di regolazione*); attraverso questo filo scorre la corrente elettrica I da misurare. C'è poi un *secondo filo*, collegato ad una molla, che esercita una tensione meccanica verso il basso sul primo filo. Questo secondo filo è avvolto su un piccolo *rullo*, il quale, ruotando, permette lo spostamento di un *indice* su una *scala graduata*.

Il principio di funzionamento è semplice: *quando il filo caldo è attraversato da corrente, il filo si riscalda e si allunga, il che provoca, tramite il secondo filo, una rotazione del rullo e quindi un movimento dell'indice sulla scala graduata.*

Ci sono una serie di svantaggi in questo meccanismo di funzionamento, che rendono lo strumento praticamente inutilizzato: l'instabilità della tensione meccanica, la risposta lenta, le difficoltà per compensare gli effetti di variazione della temperatura ambiente.

## Strumenti termici a termocoppia

Decisamente più usati dei precedenti sono gli **strumenti termici a termocoppia**. Essi sfruttano la combinazione di una termocoppia e di uno strumento magnetoelettrico (il classico amperometro realizzato con un PMMC). Uno schema di principio è riportato nella figura seguente:




Il giunto caldo della termocoppia (che è un sensore di temperatura) è soggetto all'azione termica di un riscaldatore, che è attraversato dalla corrente elettrica I da misurare. L'effetto termico sul giunto caldo determina l'insorgere di una forza elettromotrice ai capi dei morsetti della termocoppia;

questa forza elettromotrice è proporzionale alla differenza di temperatura tra il giunto caldo ed il giunto freddo e, in base al funzionamento del riscaldatore, risulta proporzionale al quadrato della corrente di misura I. Tale forza elettromotrice può quindi essere misurata tramite un voltmetro o un amperometro del tipo PMMC.

E’ ovvio che si presenta subito il problema del consumo del voltmetro o dell’amperometro, per cui è sempre necessario usare strumenti con elevatissime sensibilità e risoluzione.

Gli strumenti a termocoppia possono essere usati sia come amperometri sia come voltmetri: basta utilizzare opportuni resistori addizionali.

Le normali portate sono tra 0.5A e 20 A per gli amperometri e tra 1 V e 500 V per i voltmetri, con *sensibilità amperometrica* (pari all’inverso della portata di corrente) è variabile tra 100 Ω/V e 500 Ω/V.

Ci sono problemi legati anche in questo caso agli effetti delle variazioni della temperatura ambiente. Negli strumenti migliori, sono previsti metodi di compensazione di tali effetti: per esempio, il riscaldatore ed il giunto caldo vengono posti in un ampolla in cui viene creato il vuoto, in modo da ridurre il calore smaltito per convezione.

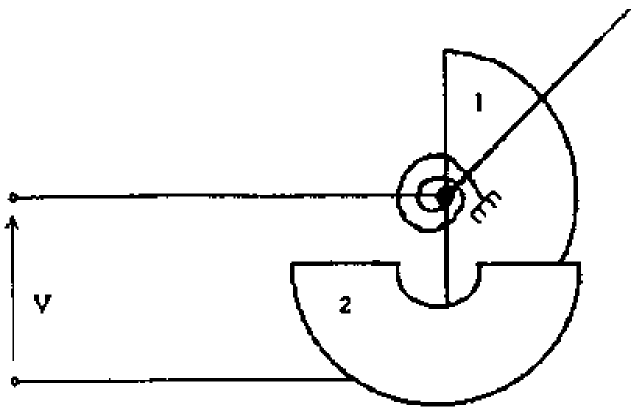
Le accuratezze sono molto elevate, fino a frequenze dell’ordine anche dei 50 MHz (almeno negli strumenti migliori), per cui questo tipo di strumenti sono impiegabili anche per misure a radiofrequenza. E’ possibile salire anche a frequenze dell’ordine dei 100 MHz se si riescono a ridurre gli errori dovuti all’effetto Pelle.

## STRUMENTI ELETTROSTATICI

*Il principio su cui si basano questi strumenti è quello classico secondo cui due corpi carichi elettricamente ma con segno opposto si attraggono.* Questi strumenti sono dei voltmetri, ma, al contrario di quelli visti in precedenza, misurano direttamente la tensione, senza usare amperometri in serie a resistori. Il maggiore vantaggio, rispetto alla configurazione con amperometro e resistore in serie, è nella resistenza di ingresso teoricamente infinita in corrente continua: infatti, questi strumenti non assorbono alcuna corrente dal circuito in prova. Inoltre, quando si passa al regime alternato, l’impedenza di ingresso rimane comunque molto alta, legata solo ad una piccola corrente capacitiva assorbita. Non ci sono inoltre errori dovuti al riscaldamento, a fenomeni di isteresi o al tipo di forma d’onda in ingresso. A fronte di questi pregi, segnaliamo il difetto della delicatezza di questi strumenti, che richiedono particolari accorgimenti costruttivi.

Una semplicissima realizzazione in un **voltmetro elettrostatico** potrebbe essere la seguente: si prendono due armature piane e parallele, di cui una fissa e l’altra mobile, anche se contrastata dall’azione di una molla di richiamo.

In alternativa, si può usare il cosiddetto **elettrometro a quadranti**, schematizzato nella figura seguente:



Abbiamo in questo caso due piatti piani a forma di semicerchio, di cui il numero 1 mobile e libero di ruotare nella zona sottostante quello fisso (il numero 2). Il moto dell’indice è solidale con il piatto mobile ed è contrastato dalla solita molla antagonista.

Quando applichiamo una tensione continua V ai capi dello strumenti, i due piatti si caricano elettricamente con cariche uguali ed opposte, il che fa nascere una coppia di attrazione, che fa ruotare il piatto 1. La rotazione viene equilibrata dalla molla antagonista. Vediamo a livello analitico.

La rotazione del piatto 1 tende a massimizzare l’energia immagazzinata nel campo elettrico; tale energia vale

$$E_m = \frac{1}{2}CV^2$$

La corrispondente coppia motrice di ottiene derivando questa quantità rispetto alla deflessione angolare $\delta$:

$$C_m = \frac{dE_m}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{1}{2}CV^2\right] = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{d\delta}$$

In questi passaggi, abbiamo tenuto conto che l’unico parametro variabile con $\delta$ è la capacità del condensatore che abbiamo realizzato con i due piatti. Si fa allora in modo che la legge di variazioni di C con $\delta$ sia costante: ponendo perciò $\frac{dC}{d\delta} = k$, si ottiene una coppia motrice proporzionale al quadrato della tensione continua applicata:

$$C_m = \frac{k}{2}V^2$$

Questa coppia è contrastata dalla coppia $M\delta$ esercitata dalla molla. In condizioni di equilibrio, abbiamo quanto segue:

$$\frac{k}{2}V^2 = M\delta \longrightarrow \boxed{\delta_{c.c.} = \frac{k}{2M}V^2}$$

Così come la coppia motrice, anche la deflessione angolare risulta dunque proporzionale al quadrato della tensione continua applicata.

Se invece supponiamo che la tensione di misura sia alternata, allora sappiamo ormai bene che conta il valor medio della coppia motrice: dato che la coppia istantanea è

$$c_m(t) = \frac{dE_m}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{1}{2}Cv^2(t)\right] = \frac{1}{2}v^2(t)\frac{dC}{d\delta} = \frac{k}{2}v^2(t)$$

e ponendo ancora una volta $\frac{dC}{d\delta} = k$, la coppia motrice media risulta essere

$$C_m = \frac{1}{T}\int_0^T c_m(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{k}{2}v^2(t)dt = \frac{k}{2}\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt = \frac{k}{2}V^2$$

dove ovviamente V è il valore efficace della tensione in ingresso.

L'equilibrio tra la coppia antagonista e la coppia motrice media ci dà la stessa espressione di prima per la deflessione angolare dello strumento:

$$\frac{k}{2}V^2 = M\delta \longrightarrow \boxed{\delta_{c.a.} = \frac{k}{2M}V^2}$$

Osserviamo dunque che la taratura dello strumento eseguita in corrente continua è valida anche in corrente alternata e notiamo inoltre che l'indicazione del valore efficace è indipendente dalla forma d'onda della tensione in ingresso.

Abbiamo inoltre trovato la proporzionalità diretta tra δ ed il quadrato della tensione in ingresso, il che ci dice che la scala dello strumento sarà quadratica. In realtà, è possibile usare anche una scala lineare (come in altri tipi di strumenti): basta sagomare in modo opportuno i piatti dello strumento, in modo da ottenere una altrettanto opportuna variazione di C con δ.

E' intuitivo aspettarsi che questo strumento sia sensibili ad eventuali campi elettrici esterni. Ci si può difendere da questi tramite una opportuna schermatura del dispositivo.

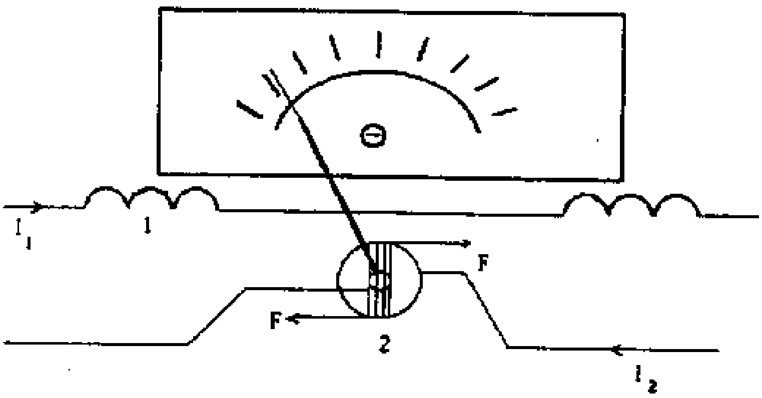
## WATTMETRI

I wattmetri sono strumenti misuratori di **potenza elettrica attiva**[11] assorbita da un utilizzatore. In corrente continua, tale potenza è il prodotto della tensione ai capi del carico per la corrente nel carico stesso; in corrente alternata, invece, tale potenza è VIcosφ, dove V ed I sono valori efficaci e dove φ è l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente (detto anche **fattore di potenza** del carico).

Esistono diversi tipi di wattmetri, ma ne esamineremo solo alcuni.

### *Wattmetro elettrodinamico*

Un primo modo di realizzare un wattmetro si basa sull'uso di un **elettrodinamometro** del tipo descritto in precedenza e del quale riportiamo nuovamente lo schema di principio:




Lo strumento, come si ricorderà, presenta due bobine (una fissa ed una mobile), ciascuna attraversata da una corrente. La coppia motrice (equilibrata dalla coppia generata dalla molla antagonista) e la corrispondente deflessione angolare δ dello strumento risultano proporzionali al

[11] Ricordiamo che la potenza elettrica attiva è definita come il valore medio della potenza attiva istantanea $p_A(t)$ sul periodo. In regime di corrente continua, tale valore medio coincide ovviamente con il valore vero, mentre in regime di corrente alternata bisogna calcolare il classico integrale di $p_A(t)$ esteso al periodo T.

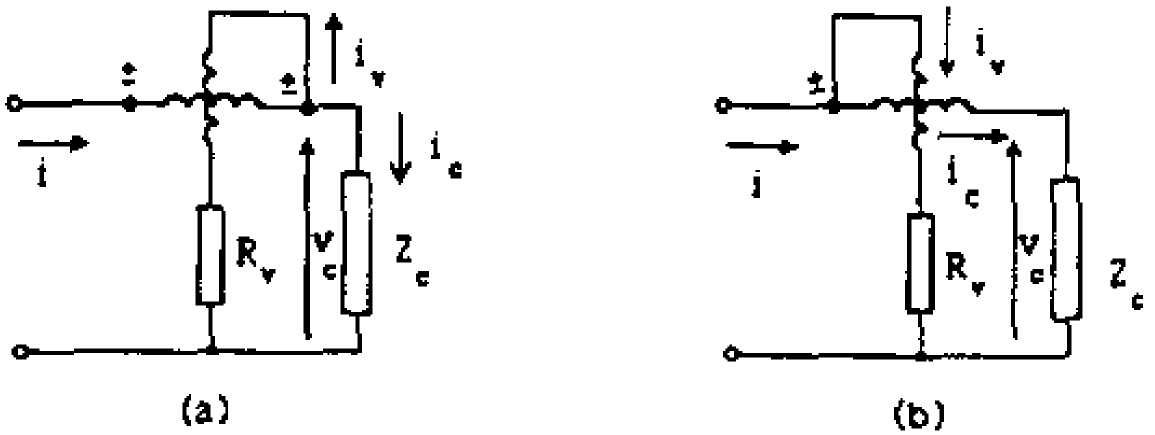
prodotto delle intensità di corrente nel caso di regime stazionario e dei valori efficaci nel caso di regime alternato sinusoidale:

regime stazionario $\rightarrow \ \delta_{c.c.} = \frac{k_a}{M} \cdot I_1 I_2$

regime sinusoidale $\rightarrow \ \delta_{c.a.} = \frac{2k_a \cos(\varphi)}{MT} \cdot I_1 I_2$

In realtà, si può vedere che, in caso di regime alternato qualsiasi, la deflessione angolare è proporzionale al prodotto dei valori efficaci quale che sia la forma d'onda in ingresso.

Il tipo di misura compiuto dallo strumento dipende da come connettiamo le due bobine ed il carico $z_C$ sotto misura. Due possibili schemi circuitali sono illustrati nella figura seguente:



La figura (a) mostra la cosiddetta **connessione a valle**, in cui il resistore addizionale $R_V$ è connesso a valle della **bobina amperometrica**. La figura (b) mostra la cosiddetta **connessione a monte**, in cui $R_V$ è connesso a monte della suddetta bobina e quindi questa è in serie al carico.

La bobina fissa (costituita da poche spire di elevata sezione) costituisce il **circuito amperometrico** (che, nella connessione a valle, è in serie al carico), mentre la bobina mobile (realizzata con molte spire di piccola sezione), in serie ad $R_V$ , costituisce il **circuito voltmetrico** (che, nella connessione a monte, è in parallelo al carico).

In entrambi gli schemi, è necessaria una approssimazione:

- nella connessione a valle, se trascuriamo la piccola corrente $i_V = v_C / R_V$ assorbita dal circuito voltmetrico, la corrente nel circuito amperometrico coincide con la corrente $i_C$ nel carico $z_C$;
- nella connessione a monte, invece, se trascuriamo la piccola caduta di tensione sulla bobina amperometrica, la tensione ai capi del circuito voltmetrico coincide con la tensione ai capi del carico $z_C$.

Sotto queste due ipotesi e supponendo di essere in regime alternato, possiamo calcolare facilmente la *coppia motrice media* per entrambi gli schemi. Utilizziamo quanto visto a suo tempo nel paragrafo sull'elettrodinamometro: in presenza, nelle bobine, di due correnti di valore istantaneo $i_1(t)$ e $i_2(t)$, si ha una coppia motrice di valore istantaneo $c_m(t) = k_a \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)$, da cui consegue che la **coppia motrice media,** in un periodo di durata T, vale

$$C_m = \frac{1}{T}\int_0^T c_m(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T k_a \cdot i_1(t)\cdot i_2(t)dt = \frac{k_a}{T}\int_0^T i_1(t)\cdot i_2(t)dt$$

Per la connessione a valle, con l'approssimazione di cui sopra, la corrente nella bobina amperometrica (bobina 1) è approssimativamente pari alla corrente $i_C$ nel carico, per cui scriviamo che

$$C_{m,valle} = \frac{k_a}{T}\int_0^T i_C(t)\cdot i_V(t)dt$$

Per la connessione a monte, invece, trascurando la tensione sulla bobina amperometrica (bobina 1), notiamo che la tensione ai capi del carico $z_C$ corrisponde alla tensione ai capi del circuito voltmetrico, per cui la corrente nel circuito voltmetrico (bobina 2 + resistore $R_V$) è approssimativamente pari al rapporto tra la tensione $v_C$ e la resistenza $R_V$; scriviamo dunque che la coppia media vale

$$C_{m,monte} = \frac{k_a}{T}\int_0^T i_C(t)\cdot\frac{v_C(t)}{R_V}dt = \frac{k_a}{T\cdot R_V}\int_0^T i_C(t)\cdot v_C(t)dt$$

D'altra parte, anche nella connessione a valle (e questa volta senza approssimazione) risulta $i_V(t) = \frac{v_C(t)}{R_V}$, per cui l'ultima relazione vale per entrambe le connessioni:

$$\boxed{C_m = \frac{k_a}{T\cdot R_V}\int_0^T i_C(t)\cdot v_C(t)dt}$$

Notiamo inoltre che il prodotto $i_C v_C$ non è altro, per definizione, che la potenza media istantanea trasferita al carico[12], il cui valore medio è, sempre per definizione, la **potenza attiva** (o *potenza media*) trasferita al carico:

$$C_m = \frac{k_a}{R_V}P_a$$

Abbiamo dunque trovato che *la coppia motrice media dell'elettrodinamometro è proporzionale alla potenza attiva trasferita al carico.* L'equilibrio tra la coppia motrice e la coppia antagonista $M\delta$ fa si, quindi, che la deflessione angolare dell'indice dello strumento sia proporzionale a sua volta a $P_a$, come volevamo:

$$\delta = \frac{k_a}{R_V M}P_a$$

Come si nota negli schemi dei due circuiti appena descritti, i wattmetri presentano un morsetto sia della bobina amperometrica sia di quella voltmetrica marcati con il simbolo ±. Il motivo è che, quando i collegamenti sono quelli riportati nella figura, l'indicazione del wattmetro risulta positiva quando il flusso di energia va dalla sorgente al carico; se invece il flusso è in direzione opposta,

[12] Ricordiamo che la potenza attiva è una potenza che è definitivamente fornita al carico (quando risulta positiva) oppure prelevata dal carico (quando risulta negativa). Quindi, con il termine "trasferita" intendiamo sia un trasferimento positivo (al carico) sia uno negativo (dal carico).

allora l’indice urta contro il fermo, per cui è necessario invertire una delle due bobine (ricordando però di conservare la connessione di $R_V$ all bobina voltmetrica): l’indicazione dello strumento sarà anche questa volta positiva, ma è implicito l’uso del segno negativo per la potenza misurata (proprio a testimoniare il trasferimento di energia dal carico alla sorgente).

## Errore di consumo

Anche i wattmetri elettrodinamici presentano un **errore di consumo**, che però è generalmente piccolo rispetto alla potenza assorbita dal carico e può essere comunque corretto per ottenere una elevata accuratezza. Tale errore di consumo è legato alle approssimazioni di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente:

- nella connessione a valle, mentre la tensione ai capi del circuito voltmetrico coincide con quella sul carico, per la corrente si ha

  $$i = i_V + i_C = \frac{v_C}{R_V} + i_C$$

  In tal caso, quindi, si ha un consumo pari alla potenza $\boxed{\frac{v_C^2}{R_V}}$ dissipata su $R_V$: in altre parole, *nella connessione a valle vengono misurate la potenza attiva assorbita dal carico ed il consumo voltmetrico;*

- nella connessione a monte, invece, la corrente nella bobina amperometrica coincide con quella nel carico, mentre la tensione è

  $$v = v_a + v_C = R_a i_C + R_C i_C$$

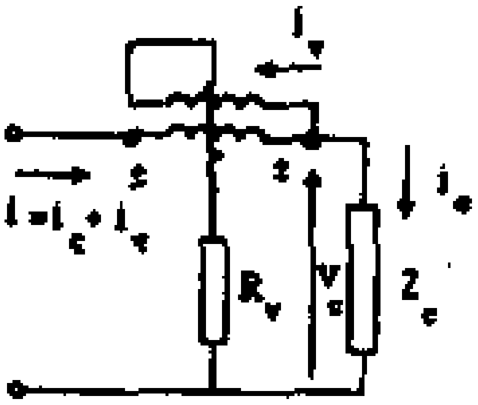
  dove $R_a$ è la resistenza (piccola) della bobina amperometrica; in tal caso, quindi, si ha un consumo pari alla potenza $\boxed{R_a i_C^2}$ dissipata su $R_a$. In altre parole, *il wattmetro con inserzione a monte del circuito voltmetrico misura la potenza attiva assorbita dal carico ed il consumo amperometrico.*

Per quanto riguarda la scelta dell’una o dell’altra connessione, si tratta di valutare caso per caso: in generale, la connessione a valle è preferibile per carichi in bassa tensione (in modo da ridurre il consumo) e che assorbono elevate correnti, mentre invece la connessione a monte è preferibile per carichi che assorbono bassa corrente (sempre al fine di ridurre il consumo) e che sopportano tensioni elevate.

Inoltre, dato che è più facile valutare il consumo voltmetrico $v_C^2/R_V$ (dovuto alla resistenza che generalmente è nota e costante essendo di manganina) che non quello amperometrico $R_a i_C^2$ della bobina amperometrica (di piccola resistenza, generalmente di rame, e quindi variabile con la temperatura), *quando si debba tenere conto dell’errore di consumo è da preferirsi la derivazione a valle*.

### Wattmetro elettrodinamico con compensazione automatica del consumo

Complicando leggermente lo schema circuitale della connessione a valle, possiamo ottenere una compensazione automatica del consumo del wattmetro elettrodinamico. La configurazione è la seguente:




Sostanzialmente, abbiamo sdoppiato la bobina amperometrica, facendo in modo che il primo "pezzo" sia attraversato dalla corrente i e che il secondo "pezzo" sia in serie al circuito voltmetrico (per cui è attraversato da $i_V$). Questa corrente $i_V$, che scorre in senso inverso alla corrente di carico, genera un campo di induzione magnetica contrario al campo principale e questo indebolisce la coppia motrice, di una quantità tale da eliminare l'errore di consumo $\frac{v_C^2}{R_V}$.

### Errore di fase

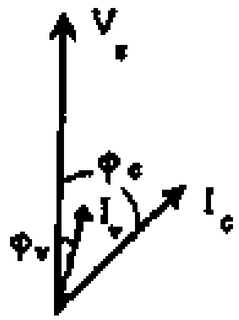
A prescindere da eventuali meccanismi di compensazione del consumo, abbiamo detto che la coppia motrice dello strumento, sia per la connessione a monte sia per quella a valle, risulta essere

$$C_m = \frac{k_a}{T \cdot R_V} \int_0^T i_C(t) \cdot v_C(t) dt$$

In effetti, questa relazione andrebbe perfezionata tenendo conto dell'induttanza $\mathbf{L_V}$ della bobina voltmetrica. A tal fine, supponiamo di essere in regime sinusoidale, per cui è sinusoidale la tensione $v_C(t)$ ai capi del carico. Abbiamo prima supposto che fosse $I_V = \frac{V_C}{R_V}$, ma in realtà dobbiamo scrivere che

$$I_V = \frac{V_C}{R_V + j\omega L_V}$$

dove $\omega$ è la frequenza di lavoro e $L_V$ è la suddetta induttanza della bobina voltmetrica. In base a questa relazione, la corrente nel circuito voltmetrico non è in fase con la tensione sul carico, ma sfasata in ritardo rispetto ad essa, di un angolo $\varphi_V = \mathrm{arctg}\frac{\omega L_V}{R_V}$. Il seguente diagramma delle tensioni chiarisce la situazione:



dove ovviamente $\varphi_C = \mathrm{arctg}\frac{X_C}{R_C}$ è il fattore di potenza del carico.

Da queste considerazioni scaturisce che l'indicazione dello strumento non sarà proporzionale al coseno di $\varphi_C$, bensì al coseno della differenza $\varphi_C$-$\varphi_V$: infatti, la coppia motrice media, cui è proporzionale la deflessione angolare, nell'ipotesi di regime sinusoidale risulta essere

$$C_m = \frac{k_a}{R_V} \cdot P_a = \frac{k_a}{R_V} \cdot V_C I_C \cos(\varphi_C - \varphi_V)$$

dove ovviamente $V_C$ ed $I_C$ sono valori efficaci.

Abbiamo dunque quello che si definisce **errore di fase**, rappresentato dal fatto di avere, in quella formula, la quantità $V_C I_C \cos(\varphi_C - \varphi_V)$ al posto della quantità $V_C I_C \cos(\varphi_C)$ che si avrebbe per $L_V$=0. L'**errore relativo di fase** risulta essere perciò

$$e_f = \frac{V_C I_C \cos(\varphi_C) - V_C I_C \cos(\varphi_C - \varphi_V)}{V_C I_C \cos(\varphi_C)} = \frac{\cos(\varphi_C) - \cos(\varphi_C - \varphi_V)}{\cos(\varphi_C)} =$$
$$= \frac{\cos(\varphi_C) - \cos(\varphi_C)\cos(\varphi_V) - \sin(\varphi_C)\sin(\varphi_V)}{\cos(\varphi_C)} = 1 - \frac{\cos(\varphi_C)\cos(\varphi_V) + \sin(\varphi_C)\sin(\varphi_V)}{\cos(\varphi_C)}$$

Supponendo piccola l'induttanza $L_V$ e quindi piccolo lo sfasamento $\varphi_V$, possiamo approssimare

$$e_f \cong 1 - \frac{\cos(\varphi_C) \cdot 1 + \sin(\varphi_C) \cdot \varphi_V}{\cos(\varphi_C)} = -\frac{\sin(\varphi_C) \cdot \varphi_V}{\cos(\varphi_C)} = -\varphi_V \cdot \mathrm{tg}(\varphi_C)$$

In base a questa relazione, l'errore di fase non dipende solo da $\varphi_V$, ma anche da $\varphi_C$. E' ovvio che l'errore di fase diventa apprezzabile quanto la reattanza $\omega L_V$ è elevata, ossia, a parità di $L_V$, in alta frequenza; in questi casi, si può compensare l'effetto di $L_V$ predisponendo un condensatore in parallelo ad $R_V$, che dia luogo ad una reattanza uguale e contraria ad $\omega L_V$.

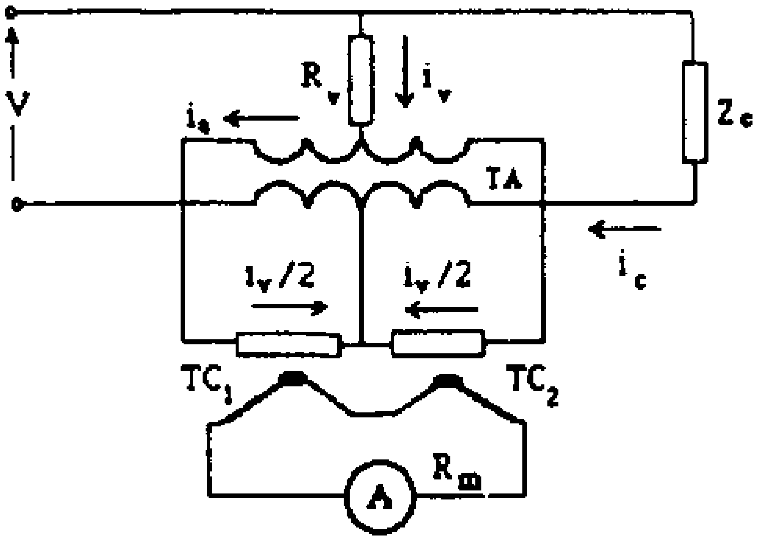
Inoltre, a parità di $\varphi_V$, l'errore di fase diventa rilevante per i cosiddetti *carichi a basso fattore di potenza*, cioè con $\varphi_C$ piccolo (per cui $\mathrm{tg}(\varphi_C)$ è grande). In questi casi, la compensazione è importante e si usano perciò i cosiddetti **wattmetri a basso fattore di potenza**: in pratica, in questi strumenti viene indebolita la coppia antagonista, in modo che l'indicazione di fondo scala si abbia per valori nominali di tensione e di corrente sfasati tra loro di un angolo tale che il fattore di potenza sia pari a 0.1 oppure 0.2. Quando sulla targa dello strumento è indicato un cosφ di taratura pari a 0.1 o a 0.2, lo strumento non può essere usato per carichi che assorbano una potenza superiore ad un decimo o due decimi del prodotto tra tensione e corrente nominali.

### Vantaggi e svantaggi dei wattmetri elettrodinamici

Riepilogando, i vantaggi dei wattmetri elettrodinamici sono l'elevata accuratezza (si arriva fino al 99,9%) e l'adattabilità a misure sia in corrente alternata sia in corrente continua. Gli svantaggi sono invece la piccola sensibilità (legata al debole campo magnetico), la ridotta sovraccaricabilità, il costo elevato, la sensibilità a campi magnetici esterni (a meno di non usare apposite schermature, presenti negli strumenti migliori).

## *Wattmetri termici*

Quando si vogliono effettuare misure di potenza in un campo di frequenze abbastanza grande, è necessario ricorrere ai **wattmetri termici**. La figura seguente ne mostra una semplice schematizzazione:




Questo è un **convertitore termico di potenza**: è costituito da due *termocoppie* (TC1 e TC2) collegate a due *riscaldatori*; questi ultimi sono inseriti nel circuito di cui si vuol misurare la potenza e a tale scopo viene usato un *trasformatore di corrente (TA) a presa centrale* (sia sul prima sia sul secondario) ed un *divisore resistivo* $R_V$.

Il funzionamento è il seguente: il riscaldatore della termocoppia TC1 è sensibile ad una corrente somma delle correnti nel trasformatore ($i_a$) e nel circuito voltmetrico ($i_v$); l'altro riscaldatore, invece, è sensibile alla differenza delle suddette correnti. A loro volta, le due correnti $i_a$ ed $i_v$ sono proporzionali, rispettivamente, alla corrente di carico ($i_C$) ed alla tensione di carico ($v_C$). Le forze elettromotrici generate dalle due termocoppie sono collegate in opposizione nel loro circuito interno, nel quale è anche inserito un amperometro magnetoelettrico.

In base alle equazioni caratteristiche di funzionamento di una termocoppia e di uno strumento PMMC, possiamo scrivere che la coppia motrice istantanea vale

$$c_m = k \cdot \left[ \left( i_a + \frac{i_v}{2} \right)^2 - \left( i_a - \frac{i_v}{2} \right)^2 \right] = 2 \cdot k \cdot i_a \cdot i_v = k_1 \cdot i_C \cdot v_C$$

Abbiamo cioè trovato che la coppia motrice istantanea nello strumento PMMC è proporzionale al prodotto della corrente e della tensione istantanee nel carico e questo è ciò che volevamo, in quanto tale prodotto è la potenza istantanea.

Se il regime è alternato, sappiamo che l’amperometro fornisce una indicazione proporzionale non più ai valori istantanei, ma al valore medio della coppia, ossia quindi alla potenza attiva assorbita dal carico: scriviamo infatti che

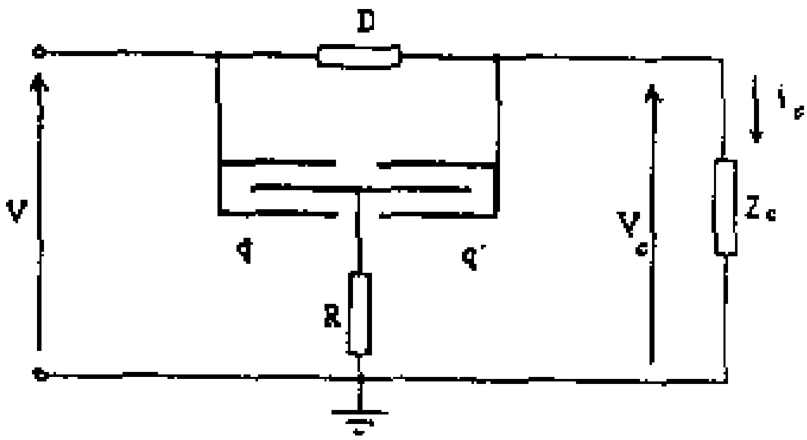
$$C_m = \frac{1}{T}\int_0^T c_m(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T k_1 \cdot i_C(t)\cdot v_C(t)dt = k_1 P_a$$

I riscaldatori presenti nel dispositivo limitano generalmente la precisione; per aumentare tale precisione, vengono eliminati i riscaldatori e si usano generalmente delle *catene di termocoppie autoriscaldanti*, attraversate direttamente dalle correnti di misura.

I wattmetri termici sono molto affidabili e presentano elevata accuratezza, motivo per cui sono molto usati per la taratura di altri tipi di wattmetri.

## *Wattmetro elettrostatico*

L’ultimo tipo di wattmetro che prendiamo in esame è il **wattmetro elettrostatico**, schematizzato nella figura seguente:




Notiamo subito la presenza, al centro, di due armature, di cui una mobile (collegata al potenziale di terra tramite una resistenza R che ha solo funzioni di sicurezza dato che spesso sono presenti alte tensioni) e l’altra fissa. La corrente $i_C$ che scorre nel carico scorre anche nella resistenza D, dando origine ad una caduta di tensione $Di_C$ tra i quadranti fissi q e q’ dell’armatura fissa, il che genera una rotazione dell’armatura mobile e quindi una variazione delle due corrispondenti capacità. Se la costituzione delle armature è perfettamente simmetrica, tali variazioni di capacità sono uguali e di segno opposto, per cui possiamo scrivere (analogamente a quanto fatto per gli strumenti elettrostatici) che la coppia motrice è

$$C_m = \frac{dE_m}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{1}{2}C\left(v_q^2 - v_{q'}^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left(v_q^2 - v_{q'}^2\right)\frac{dC}{d\delta} = \frac{1}{2}\left(v_c^2 - v_c^2 + 2v_c Di_c + D^2 i_c^2\right)\frac{dC}{d\delta} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2v_c Di_c + D^2 i_c^2\right)\frac{dC}{d\delta} = D\frac{dC}{d\delta}v_c i_c + \frac{1}{2}\frac{dC}{d\delta}D^2 i_c^2$$

Così come abbiamo visto per gli strumenti elettrostatici precedentemente esaminati, si fa in modo che le variazioni di capacità con la deflessione angolare δ sia costanti: ponendo perciò $\frac{dC}{d\delta} = k$, concludiamo che la coppia motrice vale

$$C_m = Dk \cdot v_c i_c + \frac{1}{2} kD^2 i_c^2$$

Notiamo allora che tale coppia risulta somma di due termini, di cui solo il primo proporzionale al prodotto tra la tensione e la corrente nel carico. L'altro termine rappresenta dunque il consumo dello strumento; data la sua dipendenza da D, esso viene reso piccolo diminuendo il più possibile proprio il valore di D.

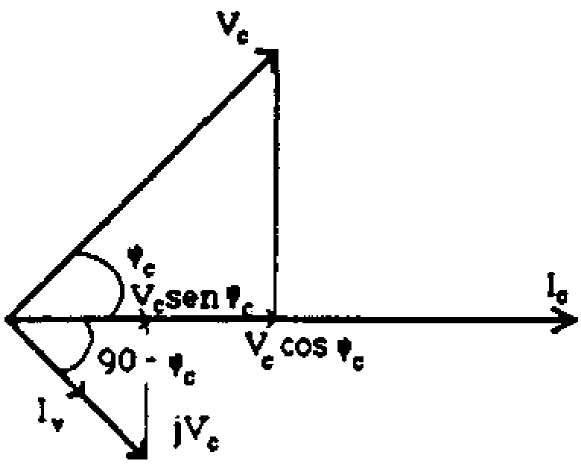
Il wattmetro elettrostatico ha il pregio di essere insensibile ai campi elettromagnetici esterni e può inoltre essere tarato in corrente continua. Inoltre, se si utilizzano un derivatore D ed un resistore R privi di effetti induttivi, si ottiene anche l'indipendenza della misura effettuata dalla forma d'onda e dalla frequenza della tensione e della corrente.

## VARMETRI

Mentre i wattmetri servono a misurare la potenza attiva assorbita da un carico, i **varmetri** servono a misurare la potenza reattiva assorbita dallo stesso carico. Il nome "varmetri" deriva dal fatto che la potenza reattiva si misura notoriamente in VAR.

C'è una differenza sostanziale rispetto al paragrafo precedente: infatti, mentre la potenza attiva è definita come il valor medio della potenza attiva istantanea, la potenza reattiva è definita come il valore massimo della potenza reattiva istantanea, dato che il valore medio di quest'ultima è nullo. Nel caso di regime sinusoidale, si trova che la potenza reattiva di un carico $z_C$ vale $\mathbf{P_r = V_C I_C \sin\varphi_C}$.

Per realizzare un varmetro, basta modifica un wattmetro, sfasando in ritardo, rispetto alla tensione applicata alla bobina voltmetrica, la corrente che attraversa la stessa bobina. Il seguente diagramma vettoriale delle tensioni (costruito supponendo nullo l'*errore di fase*) aiuta a capire il concetto:




In questo diagramma, $V_C$ ed $I_C$ sono rispettivamente tensione e corrente sul carico, sfasate di un angolo $\varphi_C$ dovuto alla presenza, nel suddetto carico, di una parte reattiva $X_C$ oltre a quella resistiva $R_C$. Nel paragrafo precedente, abbiamo visto che la coppia motrice media presente nello strumento, sia per la connessione a valle sia per quella a monte, vale

$$C_m = \frac{k_a}{T} \int_0^T i_C(t) \cdot i_V(t) dt$$

dove risultava $i_V = v_C / R_V$. Proprio quest'ultima relazione, in base alla quale la corrente $i_V$ nella bobina voltmetrica è in fase con la tensione sul carico $v_C$, garantiva la misura della potenza attiva.

Abbiamo poi visto, però, che, in realtà, l'effetto induttivo della bobina voltmetrica generava un errore di fase, in base al quale la misura da noi effettuata era proporzionale alla quantità $V_C I_C \cos(\varphi_C - \varphi_V)$, dove lo sfasamento che causa l'errore è $\varphi_V = \mathrm{arctg}\frac{\omega L_V}{R_V}$. Allora, se otteniamo che $\varphi_V$=90° (cioè appunto se sfasiamo $i_V$ di 90° in ritardo rispetto alla tensione $v_C$ come mostrato nel diagramma), otteniamo una misura proporzionale a $V_C I_C \cos(\varphi_C - 90°)$ ossia a $V_C I_C \sin(\varphi_C)$, che è proprio la potenza reattiva.

Questo sfasamento della corrente di 90° può essere ottenuto mediante componenti R,L e C opportunamente dimensionati. Il problema è che lo sfasamento è relativo solo ad uno specifico valore di frequenza φ, per cui i varmetri hanno una ben precisa frequenza di taratura, che è generalmente quella dei sistemi di potenza.

I varmetri utilizzano normalmente strumenti elettrodinamici e presentano un **errore di fase** (dovuto al fatto che non si riesce ad ottenere un perfetto ritardo di 90°) che vale **$\varphi_V \mathrm{cotg}(\varphi_C)$**, dove $\varphi_V$ è sempre lo sfasamento tra tensione e corrente nel circuito voltmetrico.

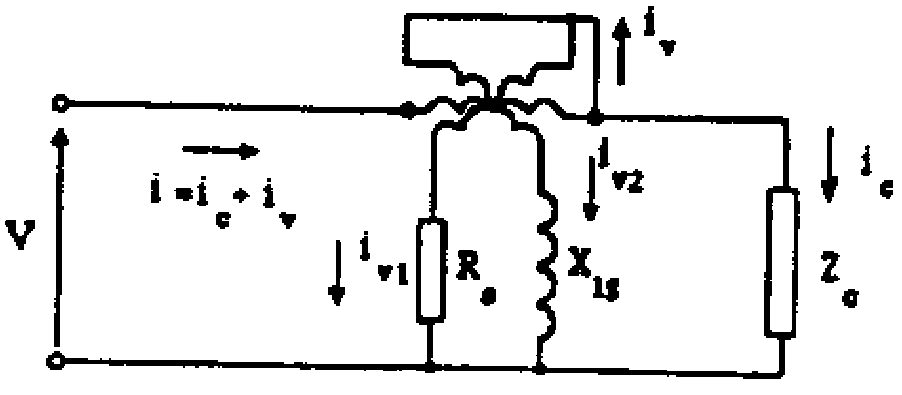
## STRUMENTI PER LA MISURA DEL FATTORE DI POTENZA

Nei precedenti due paragrafi abbiamo visto l'importanza del fattore di potenza **$\cos\varphi_C$** per la misura di potenza su di un carico. Nel caso si voglia misurare proprio tale fattore, si potrebbe procedere per via indiretta, misurando cioè separatamente la potenza attiva, la tensione e la corrente relative al carico e poi applicando la relazione

$$\cos(\varphi_C) = \frac{P_a}{V_C I_C}$$

Tuttavia, con un simile procedimento, avremmo almeno due problemi: il primo relativo alla propagazione degli errori delle misure indirette, dove gli errori sono quelli di ciascuno strumento di misura utilizzato (voltmetro, amperometro e wattmetro); il secondo relativo all'errore di fase nel wattmetro.

Risultati migliori si ottengono allora tramite una <u>misura diretta del fattore di potenza</u>. A tal fine si può usare uno strumento elettrodinamico, chiamato **rapportimetro elettrodinamico**, di cui la figura seguente riporta una schematizzazione:




La bobina amperometrica dello strumento è attraversata dalla corrente $i=i_C+i_V$, somma della corrente di carico e della corrente nel circuito voltmetrico; quest'ultimo è costituito da due bobine mobili: la prima ha in serie il resistore $R_S$ (attraversato da $i_{v1}$) mentre l'altra ha in serie l'induttore $L_S$

(attraversato da $i_{v2}$). Le correnti che scorrono nella bobina amperometrica e nelle bobine voltmetriche generano due coppie, che tendono ad opporsi; sotto l'azione di queste coppie, le due bobine mobili, solidali meccanicamente tra loro, ruotano di un certo angolo fino al raggiungimento dell'equilibrio.

In base alla teoria degli strumenti elettrodinamici, possiamo valutare la deflessione angolare $\delta$ dello strumento: indicati con $\varphi_1$ e $\varphi_2$ rispettivamente gli angoli di fase tra la corrente di carico e le correnti voltmetriche $I_{v1}$ e $I_{v2}$, risulta

$$\delta = \frac{k_1 \cdot i_c \cdot i_{v2} \cdot \cos\varphi_2}{k_2 \cdot i_c \cdot i_{v1} \cdot \cos\varphi_1} = \frac{k_1}{k_2}\frac{i_{v2} \cdot \cos\varphi_2}{i_{v1} \cdot \cos\varphi_1}$$

Se supponiamo (in prima approssimazione) che il resistore $R_S$ non presenti effetti induttivi, la corrente $i_{v1}$ sarà in fase con la tensione $v_C$ mentre invece la corrente $i_{v2}$ nell'induttore è sfasata di 90° in ritardo rispetto alla tensione $v_C$ (trascurando in questo campo eventuali dissipazioni nell'induttore). Allora, dato che la corrente e la tensione nel carico sono sfasate di un angolo $\varphi$ generico, in base alle precedenti considerazioni possiamo scrivere che

$$\delta = \frac{k_1}{k_2}\frac{i_{v2} \cdot \cos(90 - \varphi)}{i_{v1} \cdot \cos(\varphi)} = \frac{k_1}{k_2}\frac{i_{v2}}{i_{v1}}\mathrm{tg}(\varphi)$$

In base a questa relazione, otteniamo una deflessione proporzionale alla tangente di $\varphi$. Applicando le dovute formule matematiche, è possibile tarare la scala dello strumento direttamente in valori proporzionali al fattore di potenza $\cos\varphi$.

E' inoltre opportuno precisare che l'indicazione dello strumento dipende strettamente dalla frequenza, per cui la taratura è effettuata in corrispondenza di un preciso valore di frequenza (generalmente 50 Hz o 60 Hz).

Attualmente, comunque, le misure del fattore di potenza vengono effettuate tramite strumenti elettronici molto più accurati di quelli elettrodinamici del tipo appena descritto.

## FREQUENZIMETRO A LAMELLE

Il **frequenzimetro** è uno strumento per misure di frequenza (accurate e con alta risoluzione) sul segnale posto in ingresso. I primi **frequenzimetri analogici**, ormai soppiantati da quelli elettronici, furono usati per la misura delle frequenza di rete, delle sue oscillazioni e delle armoniche dovute alle presenza di elementi non lineari.

Esistono varie versioni di frequenzimetri. In questa sede, ci interessa il cosiddetto **frequenzimetro a lamelle**, che è stato in passato tra i più diffusi. Esso è costituito da una serie di lamelle, fissate ad un sostegno comune montato sull'armatura di un elettromagnete; quest'ultimo ha una bobina che viene attraversata da corrente quando lo strumento è inserito in parallelo alla sorgente di cui si vuol conoscere la frequenza. Ciascuna lamella, tramite un opportuno dimensionamento della lunghezza e della massa, è accordata su una particolare frequenza, diversa dalle altre.

Se $f_0$ è la frequenza della sorgente(supposta puramente sinusoidale), quando circola corrente (appunto a frequenza $f_0$) nella bobina, prende a vibrare quella lamella la cui frequenza naturale è il doppio di $f_0$; tale vibrazione è visibile attraverso una finestrella in corrispondenza della scala graduata dello strumento.

Se il segnale in ingresso non è monofrequenziale, si avrà vibrazione di più lamelle adiacenti. Ad esempio, se vibrano due lamelle vicine con uguale intensità, si deduce che la frequenza incognita è il valor medio delle frequenze naturali relative alle due lamelle. Se invece una delle due lamelle vibra più dell'altra, allora si eseguirà una media pesata delle rispettive frequenze naturali, attribuendo maggiore peso alla frequenza della lamella che vibra di più.

I pregi di questo strumento sono la robustezza, la facilità di realizzazione ed anche l'insensibilità ad armoniche nel caso di grandezze in ingresso deformate: infatti, in presenza di un segnale deformato, lo strumento fornisce (entro i limiti della propria accuratezza) l'indicazione solo della frequenza fondamentale.

## CLASSIFICAZIONE RIASSUNTIVA DEGLI STRUMENTI ANALOGICI

***1)*** A seconda della grandezza misurata

- Amperometri
- Voltmetri
- Ohmetri
- Wattmetri
- Frequenzimetri
- Contatori
- ...

***2)*** A seconda del modo in cui la misurano:

- Registratori
- Integratori
- Indicatori:
    - Elettromagnetici a bobina mobile
    - Elettromagnetici a ferro mobile
    - Elettrodinamici
    - Elettrostatici
    - Ad induzione
    - A filo caldo
    - A termocoppia
    - ...

***3)*** A seconda del modo di impiego:

- Da quadro
- Di controllo
- Da laboratorio

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1