

# Appunti di "Misure Elettriche"

## Capitolo 8

### Campionamento e conversione (parte I)

Introduzione .....	2	
Campionamento .....	2	
Definizione di campionamento .....	2	
Segnale campionato .....	3	
Teorema del campionamento .....	6	
Formula di ricostruzione.....	8	
<i>Caso limite: frequenza di campionamento pari alla frequenza di Nyquist</i> .....	9	
Esempio di campionamento ideale.....	10	
Estensione del teorema del campionamento a segnali passa-banda .....	13	
Errore di aliasing .....	13	
<i>Esempio numerico: campionamento di una sinusoid</i> .....	14	
Finestra di osservazione e prefiltraggio anti-aliasing .....	18	
Errore di troncamento.....	18	
Conclusioni sul campionamento di durata finita .....	21	
Campionamento di durata finita e misure digitali.....	22	
Introduzione .....	22	
Approssimazione della formula ideale di interpolazione.....	22	
Importanza del numero di campioni.....	24	
Stima dello spettro di un segnale .....	25	
Segnali periodici.....	26	
Finestratura .....	27	
Campionamento .....	28	
Campionamento in frequenza .....	29	
<i>Segnali aperiodici</i> .....	29	
Riepilogo generale sul campionamento negli strumenti di misura.....	31	
Effetti della non-idealità del campionatore.....	31	
Introduzione .....	31	
Modello del campionatore reale.....	35	
Compensazione degli effetti di non-idealità del campionatore .....	35	
<i>Tecniche numeriche di compensazione</i> .....	36	
Circuiti di campionamento e tenuta.....	37	
Introduzione .....	37	
Realizzazioni circuitali di un SHA .....	38	

## INTRODUZIONE

Il processo di **campionamento** di un segnale analogico variabile nel tempo riveste una grossa importanza nella maggior parte dei sistemi elettronici: esso infatti *consente il passaggio dal dominio del continuo al dominio del discreto, in modo da facilitare la conversione dei segnali da analogico in digitale*. Anche se bisogna precisare che non tutti gli strumenti digitali richiedono il campionamento del segnale di misura, esiste una serie consistente di strumenti in cui il campionamento del segnale è la prima operazione che viene effettuata.

Solo l'esecuzione corretta del campionamento può evitare errori che, se presenti, vanificherebbero il ricorso alla strumentazione digitale.

Le conversioni digitale-analogico (D→A) e analogico-digitale (A→D) consentono il collegamento fondamentale tra il mondo delle quantità analogiche ed il mondo dei **segnali digitali** (o *segnali numerici*):

- i cosiddetti **DAC** (acronimo di *Digital Analog Converter*) sono dispositivi usati per ricostruire un segnale analogico in uscita da un dispositivo digitale dopo, per esempio, una elaborazione o dopo l'immagazzinamento in una memoria numerica o semplicemente dopo una trasmissione in forma digitale;
- invece, gli **ADC** (acronimo di *Analog Digital Converter*) sono dispositivi che convertono il segnale analogico in ingresso ad un dispositivo nella sua equivalente forma digitale.

Questi convertitori sono disponibili sul mercato in diverse forme realizzative, utili per una vasta serie di applicazioni.

Nei moderni sistemi digitali è spesso necessario collegare componenti o parti che possono essere lontane tra loro. Questa tendenza è favorita dal fatto che i segnali digitali sono meno soggetti, rispetto a quelli analogici, all'influenza dei disturbi e del rumore. Nonostante questo, però, è importante sottolineare che, *volendo trasmettere un segnale digitale, è necessario utilizzare linee di trasmissione progettate ad hoc, in modo da evitare una degradazione del contenuto informativo presente nel segnale stesso*: infatti, i segnali digitali hanno spesso dei tempi di trasmissione estremamente piccoli (dell'ordine dei nanosecondi), per cui richiedono delle linee in grado di trasmettere segnali ad elevata frequenza.

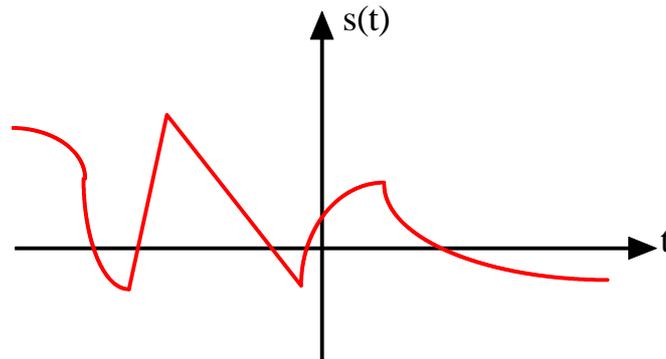
# Campionamento

## DEFINIZIONE DI CAMPIONAMENTO

La fase iniziale e spesso più critica dell'elaborazione digitale di un segnale analogico è quella del **campionamento**: esso consiste semplicemente nella trasformazione di un segnale continuo nel tempo in un segnale discreto. Se questa operazione non è eseguita correttamente, tenendo presenti le caratteristiche spettrali del segnale in esame, si ottengono dei risultati errati, in quanto il contenuto delle informazioni del **segnale campionato** risulta diverso da quello del segnale di partenza.

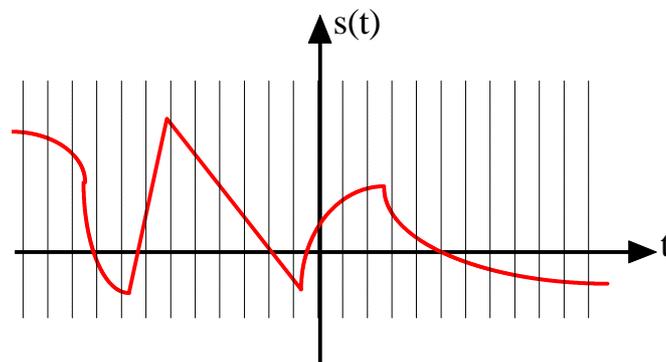
Consideriamo dunque un segnale  $s(t)$  continuo nel tempo: "**campionare**"  $s(t)$  significa considerare solo i valori che esso assume per valori discreti di  $t$  che siano multipli interi di

una quantità fissa  $T$ . Per esempio, supponiamo che il nostro segnale  $s(t)$  abbia l'andamento mostrato nella figura seguente:



Per campionare  $s(t)$ , non dobbiamo far altro che scegliere un valore  $T_C$  (reale positivo) e valutare i valori che  $s(t)$  assume negli istanti

$$t = nT_C \quad \text{con } n = -\infty, \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots, +\infty$$



La quantità  $T_C$  prende il nome di **periodo di campionamento**: evidentemente, esso rappresenta l'intervallo di tempo che intercorre tra due misure successive del valore di  $s(t)$ .

L'inverso di  $T_C$ , ossia  $f_C = 1/T_C$ , prende invece il nome di **frequenza di campionamento** e rappresenta il numero di valori di  $s(t)$  che si valutano nell'unità di tempo. Quanto più piccolo è  $T_C$ , tanto maggiore è  $f_C$  e quindi tanti più campioni noi possiamo raccogliere nell'unità di tempo.

## SEGNALE CAMPIONATO

Ci proponiamo adesso di verificare la possibilità di ottenere l'andamento esatto, cioè l'andamento continuo nel tempo, del segnale  $s(t)$  a partire solo dalla conoscenza dei suoi campioni. Vedremo perciò come è possibile fare questo e sotto quali ipotesi il risultato finale risulta valido.

Intanto, è ovvio che l'insieme dei valori di  $s(nT_C)$  che otteniamo negli istanti  $t = nT_C$ , cioè i cosiddetti **campioni** del segnale in esame, costituiscono il cosiddetto **segnale discreto** corrispondente al segnale continuo  $s(t)$ : lo possiamo dunque indicare con la notazione  $s(nT_C)$ . Prende invece il nome di **segnale campionato** di  $s(t)$  il segnale che si ottiene mediante la formula

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C) \delta(t - nT_C)$$

Al contrario del segnale discreto, il segnale campionato è dunque un segnale CONTINUO costituito da una successione di impulsi, ciascuno traslato di una quantità  $nT_C$  rispetto all'origine e di area pari al valore del corrispondente campione  $s(nT_C)$ . Questo segnale campionato ha la particolarità di assumere, in ogni istante, il valore che ivi assume  $s(t)$ .

Andiamo ora a determinare lo **spettro** (cioè la trasformata di Fourier) del segnale campionato  $s_C(t)$ . Intanto, possiamo manipolare ulteriormente l'espressione di questo segnale: infatti, considerando che il prodotto  $s(nT_C)\delta(t-nT_C)$  ha senso solo per  $t=nT_C$ , mentre vale 0 altrove, possiamo porre proprio  $t=nT_C$ , in modo da ottenere

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C)\delta(t-nT_C) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t-nT_C) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_C)$$

La sommatoria di impulsi per cui  $s(t)$  viene moltiplicato in questa formula prende il nome di **pettine di campionamento**. Lo indichiamo con  **$p(t)$** .

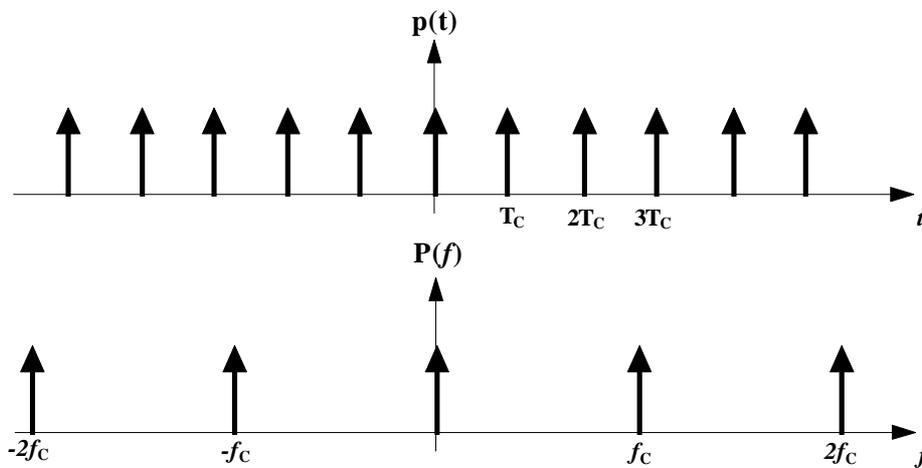
A partire da questa espressione, calcoliamo  $S_C(f)$ , la quale sarà evidentemente pari alla trasformata del secondo membro; questo secondo membro è costituito da un prodotto: ricordando allora che un prodotto nel dominio del tempo equivale ad una convoluzione nel dominio della frequenza (*proprietà di convoluzione in frequenza*), possiamo scrivere che

$$S_C(f) = S(f) * \text{Fourier} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_C) \right]$$

Sappiamo, d'altra parte, che la trasformata di Fourier del segnale  $p(t)$ , che rappresenta una successione di impulsi, è

$$G(f) = \frac{1}{T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_C}\right)$$

Si tratta di una ulteriore successione di impulsi<sup>1</sup>. In altre parole, il *pettine di impulsi di campionamento* è rappresentabile, spettralmente, con la sovrapposizione di sinusoidi complesse di frequenza  $1/T_C$  e multipli, tutte di ampiezza  $1/T_C$ :



<sup>1</sup> Ricordiamo che la trasformata di un segnale periodico è sempre una successione di impulsi. La particolarità, quindi, in questo caso sta nel fatto che anche il segnale di cui calcoliamo la trasformata è una successione di impulsi.

Andando a sostituire nella espressione di  $S_C(f)$  otteniamo

$$S_C(f) = S(f) * \frac{1}{T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_C}\right) = \frac{1}{T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_C}\right)$$

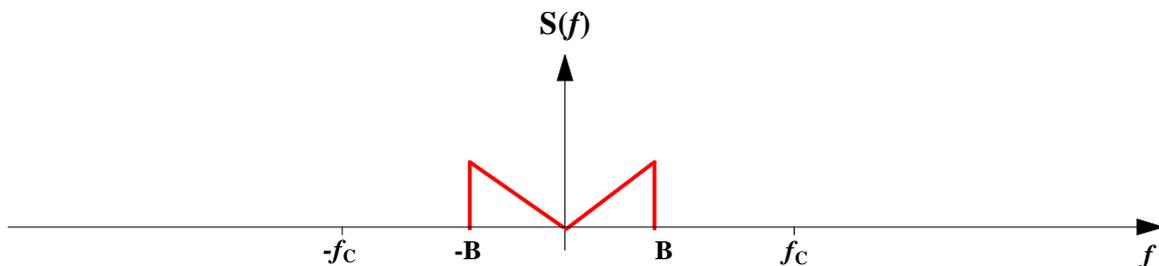
A questo punto, ci ricordiamo che la *convoluzione* tra un qualsiasi segnale e l'impulso traslato è pari al segnale stesso calcolato nello stesso punto in cui è applicato l'impulso, per cui concludiamo che lo spettro del segnale campionato è

$$S_C(f) = \frac{1}{T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T_C}\right)$$

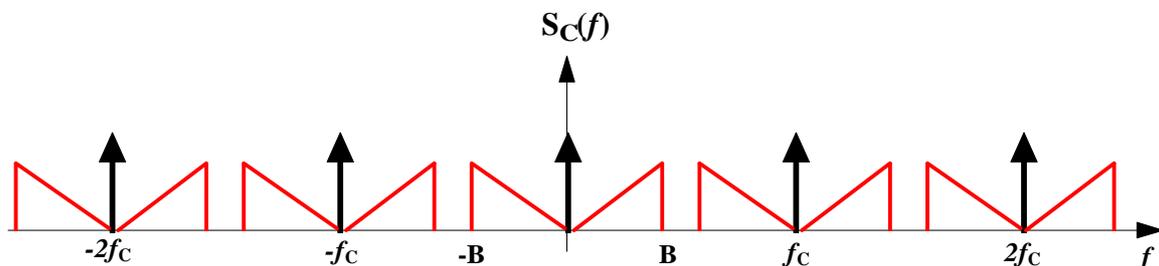
Come è fatto questo spettro? Dato che la funzione  $S(f)$  non è altro che lo spettro del nostro segnale  $s(t)$ , deduciamo che  $S_C(f)$  consiste in una successione di repliche, a meno del fattore costante  $1/T_C$ , dello spettro di  $s(t)$ , ciascuna traslata rispetto all'origine di una quantità pari ad un multiplo della frequenza di campionamento  $f_C=1/T_C$ : infatti, andando a sviluppare parzialmente quella sommatoria, troviamo evidentemente che

$$S_C(f) = \dots + \frac{1}{T_C} S\left(f + \frac{2}{T_C}\right) + \frac{1}{T_C} S\left(f + \frac{1}{T_C}\right) + \frac{1}{T_C} S(f) + \frac{1}{T_C} S\left(f - \frac{1}{T_C}\right) + \frac{1}{T_C} S\left(f - \frac{2}{T_C}\right) + \dots -$$

Per essere più chiari, supponiamo che lo spettro di  $s(t)$  sia del tipo seguente:



Lo spettro del segnale campionato sarà allora del tipo seguente:



*Spettro del segnale campionato per il segnale della figura precedente. Gli impulsi posizionati sulla frequenza  $f_c$  e sui suoi multipli rappresentano lo spettro del pettine di campionamento, indicato al fine di evidenziare l'effetto della convoluzione:  $S(f)$  viene collocato a cavallo di ciascun impulso di campionamento (in frequenza). In figura sono indicate solo le repliche a cavallo della frequenza 0, di  $\pm f_c$  e di  $\pm 2f_c$ , ma sono da considerarsi anche le repliche a cavallo degli infiniti altri multipli della frequenza di campionamento*

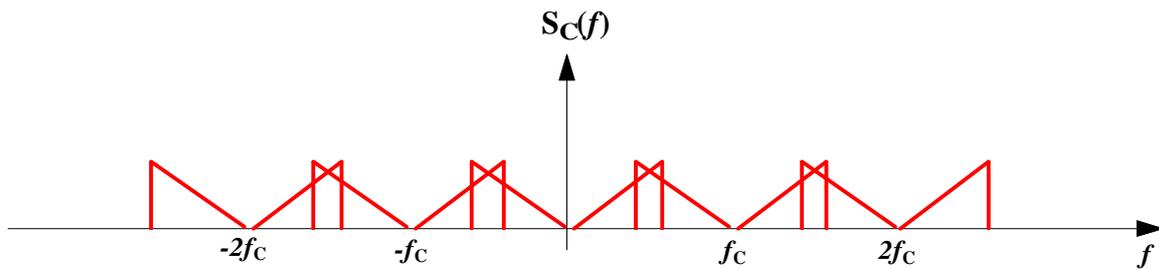
## TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Fino ad ora, abbiamo dunque ottenuto quanto segue: una volta noti i campioni del segnale tempo-continuo  $s(t)$  di partenza, abbiamo costruito il corrispondente segnale campionato  $s_C(t)$  e abbiamo trovato che il suo spettro  $S_C(f)$  è costituito da una successione di infinite repliche (a meno del termine  $1/T_C$ ) dello spettro di  $s(t)$ . Allora, è evidente che, se riusciamo ad isolare, a partire da queste infinite repliche, quella centrata nell'origine, avremo ottenuto proprio lo spettro di  $s(t)$ , che è quello che ci interessa ottenere in fase di ricostruzione.

Si pongono allora due domande: come è possibile isolare lo spettro di  $s(t)$  a partire dallo spettro di  $s_C(t)$  e, in secondo luogo, quando è possibile far questo?

La risposta alla prima domanda è nota: basta infatti moltiplicare  $S_C(f)$  per un rettangolo opportuno<sup>2</sup>, tale cioè che azzeri tutte le altre repliche mentre lasci più o meno invariata quella "centrale".

La risposta alla seconda domanda discende a sua volta da quanto appena detto: infatti, è ovvio che noi possiamo isolare  $S(f)$ , cioè la replica centrale, solo a condizione che essa non sia sovrapposta alle altre repliche. Infatti, è chiaro che se  $S_C(f)$  è quello nell'ultima figura, siamo in grado di trovare 2 valori  $-w, +w$  tali che il rettangolo avente per estremi tali valori racchiuda solo la replica centrale mentre non racchiuda le altre. Al contrario, se  $S_C(f)$  fosse del tipo



Spettro del segnale campionato in caso di sovrapposizione spettrale. Anche in questo caso non sono state indicate (ma sono presenti) le repliche spettrali posizionate sugli altri multipli di  $f_c$ .

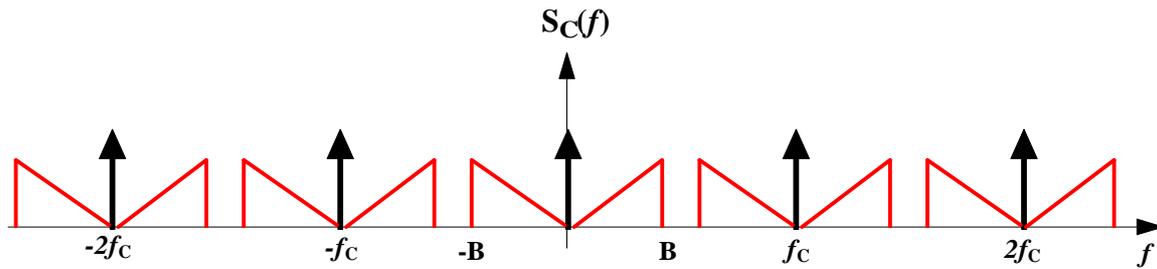
è chiaro che noi non potremo mai trovare un intervallo di frequenza che racchiuda solo la replica centrale.

Questo ci consente dunque di dire che la condizione necessaria perché sia possibile ricostruire il segnale  $s(t)$  a partire dai suoi campioni è che le repliche di  $S(f)$  che costituiscono  $S_C(f)$  non si sovrappongano reciprocamente.

E' subito evidente che la posizione delle repliche dipende strettamente dal valore della frequenza di campionamento  $f_c$ : allora, indicato con  $[-B, +B]$ , dove  $B$  è la **banda** di  $S_C(f)$ , l'intervallo (simmetrico rispetto all'origine) che racchiude la replica centrale, è evidente che, affinché non si abbia la sovrapposizione delle repliche, deve essere

$$f_c \geq 2B$$

<sup>2</sup> In generale, come avremo modo di osservare più avanti, si tratta di filtrare il segnale campionato mediante un filtro passa-basso; a livello puramente teorico, quello che serve è un filtro ideale, mentre sappiamo bene che, nella pratica, i filtri ideali non esistono e quindi bisogna prendere le opportune precauzioni.

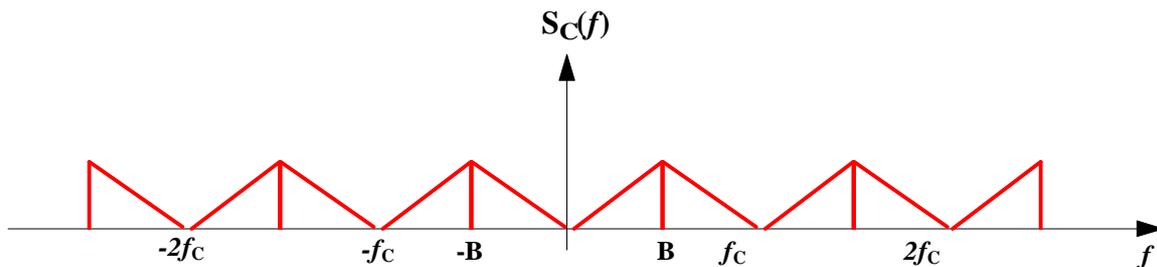


Spettro del segnale campionato in assenza di sovrapposizione spettrale

La condizione  $f_c \geq 2B$  prende il nome di **condizione di Nyquist** e sintetizza il cosiddetto **teorema del campionamento**:

**Teorema** - *Un segnale analogico passa-basso, di banda  $B$ , può essere completamente rappresentato da un sequenza di campioni regolarmente spaziatati, ottenuti con una frequenza di campionamento non inferiore a  $2B$*

Il valore limite è ovviamente  $f_c = 2B$ , nel quale caso avremmo  $S_C(f)$  fatto nel modo seguente:



Segnale campionato ottenuto ai limiti del teorema di campionamento, ossia prendendo  $f_c = 2B$ , ossia anche  $B = f_c/2$  (cioè banda del segnale pari alla frequenza di Nyquist)

È ovvio che la condizione di Nyquist non ha senso quando  $B = \infty$ , ossia quando lo spettro di  $s(t)$  NON è a banda limitata<sup>3</sup>: infatti, se  $B = \infty$ , tale spettro si estende da  $-\infty$  e  $+\infty$  ed è quindi inevitabile che le repliche, a prescindere dal valore della frequenza di campionamento, si sovrappongano. Per esempio, non sarà mai possibile ricostruire un segnale  $s(t)$  il cui spettro sia una funzione periodica. Teoricamente, un qualsiasi segnale di durata limitata, e quindi di banda infinita, sarebbe campionabile. Questo, però, renderebbe del tutto inutile, ai fini pratici, il campionamento, in quanto, nella realtà, noi abbiamo sempre a che fare con segnali di durata temporale limitata. Questo aspetto sarà comunque discusso in seguito.

Quindi, la seconda ed ultima condizione per poter ricostruire  $s(t)$  a partire dai suoi campioni è che lo spettro di  $s(t)$  sia a banda limitata.

Sotto, dunque, le due condizioni esaminate, possiamo arrivare alla espressione di  $s(t)$  a partire dai valori dei suoi campioni: facciamo osservare che questa espressione non è approssimata, ma è esatta (almeno a livello teorico).

<sup>3</sup> Ricordiamo la definizione rigorosa di **segnale a banda limitata**: si tratta di un segnale il cui spettro presenta ampiezza nulla in tutto il campo eccetto una banda ben definita. Segnali a banda limitata possono derivare da un processo di filtraggio oppure dalle limitazioni in banda imposte da sensori, amplificatori o altri componenti del sistema

Ci sono adesso alcune definizioni importanti da considerare:

- in primo luogo, la frequenza  $f_C/2$  pari alla metà della frequenza di campionamento prende il nome di **frequenza di folding**; il termine "folding" significa "ripiegamento" ed il motivo di questo nome sarà chiaro quando si parlerà diffusamente dell'*errore di aliasing*;
- in secondo luogo, una volta fissato il segnale  $s(t)$  da campionare e la sua massima frequenza  $B$ , la quantità  $2B$  prende il nome di **frequenza di Nyquist**: si tratta della minima frequenza di campionamento per il segnale assegnato;
- infine, si definisce *durata* del campionamento (o anche **finestra di osservazione**) il tempo totale durante il quale si effettua il campionamento del segnale continuo considerato. Idealmente, la finestra di osservazione dovrebbe essere infinita, ma, praticamente, non potrà che essere finita.

## FORMULA DI RICOSTRUZIONE

Ritornando adesso all'aspetto matematico della questione, abbiamo detto che, per isolare  $S(f)$  a partire da  $S_C(f)$ , basta moltiplicare quest'ultima funzione per un opportuno **rettangolo**: vediamo allora quali devono essere le caratteristiche di questo *rettangolo*. In primo luogo, ricordando che l'espressione dello spettro del segnale campionato è

$$S_C(f) = \frac{1}{T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T_C}\right)$$

è chiaro che le repliche di  $S(f)$  di cui è composto sono a meno del fattore  $1/T_C$ . Di conseguenza, se il rettangolo ha altezza pari proprio a  $T_C$ , siamo certi che il suo prodotto per  $S_C(f)$  dà la replica nelle "dimensioni" corrette.

In secondo luogo è importante la banda del rettangolo (che indichiamo con  $D$ ), la quale deve essere tale da conservare la replica cui siamo interessati e da azzerare tutte le altre. Il minimo valore, per quanto detto, è pari alla banda  $B$  del segnale  $s(t)$  di partenza, mentre il massimo valore dipende dalla posizione della replica spettrale immediatamente adiacente e quindi dalla frequenza di campionamento. La banda del rettangolo prende il nome di **frequenza di carico del filtro**.

Vediamo adesso come si arriva, da un punto di vista matematico, al segnale  $s(t)$  a partire dallo spettro del suo segnale campionato: abbiamo detto che la prima cosa è la moltiplicazione per un opportuno rettangolo, al fine di ottenere proprio lo spettro di  $s(t)$ . Detto  $S_r(f)$  l'esito del prodotto, abbiamo dunque che

$$S_r(f) = S_C(f) \left[ T_C \text{rect}\left(\frac{f}{2D}\right) \right]$$

A meno di interferenze,  $S_r(f)$  è dunque esattamente lo spettro di  $s(t)$  (il pedice "r" sta per "ricostruito"). Con una operazione di antitrasformazione di Fourier, arriviamo all'espressione di  $s_r(t)$ : dato che abbiamo un prodotto nel dominio della frequenza, otterremo un prodotto di convoluzione nel dominio del tempo, per cui

$$s_r(t) = \text{Fourier}^{-1}[S_C(f)] * \text{Fourier}^{-1}\left[ T_C \text{rect}\left(\frac{f}{2D}\right) \right]$$

L'antitrasformata di  $S_C(f)$  è il segnale campionato, per cui

$$s_r(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C) \delta(t - nT_C) \right] * \text{Fourier}^{-1} \left[ T_C \text{rect} \left( \frac{f}{2D} \right) \right]$$

L'antitrasformata di un rettangolo di altezza  $T_C$  e base  $2D$  è invece  $2DT_C \text{sinc}(2Dt)$ , per cui

$$\begin{aligned} s_r(t) &= \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C) \delta(t - nT_C) \right] * [2DT_C \text{sinc}(2Dt)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [s(nT_C) \delta(t - nT_C)] * [2DT_C \text{sinc}(2Dt)] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2DT_C s(nT_C) [(\delta(t - nT_C)) * (\text{sinc}(2Dt))] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2DT_C s(nT_C) (\text{sinc}(2D(t - nT_C))) \end{aligned}$$

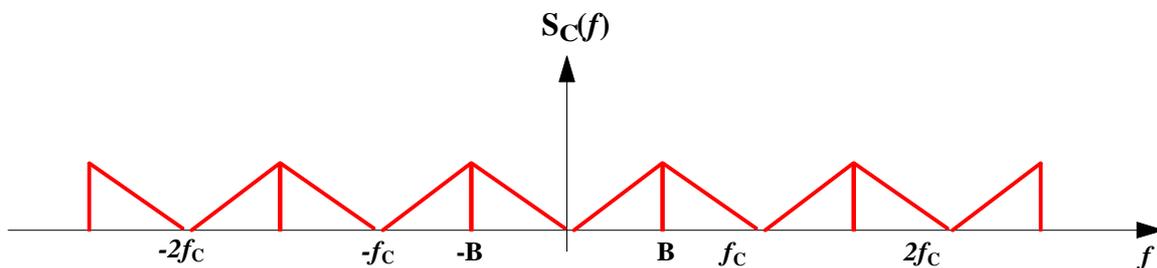
In conclusione, la formula di ricostruzione del segnale  $s(t)$  è la seguente:

$$s_r(t) = 2DT_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_C) \text{sinc}(2D(t - nT_C))$$

E' ovvio che, avendo a che fare con una serie di infiniti termini, questa formula di ricostruzione è ideale, ossia non è realizzabile nella pratica. Tuttavia, essa serve per mostrare che effettivamente la ricostruzione di  $s(t)$  a partire dai campioni è teoricamente possibile senza che venga effettuata alcuna approssimazione.

### ***Caso limite: frequenza di campionamento pari alla frequenza di Nyquist***

Prima di proseguire, vediamo che cosa succede nel caso particolare in cui decidiamo di prendere la frequenza di campionamento esattamente uguale al doppio della banda  $B$  dello spettro  $S(f)$ , ossia  $f_c = \frac{1}{T_C} = 2B$ . Questo implica che lo spettro del segnale campionato sia del tipo



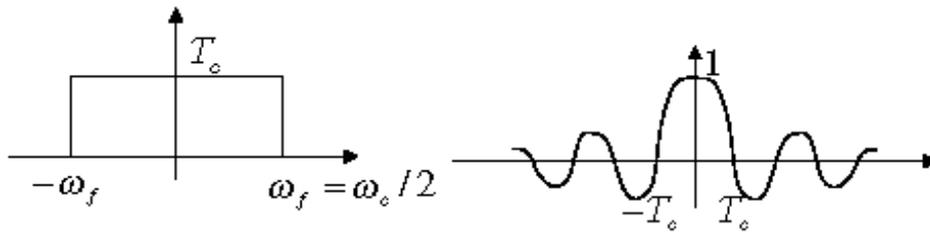
*Segnale campionato ottenuto ai limiti del teorema di campionamento, ossia prendendo  $f_c=2B$ , ossia anche  $B=f_c/2$  (cioè banda del segnale pari alla frequenza di Nyquist)*

e quindi anche che la frequenza di carico del filtro sia  $D=B$ , ossia pari alla banda dello spettro di  $s(t)$ .  
Mettendo insieme queste due relazioni, si trova ovviamente che

$$2DT_C = 2BT_C = f_c T_C = 1$$

In base a questa relazione, la frequenza di carico del filtro risulta essere la metà della frequenza di campionamento, che è a sua volta pari al doppio della banda di  $s(t)$ .

La figura seguente mostra, nelle suddette condizioni limite, la funzione di trasferimento (ideale) del filtro e la corrispondente funzione di risposta all'impulso:



Funzione di trasferimento e corrispondente funzione di risposta all'impulso di un filtro passa-basso ideale, utile per la ricostruzione del segnale analogico a partire dai suoi campioni: se il filtro si estende da  $-f_c/2$  a  $+f_c/2$  (o, ciò che è lo stesso, dalle corrispondenti pulsazioni), la funzione di risposta all'impulso, a forma di Seno Cardinale, presenta zeri equidistanti in corrispondenza di  $1/f_c$  e multipli

In queste condizioni limite, cioè ponendo  $D=f_c/2$ , la formula di ricostruzione si riduce a

$$s_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_c) \text{sinc}(f_c(t - nT_c))$$

### ESEMPIO DI CAMPIONAMENTO IDEALE

Supponiamo di voler ricostruire il segnale  $x(t)$  sapendo che la sua banda è  $w$  (ovviamente limitata) e che i suoi campioni, misurati con una frequenza di campionamento  $f_c=1/T=2w$  e supposti in numero infinito, valgono tutti 0 tranne i seguenti tre:

$$x\left(-\frac{1}{2w}\right) = 0.5 \qquad x(0) = 1 \qquad x\left(+\frac{1}{2w}\right) = 0.5$$

Dobbiamo semplicemente applicare la formula generale di ricostruzione, che, per  $f_c=2w$ , è

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}(f_c(t - nT))$$

Sviluppando quella sommatoria e tenendo conto che gli unici termini non nulli sono quelli per  $n=-1,0,+1$ , abbiamo quanto segue:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x(-T) \text{sinc}(f_c(t + T)) + x(0) \text{sinc}(f_c t) + x(T) \text{sinc}(f_c(t - T)) = \\ &= x\left(-\frac{1}{2w}\right) \text{sinc}(f_c(t + T)) + x(0) \text{sinc}(f_c t) + x\left(\frac{1}{2w}\right) \text{sinc}(f_c(t - T)) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori dei campioni, otteniamo

$$x_r(t) = 0.5\text{sinc}(f_c(t+T)) + \text{sinc}(f_c t) + 0.5\text{sinc}(f_c(t-T))$$

Sostituendo adesso l'espressione della funzione "sinc" otteniamo

$$x_r(t) = 0.5 \frac{\sin(\pi f_c(t+T))}{\pi f_c(t+T)} + \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} + 0.5 \frac{\sin(\pi f_c(t-T))}{\pi f_c(t-T)}$$

Ricordando che  $f_c=1/T$ , abbiamo inoltre che

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 0.5 \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}(t+T)\right)}{\pi f_c(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c t} + 0.5 \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}(t-T)\right)}{\pi f_c(t-T)} = \\ &= 0.5 \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T} + \pi\right)}{\pi f_c(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c t} + 0.5 \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T} - \pi\right)}{\pi f_c(t-T)} \end{aligned}$$

Adesso, ricordando la proprietà della funzione Seno secondo cui

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\pi) &= -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha-\pi) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

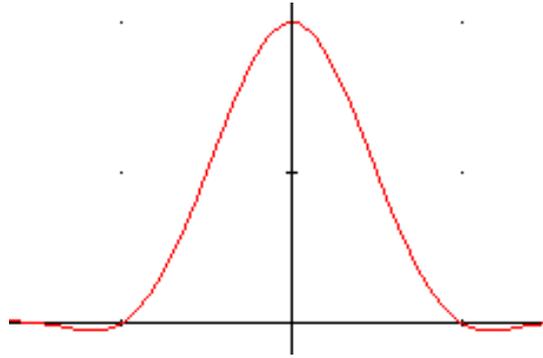
abbiamo che

$$\begin{aligned} x_r(t) &= -0.5 \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi f_c(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c t} - 0.5 \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi f_c(t-T)} = \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c} \left[ -\frac{0.5}{t+T} + 1 - \frac{0.5}{t-T} \right] = \\ &= \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c} \left[ \frac{-0.5t + 0.5T + t^2 - T^2 - 0.5t - 0.5T}{t^2 - T^2} \right] = \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c} \left[ \frac{t^2 - T^2 - t}{t^2 - T^2} \right] = \\ &= \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{\pi f_c} \left[ 1 - \frac{t}{t^2 - T^2} \right] = \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{2\pi w} \left[ 1 - \frac{t}{t^2 - T^2} \right] \end{aligned}$$

Proseguendo con i calcoli, si arriva al seguente risultato finale:

$$x_r(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{1}{T}t\right)}{2\pi w t} \left[ \frac{1}{1 - (2wt)^2} \right]$$

L'andamento grafico di questo segnale è il seguente (per  $w=2$ ):



A titolo di esercizio, ricaviamo l'espressione dello spettro di  $x_r(t)$ : per farlo, partiamo dalla relazione

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 0.5\text{sinc}(f_c(t+T)) + \text{sinc}(f_c t) + 0.5\text{sinc}(f_c(t-T)) = \\ &= 0.5\text{sinc}\left(2w\left(t + \frac{1}{2w}\right)\right) + \text{sinc}(2wt) + 0.5\text{sinc}\left(2w\left(t - \frac{1}{2w}\right)\right) = \\ &= 0.5\text{sinc}(2wt + 1) + \text{sinc}(2wt) + 0.5\text{sinc}(2wt - 1) \end{aligned}$$

La trasformata di questo segnale si può calcolare sfruttando una serie di proprietà a noi note: in primo luogo, applicando la proprietà di linearità noi abbiamo che

$$X_r(f) = 0.5\text{Fourier}[\text{sinc}(2wt + 1)] + \text{Fourier}[\text{sinc}(2wt)] + 0.5\text{Fourier}[\text{sinc}(2wt - 1)]$$

Ricordandoci adesso che la trasformata del segnale  $z(t) = \text{sinc}(2\omega t)$  si calcola mediante la proprietà di dualità e vale

$$Z(f) = \frac{1}{2w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$$

abbiamo che

$$X_r(f) = 0.5\text{Fourier}[\text{sinc}(2wt + 1)] + \frac{1}{2w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) + 0.5\text{Fourier}[\text{sinc}(2wt - 1)]$$

Ricordandoci infine della proprietà di traslazione nel tempo, concludiamo che

$$X_r(f) = \frac{1}{4w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) e^{-j\pi f \frac{1}{w}} + \frac{1}{2w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) + \frac{1}{4w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) e^{j\pi f \frac{1}{w}}$$

Possiamo inoltre applicare le formule di Eulero, ottenendo che

$$X_r(f) = \frac{1}{2w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) \left[ 1 + \frac{1}{2} e^{-j\pi f \frac{1}{w}} + \frac{1}{2} e^{j\pi f \frac{1}{w}} \right] = \frac{1}{2w} \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi f}{w}\right) \right]$$

Da questa espressione, in particolare dalla presenza della funzione "rect", di nota che lo spettro  $X(f)$  del nostro segnale è certamente a banda limitata, il che costituisce la condizione fondamentale perché si possa operare la ricostruzione di  $s(t)$  a partire dai suoi campioni.

## ESTENSIONE DEL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO A SEGNALI PASSA-BANDA

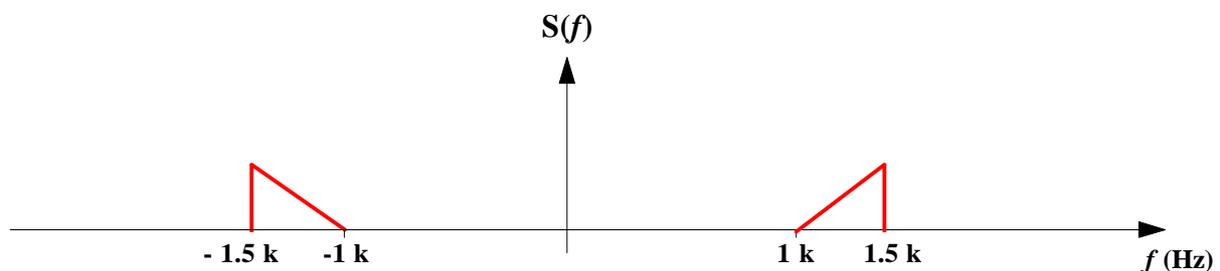
Nei paragrafi precedenti abbiamo sempre fatto l'ipotesi che il segnale da campionare avesse componenti comprese tra la frequenza nulla ed una certa frequenza massima  $f_M$  e abbiamo enunciato il teorema di campionamento per questo tipo di segnali (cioè **segnali passa-basso**). In realtà, esiste una estensione del teorema di campionamento relativa a segnali che non abbiano la componente a frequenza nulla, ossia segnali il cui spettro si estende in un certo intervallo  $[f_1, f_2]$  di frequenza (**segnali passa-banda**). Per questo tipo di segnali, l'enunciato del teorema del campionamento è il seguente:

**Teorema** - *Un segnale analogico il cui spettro si estenda in un certo intervallo  $[f_1, f_2]$  di frequenza può essere completamente rappresentato da un sequenza di campioni regolarmente spaziali, ottenuti con una frequenza di campionamento non inferiore al doppio della banda  $f_2 - f_1$  del segnale stesso*

Quindi, la ricostruzione del segnale, senza perdita di informazione, è possibile tramite un campionamento con una frequenza doppia dell'ampiezza di banda del segnale.

E' facile accorgersi che questa estensione permette di ridurre notevolmente la frequenza di campionamento nel caso di segnali a banda stretta: per esempio, se un segnale ha una ampiezza di banda di 500 Hz, una frequenza di campionamento di 1000 Hz dovrebbe essere più che sufficiente a ricostruire il segnale, quale che sia la localizzazione della suddetta ampiezza di banda nel campo delle frequenze. Una volta ottenuto il segnale campionato, basta ribaltare il suo spettro intorno alla frequenza di Nyquist  $f_C/2$  per ottenere lo spettro del segnale originario.

Facciamo un esempio: supponiamo di voler campionare un segnale il cui spettro abbia frequenze comprese tra 1 kHz e 1.5 kHz:



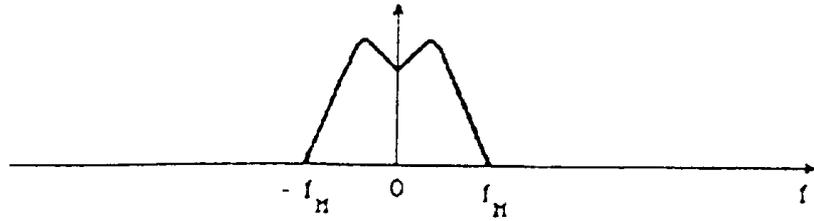
L'ampiezza di banda di tale segnale è dunque di 1 kHz, per cui è sufficiente campionare a 2 kHz.

## ERRORE DI ALIASING

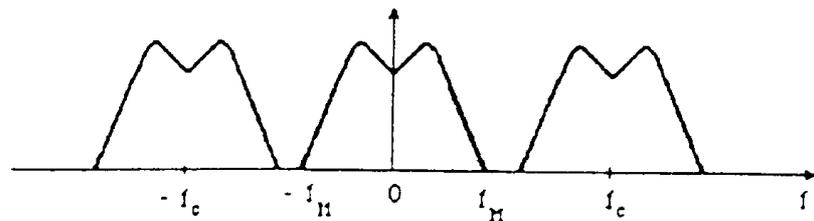
Il campionamento può portare a due errori: l'*errore di aliasing* e l'*errore di troncamento*. In questo paragrafo ci occupiamo del primo, rimandando a dopo le considerazioni sull'errore di troncamento.

L'**errore di aliasing** si ha quando lo spettro del segnale campionato presenta una parziale sovrapposizione delle varie repliche di  $S(f)$  che lo compongono. In base a quanto visto prima, *l'aliasing si verifica solo quando non viene rispettato il teorema di campionamento*, ossia quando si campiona ad una frequenza  $f_C$  inferiore a quella di Nyquist.

Supponiamo, ad esempio, di voler campionare un segnale analogico avente il seguente spettro:

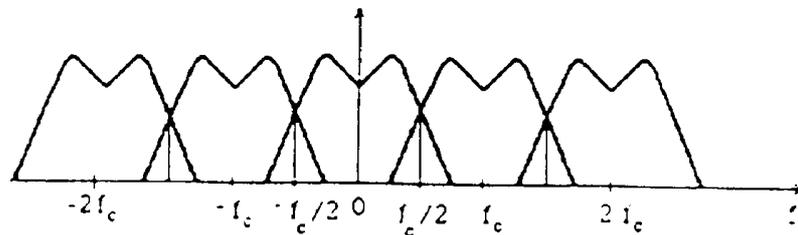


Si osserva che l'armonica di massima frequenza di tale segnale è alla frequenza  $f_M$ . Se allora campioniamo ad una frequenza  $f_C$  superiore a  $2f_M$ , lo spettro del segnale campionato risulta essere il seguente:



Non abbiamo problemi di sovrapposizione delle repliche e possiamo perciò applicare il filtraggio passa-basso per la ricostruzione.

Al contrario, se campioniamo ad una frequenza  $f_C$  inferiore a  $2f_M$ , lo spettro del segnale campionato risulta essere il seguente:



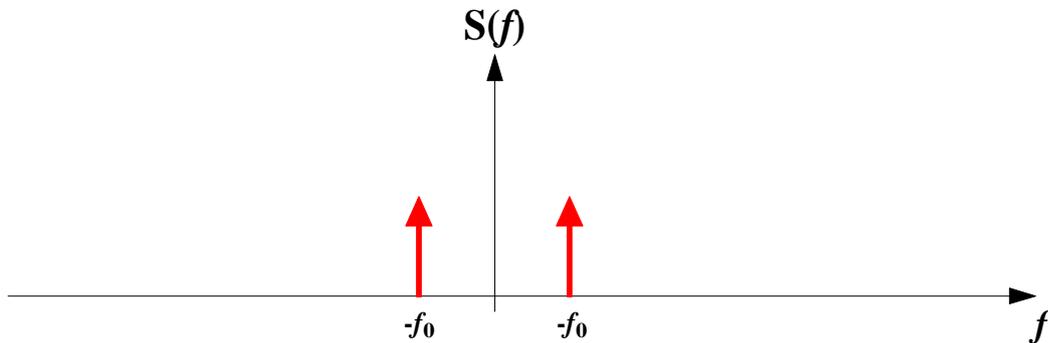
Si verifica dunque la parziale sovrapposizione delle repliche. Consideriamo, in particolare, la replica centrale, che è quella eventualmente da isolare per ricostruire il segnale analogico di partenza: l'errore di aliasing consiste evidentemente nella sovrapposizione delle frequenze più elevate (comprese tra  $f_C - f_M$  ed  $f_M$ ) con le frequenze inferiori alla frequenza  $f_C/2$ . In particolare, si ha una rotazione di  $180^\circ$ , rispetto alla frequenza di folding  $f_C/2$ , delle frequenze superiori a  $f_C/2$  stessa. Da qui deriva appunto il termine di **folding**: avviene un ripiegamento delle componenti spettrali a cavallo della frequenza di folding  $f_C/2$ .

Il risultato è la nascita di **componenti a frequenze false**, le quali frequenze si ottengono facilmente dalla differenza tra la frequenza di campionamento  $f_C$  e le frequenze comprese tra  $f_C/2$  e  $f_C$ . Nel caso in cui queste frequenze false si sovrappongano a frequenze già esistenti nello spettro del segnale analogico  $s(t)$ , si ha il cosiddetto fenomeno dell'**interferenza armonica**.

**Esempio numerico: campionamento di una sinusoide**

Facciamo un esempio numerico per capire bene questi ultimi concetti. Supponiamo di voler campionare un segnale sinusoidale  $s(t)$  di frequenza 50 Hz: sarà dunque un segnale del tipo

$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , dove ovviamente  $f_0=50\text{Hz}$ . Lo spettro di questo segnale è notoriamente costituito da due impulsi, di area  $A/2$ , posizionati alle frequenze  $-f_0$  e  $+f_0$ :

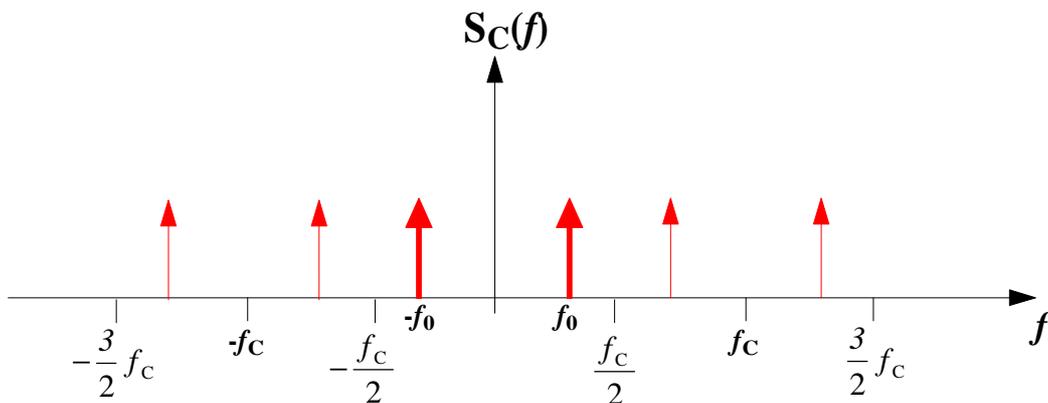


Analiticamente, l'espressione di tale spettro è

$$S(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

Fissato un generico (per il momento) periodo di campionamento  $T_C$ , lo spettro del segnale sarà del tipo seguente:

Volendo campionare questo segnale in modo da rispettare il teorema di campionamento, dobbiamo considerare  $f_C \geq 2f_0$ , ossia dobbiamo considerare una frequenza di Nyquist  $f_C/2$  non inferiore alla frequenza della sinusoide stessa. Rispettando questa condizione, sappiamo che lo spettro del segnale campionato è una ripetizione periodica di  $S(f)$  a cavallo di  $f_C$  e dei suoi multipli; in pratica, dobbiamo quindi prendere i due impulsi indicati in figura e riportarli a cavallo di  $f_C$  e dei suoi multipli:



*Spettro del segnale campionato (frutto del campionamento della sinusoide di cui alla figura precedente) nel caso venga rispettato il teorema di campionamento. Gli impulsi tratteggiati rappresentano lo spettro del segnale campionato, che ovviamente comprende anche i due impulsi in  $\pm f_0$ , che coincidono con quelli del segnale di partenza*

Questo spettro ha la seguente espressione:

$$S_C(f) = \frac{1}{T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T_C}\right) = \frac{A}{2T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_C} - f_0\right) + \frac{A}{2T_C} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_C} + f_0\right)$$

Consideriamo, per l'indice n, i valori -2,-1,0,+1,+2 in modo da ottenere le repliche situate nei pressi dell'origine:

$$S_c(f) = \frac{A}{2T_c} \left[ \delta\left(f + \frac{2}{T_c} - f_0\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T_c} - f_0\right) + \delta(f - f_0) + \delta\left(f - \frac{1}{T_c} - f_0\right) + \delta\left(f - \frac{2}{T_c} - f_0\right) \right] + \\ + \frac{A}{2T_c} \left[ \delta\left(f + \frac{2}{T_c} + f_0\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T_c} + f_0\right) + \delta(f + f_0) + \delta\left(f - \frac{1}{T_c} + f_0\right) + \delta\left(f - \frac{2}{T_c} + f_0\right) \right]$$

Ricordando che  $f_c=1/T_c$ , abbiamo dunque che

$$S_c(f) = \frac{Af_c}{2} [\delta(f + 2f_c - f_0) + \delta(f + f_c - f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f - f_c - f_0) + \delta(f - 2f_c - f_0)] + \\ + \frac{Af_c}{2} [\delta(f + 2f_c + f_0) + \delta(f + f_c + f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_c + f_0) + \delta(f - 2f_c + f_0)]$$

Adesso sostituiamo qualche valore numerico: abbiamo già detto che  $f_0=50\text{Hz}$ ; se volessimo rispettare il teorema di campionamento, dovremmo campionare almeno a 100 Hz; facciamo invece l'ipotesi di campionare a 75 Hz, per cui lo spettro del segnale campionato assume la seguente espressione:

$$S_c(f) = \frac{Af_c}{2} [\delta(f + 100) + \delta(f + 25) + \delta(f - 50) + \delta(f - 125) + \delta(f - 200)] + \\ + \frac{Af_c}{2} [\delta(f + 200) + \delta(f + 125) + \delta(f + 50) + \delta(f - 25) + \delta(f - 100)]$$

Se adesso consideriamo solo le componenti di interesse fisico, ossia quelle a frequenza positiva (quelle a frequenza negativa sono ovviamente in posizione simmetrica rispetto alla frequenza nulla), abbiamo quanto segue:

$$S_c(f) = \frac{Af_c}{2} [\delta(f - 50) + \delta(f - 125) + \delta(f - 200) + \delta(f - 25) + \delta(f - 100)]$$

Abbiamo dunque 5 componenti, di cui una a 50 Hz, corrispondente al segnale analogico di partenza, una a 25 Hz e altre a frequenze di 100 Hz, 125 Hz e 200 Hz. Allora, se andiamo a moltiplicare lo spettro del segnale campionato con un rettangolo tale da filtrare le componenti a frequenza superiore di 50 Hz, è evidente che otteniamo in uscita sia la componente di 50 Hz che ci interessa sia una nuova (e indesiderata) componente a 25 Hz. La ricostruzione, quindi, è affetta da **errore di aliasing**: il segnale ricostruito presenta una armonica in più rispetto al segnale  $s(t)$  di partenza.

Vediamo un altro caso: consideriamo un segnale composto da tre componenti armoniche, rispettivamente alle frequenze di 50 Hz (armonica fondamentale), 100 Hz e 150 Hz:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \cos(2\pi(2f_0)t) + C \cos(2\pi(3f_0)t)$$

dove ovviamente  $f_0=50\text{Hz}$ .

Lo spettro di questo segnale , considerando solo le frequenze fisiche, è dunque il seguente:

$$S(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{B}{2} \delta(f - 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f - 3f_0)$$

Campionando con una per il momento generica frequenza di campionamento  $f_c$ , otteniamo un segnale campionato il cui spettro (incluso, per il momento, tutte le frequenze ) è il seguente:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T_c}\right) = f_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_c) = \\ &= f_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{A}{2} \delta(f - nf_c - f_0) + \frac{B}{2} \delta(f - nf_c - 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f - nf_c - 3f_0) \right] + \\ &+ f_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{A}{2} \delta(f - nf_c + f_0) + \frac{B}{2} \delta(f - nf_c + 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f - nf_c + 3f_0) \right] \end{aligned}$$

Consideriamo -1,0,+1 come valori dell'indice n:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f + f_c - f_0) + \frac{B}{2} \delta(f + f_c - 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f + f_c - 3f_0) \right] + \\ &+ f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{B}{2} \delta(f - 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f - 3f_0) \right] + f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f - f_c - f_0) + \frac{B}{2} \delta(f - f_c - 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f - f_c - 3f_0) \right] + \\ &+ f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f + f_c + f_0) + \frac{B}{2} \delta(f + f_c + 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f + f_c + 3f_0) \right] + \\ &+ f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f + f_0) + \frac{B}{2} \delta(f + 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f + 3f_0) \right] + f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f - f_c + f_0) + \frac{B}{2} \delta(f - f_c + 2f_0) + \frac{C}{2} \delta(f - f_c + 3f_0) \right] \end{aligned}$$

Per rispettare il teorema di campionamento dovremmo campionare a 300 Hz, mentre invece supponiamo di farlo a 180 Hz: sostituendo i valori numerici e considerando solo le componenti fisiche (cioè a frequenza positiva), otteniamo

$$\begin{aligned} S_c(f) &= f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f - 50) + \frac{B}{2} \delta(f - 100) + \frac{C}{2} \delta(f - 150) \right] + f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f - 230) + \frac{B}{2} \delta(f - 280) + \frac{C}{2} \delta(f - 330) \right] + \\ &+ f_c \left[ \frac{A}{2} \delta(f - 130) + \frac{B}{2} \delta(f - 80) + \frac{C}{2} \delta(f - 30) \right] \end{aligned}$$

Si osserva dunque la presenza delle tre componenti originali (a 50 Hz, 100 Hz e 150 Hz), alle quali però si aggiungono altre componenti, che in ordine di frequenza crescente sono a 30 Hz, 80 Hz, 130 Hz, 230 Hz, 280 Hz e 330 Hz. Queste ultime tre vengono filtrate nel momento in cui si moltiplica  $S_c(f)$  per un rettangolo di banda pari proprio a 150 Hz; rimangono invece le altre tre, che contribuiscono quindi a differenziare il segnale ricostruito dal segnale originale  $s(t)$ .

## FINESTRA DI OSSERVAZIONE E PREFILTRAGGIO ANTI-ALIASING

In definitiva, dunque, il rispetto del teorema del campionamento consente di evitare l'errore di aliasing. In realtà, questo è vero solo dal punto di vista teorico, mentre invece sorgono diverse difficoltà quando si deve operare concretamente: il problema principale è che non si può campionare infinitamente un dato segnale, ma bisogna limitarsi a farlo in un intervallo di tempo comunque finito, che abbiamo chiamato **finestra di osservazione**. Questa finestra di osservazione comporta dunque una limitazione temporale del segnale analogico da analizzare, il che corrisponde ad un segnale teoricamente con spettro infinito e quindi inevitabilmente soggetto alla sovrapposizione delle repliche traslate. In altri termini, l'errore di aliasing è teoricamente sempre presente.

L'unico modo per evitare la sovrapposizione delle repliche traslate dello spettro del segnale è quello di limitarlo in banda prima di campionarlo: bisogna cioè utilizzare opportuni filtri (detti perciò **filtri anti-aliasing**), i quali eliminano, dal segnale analogico di partenza, un certo numero di frequenze, in modo da permettere la successiva corretta discretizzazione. Quali frequenze, allora, vanno eliminate? Per limitare al minimo le distorsioni del segnale filtrato rispetto al segnale di partenza, è ovvio che sia necessario filtrare solo le componenti a contenuto energetico minore.

Il progetto del **filtro analogico** va fatto dunque in modo oculato, avendo a priori una idea dei segnali da campionare: per un segnale la cui potenza è concentrata alle basse frequenze, verrà utilizzato un filtro passa-basso, mentre, per un segnale la cui potenza è concentrata ad alte frequenze (come accade nei segnali modulati), si utilizzerà un filtro passa-banda.

Nei filtri analogici non è facile rispettare, nella realizzazione pratica, le specifiche riguardanti la **banda passante**, la **banda di transizione** e la **banda arrestata** (detta anche *banda oscura*). Di conseguenza, è proprio il filtro anti-aliasing a degradare le prestazioni complessive di un sistema digitale, a meno ovviamente di non far crescere in modo consistente il costo.

Una soluzione spesso utilizzata è quella di scegliere una banda passante del filtro anti-aliasing maggiore di quella del segnale analogico da analizzare, in modo da degradare il meno possibile, nel campo delle frequenze di interesse, il segnale filtrato. Ovviamente, occorre poi rispettare sempre il teorema del campionamento: generalmente, si sceglie una frequenza di campionamento variabile tra 4 e 10 volte quella di Nyquist (pari al doppio dell'ampiezza di banda del segnale considerato). Una volta effettuato questo **sovracampionamento**, è possibile ridurre il numero dei dati da elaborare, scartando quelli di non interesse (processo di **decimazione**), usando degli appositi filtri dedicati. In particolare, la frequenza di campionamento viene ridotta nello stesso rapporto di eliminazione dei dati, in un processo che prende il nome di **decimazione dei dati campionati**.

## ERRORE DI TRONCAMENTO

Il secondo errore dovuto al processo di campionamento è l'**errore di troncamento**: esso è legato al fatto che il numero di campioni prelevati è necessariamente finito, date le limitazioni sia della memoria sia del tempo di esecuzione del campionamento stesso.

*Il fatto di non poter prelevare infiniti campioni del segnale in esame comporta spesso (ma non sempre) una perdita di informazione, contenute nella parte troncata del segnale.*

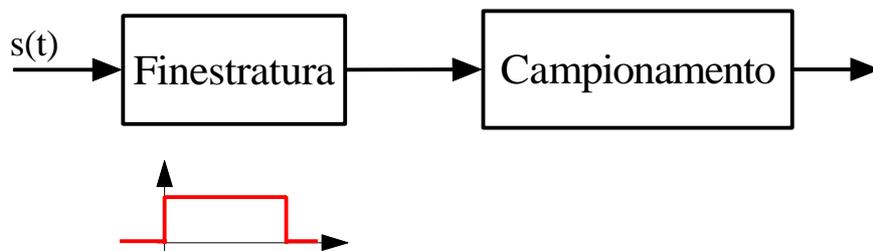
La perdita di informazioni dovuta al troncamento è diversa a seconda del segnale che si sta campionando: per segnali che hanno un rapido decadimento, come i segnali esponenziali o quelli gaussiani, l'errore di troncamento è di scarsa rilevanza, mentre esso può essere anche notevole per segnali sinusoidali o multifrequenziali o per transistori con valore a regime non nullo.

Gli spettri dei **segnali finestrati** sono in genere differenti da quelli dei segnali analogici di partenza: questo a causa sia della fase iniziale del campionamento sia dell'interruzione più o meno brusca del segnale al termine della finestra di osservazione. Vengono infatti introdotte delle discontinuità al segnale analogico, che causano l'insorgere di frequenze spurie nello spettro.

Possiamo comprendere bene quest'ultimo concetto tramite una analisi matematica. A tal fine, è opportuno osservare che un campionamento di durata finita è interpretabile in due modi distinti, ma del tutto equivalenti:

- come prima possibilità, si può pensare che il segnale analogico di partenza, di durata temporale teoricamente infinita, venga prima finestrato e poi campionato;
- come seconda possibilità, invece, si può pensare che il segnale analogico venga campionato per tutta la sua infinita durata e che poi vengano presi solo un numero finito di campioni, all'interno di un intervallo di durata prefissata.

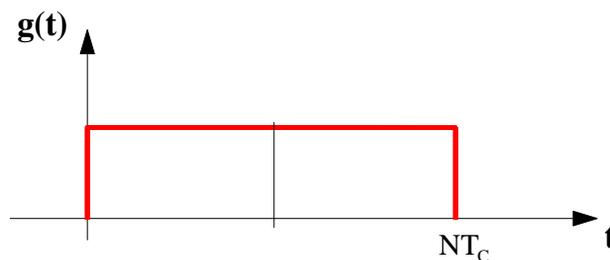
In pratica, quindi, possiamo affermare che le operazioni di finestatura e campionamento possono essere tranquillamente scambiate. Per comodità di analisi, conviene supporre che la finestatura avvenga prima del campionamento. Mettiamoci perciò in questa ipotesi:



L'operazione di **finestratura** consiste nella moltiplicazione del segnale per un rettangolo di durata finita (ed altezza unitaria). Indichiamo tale durata con  $NT_C$ , dove  $T_C$  è il periodo di campionamento mentre, ovviamente,  $N$  rappresenta il numero di campioni che andremo a prendere successivamente: il segnale finestrato ha dunque espressione

$$s_f(t) = s(t) \cdot g(t) = s(t) \cdot \text{rect} \left( \frac{t - \frac{NT_C}{2}}{NT_C} \right)$$

dove l'espressione apparentemente complicata del rettangolo deriva solo dal fatto che esso non è centrato nell'origine, ma nell'istante  $NT_C/2$ , visto che si suppone di estendere la finestatura da  $t=0$  a  $t=NT_C$ .



Per calcolare lo spettro di  $s_f(t)$ , dobbiamo dunque convolvere i due spettri: lo spettro del rettangolo  $g(t)$ , applicando la definizione, è

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{NT_c} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi ft}]_0^{NT_c} = \dots = NT_c \frac{\sin(\pi f NT_c)}{\pi f NT_c} e^{-j\pi f NT_c}$$

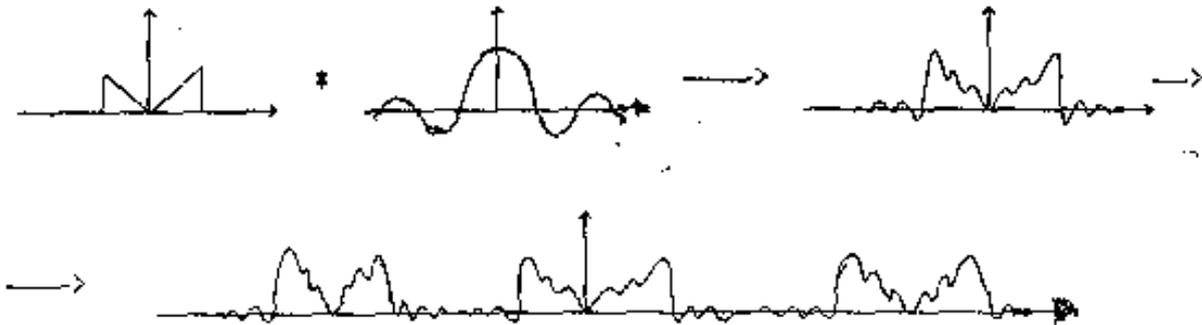
(il termine di fase deriva chiaramente dal fatto che il rettangolo non è centrato in  $t=0$ , mentre, se lo fosse, il suddetto termine di fase scomparirebbe) per cui lo spettro del *segnale finestrato* è

$$S_f(f) = S(f) * G(f) = S(f) * NT_c \frac{\sin(\pi f NT_c)}{\pi f NT_c} e^{-j\pi f NT_c}$$

Adesso dobbiamo campionare  $s_f(t)$ , il che significa, nel dominio della frequenza, prendere lo spettro  $S_f(f)$  appena calcolato e periodicizzarlo a passo  $f_c=1/T_c$ :

$$S_{cf}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ S(f) * NT_c \frac{\sin(\pi f NT_c)}{\pi f NT_c} e^{-j\pi f NT_c} \right]_{f=nf_c}$$

La figura seguente mostra allora come è fatto questo segnale (comunemente noto come **trasformata di Fourier tempo-discreta**, brevemente **DTFT**):



La prima operazione indicata è la finestatura del segnale  $s(t)$ , che in frequenza corrisponde alla convoluzione di  $S(f)$  per il  $\sin(f)/f$  (corrispondente al rettangolo di finestatura nel tempo). La successiva operazione è il campionamento del segnale finestrato, operazione che, in frequenza, corrisponde ad una periodicizzazione dello spettro del segnale finestrato

La convoluzione tra  $S(f)$  ed il  $\sin(f)/f$ , cioè la trasformata del *rettangolo di finestatura*, dà origine ad un segnale che somiglia ad  $S(f)$  periodicizzato, ma con in più delle oscillazioni<sup>4</sup> sia in banda sia fuori banda; tale segnale è, teoricamente, a banda infinita, per cui il segnale che si ottiene dal successivo campionamento non può fare a meno di presentare una sovrapposizione di repliche, cioè un errore di aliasing. Questo, quindi, significa che, nell'**intervallo non ambiguo  $[-f_c/2, f_c/2]$** , cioè quello in cui dovremo effettuare il filtraggio passa-basso, il segnale campionato presenta la replica di nostro interesse cui sono sommate tutte le altre repliche spettrali.

E' nostro interesse, allora, ridurre l'influenza delle repliche che fanno da disturbo ed abbiamo un solo modo per farlo: aumentare la durata della finestra di osservazione. Infatti, ci basta tener conto

<sup>4</sup> dette **oscillazione di Gibbs**

che il  $\sin(f)/f$  per cui moltiplichiamo  $S(f)$  presenta gli zeri in  $1/NT_C$  e multipli e decresce inoltre in modo proporzionale a  $NT_C$ : aumentando quindi  $NT_C$ , noi otteniamo il duplice effetto di avvicinare gli zeri del  $\sin(f)/f$  e di velocizzare il decadimento delle sue code, ottenendo dunque un disturbo via via minore nell'*intervallo non ambiguo*<sup>5</sup>.

A livello quantitativo, c'è un criterio molto semplice per individuare il valore ottimale di  $NT_C$  (durata dell'osservazione): fissato un arbitrario valore di  $NT_C$ , andiamo a valutare i valori di  $S_{Cf}(f)$  all'interno dell'intervallo non ambiguo<sup>6</sup>; successivamente aumentiamo  $NT_C$  e ricalcoliamo gli stessi valori; fin quando osserviamo variazioni consistenti dei valori di  $S_{Cf}(f)$ , dobbiamo continuare ad aumentare  $NT_C$ ; *quando invece osserviamo variazioni sulla quarta o quinta cifra decimale, allora possiamo fermarci, perché significa che il contributo delle code delle repliche adiacenti è diventato trascurabile rispetto alla precisione da noi desiderata.*

## CONCLUSIONI SUL CAMPIONAMENTO DI DURATA FINITA

Riepiloghiamo, dunque, quanto detto a proposito del campionamento di durata finita: dato lo spettro del segnale originario, esso viene moltiplicato per lo spettro  $G(f)$  della finestra; il risultato è una segnale finestrato che è quello effettivamente soggetto al campionamento e quindi alla ricostruzione; data la finestratura, dallo spettro del segnale finestrato non risulta possibile determinare, con precisione, lo spettro  $S(f)$  del segnale originario; si può solo ottenere una stima di  $S(f)$ : tale stima è tanto più attendibile quanto meno l'influenza di  $G(f)$  pesa su  $S(f)$ .

La  $G(f)$  comporta una **dispersione spettrale** delle righe dello spettro originario; tale dispersione interessa tutte le componenti armoniche del segnale e può dar luogo all'interferenza armonica, ossia alla sovrapposizione delle righe spettrali relative a diverse componenti, il che può causare il mascheramento di quelle più deboli.

*Un'altra conseguenza del troncamento è che si può presentare l'errore di aliasing anche se è stata scelta una frequenza di campionamento che rispetta il teorema di campionamento: infatti, a causa proprio della dispersione spettrale, può succedere che la componente a frequenza maggiore nello spettro del segnale originario venga a trovarsi oltre la frequenza di folding  $f_C/2$ , il che da luogo appunto all'aliasing.*

Ci sono diverse tecniche per ridurre gli effetti della dispersione: la tecnica più utilizzata consiste nell'attenuare il più possibile le discontinuità introdotte nel segnale originario dalla finestratura. A tal scopo, si usa una **funzione finestra** diversa dal rettangolo, come si vedrà più avanti.

Una osservazione importante è la seguente: se si vuole campionare un segnale sinusoidale, il fenomeno della dispersione spettrale dovuta al campionamento si può evitare se si riesce a campionare un numero intero di periodi del segnale stesso. In generale, dunque, in base al tipo di segnale troncato è necessario studiare particolari tecniche di compensazione per ridurre l'errore di troncamento e quindi per stimare nel miglior modo possibile lo spettro del segnale originario.

In conclusione, diciamo che, *prima di eseguire un campionamento, è quanto meno opportuno conoscere, almeno in modo indicativo, il tipo di segnale da analizzare ed il suo spettro: in base a queste informazioni, si deve poi operare la migliore scelta sia della frequenza di campionamento sia della finestra di osservazione.*

<sup>5</sup> D'altra parte, non c'è da stupirsi di questo risultato: quanto maggiore è la durata  $NT_C$  della finestra di osservazione, tanto più ci approssimiamo al campionamento ideale e quindi tanto più il segnale campionato si approssima a quello ottenibile, idealmente, con infiniti campioni (e sempre nell'ipotesi di rispettare il teorema del campionamento).

<sup>6</sup> E' chiaro che consideriamo solo alcune frequenze

# Campionamento di durata finita e misure digitali

## INTRODUZIONE

Riprendiamo la formula teorica di ricostruzione di un segnale  $x(t)$  a partire dai suoi campioni:

$$x(t) = 2DT_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_C) \text{sinc}(2D(t - nT_C))$$

Per semplicità, mettiamoci nel caso particolare in cui la frequenza di carico del filtro di ricostruzione è esattamente pari alla banda del segnale che è stato campionato: sappiamo che, in questa ipotesi, la formula di ricostruzione diventa

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_C) \text{sinc}((t - nT_C))$$

*Nel campo delle misure, noi non siamo interessati a ricostruire fisicamente il segnale  $x(t)$  a partire dai suoi campioni; di conseguenza, la formula appena riportata va interpretata semplicemente come una **formula di interpolazione**: noti i valori  $x(nT_C)$  che il segnale di partenza assume negli istanti di campionamento, quella formula ci consente di calcolare i valori che lo stesso segnale assume in istanti  $t$  diversi da quelli di campionamento.*

Di conseguenza, quando parliamo di **filtraggio**, non ci riferiamo alla presenza di un filtro analogico RLC al cui ingresso mandiamo gli impulsi del segnale campionato; ci riferiamo, invece, ad un classico **filtraggio numerico**: è presente cioè un processore che, ricevendo in ingresso i campioni del segnale, applica quella formula per calcolare il valore del segnale stesso in un istante qualsiasi  $t$  (non di campionamento).

Vediamo allora in qualche modo di ripetere i discorsi fatti nei precedenti paragrafi, alla luce di queste considerazioni.

## APPROSSIMAZIONE DELLA FORMULA IDEALE DI INTERPOLAZIONE

La prima cosa da osservare, come fatto prima, è che *quella formula di interpolazione è perfetta solo se abbiamo a disposizione infiniti campioni del segnale*. Avendo invece noi solo un numero finito di campioni, potremo solo ottenere una approssimazione di tale formula. Ad esempio, potremmo provare ad usare quella stessa formula ma limitatamente a  $2N+1$  campioni presi simmetricamente rispetto all'istante  $t=0$  preso come riferimento (arbitrario) per l'asse dei tempi:

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x(nT_C) \text{sinc}((t - nT_C))$$

In realtà, possiamo fare alcuni passaggi analitici per renderci conto che questa non è affatto una buona approssimazione della formula ideale. Infatti, teniamo conto che l'uso di una formula troncata

equivale a trattare il segnale campionato  $x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta(t-nT_c)$  tramite un filtro con funzione di risposta all'impulso corrispondente ad un **Seno cardinale troncato**: in altre parole, mentre la funzione di risposta all'impulso del filtro passa-basso ideale è  $h(t) = \frac{\sin(\omega_c t/2)}{\omega_c t/2}$ , quella del filtro realmente utilizzato è

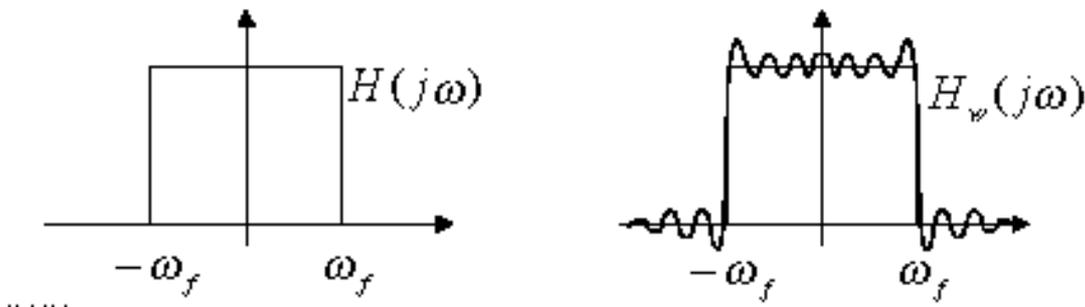
$$h_w(t) = h(t) \cdot w(t) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c}{2}t\right)}{\frac{\omega_c}{2}t} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_d}\right)$$

dove  $T_d=2NT_c$  è la durata della finestra rettangolare e  $\omega_c=2\pi f_c$  la **pulsazione di campionamento**.

Calcolando allora la trasformata di  $h_w(t)$ , otteniamo la funzione di trasferimento del filtro utilizzato:

$$H_w(\omega) = H(\omega) * W(\omega) = T_c \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) * T_d \frac{\sin\left(\frac{\omega T_d}{2}\right)}{\omega \frac{T_d}{2}}$$

La figura seguente mostra la differenza tra la funzione di trasferimento  $H(\omega)$  del filtro passa-basso ideale e quella del filtro utilizzato:



dove  $\omega_f=\omega_c/2=2\pi f_c$  è la **pulsazione di folding**.

Come si vede, la  $H_w(\omega)$  soffre, ancora una volta, del fenomeno delle **oscillazioni di Gibbs** precedentemente citate.

Quindi, riepilogando, lo spettro del seno cardinale troncato con finestra rettangolare è un rettangolo con forti oscillazioni attorno alle discontinuità (in corrispondenza di  $\pm\omega_f$ ). Si può verificare che tali oscillazioni, espresse in termini di frazione percentuale del modulo della risposta passabasso ideale, valgono:

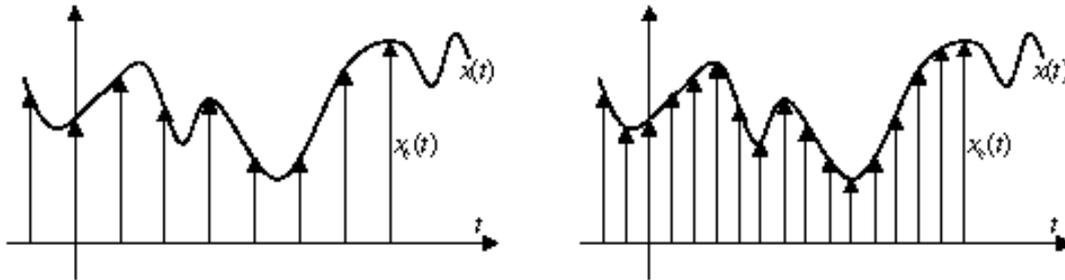


Si può inoltre verificare che queste oscillazioni non diminuiscono di ampiezza all'aumentare della durata della finestra, ma si limitano semplicemente ad infittirsi attorno alle discontinuità.

In generale, possiamo dire che il problema fondamentale del **progetto dei filtri numerici** è quello di trovare una funzione di risposta all'impulso  $h_w(t)$  che sia una approssimazione valida del Sinc e che goda soprattutto di tre requisiti: deve essere di durata non doppiamente infinita; deve produrre una risposta in frequenza quanto più simile possibile a quella del filtro passa-basso ideale; deve produrre una risposta in frequenza a fase rigorosamente lineare<sup>7</sup>.

## IMPORTANZA DEL NUMERO DI CAMPIONI

Riepilogando sul problema della ricostruzione di un segnale a partire dai suoi campioni, possiamo dire che *la possibilità teorica di usare  $x(nT_c)$  per ricostruire  $x(t)$  in qualsiasi istante  $t$  si traduce, nella strumentazione digitale, nella possibilità pratica di infittire i campioni, cioè di aumentare la frequenza di campionamento:*



Infittire i campioni è utile in alcuni calcoli. Per esempio supponiamo di voler calcolare il **valore medio** ed il **valore quadratico medio** di un segnale  $x(t)$  all'interno di un prefissato intervallo  $T_d$ : applicando le semplici definizioni, scriviamo che

$$\left[ \overline{x(t)} \right]_{T_d} = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} x(t) dt$$

$$\left[ \overline{x^2(t)} \right]_{T_d} = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} x^2(t) dt$$

Se il segnale è noto solo tramite i suoi campioni, possiamo solo approssimare queste formule con i loro equivalenti discreti:

$$\left[ \overline{x(t)} \right]_{T_d} \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(nT_c)$$

$$\left[ \overline{x^2(t)} \right]_{T_d} \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(nT_c)$$

<sup>7</sup> Per ottenere quest'ultimo risultato, la funzione di risposta all'impulso deve essere necessariamente di durata finita, per cui si parla di **filtro numerico FIR** (Finite Impulse Response)

L'errore derivante dall'uso di formule discrete è tanto minore quanto maggiore è il valore di  $N$ . Tale errore può essere maggiorato (e non calcolato, come ben sappiamo) applicando i teoremi appropriati dell'approssimazione numerica (formule di quadratura, ecc.).

In casi come questi, il campionamento introduce due errori fondamentali:

- l'errore dovuto alla **interpolazione non ideale**, ossia al fatto di usare una formula che può solo approssimare quella di interpolazione ideale;
- l'errore dovuto alla **discretizzazione**.

Bisogna inoltre precisare quanto segue:

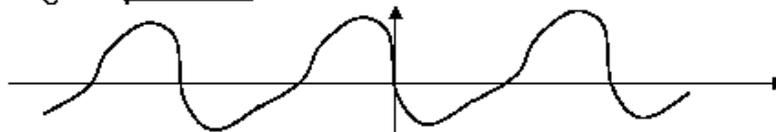
- in primo luogo, non sempre è necessario interpolare per diminuire l'errore conseguente alla discretizzazione, come vedremo tra poco;
- in secondo luogo, non è detto a priori che le proprietà del segnale nell'intervallo di osservazione  $[0, T_d]$  siano perfettamente rappresentative di quelle del segnale nell'intervallo teorico di durata  $[-\infty, +\infty]$ . Per mettere in evidenza questo fatto, basta considerare il caso in cui calcoliamo il valore medio di un segnale periodico: è noto, infatti, che tale valore medio risulta nullo se l'intervallo di osservazione è un multiplo intero del periodo del segnale, mentre invece è diverso da zero in tutti gli altri casi.

## STIMA DELLO SPETTRO DI UN SEGNALE

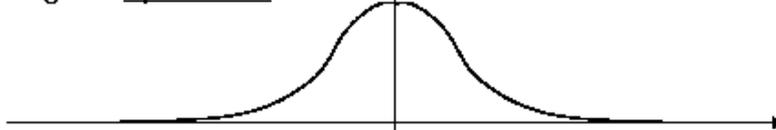
Per avere una comprensione più quantitativa degli ultimi concetti, è sufficiente esaminare il problema nel dominio della frequenza. In particolare, ci interessa studiare il problema della stima dello spettro di un segnale, al quale sono collegati anche i problemi di stima di valor medio e di valore quadratico medio<sup>8</sup>.

Ai fini dei discorsi che stiamo per fare, è importante distinguere i segnali in **periodici** e **aperiodici** (con riferimento, ovviamente, all'andamento temporale):

) segnali periodici:



) segnali aperiodici:



<sup>8</sup> Tra l'altro, i discorsi che ci accingiamo a fare trovano immediata applicazione negli analizzatori digitali di spettro.

## SEGNALI PERIODICI

Consideriamo un segnale  $x(t)$  periodico. Sappiamo che lo spettro di un segnale periodico corrisponde ad una successione di infiniti impulsi, per cui corrisponde alla somma di infiniti termini spettrali (segnale a banda illimitata). D'altra parte, capita spesso che solo alcuni di tali termini spettrali abbiano una ampiezza rilevante, mentre gli altri si possano trascurare: pensiamo ad esempio ad un'onda quadra, il cui spettro contiene solo armoniche dispari e di ampiezza via via decrescente all'aumentare dell'ordine. Di conseguenza, possiamo parlare, con buona approssimazione, di **segnali periodici di banda finita**.

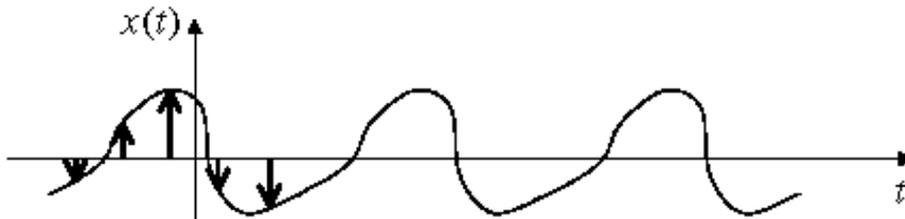
Sappiamo inoltre che un qualsiasi segnale periodico è esprimibile in termini di *serie di Fourier*: ogni termine di questa serie corrisponde proprio ad uno dei termini armonici di poco fa. Di conseguenza, un segnale periodico di banda finita potrà essere espresso come somma di  $2n+1$  termini armonici:

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega_0 t}$$

dove ovviamente  $\omega_0$  è la **frequenza fondamentale** (cui corrisponde un periodo  $T_0=2\pi/\omega_0$ ) mentre  $k\omega_0$  sono le **frequenze armoniche**.

Basta applicare la trasformata di Fourier a quella espressione per ottenere uno spettro con un numero finito di righe.

E' evidente che la conoscenza dei  $2n+1$  coefficienti  $c_k$  garantisce dunque la conoscenza dell'intero segnale, sia nel suo andamento temporale sia nell'andamento del suo spettro. Si può allora dimostrare che questi coefficienti  $c_k$  si possono calcolare esattamente partendo da un numero  $N>2n$  di campioni del segnale stesso, presi con un periodo di campionamento  $T_C=T_0/N$ :



Infatti, si può dimostrare che

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_C) e^{-jk\omega_0 mT_C}$$

Questa è la definizione di **trasformata di Fourier discreta (DFT)** del segnale in esame.

Siamo dunque in presenza di una situazione molto particolare: pur usando una formula discreta e finita al posto di una continua ed infinita, abbiamo la ricostruzione analitica perfetta del segnale di partenza. Ciò significa che non c'è alcun errore di discretizzazione.

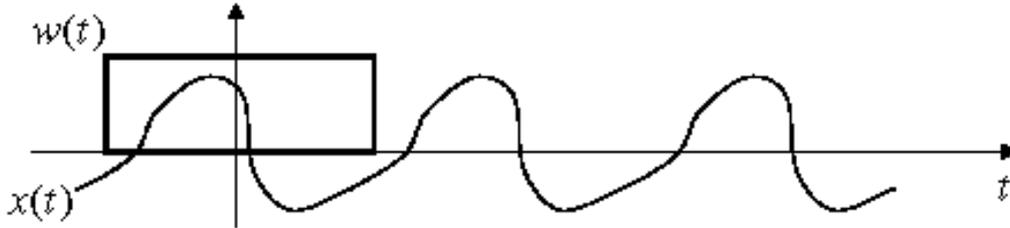
Il motivo di questo apparente "miracolo" è abbastanza evidente ed è legato proprio alla periodicità del segnale  $x(t)$  di partenza. Al di là della dimostrazione formale della formula della DFT, il concetto è banalmente quello per cui gli  $N$  campioni del segnale, prelevati nel modo descritto poco fa, portano con sé tutte le informazioni necessarie al calcolo di  $x(t)$  in qualsiasi  $t$ , per cui il campionamento, in questo caso, non comporta alcuna perdita di informazioni.

Facciamo comunque i necessari passaggi analitici a supporto di queste considerazioni. L'applicazione della formula della DFT consiste sostanzialmente nell'esecuzione di tre operazioni successive: finestrazione di  $x(t)$ , campionamento e campionamento in frequenza. Analizziamo queste operazioni.

## Finestratura

I primi due aspetti (finestratura e campionamento) sono stati già analizzati in precedenza, per cui ripeteremo grossomodo le stesse considerazioni, in modo più veloce.

L'operazione di finestratura sussiste per il semplice fatto di prendere solo N campioni del segnale. Dobbiamo perciò immaginare di moltiplicare il segnale  $x(t)$  per una finestra rettangolare di durata  $T_d = NT_C$ :



In frequenza, avremo la convoluzione dello spettro di  $x(t)$  con lo spettro della finestra  $w(t)$ : abbiamo già visto in precedenza che

$$w(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_d}\right) \longrightarrow W(\omega) = T_d \frac{\sin\left(\omega \frac{T_d}{2}\right)}{\omega \frac{T_d}{2}}$$

per cui scriviamo che

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t) \longrightarrow X_w(\omega) = X(\omega) * T_d \frac{\sin\left(\omega \frac{T_d}{2}\right)}{\omega \frac{T_d}{2}}$$

Usando l'espressione di  $x(t)$  in termini di serie di Fourier, possiamo calcolare lo spettro di  $x(t)$ :

$$X(\omega) = \sum_{k=-n}^n c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Andiamo allora ad eseguire la convoluzione: sfruttando le proprietà di linearità degli integrali definiti e la proprietà di setaccio dell'impulso di Dirac, abbiamo che

$$\begin{aligned} X_w(\omega) &= X(\omega) * W(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) W(\omega - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-n}^n c_k \delta(\alpha - k\omega_0) \cdot T_d \frac{\sin\left((\omega - \alpha) \frac{T_d}{2}\right)}{(\omega - \alpha) \frac{T_d}{2}} d\alpha = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-n}^n c_k \delta(\alpha - k\omega_0) \frac{\sin\left((\omega - \alpha) \frac{T_d}{2}\right)}{(\omega - \alpha)} d\alpha = 2 \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - k\omega_0) \frac{\sin\left((\omega - \alpha) \frac{T_d}{2}\right)}{(\omega - \alpha)} d\alpha = \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k T_d \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2}(\omega - k\omega_0)\right)}{\frac{T_d}{2}(\omega - k\omega_0)} \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta ci dice, tenendo conto che il Seno Cardinale è una funzione continua e di durata teoricamente infinita, che anche lo spettro di  $x_w(t)$  è continuo e di durata infinita. Considerando che, invece,  $x(t)$  era uno spettro a righe, è dunque evidente che è stato il troncamento a comportare questa modifica dello spettro.

D'altra parte, andiamo a vedere come sono fatti i singoli termini di quella sommatoria, con particolare riferimento a quelli ottenuti per valori piccoli di  $k$  ( $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ):

$$X_w(\omega) = T_d \left[ c_0 \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} \omega\right)}{\frac{T_d}{2} \omega} + c_{\pm 1} \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} (\omega \mp \omega_0)\right)}{\frac{T_d}{2} (\omega \mp \omega_0)} + c_{\pm 2} \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} (\omega \mp 2\omega_0)\right)}{\frac{T_d}{2} (\omega \mp 2\omega_0)} + c_{\pm 3} \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} (\omega \mp 3\omega_0)\right)}{\frac{T_d}{2} (\omega \mp 3\omega_0)} + \dots \right]$$

Esaminiamo adesso i valori assunti da questo spettro in corrispondenza di  $\omega_0$  e delle armoniche  $k\omega_0$ : ad esempio, per  $\omega = \omega_0$  otteniamo

$$X_w(\omega_0) = T_d \left[ c_0 \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} \omega_0\right)}{\frac{T_d}{2} \omega_0} + c_1 + c_{-1} \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} 2\omega_0\right)}{\frac{T_d}{2} 2\omega_0} + c_{\pm 2} \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} (\omega_0 \mp 2\omega_0)\right)}{\frac{T_d}{2} (\omega_0 \mp 2\omega_0)} + c_{\pm 3} \frac{\sin\left(\frac{T_d}{2} (\omega_0 \mp 3\omega_0)\right)}{\frac{T_d}{2} (\omega_0 \mp 3\omega_0)} + \dots \right]$$

Si vede dunque che  $c_1$  è l'unico coefficiente rimasto senza termine moltiplicativo; non solo, ma si vede anche che gli altri coefficienti  $c_k$  hanno termini moltiplicativi che risultano nulli se e solo se è soddisfatta la condizione

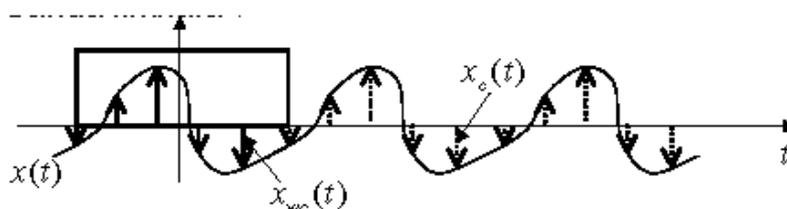
$$\frac{T_d}{2} \omega_0 = n\pi$$

e cioè  $T_d = nT_0$ . Questo risultato ci dice, quindi, che, *effettuando una finestrazione su una durata  $T_d$  multipla del periodo  $T_0$  del segnale, lo spettro del segnale finestrato risulta immutato, rispetto a quello del segnale di partenza, in corrispondenza delle frequenze armoniche  $k\omega_0$* . Se, invece, risulta  $T_d \neq nT_0$ , allora si manifesta un errore, che sarà un **errore di troncamento** con riferimento al dominio del tempo oppure un errore di **dispersione spettrale (leakage)** con riferimento al dominio della frequenza.

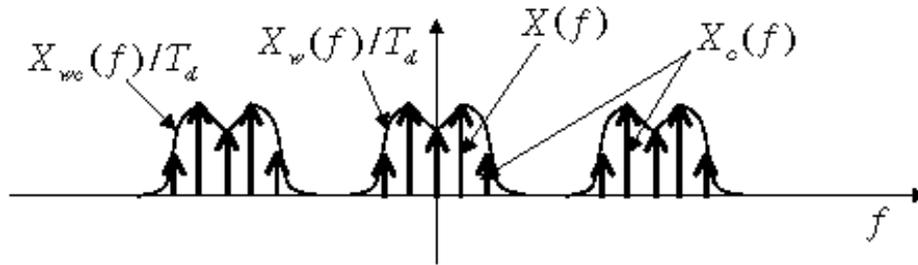
Ove venga realizzata la condizione  $T_d = nT_0$ , si parla di **campionamento sincronizzato** (o anche *campionamento coerente*).

### Campionamento

Dopo la finestrazione, dobbiamo procedere al campionamento del segnale finestrato  $x_w(t)$ :



Come ben sappiamo, questo campionamento produce un segnale  $x_{WC}(t)$  il cui spettro è una ripetizione periodica dello spettro di  $x_W(t)$ :



Se scegliamo la frequenza di campionamento sufficientemente elevata, la ripetizione periodica dello spettro di  $x_W(t)$  non produce un significativo errore di aliasing, come evidenziato nella figura<sup>9</sup>.

Nella figura sono tra l'altro evidenziati anche lo spettro a righe sia  $x(t)$  e del segnale  $x_C(t)$  che si otterrebbe campionamento direttamente  $x(t)$  e per un tempo infinito.

### Campionamento in frequenza

L'ultimo passaggio, per applicare la formula della DFT, consiste nel calcolare  $X_{WC}(f)$  in corrispondenza delle stesse frequenze discrete  $k\omega_0$  in cui sono posizionate le righe dello spettro originario  $X(f)$ :

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_C) e^{-jk\omega_0 mT_C}$$

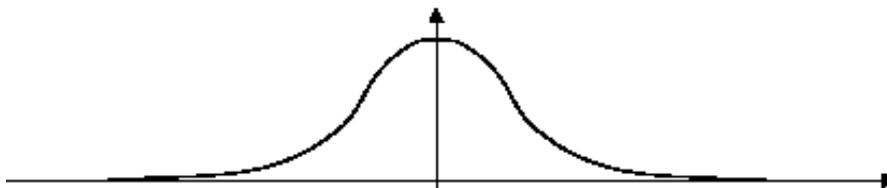
Questo campionamento dello spettro non provoca alcuna perdita di informazioni, proprio perché il segnale di partenza aveva spettro a righe ed il valore di tali righe è rimasto invariato nello spettro  $X_{WC}(f)$  ottenuto dopo finestrazione e campionamento.

Quindi, concludendo, *dato un segnale  $x(t)$  periodico ma a banda finita, è possibile ricostruirlo perfettamente (o, ciò che è lo stesso, ricostruirne lo spettro) a partire da  $N$  suoi campioni  $x(mT_C)$ .*

Le cose cambiano, invece, considerando un segnale  $x(t)$  aperiodico, come illustrato nel prossimo paragrafo.

### Segnali aperiodici

E' noto che un segnale aperiodico di durata infinita ha uno spettro continuo a banda limitata, ad esempio del tipo seguente:



<sup>9</sup> L'inevitabile aliasing deriva dal fatto che lo spettro di  $x_W(t)$ , essendo una successione di Seni Cardinali traslati a cavallo delle  $k\omega_0$ , è teoricamente di estensione infinita. In realtà, invece, il Seno cardinale decresce praticamente a zero ad una certa distanza dal centro, per cui l'approssimazione di ritenere assente l'aliasing è comunque lecita a patto di distanziare sufficientemente le repliche

Anche a un simile segnale è possibile applicare la DFT, ma con delle fondamentali differenze rispetto a prima. Infatti, in linea del tutto generale, la teoria sui segnali non periodici dice quanto segue:

- in primo luogo, dobbiamo considerare il segnale  $x_p(t)$  ottenuto come periodicizzazione, a passo  $T_d=2\pi/\omega_0$ , del segnale in esame  $x(t)$ :

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t + kT_d)$$

- essendo questo segnale di natura periodica, ad esso è applicabile il concetto di DFT: allora, applicando ad  $x_p(t)$  la DFT con  $N$  campioni (su un intervallo temporale di durata  $T_d$ ), è possibile calcolare lo spettro  $X(\omega)$  del segnale di partenza senza errori solo in corrispondenza delle frequenze discrete

$$-n\omega_0, -(n-1)\omega_0, \dots, -\omega_0, 0, \omega_0, \dots, (n-1)\omega_0, n\omega_0$$

dove  $n\omega_0$  coincide con la massima frequenza  $\omega_{max}$  del segnale di partenza.

Ovviamente, questo è un procedimento puramente teorico, in quanto non possiamo certo lavorare sulla ripetizione periodica di  $x(t)$ , essendo quest'ultimo di durata infinita. Di conseguenza, se vogliamo applicare i passi appena descritti, dobbiamo nuovamente affidarci alla finestrazione di  $x(t)$ , che ci darà il segnale  $x_w(t)$  con il solito spettro

$$X_w(\omega) = X(\omega) * W(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)W(\omega - \alpha)d\alpha$$

Ovviamente, dovremo scegliere una finestra  $w(t)$  tale che  $X_w(\omega)$  si approssimi il più possibile allo spettro vero di interesse  $X(\omega)$  <sup>(10)</sup>. Le scelte possibili sono diverse, anche se, in generale, possiamo dire che, in questo contesto, la finestra rettangolare è decisamente da escludere. Non solo, ma possiamo anche dire *che non esiste la finestra ideale per l'analisi spettrale, valida cioè sempre. A seconda della situazione, dovremo considerare che ogni finestra realizza un compromesso tra due fattori:*

- il lobo principale dello spettro della finestra determina la **risoluzione in frequenza**, ovvero la capacità di individuare come separate righe spettrali vicine tra loro;
- i lobi secondari dello spettro della finestra determinano invece la **dispersione spettrale**, ossia il fatto per cui l'energia dello spettro  $X(\omega)$  viene distribuita anche su frequenze alle quali, invece, era inizialmente nulla.

Dato che, a parità di durata temporale di osservazione, la risoluzione in frequenza e la dispersione spettrale sono specifiche contrastanti, dovremo di volta in volta scegliere la finestra che ci dà il migliore compromesso tra questi parametri.

<sup>10</sup> Tra l'altro, questo stesso procedimento va anche applicato quando il segnale  $x(t)$  è periodico, ma non conosciamo a priori il suo periodo.

## RIEPILOGO GENERALE SUL CAMPIONAMENTO NEGLI STRUMENTI DI MISURA

Facciamo allora un riepilogo generale su quanto detto nei precedenti paragrafi:

- **campionare** significa considerare un segnale analogico in istanti non solo discreti, ma anche in numero finito;
- la ricostruzione esatta del segnale è quindi teoricamente possibile solo per **segnali periodici a banda limitata**; in questo caso, ricostruire significa calcolare le componenti armoniche (che infatti sono in numero finito) e, inoltre, la ricostruzione richiede una finestra di osservazione rettangolare di periodo multiplo della frequenza del segnale (**campionamento coerente**);
- se il campionamento non è *coerente*, la ricostruzione è affetta da errori che si possono ridurre scegliendo una finestra con caratteristiche spettrali migliori della rettangolare; la scelta della finestra dipende comunque dal tipo di segnale e soprattutto dal parametro da misurare;
- i **segnali aperiodici a banda limitata** hanno spettro continuo e quindi non è comunque possibile una ricostruzione esatta come nel caso dei segnali periodici (è teoricamente possibile ottenere esattamente lo spettro in corrispondenza di un numero finito di frequenze armoniche); inoltre, se non si dispone dei valori del segnale da  $-\infty$  a  $+\infty$  (caso tipico), è possibile ottenere lo spettro solo con una certa approssimazione, che è la stessa del caso dei segnali periodici con campionamento non sincronizzato; sono quindi utili, in questo caso, finestre con caratteristiche spettrali opportune, diverse a seconda del tipo di misura (di frequenza o di ampiezza dello spettro).
- in alcuni casi (ad esempio se si utilizzano per la misura formule di quadratura e simili) è utile infittire i campioni con opportune formule di interpolazione (filtraggio digitale o numerico); in questo caso, il filtro non potrà mai essere un passabasso ideale, come richiesto, ma potrà semmai soddisfare certe specifiche nel dominio della frequenza, e quindi sarà presente un errore di interpolazione;
- di solito un filtro numerico passabasso per applicazioni di misura è opportuno che abbia fase lineare, il che implica che sia FIR;
- la tecnica del filtraggio numerico è molto utile soprattutto per poter risparmiare sul filtro analogico antialiasing (banda di transizione larga), il che avviene a prezzo di una riduzione della banda dello strumento;
- il filtraggio numerico è in pratica molto usato anche per incrementare la risoluzione a spese della banda (argomento non trattato).

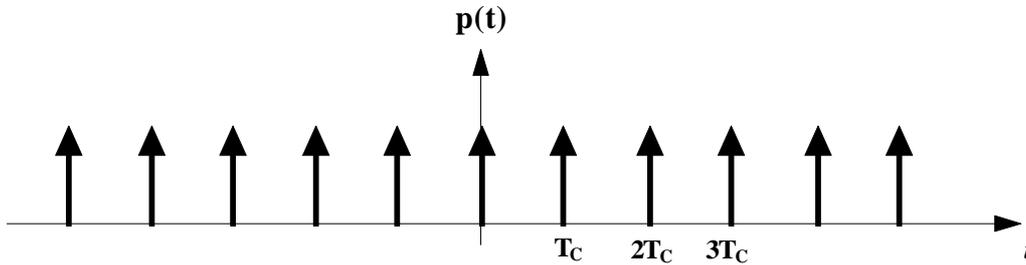
## Effetti della non-idealità del campionatore

### INTRODUZIONE

Riprendiamo nuovamente la formula matematica con cui abbiamo espresso il segnale campionato, ossia il segnale, sempre tempo-continuo, all'uscita dal campionatore:

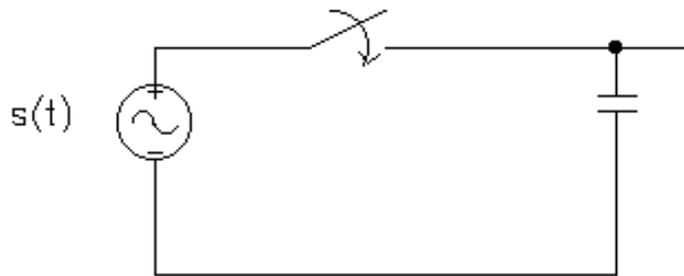
$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_c)\delta(t - nT_c) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)$$

Si tratta del prodotto tra il segnale analogico da campionare ed il cosiddetto *pettine di campionamento*. Quest'ultimo è una successione di infiniti (teoricamente) impulsi che servono a prelevare, negli istanti di campionamento prescelti, i campioni del segnale  $s(t)$ :



In pratica, quindi, il pettine di campionamento rappresenta il comportamento del campionatore, che, ogni  $T_C$  secondi, preleva il valore assunto dal segnale. L'uscita del campionatore è il segnale  $s_C(t)$  costituito da una forma d'onda che, in ogni istante, assume il valore di  $s(t)$  in quello stesso istante.

Questo ragionamento si fonda dunque sull'ipotesi di avere a disposizione un **campionatore ideale**, che legga istantaneamente il valore di  $s(t)$  negli istanti prescelti per il campionamento. Se volessimo rappresentare, a livello circuitale, questo dispositivo, potremmo farlo nel modo seguente:



Il generatore rappresenta il segnale  $s(t)$  a campionare. L'interruttore ed il condensatore modellano invece il campionatore: quando l'interruttore si chiude, la tensione ai capi del condensatore assume il valore assunto da  $s(t)$ ; se l'interruttore ha una chiusura istantanea<sup>11</sup>, la tensione sul condensatore si mantiene costante, sul valore letto all'atto della chiusura dell'interruttore, fino alla successiva lettura. Si tratta perciò del classico **dispositivo a campionamento e tenuta**, nel senso che l'uscita del dispositivo è un valore di tensione che si mantiene costante dopo ogni chiusura dell'interruttore.

L'analisi circuitale di quel circuito porta all'espressione di  $s_C(t)$  prima riportata solo nell'ipotesi in cui tutti e 3 gli elementi presenti siano ideali, il che non avviene mai. Cerchiamo allora di capire cosa accade quando l'interruttore ed il condensatore non sono ideali<sup>12</sup>.

Dire che l'interruttore (cioè il campionatore) non è ideale significa dire che, una volta chiuso, esso non si riapre istantaneamente, ma rimane chiuso per un certo intervallo di durata  $\tau$ . Se il condensatore fosse ideale, non avremmo molta differenza rispetto a prima, in quanto la tensione a cui il condensatore rimane carico, dopo che l'interruttore si è finalmente aperto, sarebbe quella dell'istante precedente all'apertura stessa. In realtà, nemmeno il condensatore è ideale: nel complesso, *succede che l'operazione di campionamento non sia più una*

<sup>11</sup> cioè si chiude e si riapre dopo appena un istante

<sup>12</sup> Per quanto riguarda il generatore, trattarlo come ideale significa assumere nulla la resistenza serie (oppure infinita la resistenza parallelo se consideriamo la rappresentazione di Norton, ossia mediante il generatore di corrente).

lettura istantanea dei valori assunti da  $s(t)$ , ma una media temporale di  $s(t)$  nell'intervallo di durata  $t$ .

In parole povere, il campionatore reale si comporta ancora come un dispositivo a tenuta, che cioè mantiene invariato il valore della tensione in uscita fino al successivo istante di campionamento, ma tale valore non è quello istantaneo di  $s(t)$  nell'istante  $kT_C$  (con  $k$  generico), ma una media temporale di  $s(t)$  compiuta nell'intervallo  $[kT_C, kT_C + \tau]$ . Mentre, quindi, a livello ideale, dovremmo ottenere, per il  $k$  campione, che

$$s_c(k) = s(kT_C)$$

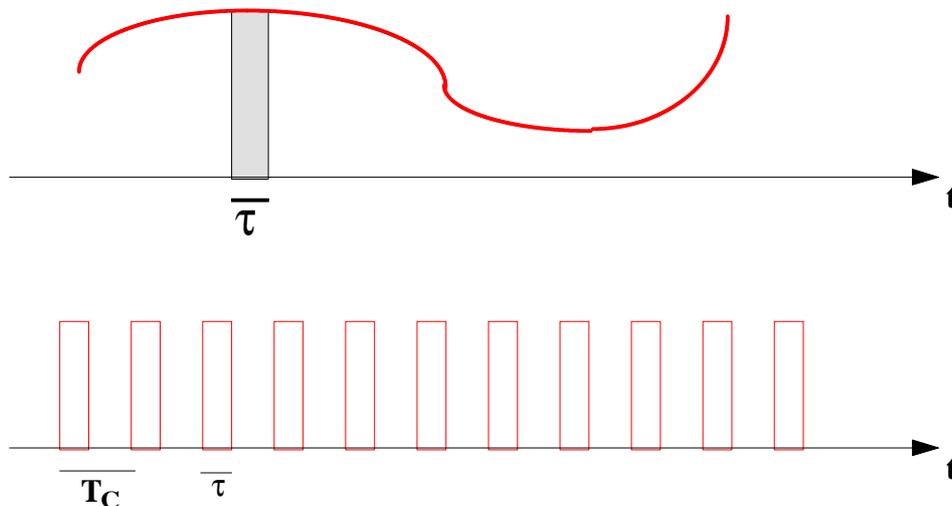
nella realtà ciò che otteniamo è

$$\tilde{s}_c(k) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_C - \tau}^{kT_C} s(t) dt$$

L'interruttore si apre effettivamente in  $kT_C$ , rilasciando un certo valore di tensione, ma effettua la misura per un intervallo  $\tau$ , per cui fa una media di  $s(t)$  in tale intervallo e la fornisce come campione<sup>13</sup>.

Cerchiamo allora di capire, sulla base di queste considerazioni, come sia fatto realmente il segnale in uscita dal campionatore. Ci basta, in fin dei conti, ricavare la funzione di risposta all'impulso del campionatore.

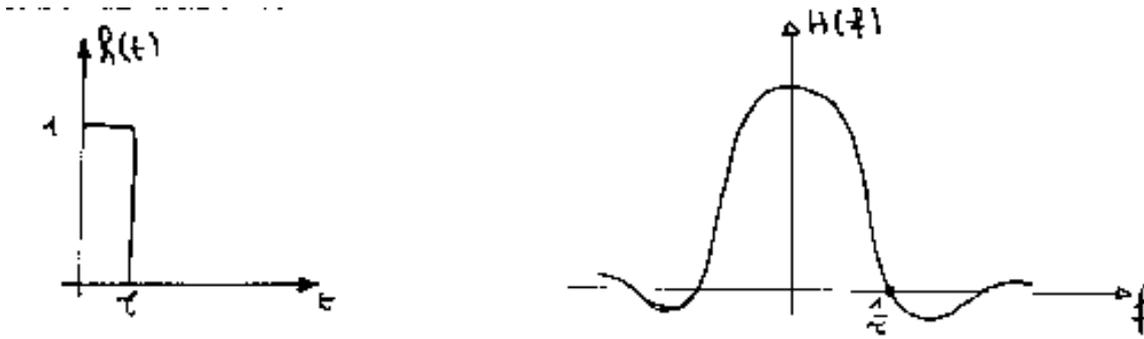
In pratica, il campionatore moltiplica il segnale  $s(t)$  in ingresso non più per un pettine di impulsi ideali, per un **pettine di impulsi rettangolari** di altezza unitaria e durata  $\tau$ :



*Schematizzazione del funzionamento di un campionatore reale: il campionatore ha un **tempo di chiusura** non infinitesimo (per quanto piccolo) e questo è modellabile tramite un pettine di campionamento formato da impulsi rettangolari di durata  $\tau$  (che, ovviamente, dovrà essere quanto più piccolo possibile rispetto al periodo di campionamento  $T_C$ )*

E' facile verificare che la funzione di risposta all'impulso di questo dispositivo è un rettangolo, di durata  $\tau$  ed altezza  $1/\tau$  (quindi di area unitaria) che comincia in  $t=0$ :

<sup>13</sup> Esteso il discorso a tutta la durata del campionamento, possiamo dire che il campionatore esegue una **media temporale a finestra mobile**, dove tale *finestra* dura  $\tau$  secondi.



Risposta all'impulso e corrispondente funzione di trasferimento di un campionatore reale

Infatti, indicando con  $h(t)$  la suddetta risposta all'impulso (rappresentata nella figura insieme al suo spettro), si ha evidentemente che l'uscita del dispositivo, calcolata come convoluzione dell'ingresso  $s(t)$  per  $h(t)$ , è

$$u(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t s(\alpha)d\alpha$$

Calcolando questa funzione in  $t=kT_C$ , si ottiene proprio

$$u(t = kT_C) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_C-\tau}^{kT_C} s(\alpha)d\alpha = \tilde{s}_C(k)$$

Nota la risposta all'impulso, è nota anche la funzione di trasferimento, la quale, come sappiamo e come è indicato nella figura precedente, è ancora una volta del tipo  $\sin(f)/f$ , con il primo zero in  $1/\tau$ .

Siamo allora in grado di capire quale effetto abbia il campionatore non ideale sul nostro segnale: l'effetto di un filtraggio passa-basso. Se vogliamo che tale effetto sia minimo, abbiamo una sola possibilità: fare in modo che le componenti spettrali del segnale  $s(t)$  in ingresso siano concentrate nella regione di  $H(f)$  maggiormente piatta, ossia alle basse frequenze: questo significa richiedere la condizione

$$B \ll \frac{1}{\tau}$$

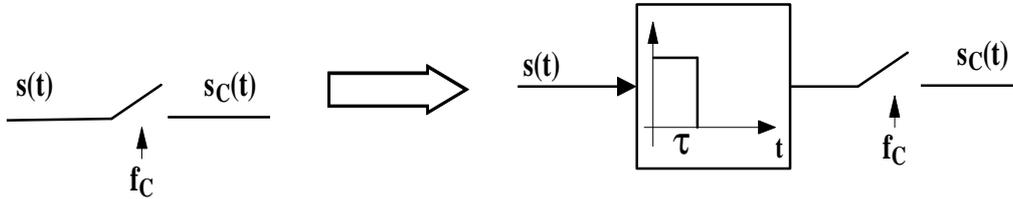
dove ovviamente  $B$  è la banda (monolaterale<sup>14</sup>) di  $s(t)$ .

D'altra parte, l'importanza di questa condizione si può capire, in modo molto intuitivo, nel tempo: infatti, la condizione  $B \ll \frac{1}{\tau}$  equivale anche a  $\tau \ll \frac{1}{B}$ , il che significa che il tempo di chiusura dell'interruttore deve essere sufficientemente più piccolo delle variazioni temporali del segnale  $s(t)$ . In questo modo, se cioè il segnale subisce solo una minima variazione durante l'intervallo di durata  $\tau$ , la media su tale intervallo sarà un'ottima approssimazione del segnale; al contrario, se il segnale subisse notevoli variazioni durante l'intervallo  $\tau$ , la media temporale sarebbe una descrizione estremamente povera (il che corrisponde appunto ad un effetto passa-basso, cioè a non tenere traccia delle alte frequenze).

<sup>14</sup> Per "monolaterale" intendiamo semplicemente la massima frequenza positiva del segnale.

## MODELLO DEL CAMPIONATORE REALE

A questo punto, avendo capito quale effetto abbia il campionamento non ideale sul segnale  $s(t)$ , possiamo proporre un modello molto semplice del campionatore stesso: possiamo pensarlo, infatti, come la cascata di un filtro passa-basso con funzione di trasferimento del tipo  $\sin(f)/f$  e di un campionatore ideale:



In questo modo, riusciamo a dare ancora una descrizione del segnale in uscita come prodotto di una forma d'onda analogica  $s_F(t)$  per un pettine di impulsi ideali di campionamento, dove però la forma d'onda analogica  $s_F(t)$  tiene conto dell'effetto passa-basso subito dal segnale originale  $s(t)$ .

## COMPENSAZIONE DEGLI EFFETTI DI NON-IDEALITÀ DEL CAMPIONATORE

Continuando ad analizzare la questione del campionamento non ideale, possiamo fare un discorso di tipo matematico. In presenza di un campionamento ideale, abbiamo detto che il segnale campionato ha espressione

$$s_c(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)$$

ricavata banalmente come prodotto del segnale  $s(t)$  da campionare e del pettine di impulsi ideali. Se gli impulsi non sono più ideali, ma rettangolari di durata finita, è comunque possibile trovare l'espressione del pettine di campionamento, che è un semplice segnale periodico; esprimendo infatti tale segnale periodico mediante uno sviluppo in serie di Fourier e andando a calcolare, mediante la definizione, l'espressione dei coefficienti  $c_n$  di tale sviluppo, si trova quanto segue:

$$s_c(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jn2\pi f_c t} \quad \text{dove } c_n = \frac{\tau \sin(n\pi\tau f_c)}{T_c n\pi\tau f_c}$$

dove  $\tau$  è la durata del generico impulso, ossia il tempo di chiusura del campionatore.

Se adesso calcoliamo lo spettro del segnale campionato appena ricavato, troviamo quanto segue:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_c(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jn2\pi f_c t} e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-jn2\pi f_c t} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n S(f - nf_c) \end{aligned}$$

Abbiamo cioè trovato che lo spettro del segnale campionato è ancora una successione di infinite repliche dello spettro del segnale originale, posizionate a cavallo della frequenza di campionamento e dei suoi multipli, ma, rispetto al caso ideale, ciascuna replica è scalata per un fattore  $c_n$  avente l'espressione prima riportata. In particolare, i coefficienti di peso  $c_n$  risultano di valore decrescente man mano che aumenta  $n$ , il che significa che le repliche spettrali di  $S(f)$  sono tanto più attenuate quanto più ci si allontana dalla replica centrale (a frequenza zero), il cui coefficiente di peso è

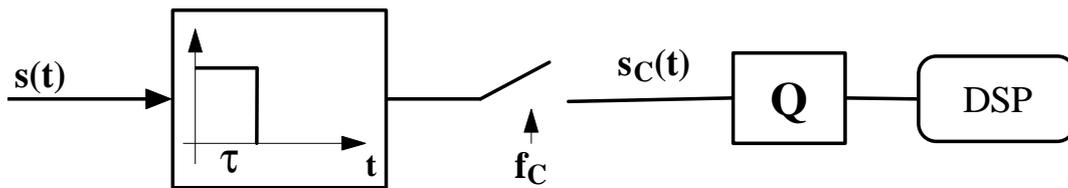
$$c_0 = \frac{\tau}{T_C} \frac{\sin(n\pi\tau f_C)}{n\pi\tau f_C} \Big|_{n=0} = \frac{\tau}{T_C}$$

Questo evidenzia sia l'effetto passa-basso dedotto anche nel paragrafo precedente sia anche la possibilità di risalire comunque al segnale di partenza tramite l'uso di un filtro di ricostruzione di tipo passa-basso (ovviamente nell'ipotesi di aver rispettato il teorema del campionamento).

In definitiva, quando gli impulsi di campionamento hanno una durata  $\tau$  non infinitesima, il campionamento può essere considerato equivalente a quello ideale, salvo a tener conto di un fattore correttivo  $\tau/T_C$ .

### Tecniche numeriche di compensazione

Abbiamo detto che il campionatore reale ha un effetto passa-basso sul segnale  $s(t)$  da campionare; misurare l'intervallo di chiusura  $\tau$  del campionatore non è difficile, per cui siamo in grado di conoscere, con buona precisione, la funzione di trasferimento del campionatore e quindi conosciamo l'attenuazione subita dalle varie componenti di  $s(t)$ . Possiamo allora pensare, dopo che è stata effettuata la numerizzazione del segnale, di compensare la suddetta attenuazione:



Con tecniche numeriche siamo in grado di riportare su le componenti spettrali che sono state precedentemente attenuate. Ovviamente, c'è un problema, legato al **rumore**: infatti, con questa operazione numerica, è vero che riusciamo a compensare l'attenuazione sul segnale, ma è anche vero che sagomiamo il rumore in modo da esaltare le alte frequenze<sup>15</sup>. Allora, questa operazione numerica può dare risultati apprezzabili solo quando l'attenuazione che si deve compensare è di pochi dB, altrimenti si corre il rischio di esaltare eccessivamente il rumore. D'altra parte, ci possono essere dei casi, come quello del segnale televisivo, nei quali il rumore in alta frequenza dà molto meno fastidio di quello in bassa frequenza, per cui una esaltazione delle alte frequenze di rumore potrebbe comunque essere tollerabile: noi ricaveremmo un miglioramento del segnale utile ed un peggioramento del rumore che però non percepiamo, per cui non ci dà alcun fastidio.

<sup>15</sup> Infatti, il segnale digitalizzato è sempre la sovrapposizione del segnale utile e dell'immane rumore: non essendo possibile distinguere i due segnali, l'operazione di compensazione dell'attenuazione comporta l'esaltazione delle alte frequenze sia sul segnale sia sul rumore; sul segnale, l'operazione ci va bene, in quanto appunto compensa l'attenuazione introdotta precedentemente, mentre sul rumore non ci va bene.

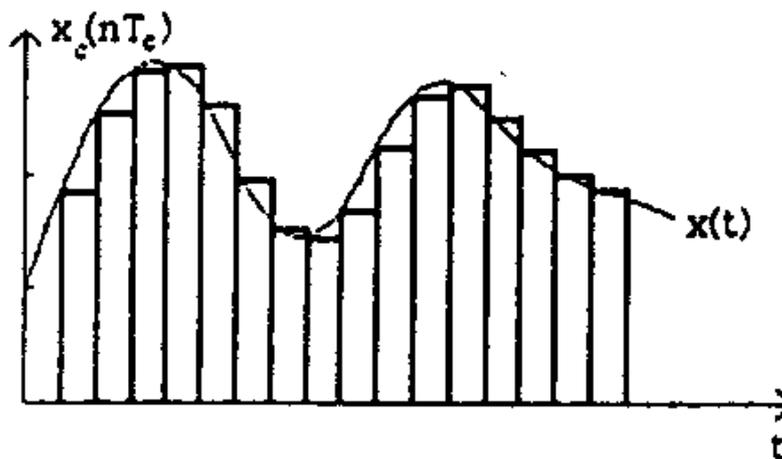
## Circuiti di campionamento e tenuta

### INTRODUZIONE

Nei precedenti paragrafi abbiamo fatto un quadro del campionamento ideale e reale dal punto di vista prettamente teorico. Vediamo adesso come sia possibile realizzare nella pratica un campionatore.

Per prima cosa, richiamiamo il concetto per cui il campionamento non potrà mai essere effettuato tramite una successione di impulsi di durata istantanea, ma solo tramite impulsi rettangolari di durata finita  $\tau$  (che in prima approssimazione possiamo ritenere uguale per tutti gli impulsi). Il corrispondente segnale campionato è dunque il frutto del prodotto tra il segnale  $x(t)$  da campionare e questa successione  $p(t)$  di impulsi rettangolari.

Una prima possibilità per effettuare questo tipo di campionamento è quella offerta dai cosiddetti **circuiti di campionamento e tenuta**, nei quali il campionamento consiste semplicemente di due operazioni successive: in corrispondenza di ciascun istante di campionamento, abbiamo una fase di campionamento ideale seguita da una fase di **tenuta** (o conservazione del dato). La figura seguente chiarisce questa affermazione:



Una volta prelevato il valore del segnale  $x(t)$  nel generico istante di campionamento, tale valore viene mantenuto costante, all'uscita del dispositivo campionatore, finché non arriva il successivo istante di campionamento.

Seguendo una analisi matematica analoga a quella già vista in precedenza, si trova che il segnale campionato ha uno spettro che è ancora una successione di repliche dello spettro  $X(f)$  del segnale di partenza, con un aggiuntivo effetto passa-basso. Se, quindi, riusciamo in qualche modo a compensare (preferibilmente con tecniche numeriche) questo effetto passa-basso, la ricostruzione del segnale a partire dai campioni diventa fattibile.

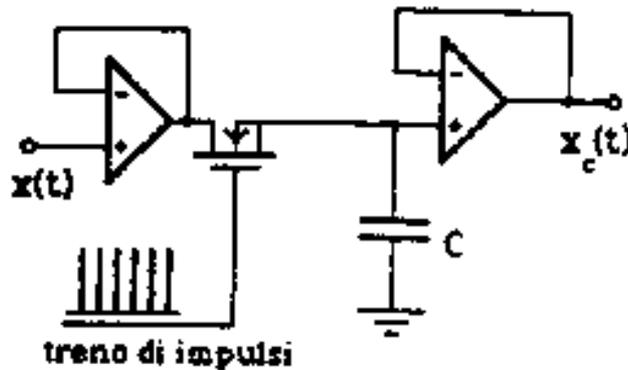
I circuiti di campionamento e tenuta sono noti anche con la sigla **S/H** (Sample/Hold) o anche con la sigla **SHA** (Sample/Hold Amplifier), visto che sono costituiti da particolari configurazioni di amplificatori. Le possibili realizzazioni sono diverse. La più semplice prevede un amplificatore operazionale che carica un condensatore durante la fase di campionamento e conserva poi tale carica durante la fase di tenuta, così come descritto poco fa. E' importante, in una simile configurazione, che il tempo necessario alla carica del condensatore sia molto piccolo rispetto al tempo di tenuta: infatti, proprio il **tempo di carica** determina il limite maggiore per la frequenza di campionamento.

Per quanto riguarda, invece, il **tempo di tenuta**, può essere variato a seconda della durata della conversione analogico-digitale: bisogna infatti fare in modo che il segnale in ingresso al convertitore si mantenga costante durante il processo di conversione (da campioni a cifre binarie).

I circuiti degli SHA commerciali sono diversi, nella loro struttura interna, a seconda di quali caratteristiche di accuratezza e velocità di campionamento si desidera ottenere. In particolare, dato che queste due ultime esigenze sono in contrasto tra di loro (come vedremo tra poco), i dispositivi più diffusi sono quelli che trovano il miglior compromesso tra di esse.

## REALIZZAZIONI CIRCUITALI DI UN SHA

Un possibile circuito SHA è riportato nella figura seguente:



L'ingresso del circuito, sul quale viene posto il segnale da campionare, è un **buffer**, ossia un inseguitore di tensione perfetto realizzato tramite un op-amp: tramite il cortocircuito virtuale tra i morsetti di ingresso dell'amplificatore, l'ingresso viene riportato praticamente invariato sul morsetto di uscita. Qui è presente un interruttore elettronico realizzato tramite un MOSFET. L'interruttore è pilotato, tramite la tensione sul terminale di gate, da un **treno di impulsi di campionamento** (provenienti da un contatore digitale con funzioni di orologio temporizzatore): in corrispondenza di ciascun impulso, l'interruttore si chiude, in quanto il transistor va in conduzione e quindi il percorso drain-source può essere assimilato ad una semplice resistenza  $R_{CC}$  (resistenza a circuito chiuso); in tal modo, è possibile la carica del condensatore  $C$  tramite un classico circuito RC, quindi con costante di tempo  $R_{CC}C$ . Al termine del processo di carica, l'interruttore si apre nuovamente e la tensione ai capi del condensatore rimane costante; il successivo buffer si occupa di riportare tale tensione in uscita.

Si potrebbe pensare che il primo buffer sia inutile, ma in realtà non è così: esso, infatti, svolge la fondamentale funzione di adattatore di impedenza, in quanto accoppia l'impedenza della sorgente del segnale  $x(t)$ , che può essere elevata, con quella del successivo circuito di campionamento.

Per quanto riguarda, invece, il MOSFET, esso deve avere sostanzialmente 3 requisiti: alta velocità di commutazione, alta resistenza a circuito aperto e bassa resistenza  $R_{CC}$  a circuito chiuso. In particolare, la  $R_{CC}$  deve essere piccola in quanto essa determina il più piccolo valore del tempo di campionamento  $T_C$ , ossia la massima frequenza di campionamento. Vediamo perché.

Quando il MOSFET chiude il circuito, abbiamo il classico circuito RC in fase di carica del condensatore: la legge di carica è

$$v_c(t) = V_c \left( 1 - e^{-t/R_{CC}C} \right)$$

dove abbiamo indicato con  $V_c$  il valore di tensione che si sta campionando.

Si definisce **tempo di assestamento** il tempo necessario affinché la tensione ai capi del condensatore si porti ad una prefissata frazione  $\chi$  della tensione  $V_C$  applicata in ingresso: deve cioè risultare

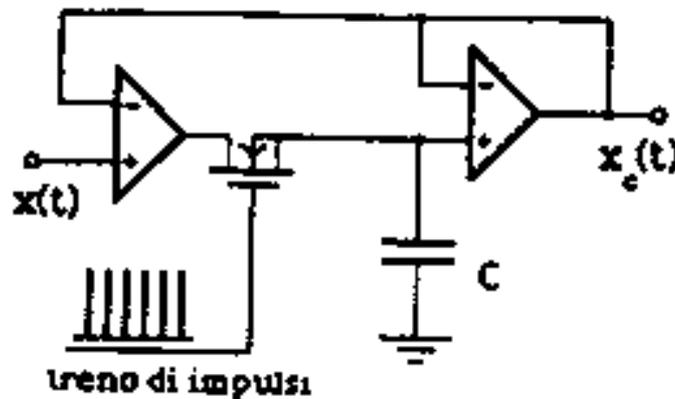
$$v_c(t_a) = V_C(1 - e^{-t_a/R_{CC}C}) = \chi V_C$$

da cui ricaviamo che  $t_a = R_{CC}C \cdot \ln \frac{1}{1-\chi}$

Questo tempo di assestamento fissa il minimo periodo di campionamento ottenibile in base all'**accuratezza** desiderata, quantificata dal valore di  $\chi$  (ovviamente compreso tra 0 ed 1). Facciamo un esempio: supponiamo di volere una accuratezza del 99,9%, per cui  $\chi=0.999$ ; supponiamo inoltre che sia  $C=100\text{pF}$  e  $R_{CC}=100\Omega$ ; sostituendo questi valori, troviamo un tempo di assestamento di 69 nsec, che corrispondono ad una frequenza di 14.49 MHz (che quindi è la massima frequenza di campionamento).

E' inoltre evidente che, a parità degli altri parametri, quanto minore è  $C$  tanto maggiore è la massima frequenza di campionamento ottenibile. Il problema, però, è che, al diminuire di  $C$ , diminuisce anche la durata della scarica del condensatore durante la fase di tenuta. Di conseguenza, qualora si vogliano garantire frequenze di campionamento sia alte sia basse, è necessario trovare un valore di compromesso per  $C$ .

Il difetto maggiore, in questo tipo di campionatore, riguarda la scarsa accuratezza, legata al funzionamento dei due inseguitori di tensione: infatti, è noto che gli amplificatori operazionali soffrono problemi di deriva dallo zero. Allora, per eliminare del tutto queste cause di errore, si applica il concetto della retroazione, tramite la quale riportare in ingresso il segnale ottenuto in uscita. Lo schema circuitale diventa il seguente:



Rispetto al circuito precedente, abbiamo sostanzialmente eliminato la retroazione relativa al primo buffer, mettendo adesso in corto i morsetti invertenti dei due amplificatori.

E' ovvio che la retroazione determina un inevitabile ritardo nella risposta del circuito, rallentando il campionamento, ossia riducendo la massima frequenza di campionamento, a parità di  $R_{CC}$  e di  $C$ , rispetto al circuito precedente. Questo mostra ancora una volta come i requisiti di accuratezza e di velocità siano in contrasto tra di loro.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>