

Appunti di Misure Elettriche

Capitolo 10

Campionamento e quantizzazione reali

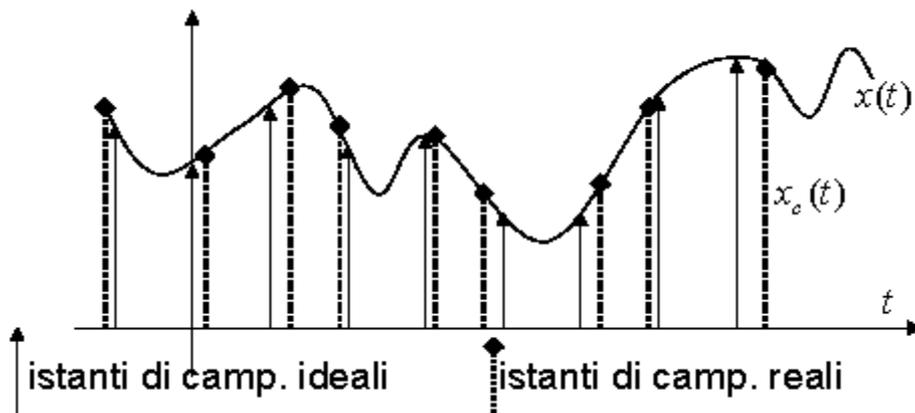
Campionamento reale.....	2
Introduzione	2
Tempo di apertura finito di un ADC	2
Istanti di campionamento reale	3
Errore sistematico.....	5
Errore accidentale.....	7
Analogia con la base tempi di un oscilloscopio analogico	8
Effetto degli errori di campionamento sullo spettro dei segnali	9
Quantizzazione reale	14
Introduzione	14
Quantizzazione uniforme ad arrotondamento (QUA).....	16
Relazioni generali.....	17
Errore di quantizzazione.....	19
Caratteristiche del rumore di quantizzazione	20
<i>Caso particolare: ingresso uniformemente distribuito</i>	21
Quantizzazione reale	22
<i>Errori sistematici</i>	23
Nonlinearità integrale	24
Nonlinearità differenziale	25
<i>Errori accidentali</i>	26
<i>Riepilogo: quantizzazione ideale su segnale in ingresso distorto</i>	26
Conclusioni	28
Calcolo dell'incertezza negli strumenti digitali	29
Introduzione: errori ed incertezze	29
Incertezza complessiva su una misura diretta.....	30
Incertezza complessiva su una misura indiretta.....	31
<i>Misura indiretta per differenza</i>	32
<i>Osservazione: incertezza nonlinearità differenziale</i>	33
<i>Misura indiretta per rapporto</i>	36
Trattamento del rumore	37
<i>Incertezza di rumore per una misura diretta</i>	37
<i>Incertezza di rumore per una misura indiretta</i>	38
Incertezza su misure di tempo.....	39
Dati sull'incertezza forniti dai costruttori	41

Campionamento reale

INTRODUZIONE

Abbiamo in precedenza parlato, a proposito della **strumentazione digitale**, del **campionamento ideale**. Questo campionamento, proprio perché ideale, differisce da quello che realmente viene effettuato negli strumenti digitali di misura. Di conseguenza, vogliamo studiare i principali aspetti del **campionamento reale** e le implicazioni, sulle misure effettuate, delle varie non-idealità.

La differenza sostanziale tra campionamento ideale e reale riguarda il posizionamento degli istanti di campionamento:



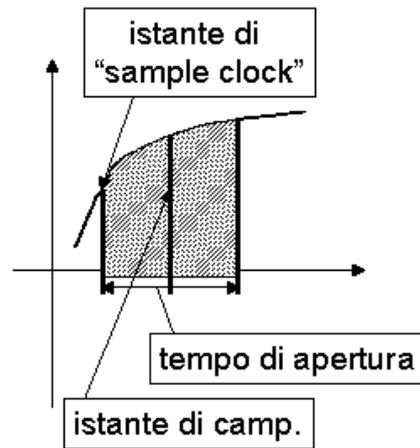
La figura appena riportata mostra che, a fronte degli **istanti teorici di campionamento** (che possiamo rappresentare come $t_k = kT_C$, dove T_C è il periodo di campionamento prescelto), gli **istanti reali di campionamento** risultano traslati (in anticipo o in ritardo) di una quantità variabile Δt_k : possiamo cioè scrivere che

$$\tau_k = kT_C + \Delta t_k$$

dove il Δt_k non è costante, ma varia con k . Di questo ci occuperemo nei prossimi paragrafi.

TEMPO DI APERTURA FINITO DI UN ADC

Per poter esaminare, a livello quantitativo, il problema degli istanti reali di campionamento, è prima necessario fare una premessa, peraltro già accennata in precedenza. Bisogna infatti sottolineare che, nelle situazioni reali, non è possibile effettuare un campionamento istantaneo, ossia non è fisicamente possibile isolare il valore che il segnale $x(t)$ di partenza assume in singoli istanti prefissati. Al contrario, un campionatore (o, più genericamente, un ADC) ha sempre un **tempo di apertura** (*aperture time*) non infinitesimo, come sarebbe richiesto dal campionamento istantaneo, il che significa, sostanzialmente, che il valore fornito in uscita dall'ADC dipende dal valore che il segnale $x(t)$ ha assunto non nell'istante di campionamento t_k , ma durante un intervallo (pari appunto al tempo di apertura) a cavallo di t_k :



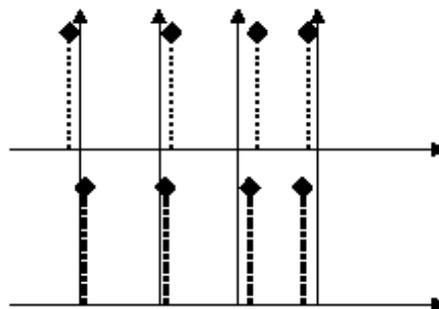
Per studiare questo tipo di errore, conviene pensarlo come un **errore di ampiezza**, ossia come un errore dovuto al fatto che l'ADC genera un codice numerico associato ad una ampiezza del segnale che non è quella effettiva.

Si tratta dunque di un errore decisamente diverso da quello di cui ci vogliamo occupare in questa sede (cioè la differenza tra istanti di campionamento reali e ideali), per cui abbiamo ritenuto di precisare questa differenza. Non solo, ma, una volta fatta questa precisazione, *proseguiremo i nostri discorsi ipotizzando di poter effettuare anche nella pratica un campionamento istantaneo*.

ISTANTI DI CAMPIONAMENTO REALE

Torniamo dunque al problema legato al fatto che gli istanti reali di campionamento differiscono, per una quantità di volta in volta variabile, dagli istanti ideali di campionamento. Per studiare questo problema, dobbiamo tener conto di un ulteriore aspetto rispetto a quelli già citati: dobbiamo infatti tener conto che, *effettuando il campionamento reale, pur in presenza dello stesso segnale e delle stesse condizioni operative, gli istanti reali di campionamento non solo differiscono da quelli ideali, ma sono diversi ogni volta*.

La figura seguente aiuta a comprendere quanto appena detto:



La figura mostra due successive operazioni di campionamento: le linee continue rappresentano gli istanti ideali di campionamento, che sono collocati temporalmente sempre nelle stesse posizioni; le linee tratteggiate corrispondono invece agli istanti reali di campionamento, la cui collocazione temporale cambia dal primo al secondo caso.

Vediamo adesso di esaminare la cosa in modo più formale. Indichiamo con t_k gli istanti di campionamento ideale: se T_C è il periodo di campionamento da noi prescelto, risulta evidentemente

$$t_k = k \cdot T_C$$

Indichiamo invece adesso con τ_{ik} gli istanti reali di campionamento, dove il pedice i fa riferimento alla i -sima acquisizione, mentre il pedice k fa riferimento alla collocazione temporale per la generica acquisizione. In base a quanto detto prima, possiamo scrivere che

$$\tau_{ik} = kT_C + e_{ik} = t_k + e_{ik}$$

dove quindi abbiamo indicato con e_{ik} il k -simo **errore** relativo alla i -sima acquisizione.

L'errore appena introdotto presenta sicuramente una **componente sistematica** (che cioè si presenta sempre con lo stesso segno e la stessa ampiezza¹) ed una **componente casuale** (che cioè varia, di volta in volta, in segno e ampiezza). Per individuare queste componenti, ci basta applicare quanto già sappiamo a proposito di errori sistematici e casuali:

- l'errore sistematico su una grandezza X è semplicemente la differenza tra il valor medio (o valore atteso) di X ed il valore vero: nel nostro caso, quindi, l'errore sistematico sugli istanti di campionamento è la differenza tra il *valor medio degli istanti reali di campionamento* (che indichiamo con τ_k) e gli istanti teorici di campionamento:

$$\tau_k = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tau_{ik} \longrightarrow \boxed{es_k = \tau_k - t_k}$$

- per quanto riguarda, invece, l'errore accidentale², scriveremo semplicemente che l'errore accidentale sul k -simo istante di campionamento relativo alla i -sima acquisizione è

$$\boxed{ec_{ik} = \tau_{ik} - \tau_k}$$

Con le posizioni fatte, possiamo dunque scrivere che gli istanti reali di campionamento sono

$$\boxed{\tau_{ik} = t_k + e_{ik} = t_k + es_k + ec_{ik}}$$

Andiamo allora ad esaminare singolarmente l'errore sistematico e quello accidentale.

¹ Sottolineiamo che la presenza di una componente sistematica nell'errore deriva semplicemente dalla realtà fisica, ma questo non significa che essa sia nota.

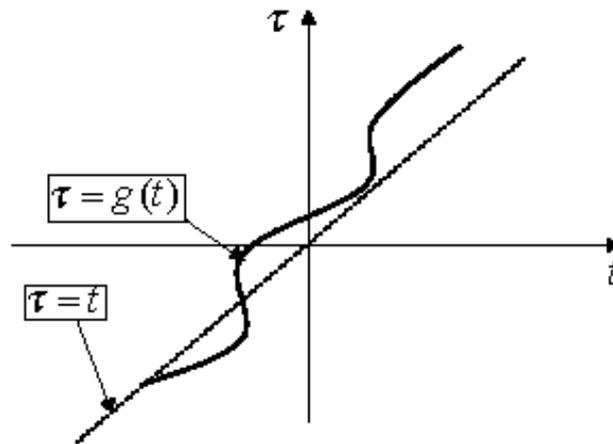
² Ricordiamo che gli errori accidentali sono a valor medio nullo

ERRORE SISTEMATICO

Come si nota nell'ultima espressione, il concetto di errore sistematico (che cioè si presenta sempre uguale) fa' sì che il termine es_k non dipenda dall'indice i , al contrario invece del termine ec_{ik} relativo all'errore accidentale. L'errore sistematico dipende solo da k , ossia dagli istanti teorici di campionamento. Questo equivale a dire che il valor medio τ_k degli istanti di campionamento dipende dai t_k , per cui possiamo scrivere che

$$\tau_k = g(t_k) \longrightarrow es_k = \tau_k - t_k = g(t_k) - t_k$$

Queste considerazioni permettono di visualizzare graficamente la situazione, come fatto nella figura seguente:



In ordinate abbiamo posto gli istanti ideali t_k di campionamento, mentre in ascisse i valori medi τ_k di tali istanti. Si è adottata una rappresentazione continua, ma in realtà bisogna dare per scontato che su entrambi gli assi i valori possibili sono in numero discreto.

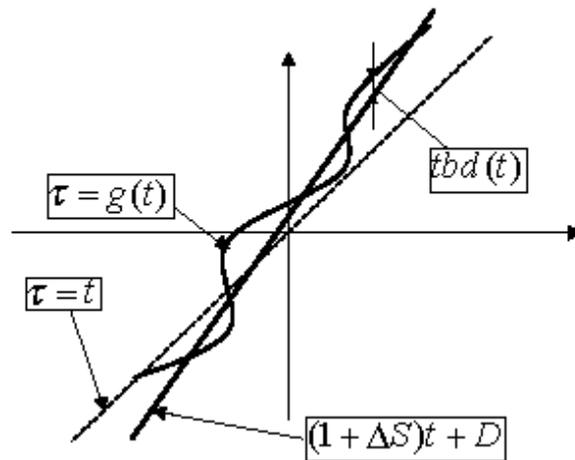
La curva $\tau=t$ è quella che si otterrebbe in assenza di errori sistematici³, mentre invece la curva $\tau=g(t)$ è quella dovuta agli errori sistematici.

Il modo classico di descrivere un **errore sistematico (statico)** su una grandezza (in questo caso i t_k) è quello di decomporlo in tre componenti:

- l'**errore di guadagno** dà origine ad una retta $\tau=(1+\Delta S)t$ che, rispetto alla retta ideale $\tau=t$, presenta semplicemente una diversa pendenza;
- l'**errore di offset**, invece, dà origine ad una retta $\tau=t+D$ che, rispetto a quella ideale $\tau=t$, presenta una diversa intercetta con l'asse verticale (detta appunto **offset**);
- l'**errore di linearità**, invece, dà origine ad una curva $\tau=tbd(t)$ che presenta scostamenti più o meno elevati, al variare di t , rispetto alla curva ideale $\tau=t$.

La figura seguente illustra graficamente queste tre componenti di errore:

³ E' bene sottolineare che, pur in assenza di errori sistematici, permangono comunque quelli accidentali: l'eventuale assenza di errori sistematici garantisce che i valori medi τ_k coincidano con i valori veri t_k , mentre l'inevitabile presenza di errori accidentali garantisce che i singoli valori τ_{ik} differiscano sempre dai valori veri t_k .



A livello analitico, possiamo dunque scrivere che

$$\tau_k = g(t_k) = (1 + \Delta S)t_k + D + tbd(t_k)$$

da cui quindi scaturisce che l'errore sistematico è

$$es_k = \tau_k - t_k = g(t_k) - t_k = \Delta S \cdot t_k + D + tbd(t_k)$$

Le dizioni *errore di guadagno*, *errore di offset* ed *errore di linearità* sono del tutto generali, ossia riguardano l'errore sistematico su una grandezza generica (come vedremo anche in seguito nella parte sulla *quantizzazione reale*). Nel nostro caso, invece, la grandezza in questione è rappresentata dal generico istante di campionamento, per cui le denominazioni da usare diventano rispettivamente:

- $\Delta S \cdot t_k$: **errore di velocità di spazzolamento** (*sweep speed error*); questo errore si chiama in questo modo in quanto rappresenta il fatto per cui la frequenza di campionamento effettiva differisce da quella nominale;
- D : **errore di ritardo del trigger** (*trigger delay error*); questo errore è così chiamato in quanto indica che il campionamento del segnale, anziché partire nell'istante di trigger, parte leggermente più tardi e precisamente in ritardo di un tempo pari proprio a D ;
- $tbd(t_k)$: **errore di distorsione della base tempi** (*timebase distortion error*); questo errore tiene in conto il fatto che gli intervalli di campionamento possono essere diseguali tra loro secondo una sequenza che si ripete sempre uguale in ogni acquisizione.

Sappiamo bene che gli errori, per definizione, non sono in alcun modo conoscibili con precisione, ma solo maggiorabili (ovviamente nel loro valore assoluto) tramite le rispettive *incertezze*. Nel caso degli ADC, sono direttamente i costruttori a fornire le incertezze relative ai tre tipi di errori appena citati⁴:

⁴ A tal proposito, segnaliamo che sui manuali che accompagnano gli strumenti digitali, le incertezze di cui si sta parlando vengono definite *errori*; questa scelta dei costruttori non deve indurre confusione: si tratta sempre di incertezze (quindi maggiorazioni dell'errore) e, d'altra parte, non potrebbe essere altrimenti, visto che non avrebbe senso attribuire uno specifico valore ad un errore, dato che questo, per definizione, non è valutabile.

- $|\Delta S| < U_S$: **incertezza di velocità di spazzolamento;**
- $|D| < U_D$: **incertezza di ritardo del trigger;**
- $|\text{tbd}(t)| < U_{\text{tbd}}$: **incertezza di distorsione della base tempi.**

Questi valori di incertezza possono essere forniti tutti oppure in parte o per niente e possono essere inoltre forniti in varie forme, più o meno chiare e più o meno esplicite. Spesso è fornita solo l'incertezza di sweep U_S , considerando irrilevante l'incertezza di offset U_D e trascurabile l'incertezza di distorsione della base tempi U_{tbd} .

Ad ogni modo, dovremmo adesso chiederci quando dobbiamo tener conto di queste incertezze. Tuttavia, risulta sicuramente conveniente parlare di questo argomento alla fine del capitolo, quando faremo un riassunto di quanto detto e vedremo l'applicazione concreta dei vari risultati ottenuti.

ERRORE ACCIDENTALE

Riprendiamo l'espressione del *k*-simo istante reale di campionamento relativo alla *i*-sima acquisizione:

$$\tau_{ik} = t_k + e_{ik} = t_k + es_k + ec_{ik} = t_k + [\Delta S \cdot t_k + D + \text{tbd}(t_k)] + ec_{ik}$$

Abbiamo prima visto come possano essere interpretati gli errori sistematici rappresentati dal termine es_k (dipendente solo da *k*). Per quanto riguarda, invece, gli errori casuali, rappresentati dal termine ec_{ik} (dipendente sia da *i* sia da *k*), possiamo scomporli in due contributi:

- il primo contributo tiene conto del fatto che il ritardo con cui parte il campionamento (rispetto all'istante di trigger) non è realmente fisso, ma varia leggermente attorno a *D* (errore sistematico di ritardo del trigger) tra una acquisizione e un'altra; a questo errore, di natura casuale, diamo il nome di **jitter del trigger**;
- il secondo contributo deriva invece dal fatto che, rispetto a tutto quanto detto in precedenza, gli istanti di campionamento effettivi presentano una ulteriore variazione, completamente casuale; a questo errore diamo il nome di **jitter di campionamento** (o anche *rumore di fase* o *rumore di tempo* o *incertezza di apertura*).

Da un punto di vista quantitativo, possiamo caratterizzare questi errori nel modo seguente:

- per quanto riguarda il *jitter del trigger*, possiamo interpretarlo come la media degli errori casuali sulla *i*-sima acquisizione:

$$jt_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ec_{ik}$$

- per quanto riguarda, invece, il *jitter di campionamento*, sarà semplicemente la differenza tra la quantità jt_i appena calcolata e l'errore casuale legato al *k*-simo istante della *i*-sima acquisizione:

$$nt_{ik} = ec_{ik} - jt_i$$

Tornando dunque nell'espressione del generico τ_{ik} , possiamo finalmente fornire l'espressione generale:

$$\tau_{ik} = t_k + e_{ik} = t_k + [\Delta S \cdot t_k + D + tbd(t_k)] + [jt_i + nt_{ik}]$$

E' importante notare che la quantità jt_i , pur essendo frutto del calcolo di un valor medio, non risulta nulla (come erroneamente si potrebbe pensare, in relazione al fatto che gli errori accidentali sono a valor medio nullo) in quanto la media è fatta solo rispetto all'indice k; solo se estendessimo la media anche all'indice i, allora la media sarebbe nulla:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M jt_i = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ec_{ik} = 0$$

Mentre gli errori sistematici sono in qualche modo "trattabili" tramite le maggiorazioni date dalle rispettive incertezze, per quanto riguarda gli errori accidentali possiamo solo sperare di conoscerne la varianza: in questo caso, possiamo cioè stimare (e poi utilizzare) le quantità

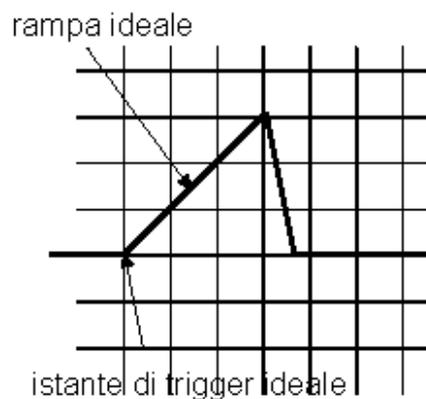
- varianza del jitter del trigger: $\sigma^2(jt_i) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (jt_i)^2$
- varianza del jitter di campionamento: $\sigma^2(nt_{ik}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (nt_{ik})^2$

Notiamo che la varianza del jitter di campionamento non dipende da k: infatti, il jitter di campionamento è un processo stazionario (e normalmente anche ergodico e bianco, cioè con campioni indipendenti identicamente distribuiti).

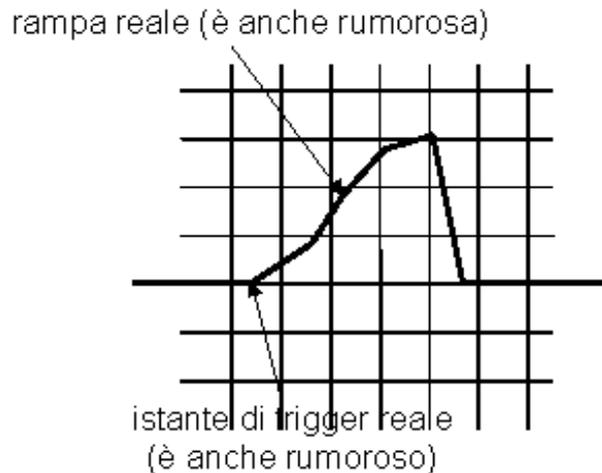
ANALOGIA CON LA BASE TEMPI DI UN OSCILLOSCOPIO ANALOGICO

Può essere istruttivo, per la comprensione dei concetti appena esposti, fare una analogia tra gli errori che si manifestano nel campionamento reale e gli errori che si manifestano relativamente al funzionamento della **base tempi** di un normale oscilloscopio analogico.

Sappiamo infatti che la base tempi di un oscilloscopio analogico funziona tramite un *segnale a dente di sega* inviato alle placchette deflettrici orizzontali del tubo a raggi catodici:



Questa però è solo una rampa puramente ideale, che parte nell'istante di trigger ideale. Nella pratica, invece, ci sono almeno due variazioni rispetto alla situazione ideale:



Le variazioni comportano sostanzialmente che l'istante in cui realmente parte la rampa è ritardato rispetto all'istante di trigger teorico e, inoltre, che l'andamento della rampa non sia quello ideale, ma sia leggermente distorto.

Il ritardo dell'istante di partenza della rampa è dunque l'analogo del ritardo dell'istante iniziale di campionamento in un ADC; l'andamento non perfettamente rettilineo della rampa corrisponde invece sostanzialmente all'errore di distorsione della base tempi in un ADC.

EFFETTO DEGLI ERRORI DI CAMPIONAMENTO SULLO SPETTRO DEI SEGNALI

Una volta comprese le caratteristiche degli errori che si manifestano nel processo di campionamento di un generico segnale analogico ad opera di un altrettanto generico ADC, il passo successivo consiste chiaramente nel valutare gli effetti di tali errori sulle misure effettuate tramite lo strumento che impiega l'ADC in questione.

Esiste un modo molto semplice di impostare questa analisi: *bisogna pensare al campionamento reale (quindi con tutti gli errori di cui si è parlato) come ad un campionamento ideale eseguito non più sul segnale di partenza $x(t)$, ma su un segnale $y(t)$ opportunamente distorto*; in particolare, la distorsione cui ci riferiamo è sulla base tempi rispetto alla quale il segnale è definito. Dobbiamo allora capire in cosa il nuovo segnale $y(t)$ differisce dal segnale di partenza $x(t)$.

Abbiamo trovato, in precedenza, che l'espressione completa del k -simo istante di campionamento relativo alla i -sima acquisizione è la seguente:

$$\tau_{ik} = t_k + e_{ik} = t_k + [\Delta S \cdot t_k + D + \text{tbd}(t_k)] + [j t_i + n t_i(t_k)]$$

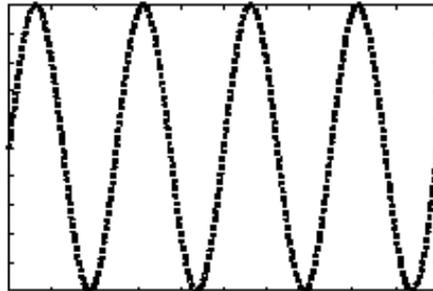
Se, per semplicità di espressione, esprimiamo la dipendenza da t_k come una dipendenza da t , possiamo allora scrivere semplicemente che

$$y(t) = x(t + g(t) + j t_i + n t_i(t)) = x(t + \Delta S \cdot t + D + \text{tbd}(t) + j t_i + n t_i(t))$$

Questa espressione mostra dunque il concetto di **deformazione della base tempi**: al posto di t , abbiamo adesso la quantità $t + \Delta S \cdot t + D + \text{tbd}(t) + j t_i + n t_i(t)$.

A questo punto, dato che l'analisi del caso generale risulta piuttosto complessa, possiamo accontentarci di una analisi semplificata, nella quale andiamo a valutare l'effetto dei singoli errori: si tratta cioè di considerare di volta in volta presente uno solo dei termini di errore presenti nell'espressione di $y(t)$.

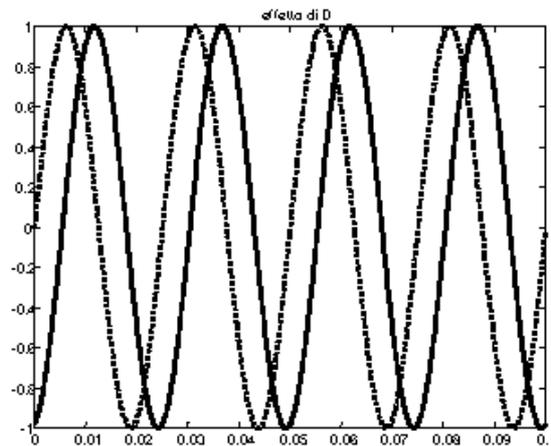
Come segnale, consideriamo una classica sinusoide:



Cominciamo dall'esame degli errori sistematici, considerando per primo il **ritardo del trigger**:

$$y(t) = x(t + D)$$

L'effetto dell'errore di ritardo del trigger è evidentemente uno spostamento rigido orizzontale della forma d'onda rispetto alla sua posizione "vera":



Questo spostamento si ripete uguale in tutte le acquisizioni.

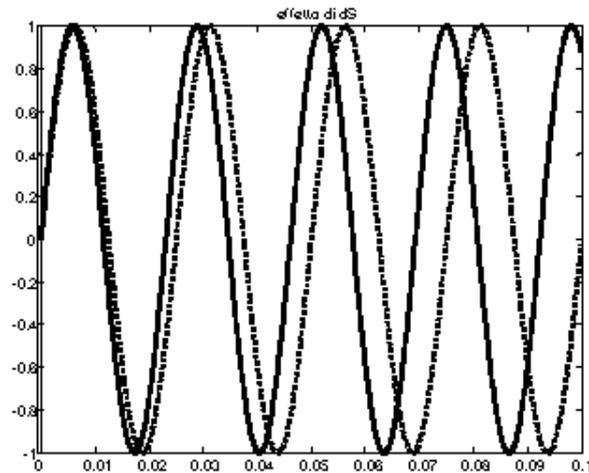
Al pari degli altri, questo errore può essere inessenziale per alcune misure ed essere invece molto importante per altre.

Passiamo all'**errore di velocità di sweep**:

$$y(t) = x(t + \Delta S \cdot t)$$

L'effetto dell'errore di velocità di sweep è uno spostamento rigido orizzontale dello spettro del segnale rispetto alla sua posizione "vera" ⁽⁵⁾. Ovviamente, nel dominio del tempo osserviamo una variazione della frequenza della sinusoide:

⁵ Anche questo spostamento si ripete uguale in tutte le acquisizioni.

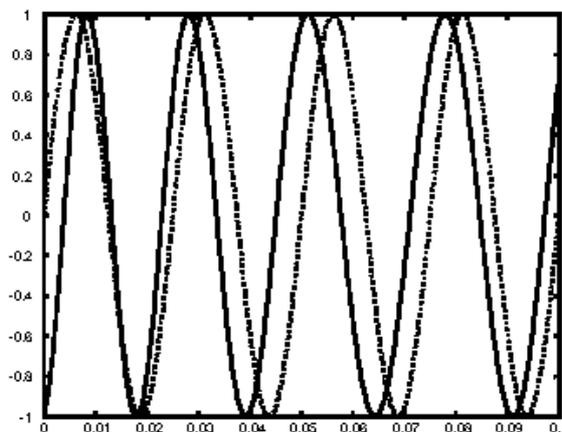


Consideriamo adesso l'**errore di distorsione della base tempi**:

$$y(t) = x(t + td(t))$$

L'effetto di questo errore è una modulazione di fase sulla sinusoide, che si ripete anch'essa uguale ad ogni acquisizione. Si tratta di una variazione locale di frequenza: usiamo l'aggettivo *locale* per indicare che, mediamente, la frequenza del segnale coincide con quella originale.

I tre errori sistematici appena descritti non si presentano mai separatamente, ma si sovrappongono:



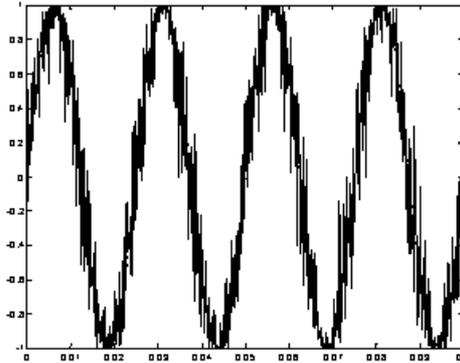
A volte la distorsione della base dei tempi è trascurabile, a volte è l'errore dominante (sistemi di acquisizione a frequenze molto elevate).

Passiamo adesso a vedere l'effetto degli errori accidentali, a cominciare dal **jitter di campionamento**:

$$y_i(t) = x(t + nt_i(t))$$

Abbiamo in questo caso aggiunto un pedice *i* per il segnale *y* per sottolineare il fatto che, a differenza degli errori sistematici, gli errori casuali si manifestano con entità diversa in ciascuna acquisizione.

L'effetto del jitter di campionamento (o rumore di tempo o di fase) è una modulazione di fase del segnale, che è però casuale e quindi diversa in tutte le acquisizioni:

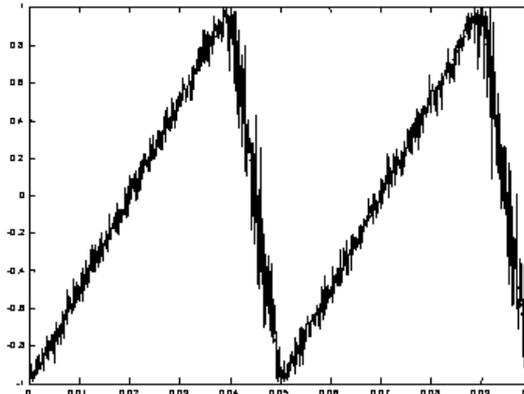


E' diversa dalla distorsione della base dei tempi, anche perché di norma il rumore di fase ha banda molto più elevata.

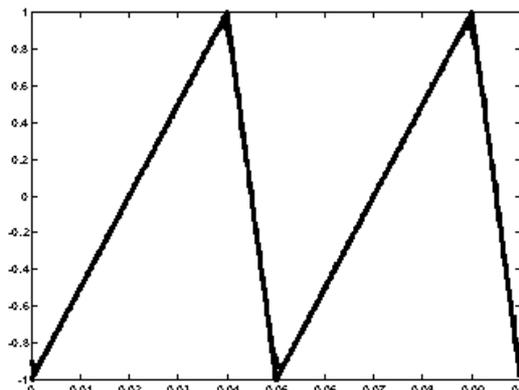
Il segnale con rumore di fase è apparentemente simile a un segnale con rumore di ampiezza, ma ci sono differenze molto importanti.

Se osserviamo più da vicino l'andamento del segnale affetto da rumore di fase, notiamo che quest'ultimo ha ampiezza minore dove la derivata temporale di $x(t)$ è minima, mentre ha ampiezza massima dove la derivata è massima.

Questa dipendenza dalla derivata prima è ben visibile in un segnale a dente di sega, dove i tratti più ripidi sono più rumorosi di quelli meno ripidi:



Inoltre, il rumore di fase aggiunge al segnale un disturbo a media non nulla, che quindi non è caratterizzato dalla sola varianza. Questo fatto si può vedere con maggiore chiarezza se facciamo la media di molte acquisizioni dello stesso segnale (ciascuna sporcata da rumore di fase indipendente dalle altre); infatti, il segnale mediato presenta una caratteristica "smussatura" in corrispondenza delle variazioni brusche, come si vede nella figura seguente:



Questo è dovuto al fatto che il valore atteso del segnale sporcato da rumore di fase non è il segnale originario: infatti, abbiamo che

$$E[y_i(t)] = E[x(t + nt_i(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + nt)f(nt)dn$$

dove abbiamo indicato con $f(nt)$ la densità di probabilità (di tipo gaussiano) del rumore di fase.

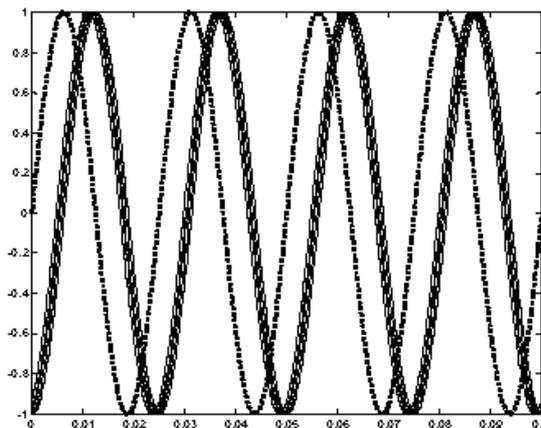
La formula ottenuta non è altro che quella della convoluzione del segnale con una gaussiana, ossia quindi l'espressione di un filtraggio passabasso del segnale di partenza. Questo filtraggio passabasso non rappresenta un grosso problema nel caso di un segnale puramente sinusoidale, in quanto si traduce semplicemente in una attenuazione del segnale. Al contrario, l'effetto passa-basso diventa una vera e propria distorsione per segnali a spettro largo (ad esempio impulsi molto rapidi), per cui le misure su questi segnali diventano decisamente meno accurate.

Infine, dobbiamo considerare l'effetto del jitter del trigger, che determina un piccolo shift temporale, diverso ad ogni acquisizione, che si aggiunge al ritardo del trigger che invece è fisso:

$$y(t) = x(t + D + jt_i)$$

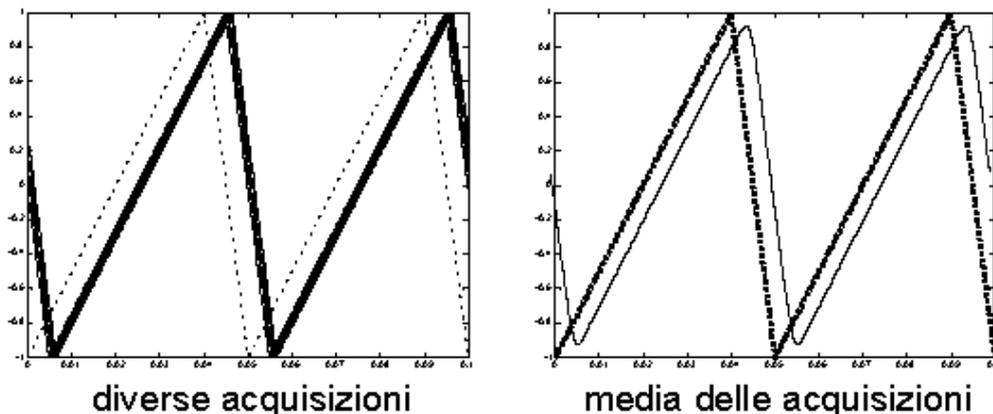
In una singola acquisizione, questo errore è indistinguibile dal ritardo del trigger. Quando però si fa la media di più acquisizioni, esso ha lo stesso effetto del rumore di fase (convoluzione con la densità di probabilità).

La figura seguente mostra l'effetto del ritardo del trigger su un segnale sinusoidale:



A livello visivo, abbiamo cioè una traccia praticamente sinusoidale ma di un certo spessore.

Nella figura seguente è invece riportato quello che accade in presenza di un segnale non sinusoidale, nella fattispecie un dente di sega:

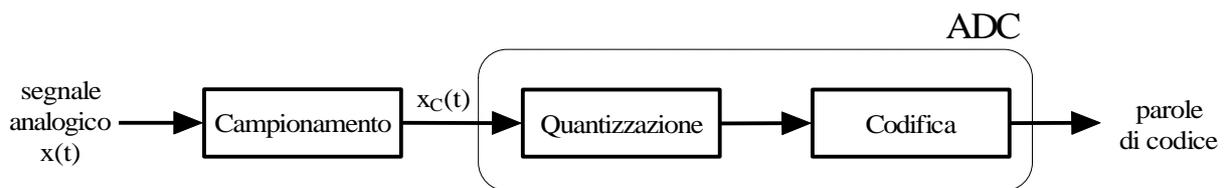


In base a quanto detto, nel momento in cui facciamo la media di più acquisizioni sono quindi presenti in generale sia il filtraggio passabasso dovuto al rumore di fase sia quello dovuto al jitter del trigger. Questi effetti sono di solito avvertibili alle frequenze più elevate e il trigger è più instabile quando il segnale relativo è debole.

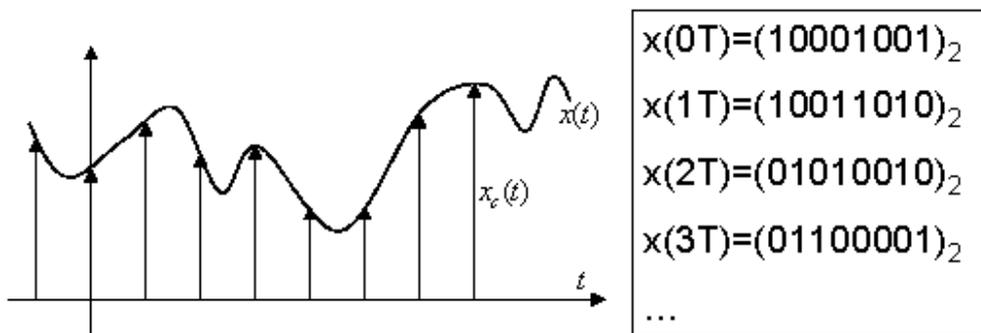
Quantizzazione reale

INTRODUZIONE

Del processo di **quantizzazione** si è già parlato in precedenza: è il processo di trasformazione di un segnale analogico in un insieme di **stati** discreti; in particolare, abbiamo sottolineato che essa rappresenta una delle due fasi della conversione di un segnale da analogico a digitale, seguita successivamente dalla fase di **codifica**, con la quale a ciascuno degli stati discreti viene associato un codice numerico univoco. Lo schema a blocchi completo del processo di **conversione analogico-digitale** è dunque il seguente:



Il campionamento è l'operazione con cui individuiamo un numero finito di valori del segnale $x(t)$ di partenza. La fase di **quantizzazione/codifica**, invece, consiste nell'assegnazione, a ciascun **campione analogico**, di un numero finito di livelli di uguale ampiezza, detti **quanti** (di ampiezza Q), e, successivamente, di un numero finito di cifre binarie, secondo quanto schematizzato nella figura seguente:



Il risultato di una misura ottenuta tramite una **strumentazione digitale** può essere considerato teoricamente come un multiplo intero di questa quantità elementare Q , che quindi costituisce la **risoluzione** del dispositivo di misura. Il multiplo più grande della quantità Q rappresenta invece la **portata** dello strumento.

I dispositivi **ADC** (*Analog Digital Converter*) eseguono congiuntamente la quantizzazione e la codifica. Quindi, riepilogando, *un convertitore analogico-digitale (ADC) fornisce una rappresentazione di un segnale analogico mediante un insieme finito di valori numerici rappresentati con un numero finito di cifre binarie.*

Abbiamo visto in precedenza che il *campionamento ideale* agisce ad istanti esattamente multipli del periodo di campionamento ⁽⁶⁾. Anche se, nella realtà, il campionamento ideale non sarà mai realizzabile, dovremo comunque cercare di attuarlo con la migliore approssimazione possibile: infatti, al momento in cui si tratta di interpretare i dati, si assume verificato proprio il campionamento ideale.

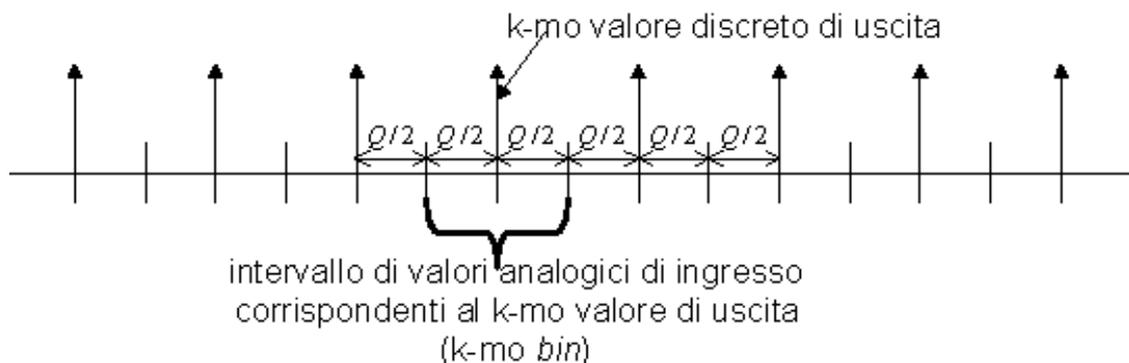
Passiamo dunque alla **quantizzazione** (inglobando in essa anche la fase di *codifica*). Sappiamo bene che la quantizzazione comporta necessariamente una perdita di informazione, cui consegue quindi una certa incertezza. L'obiettivo da porsi è dunque sia quello di valutare questa incertezza sia quello di minimizzarla.

Supponiamo di avere un **ADC ad n bit**. Questo significa che abbiamo a disposizione solo $M=2^n$ valori discreti con cui rappresentare i campioni analogici. Si dice che M è il **modulo** dell'ADC.

La scelta più ovvia per utilizzare questi valori discreti comporta sostanzialmente due cose:

- disporre tali valori in modo equispaziato, ossia ad intervalli di uguale ampiezza (che indichiamo con **Q**);
- associare a ciascuno di essi l'intervallo di valori analogici di cui è il centro.

La figura seguente chiarisce quanto appena detto:



Dato il *k-simo valore discreto* a nostra disposizione in uscita dall'ADC, esso è il centro di un intervallo (detto **bin**) di ampiezza Q : tutti i valori analogici in ingresso all'ADC che cadono in tale intervallo corrisponderanno, in uscita, al *k-simo valore discreto*.

In questo modo si ottiene la cosiddetta **quantizzazione (scalare) uniforme ad arrotondamento** (brevemente **QUA**), che è universalmente usata negli strumenti di misura e nei sistemi di digitalizzazione dei segnali di uso generale.

L'alternativa è la **quantizzazione non uniforme**, nella quale cioè si usano valori di uscita non equispaziati e *bin* disuguali. Essa si usa per minimizzare l'errore quando la distribuzione del segnale è nota a priori, come ad esempio avviene per la *codifica binaria dei segnali telefonici*.

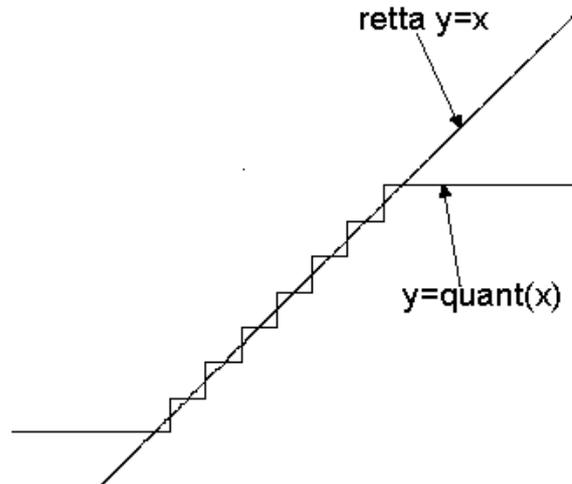
A noi interessa solo la quantizzazione (scalare) uniforme ad arrotondamento.

⁶ Sempre a livello ideale, ricordiamo che l'istante $t=0$ corrisponde all'istante di trigger

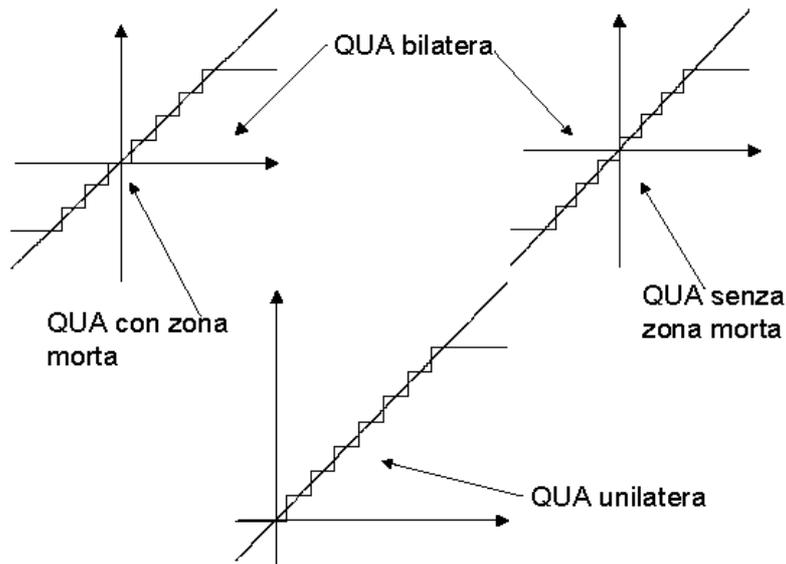
QUANTIZZAZIONE UNIFORME AD ARROTONDAMENTO (QUA)

Nella QUA, possiamo subito osservare quanto segue:

- la posizione dell'origine degli assi sulla retta $y=x$ definisce il tipo di QUA;
- la posizione dei livelli di uscita definisce quella dei bin.



La figura seguente mostra alcune possibilità:



Si parla di **QUA bilatera** quando si presuppone che i segnali in ingresso siano di tipo bipolare, per cui la caratteristica di quantizzazione fa riferimento sia ad ampiezze positive sia ad ampiezze negative. Viceversa, se cioè i segnali in ingresso sono unipolari, si parla di **QUA unilatera**.

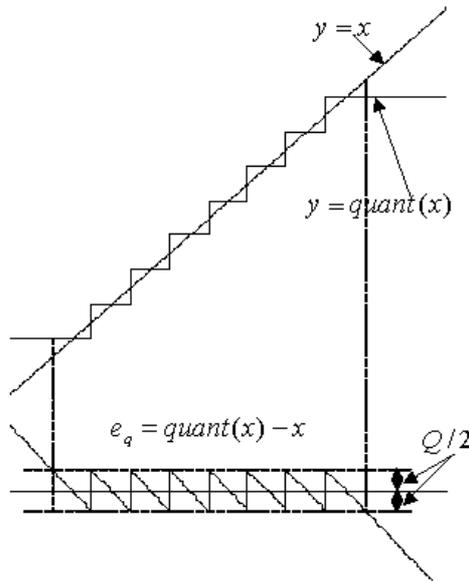
Nell'ambito della QUA bilatera, si distinguono inoltre due casi, a seconda di come avviene il passaggio della scalinata nell'origine: parliamo di **QUA senza zona morta** quando l'origine ($x=0$) è un livello di soglia, mentre invece parliamo di **QUA con zona morta** in caso contrario, come evidenziato dalla figura.

L'**errore di quantizzazione** è definito come differenza tra il segnale in uscita e quello in ingresso:

$$e_q = y - x = \text{quant}(x) - x$$

Con l'espressione **quant(x)** abbiamo indicato la *curva a scalinata* che lega l'uscita all'ingresso.

Riportando l'errore di quantizzazione in funzione del segnale x in ingresso, otteniamo il noto andamento caratteristico a dente di sega:

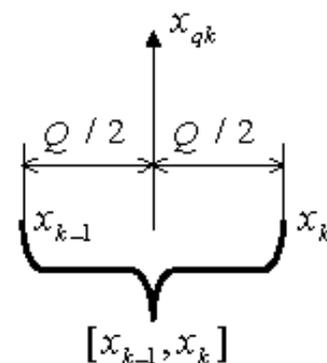


La regione in cui l'errore di quantizzazione ha modulo minore di $Q/2$ definisce il **range utile** della quantizzazione. Al di fuori inizia invece la **saturazione**.

RELAZIONI GENERALI

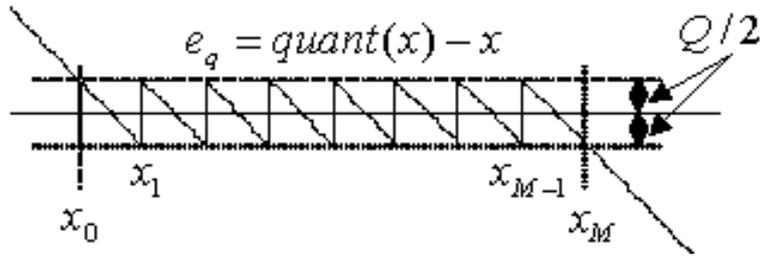
Passiamo adesso a vedere alcune semplici relazioni matematiche che caratterizzano un ADC. Per fare questo, introduciamo la seguente simbologia:

- x_{qk} ($k=1:M$): k -simo livello di uscita (asse verticale)
- x_k ($k=0:M$): k -simo livello di soglia (asse orizzontale)
- $[x_{k-1}, x_k[$: k -simo bin (asse orizzontale)



Notiamo immediatamente che il pedice “q” (che sta ovviamente per *quantizzazione*) contraddistingue le grandezze di uscita.

Inoltre, con riferimento alle grandezze in ingresso (quindi all'asse orizzontale), indichiamo con gli indici da 1 a $M-1$ i livelli di soglia reali (corrispondenti quindi ad una reale transizione in uscita). Invece, con gli indici 0 e M indichiamo invece due livelli “fittizi”, che semplicemente delimitano il range utile (quello cioè in cui il modulo dell'errore è $<Q/2$):



In primo luogo, avendo detto che usiamo una quantizzazione uniforme con intervalli di ampiezza Q , possiamo scrivere che

$$x_k - x_{k-1} = Q$$

$$x_{q,k} - x_{q,k-1} = Q$$

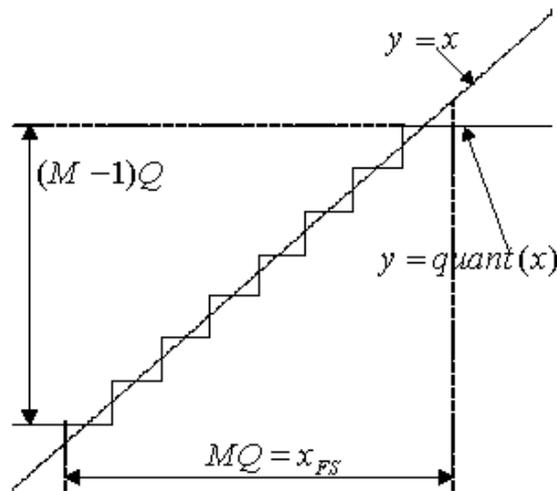
Queste due relazioni dicono dunque che, sia in ascisse (ingresso) sia in ordinate (uscita), la distanza tra un livello (di soglia o di uscita) e quello adiacente è sempre pari a Q .

Con riferimento ai livelli estremi, sia in ascisse sia in ordinate, possiamo inoltre scrivere

$$x_M - x_0 = M \cdot Q$$

$$x_{q,M} - x_{q,1} = (M-1) \cdot Q$$

Queste due relazioni evidenziano come il range di valori in ingresso ($=MQ$) sia di ampiezza superiore al range di valori in uscita ($=(M-1)Q$), come evidenziato nella figura seguente:



Per quanto riguarda l'ingresso, il prodotto $M \cdot Q$ rappresenta la massima grandezza analogica applicabile, ossia il **valore di fondo scala** dello strumento:

$$x_{FS} = M \cdot Q = 2^n \cdot Q$$

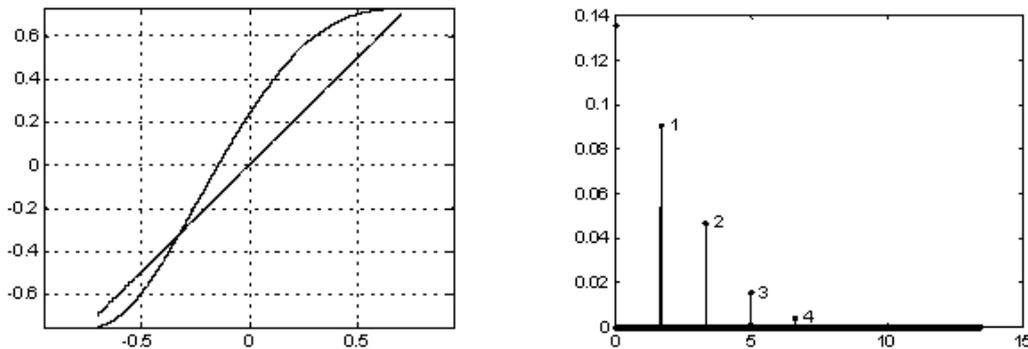
A parità di Q , è evidente che tale fondo scala dipende dal numero di bit del convertitore.

ERRORE DI QUANTIZZAZIONE

Concentriamoci adesso sull'errore di quantizzazione. Dobbiamo sostanzialmente capire come varia un segnale che viene quantizzato.

A rigore, la quantizzazione è una **distorsione non lineare** del segnale in ingresso e l'errore di quantizzazione è di tipo sistematico (in quanto è determinato univocamente dal valore dell'ingresso, per cui è sempre lo stesso a parità di ingresso). *L'effetto di una distorsione non lineare è in generale la comparsa di armoniche spurie nello spettro del segnale in ingresso.* Quando la distorsione è "dolce" (caso tipico), queste armoniche sono in numero limitato, con un effetto caratteristico sullo spettro.

Per comprendere questi concetti, facciamo riferimento alla figura seguente:



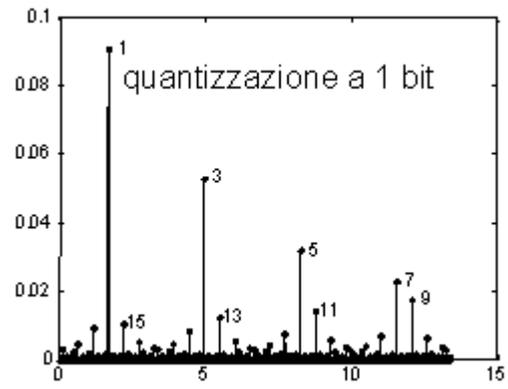
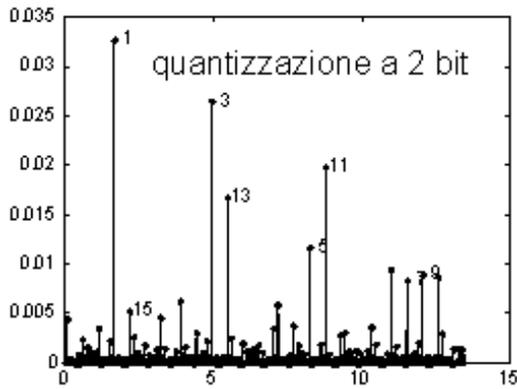
Nella figura di sinistra vengono illustrate due caratteristiche ingresso-uscita, una di tipo lineare (di equazione $y=x$) ed una di tipo non lineare, che indichiamo con $y=nl(x)$. Nella figura di destra viene invece visualizzato lo spettro (in termini discreti, cioè ottenuto tramite una FFT) del segnale che si ottiene in uscita da un sistema avente $y=nl(x)$ come caratteristica ed al cui ingresso è stata mandata una sinusoide:

- se il sistema fosse stato lineare, in uscita avremmo ottenuto ancora una sinusoide, con ampiezza e fase eventualmente diverse rispetto all'ingresso ma sicuramente alla stessa frequenza dell'ingresso; lo spettro dell'uscita sarebbe stato quindi un'unica riga (quella contrassegnata in figura con **1**), in corrispondenza della frequenza posta in ingresso;
- al contrario, la **non linearità** del sistema genera, a fronte di un'unica frequenza in ingresso, un insieme di frequenze, in cui distinguiamo la **fondamentale** e le varie **armoniche**; essendo la linearità comunque non troppo spinta (non linearità dolce), le armoniche sono poche e di ampiezza rapidamente decrescente, come appunto evidenziato in figura.

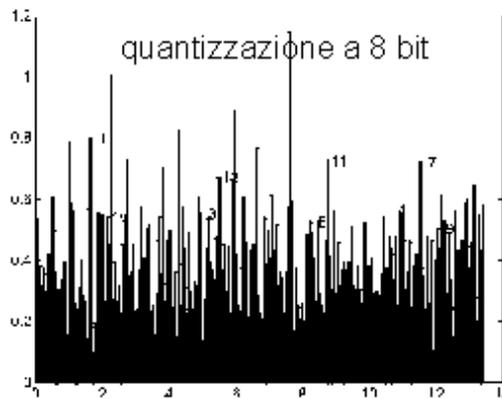
Il problema della quantizzazione è che si tratta di una distorsione con derivata prima discontinua e "granulare" (cioè con centinaia o migliaia di discontinuità). Ciò comporta la comparsa di un enorme numero di armoniche di ampiezza simile, il che rappresenta un problema, in quanto esse, per il fenomeno dell' *aliasing*, riempiono l'intera banda delimitata dalla frequenza di folding.

Si può verificare che la posizione (e quindi la distinguibilità) delle armoniche dipende dalla risoluzione:

- quando la risoluzione è estremamente bassa (ad esempio nei casi di 1 bit o 2 bit, che per la verità non sono di utilità pratica), le armoniche risultano ancora distinguibili:



- quando invece la risoluzione è più alta (i valori normali sono ad esempio di 8 bit per gli oscilloscopi digitali e di 12-14 bit per gli analizzatori di spettro), le armoniche si sovrappongono al punto di creare un "tappeto di rumore" omogeneo:

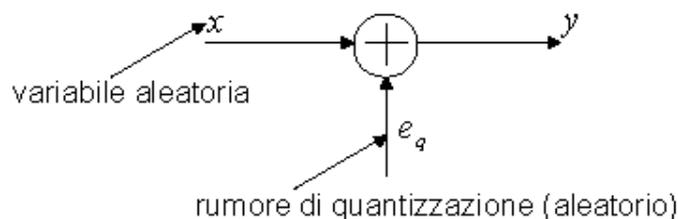


CARATTERISTICHE DEL RUMORE DI QUANTIZZAZIONE

L'errore di quantizzazione ha *caratteristiche spettrali* del tutto analoghe al rumore e si parla perciò di **rumore di quantizzazione**.

Allora, sappiamo bene che, quando si ha a che fare con del rumore, occorre sostanzialmente determinare la sua densità di probabilità (in modo da conoscere media e varianza) e la sua densità spettrale di potenza (in modo da valutare il peso di tale rumore in corrispondenza delle frequenze di interesse).

A queste domande dà una risposta rigorosa la **teoria della quantizzazione** (sviluppata negli anni '50 da Widrow e perfezionata successivamente da Oppenheim, Sripad e Snider, e altri). Questa teoria ha molte analogie con quella del campionamento e considera l'ingresso (e conseguentemente uscita e rumore di quantizzazione) come una variabile aleatoria:



Questa schematizzazione spiega evidentemente perché si parla di **modello additivo** della quantizzazione:

$$y = x + e_q$$

Le grandezze fondamentali da considerare, per quanto riguarda l'ingresso, sono la densità di probabilità e la densità spettrale di potenza dell'ingresso, ipotizzando a priori che questo sia un processo casuale stazionario (discreto).

Senza entrare nei dettagli della teoria della quantizzazione, è possibile affermare quanto segue: **qualunque ingresso che vari con ragionevole velocità, coprendo almeno alcuni bin di quantizzazione, dà luogo a un rumore di quantizzazione che risulta, con ottima approssimazione, a distribuzione uniforme, bianco e incorrelato con l'ingresso.**

Ad esempio, un ingresso gaussiano con deviazione standard pari a Q e con correlazione del 99% tra campioni successivi dà luogo a campioni di rumore di quantizzazione a distribuzione praticamente uniforme e con appena l'1% di correlazione.

Sappiamo allora che, nell'ipotesi di distribuzione uniforme nell'intervallo $[-Q/2, Q/2]$, la varianza (e cioè la potenza) del rumore di quantizzazione è $Q^2/12$.

Caso particolare: ingresso uniformemente distribuito

E' opportuno notare che, in presenza di un ingresso distribuito uniformemente su tutto il range utile, valgono alcune interessanti relazioni:

- varianza del segnale: $\sigma_X^2 = \int_{-x_{FS}/2}^{x_{FS}/2} x^2 p(x) dx = \frac{1}{x_{FS}} \int_{-x_{FS}/2}^{x_{FS}/2} x^2 dx = \frac{x_{FS}^2}{12} = \frac{(M \cdot Q)^2}{12}$

- rapporto segnale-rumore (in unità naturali): $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2} = \frac{(M \cdot Q)^2}{\frac{Q^2}{12}} = M^2$

- numero di bit del quantizzatore: $n = \log_2 M = \frac{1}{2} \log_2 M^2 = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2}$

- rapporto segnale-rumore (in dB):

$$SQNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2} = 10 \log_{10} M^2 = 20 \log_{10} M = 20 \frac{\log_2 M}{\log_2 10} = 6.02 \cdot n$$

Abbiamo cioè trovato che il rapporto segnale/rumore di un ADC, al cui ingresso è applicato un segnale x uniformemente distribuito nell'intervallo $[-x_{FS}/2, x_{FS}/2]$, è pari a $6.02 \cdot n$, ossia a quello che prende il nome di **range dinamico** dell'ADC.

QUANTIZZAZIONE REALE

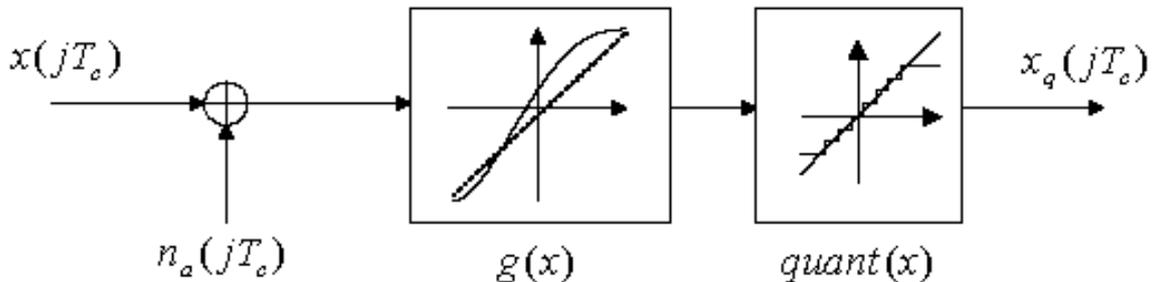
Adesso, così come abbiamo fatto per il campionamento, dobbiamo considerare il problema dello scostamento dall'idealità di un quantizzatore reale (ADC).

Possiamo subito affermare che i problemi riguardano solo i livelli di soglia, i quali presentano scostamenti sistematici e scostamenti casuali dalle loro posizioni ideali:



In pratica, il problema è nel fatto che, *mentre i livelli di uscita, essendo digitali, sono sempre nelle stesse posizioni (coincidenti con quelle ideali), i livelli di soglia cambiano posizione ad ogni campione, analogamente a quello che succede agli istanti di campionamento.*

Per studiare questo fenomeno, possiamo adottare il modello matematico descritto nel seguente diagramma:



Il nodo sommatore tiene conto della trasformazione subita dal segnale nella quantizzazione reale: essa è infatti equivalente all'aggiunta di rumore gaussiano bianco $n_a(jT_c)$ (di solito di origine termica). Successivamente, sono presenti una **caratteristica statica non lineare $g(x)$** e la **caratteristica di quantizzazione ideale $quant(x)$** .

In pratica, il sistema appare come un quantizzatore i cui livelli di soglia cambiano leggermente istante per istante (a causa del rumore) e si trovano comunque mediamente in posizione diversa da quella ideale (a causa della distorsione non lineare).

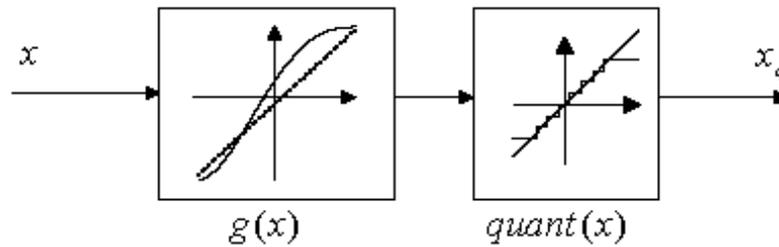
E' bene sottolineare che questo è un modello teorico, i cui blocchi cioè non sono blocchi fisici, realmente esistenti in un ADC:

- il generatore di rumore "equivalente" in ingresso tiene conto di tutti gli errori di ampiezza aleatori, compresi quelli provenienti da un eventuale stadio amplificatore rumoroso reale;
- il blocco $g(x)$ tiene conto, analogamente, di tutti gli errori di ampiezza sistematici, comprendendo sia le non linearità intrinseche dell'ADC, sia quelle di eventuali stadi amplificatori, filtro attivi, ecc..

In generale, in un sistema reale non si può rintracciare un blocco fisico corrispondente al quantizzatore “ideale”.

Errori sistematici

Cominciamo con l’analisi degli errori sistematici, il che significa semplicemente che dallo schema a blocchi generali dobbiamo eliminare l’ingresso di rumore:



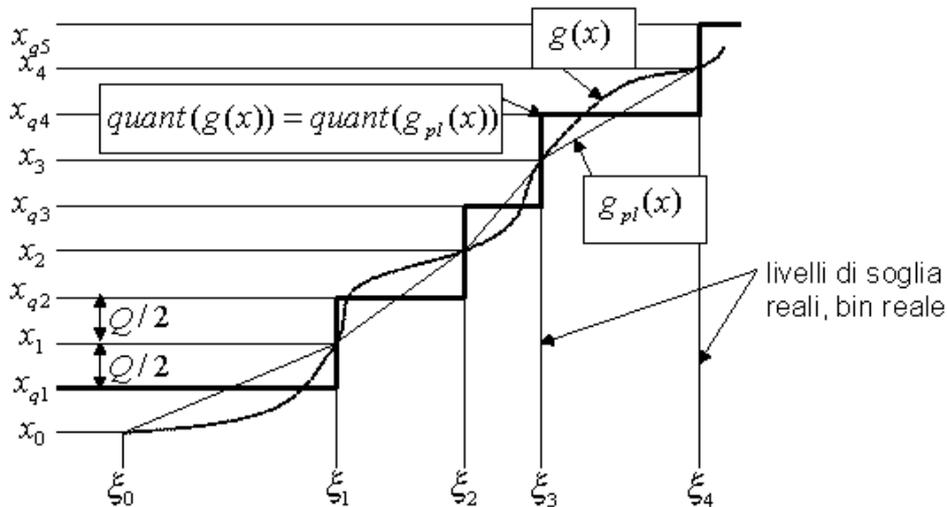
Abbiamo evidentemente che

$$x_q = \text{quant}(g(x))$$

Il sistema descritto da questo modello non è altro che un **quantizzatore uniforme non lineare**: infatti, i livelli di uscita sono equispaziati (ideali) ma i livelli di soglia, invece di essere quelli ideali ($=x_{qk}$), sono

$$\xi_k = g^{-1}(x_k)$$

Vediamo allora come si presenta la caratteristica di quantizzazione reale:



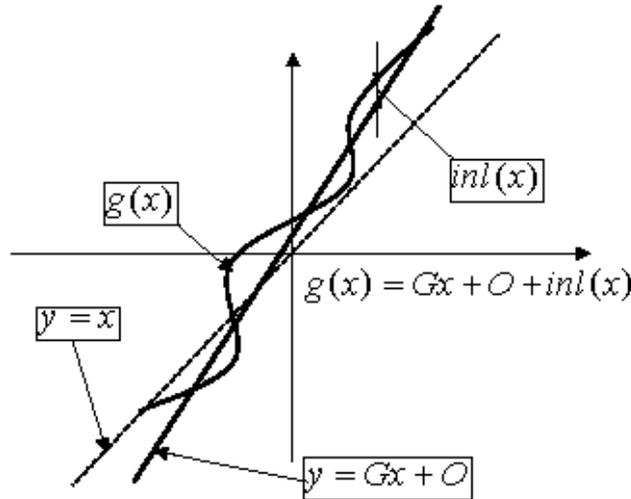
Considerare la caratteristica **quant(g(x))** equivale a considerare un quantizzatore con soglie non equispaziate.

Si noti che al posto di una $g(x)$ generica è sempre possibile considerare una opportuna funzione lineare a tratti (*piecewise linear*) che congiunge i punti (ξ_k, x_k) .

E' evidente che la nostra attenzione deve concentrarsi proprio sulla funzione $g(x)$. A tal fine, è conveniente esprimere la $g(x)$ come somma di una parte lineare (che non distorce il segnale) e una parte non lineare, detta **nonlinearità integrale** (*integral nonlinearity*):

$$g(x) = G \cdot x + O + \text{inl}(x)$$

La figura seguente evidenzia il significato (peraltro identico a quello visto per il campionamento reale) dei tre contributi appena citati:



Bisogna notare che i parametri **G (guadagno)** e **O (offset)** non sono univocamente individuati dalla $g(x)$. Infatti, è opportuno scegliere G ed O per ottenere i seguenti obbiettivi:

- 1) minimizzare il massimo modulo di $\text{inl}(x)$;
- 2) congiungere gli estremi di $g(x)$;
- 3) minimizzare lo scarto quadratico medio tra $g(x)$ e $Gx+O$

Nonlinearità integrale

In base a quanto detto, la nonlinearità integrale è quindi la differenza tra la curva $g(x)$ e la cosiddetta retta di riferimento, data da $Gx+O$:

$$\text{inl}(x) = g(x) - (G \cdot x + O)$$

Tuttavia, noi non conosciamo tutta la $g(x)$, ma solo i valori da essa assunti nei punti ξ_k , dove infatti sappiamo che risulta

$$x_k = g(\xi_k)$$

Da qui deduciamo che, in modo rigoroso, la **nonlinearità integrale**, nel caso di un ADC, è costituita solo dai seguenti $M+1$ valori discreti:

$$\text{inl}(\xi_k) = g(\xi_k) - (G \cdot \xi_k + O) = x_k - (G \cdot \xi_k + O) \quad k = 0 \dots M$$

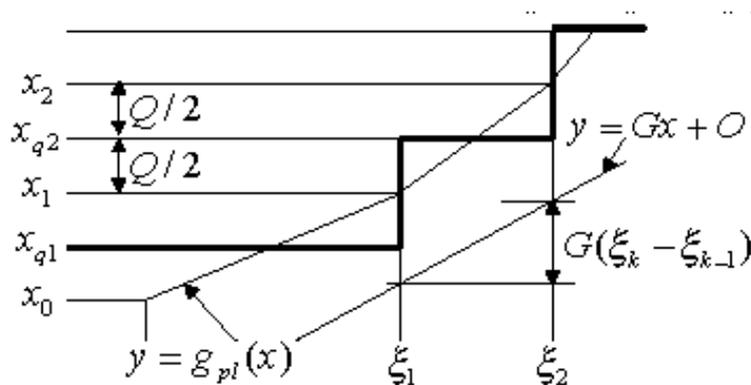
Quindi, la *nonlinearità integrale* è la differenza tra livelli di soglia ideali x_k e livelli di soglia reali ξ_k (dopo correzione di guadagno e offset).

Nonlinearità differenziale

Oltre alla *nonlinearità integrale*, si specifica spesso la cosiddetta **nonlinearità differenziale**, definita come segue:

$$dnl_k = Q - G \cdot Q_k = (x_k - x_{k-1}) - G(\xi_k - \xi_{k-1})$$

Si tratta dunque della *differenza tra la larghezza reale e quella ideale del k-simo bin*, dopo una correzione di guadagno:



In alternativa, si vede che la nonlinearità differenziale è anche interpretabile come la differenza tra la pendenza della curva $g(x)$ e la pendenza “teorica” G , moltiplicata per l’ampiezza reale Q_k del bin.

Esiste inoltre un preciso legame tra nonlinearità integrale e differenziale: infatti, avendo detto che la nonlinearità integrale è

$$inl(\xi_k) = x_k - (G \cdot \xi_k + O)$$

è evidente che

$$inl_k - inl_{k-1} = [x_k - (G \cdot \xi_k + O)] - [x_{k-1} - (G \cdot \xi_{k-1} + O)] = dnl_k$$

La inl e la dnl normalmente sono definite, per un ADC, facendo riferimento ai livelli di soglia reali (medi). Esse però possono essere definite anche per uno strumento analogico o un amplificatore di misura. In questo caso si tratta teoricamente di quantità continue:

$$inl(x) = g(x) - (G \cdot x + O)$$

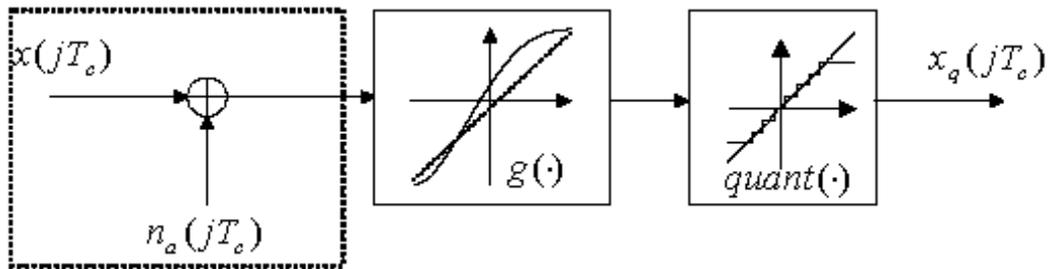
$$dnl(x) = \left(\frac{dg(x)}{dx} - G \right) dx$$

Tuttavia, nella pratica anche uno strumento o un amplificatore analogico sono calibrati in un numero finito di punti di misura (analoghi alle soglie discrete) e quindi si fa sempre riferimento a quantità discrete.

Errori accidentali

Dopo la descrizione degli errori sistematici in un quantizzatore, passiamo agli errori accidentali, che abbiamo visto corrispondere al rumore che si somma, in ingresso, al segnale x da quantizzare. In realtà, non c'è molto da dire: si tratta sempre di un normale rumore analogico gaussiano a media nulla e di varianza specificata dal costruttore (in termini di "tensione rms", cioè di valore efficace di tensione).

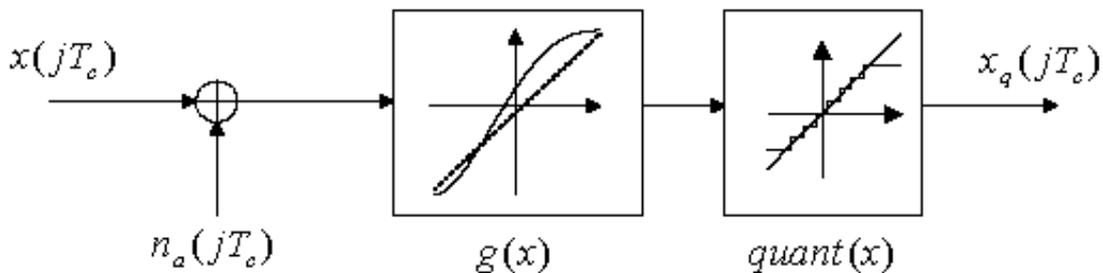
Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza di rumore, esso di solito è bianco nel campo di frequenze di impiego dello strumento, essendo per lo più di origine termica. Comunque può anche essere colorato, ad esempio se lo strumento impiega internamente dei filtri, ecc.



Riepilogo: quantizzazione ideale su segnale in ingresso distorto

A questo punto, non rimane che valutare quale sia l'effetto sul segnale degli errori nella quantizzazione. Così come abbiamo fatto per il campionamento reale, possiamo dire che la quantizzazione reale equivale alla quantizzazione ideale effettuata su un segnale rumoroso e distorto.

Riprendiamo infatti lo schema generale della quantizzazione reale:



Abbiamo che

$$x_q = \text{quant}[g(x(t) + n_a(t))]$$

Il segnale su cui avviene quindi la quantizzazione ideale è

$$y(t) = g(x(t) + n_a(t))$$

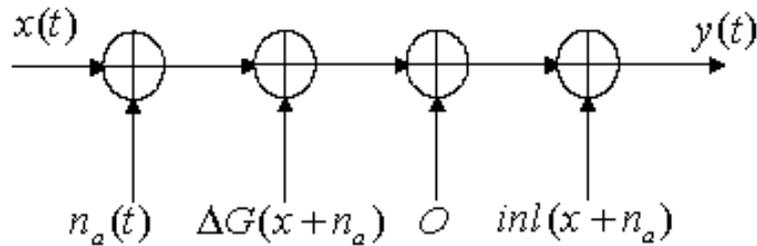
D'altra parte, abbiamo detto che

$$g(x) = G \cdot x + O + \text{inl}(x)$$

per cui scriviamo che

$$y(t) = G \cdot (x(t) + n_a(t)) + O + \text{inl}(x(t) + n_a(t)) = G \cdot x(t) + G \cdot n_a(t) + O + \text{inl}(x(t) + n_a(t))$$

Questa espressione corrisponde al seguente diagramma a blocchi:



dove abbiamo posto $\Delta G = G - 1$.

Abbiamo infatti che

$$y(t) = x(t) + n_a(t) + \Delta G \cdot (x(t) + n_a(t)) + O + inl(x(t) + n_a(t))$$

Tuttavia, possiamo ricondurci ad una espressione più semplice effettuando due approssimazioni del tutto lecite:

- dato che G è molto prossimo al valore 1, possiamo sicuramente trascurare il termine $\Delta G \cdot n_a(t)$ rispetto ad $n_a(t)$;
- in secondo luogo, ai fini della incertezza (che è il nostro obiettivo finale), possiamo sicuramente confondere $inl(x(t) + n_a(t))$ semplicemente con $inl(x(t))$.

Sotto queste ipotesi, la nostra espressione diviene evidentemente

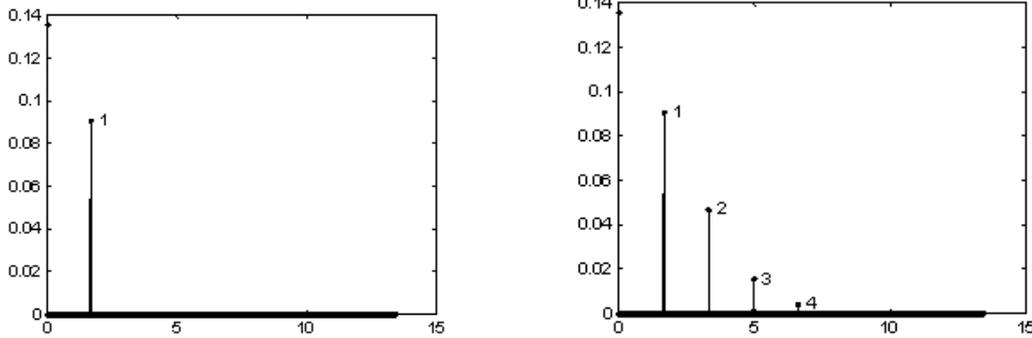
$$y(t) = G \cdot x(t) + O + inl(x(t)) + n_a(t)$$

Quindi, rispetto al segnale ideale $x(t)$ su cui compiere la quantizzazione ideale, abbiamo ottenuto il segnale $y(t)$ che risulta distorto e rumoroso. Su questo segnale andremo poi a compiere una quantizzazione ideale⁷.

L'effetto *distorcente* dei termini $Gx(t)$ ed O è ovviamente una trasformazione lineare del segnale: ciò significa, nel dominio della frequenza, che lo spettro di $x(t)$ viene semplicemente moltiplicato per una costante e gli viene inoltre aggiunta una componente continua. Non abbiamo quindi alcuna distorsione non lineare.

Al contrario, l'effetto della non linearità integrale è la *distorsione non lineare* del segnale, che abbiamo già visto consistente nell'aggiunta di armoniche originariamente inesistenti:

⁷ E' importante tenere presente che la quantizzazione ideale produce intrinsecamente un errore, che abbiamo definito *rumore di quantizzazione*, che è ineliminabile. Quindi, dobbiamo ricordarci che, in questo caso, il termine "ideale" non è assolutamente sinonimo di "mancanza di errori".



Un'altra cosa importante da notare riguarda il rumore analogico $n_a(t)$ (che avrà una determinata potenza σ_{na}^2): infatti, a questo rumore si sommerà anche il rumore $n_q(t)$ intrinseco nel processo di quantizzazione; essendo tali rumori incorrelati tra loro, avremo una somma in potenza, ossia avremo un rumore complessivo con potenza

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_{na}^2 + \sigma_q^2$$

Naturalmente, una volta individuato $y(t)$, possiamo valutare la differenza rispetto al segnale $x(t)$ su cui idealmente vorremmo effettuare la quantizzazione ideale:

$$e(t) = y(t) - x(t) = (G - 1) \cdot x(t) + O + \text{inl}(x(t)) + n_a(t) = \Delta G \cdot x(t) + O + \text{inl}(x(t)) + n_a(t)$$

CONCLUSIONI

A questo punto, possiamo mettere insieme quanto trovato sia sul campionamento reale sia sulla quantizzazione reale: possiamo infatti dire che, in uno strumento reale, gli errori di ampiezza (quantizzazione) sono presenti simultaneamente a quelli di tempo (campionamento). Come abbiamo visto, entrambi i tipi di errori comportano sia trasformazioni lineari (G , O in ampiezza, S , D nel tempo) sia distorsione e rumore (inl , n_a in ampiezza, tbd , nt nel tempo).

Una figura di merito spesso usata per dare una quantificazione globale degli errori in uno strumento digitale è il cosiddetto **numero di bit effettivi**:

$$n_{eq} = \frac{1}{2} \log_2 \text{SQNR}_{tot} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{tot}^2}$$

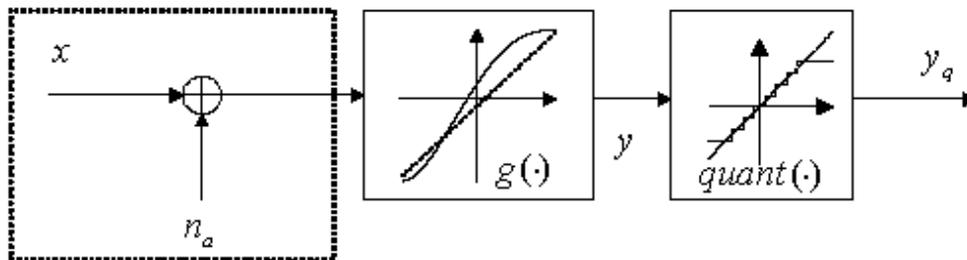
L'errore totale σ_{tot}^2 è valutato con un ingresso sinusoidale e comprende solo distorsione e rumore, senza contare invece trasformazioni lineari.

Calcolo dell'incertezza negli strumenti digitali

INTRODUZIONE: ERRORI ED INCERTEZZE

Dobbiamo adesso mettere insieme quanto detto nei paragrafi precedenti per capire come calcolare l'incertezza su una misura ottenuta tramite uno strumento digitale (ad esempio un oscilloscopio, un multimetro o un analizzatore di spettro).

Il punto di partenza è ancora una volta lo schema a blocchi generale della **quantizzazione reale**:



Abbiamo visto che, in questo schema, $x(t)$ è il segnale analogico da quantizzare; esso risulta sommato ad un rumore analogico $n_a(t)$ e, insieme ad esso, passa prima attraverso una caratteristica non lineare $g(\cdot)$, che tiene conto degli errori di guadagno, di offset e di linearità, e poi attraverso la curva di quantizzazione ideale.

Possiamo dunque riprendere quanto visto nei precedenti paragrafi e scrivere che la grandezza y in uscita dal blocco con caratteristica $g(\cdot)$ è

$$y(t) = g(x(t) + n_a(t)) \cong g(x(t)) + n_a(t) = G \cdot x(t) + O + \text{inl}(x(t)) + n_a(t)$$

Questa grandezza viene dunque sottoposta alla quantizzazione ideale: sappiamo allora che l'uscita del quantizzatore reale è ancora $y(t)$, cui però è sovrapposto l'inevitabile rumore di quantizzazione (inevitabile in quanto intrinseco nel processo di quantizzazione). Possiamo allora scrivere che la **grandezza quantizzata** finale è

$$y_q(t) = y(t) + e_q(y(t)) \cong y(t) + e_q(g(x)) \cong g(x(t)) + n_a(t) = G \cdot x(t) + O + \text{inl}(x(t)) + n_a(t) + e_q(g(x))$$

Abbiamo dunque ottenuto che la grandezza quantizzata in uscita è la somma di ben 5 termini:

$$y_q = G \cdot x + O + \text{inl}(x) + n_a + e_q(g(x))$$

Naturalmente, da qui possiamo ricavare l'errore dovuto al processo di quantizzazione nel suo complesso:

$$e(y_q) = y_q - x = \Delta G \cdot x + O + \text{inl}(x) + n_a + e_q(g(x))$$

dove ricordiamo che $\Delta G = G - 1$ e dove la simbologia $e(y_q)$ indica appunto l'errore sulla quantità y_q .

Ci siamo dunque ricondotti ad una espressione generale dell'errore, nella quale si evidenzia che esso è dovuto all'errore di guadagno ΔGx (proporzionale al valore x del misurando), all'errore di

offset (indipendente da x), dall'errore di nonlinearity integrale (dipendente da x), al rumore analogico (indipendente da x) ed all'errore di quantizzazione (dipendente da x). Abbiamo dunque termini sia sistematici sia accidentali ed abbiamo inoltre visto in precedenza quale sia l'effetto di tali errori sul segnale in ingresso (in particolare sul suo spettro).

Quindi, ogni misura compiuta tramite uno strumento digitale (nel quale perciò ci sia stata una procedura di conversione analogico@digitale) è soggetta (ovviamente in ampiezza) a questo errore.

Naturalmente, però, sappiamo che gli errori non sono mai conoscibili con precisione, ma sono soltanto maggiorabili (nel loro valore assoluto) tramite le rispettive incertezze. In questo caso, quindi, le incertezze da considerare sono le seguenti:

$$U_G: \text{incertezza di guadagno} \rightarrow |\Delta G| \leq U_G$$

$$U_O: \text{incertezza di offset} \rightarrow |O| \leq U_O$$

$$U_{inl}: \text{incertezza di nonlinearity integrale} \rightarrow |inl(x)| \leq U_{inl}$$

$$U_q: \text{incertezza di quantizzazione} \rightarrow |e_q(g(x))| \leq U_q$$

Naturalmente, allo stato attuale, siamo in grado di dire quanto vale solo l'incertezza di quantizzazione: infatti, sappiamo bene che l'errore di quantizzazione, pur nella sua natura accidentale (dipende dal segnale), è sicuramente compreso nell'intervallo $[-Q/2, Q/2]$, dove Q è il passo di quantizzazione (indicato spesso con la sigla **LSB**, ossia *Last Significant Bit*), per cui possiamo senz'altro scrivere che

$$U_q = \frac{Q}{2} \longrightarrow |e_q(g(x))| \leq \frac{Q}{2}$$

Si tratta ora di valutare gli altri termini. Lasciamo inoltre da parte, per il momento, il rumore analogico $n_a(t)$, ossia supponiamo, per i prossimi discorsi, che esso sia assente, per cui possiamo ritenere che l'errore complessivo dovuto alla quantizzazione reale sia

$$e(y_q) \cong \Delta G \cdot x + O + inl(x) + e_q(g(x))$$

INCERTEZZA COMPLESSIVA SU UNA MISURA DIRETTA

Se conosciamo le incertezze relative a tutti i contributi sull'errore complessivo e_q , siamo facilmente in grado di calcolare l'incertezza complessiva di misura. Infatti, calcolando il modulo di e_q ed applicando successivamente la disuguaglianza triangolare (che è semplicemente una conseguenza dell'ipotesi di caso peggiore), scriviamo che

$$|e(y_q)| = |\Delta G \cdot x + O + inl(x) + e_q(g(x))| \leq |\Delta G| \cdot |x| + |O| + |inl(x)| + |e_q(g(x))|$$

Dato che compaiono adesso i valori assoluti dei vari errori e dato che conosciamo le rispettive maggiorazioni di tali errori (date appunto dalle incertezze), abbiamo che

$$|e(y_q)| \leq U_G \cdot |x| + U_O + U_{inl} + U_q$$

Questa formula ha il solo problema che richiede la conoscenza del valore vero x del misurando. In realtà, però, sappiamo che, nella maggior parte dei casi, tale valore è sicuramente approssimabile con il valore effettivamente misurato y_q , per cui concludiamo che

$$\boxed{|e(y_q)| \leq U_G \cdot |y_q| + U_O + U_{\text{int}} + U_q}$$

Avendo ottenuto una maggiorazione del valore assoluto dell'errore su y_q , deduciamo che tale maggiorazione, per definizione, è l'**incertezza su y_q** .

Ovviamente, si tratta dell'incertezza sulla misura diretta di y_q . Ha senso allora chiederci cosa succede nel caso di misura indiretta e ne parliamo nel prossimo paragrafo.

INCERTEZZA COMPLESSIVA SU UNA MISURA INDIRETTA

Cominciamo col ricordare che una misura è indiretta quando è ottenuta tramite una funzione di due o più misure dirette: se il misurando è $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, la misura indiretta sarà

$$y_q = f(x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{Nq})$$

dove $(x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{Nq})$ sono misure dirette, soggette perciò ciascuna all'incertezza ottenuta nel precedente paragrafo.

L'errore sulla misura indiretta è ovviamente

$$e(y_q) = y - y_q = y - f(x_{1q}, x_{2q}, \dots, x_{Nq})$$

Possiamo allora usare la nota regola di propagazione delle incertezze, in base alla quale possiamo scrivere che

$$U(y_q) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot U(x_{1q}) + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot U(x_{2q}) + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_N} \right| \cdot U(x_{Nq})$$

Questa regola, di validità generale, non è opportuna in questa situazione, in quanto potrebbe darci una maggiorazione eccessiva dell'errore di quantizzazione: infatti, se per esempio compiamo le misure indirette tutte con lo stesso strumento, regolato sulla stessa portata, sicuramente alcuni termini di errore (tipicamente l'offset ed il guadagno) saranno tra loro correlati e potremo perciò tener conto di tale correlazione per ottenere una maggiorazione più stretta dell'errore. Al contrario, la formula generale ricavata poco fa non tiene conto in alcun modo di tale correlazione.

Ad ogni modo, anziché fare discorsi di natura generale, conviene far riferimento ad alcuni casi concreti, cosa che sarà fatta nei prossimi paragrafi.

Misura indiretta per differenza

Consideriamo dapprima una misura indiretta y_q ottenuta come differenza di due misure dirette x_{q1} e x_{q2} : in linea generale, abbiamo che

$$y = x_2 - x_1$$

$$y_q = x_{q2} - x_{q1} \longrightarrow e(y_q) = y - y_q = (x_2 - x_1) - (x_{q2} - x_{q1}) = (x_2 - x_{q2}) - (x_1 - x_{q1}) = e(x_{q2}) - e(x_{q1})$$

Come già sapevamo, l'errore sulla misura y_q è dato dalla differenza degli errori sulle misure dirette. Usando allora, per ciascuno di tali errori, l'espressione generale

$$e(x_q) = \Delta G \cdot x_q + O + \text{inl}(x_q) + e_q(g(x_q))$$

otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned} e(y_q) &= e(x_{q2}) - e(x_{q1}) = [\Delta G \cdot x_{q2} + O + \text{inl}(x_{q2}) + e_q(g(x_{q2}))] - [\Delta G \cdot x_{q1} + O + \text{inl}(x_{q1}) + e_q(g(x_{q1}))] = \\ &= \Delta G \cdot (x_{q2} - x_{q1}) + (\text{inl}(x_{q2}) - \text{inl}(x_{q1})) + (e_q(g(x_{q2})) - e_q(g(x_{q1}))) \end{aligned}$$

Come si nota immediatamente, è scomparso l'errore di offset, che è comune alle due misure dirette in quanto si è supposto che esse siano state compiute con lo stesso strumento, regolato sulla stessa portata. Inoltre, è comune alle due misure anche il valore di ΔG (per lo stesso motivo di prima).

A questo punto, usando nuovamente la disuguaglianza triangolare sul modulo di $e(y_q)$, otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned} |e(y_q)| &= |\Delta G \cdot (x_{q2} - x_{q1}) + (\text{inl}(x_{q2}) - \text{inl}(x_{q1})) + (e_q(g(x_{q2})) - e_q(g(x_{q1})))| \leq \\ &\leq |\Delta G \cdot (x_{q2} - x_{q1})| + |\text{inl}(x_{q2}) - \text{inl}(x_{q1})| + |e_q(g(x_{q2})) - e_q(g(x_{q1}))| \leq \\ &\leq |\Delta G| \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + |\text{inl}(x_{q2})| + |\text{inl}(x_{q1})| + |e_q(g(x_{q2}))| + |e_q(g(x_{q1}))| \end{aligned}$$

Questa relazione ci è molto utile in quanto compaiono in essa tutte quantità che sappiamo migliorare (in base a quanto visto nei paragrafi precedenti): abbiamo dunque che

$$|e(y_q)| \leq U_G \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + U_{\text{inl}} + U_{\text{inl}} + U_q + U_q = U_G \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + 2U_{\text{inl}} + 2U_q$$

Ricordando infine che $U_q = Q/2$ sempre, possiamo concludere che

$$\boxed{|e(y_q)| \leq U_G \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + 2U_{\text{inl}} + Q}$$

Questa è dunque l'incertezza su una misura indiretta ottenuta come differenza tra due misure dirette. Per comprendere la bontà di questa valutazione (ossia il fatto che si tratta della maggiorazione più stretta possibile che possiamo ottenere per il modulo dell'errore), andiamo a vedere quale incertezza viene fuori applicando la formula generale per le misure indirette, che in questo caso (di 2 sole grandezze di ingresso x_1 ed x_2) si riduce a

$$U(y_q) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot U(x_{1q}) + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot U(x_{2q})$$

Dato che $y = f(x_1, x_2) = x_2 - x_1$, abbiamo che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| = -1 \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| = 1$$

e quindi scriviamo che

$$\begin{aligned} U(y_q) &= U(x_{1q}) + U(x_{2q}) = (U_G \cdot |x_{q1}| + U_O + U_{inl} + U_q) + (U_G \cdot |x_{q2}| + U_O + U_{inl} + U_q) = \\ &= U_G \cdot (|x_{q1}| + |x_{q2}|) + 2U_O + 2U_{inl} + 2U_q = U_G \cdot (|x_{q1}| + |x_{q2}|) + 2U_O + 2U_{inl} + Q \end{aligned}$$

La differenza rispetto a prima è evidente: compare infatti qui un termine aggiuntivo $2U_O$ (che sicuramente invece si può eliminare per i motivi visti prima, ossia per il fatto che l'offset, essendo comune ad entrambe le misure dirette, sicuramente si compensa quando facciamo la differenza) e notiamo inoltre che U_G non moltiplica $|x_{q2} - x_{q1}|$, bensì $(|x_{q1}| + |x_{q2}|)$. La maggiorazione così ottenuta è dunque senz'altro meno stretta della precedente, che quindi è quella da usare.

Osservazione: incertezza nonlinearietà differenziale

Abbiamo in precedenza introdotto il concetto di nonlinearietà differenziale, così definita:

$$dnl_k = Q - G \cdot Q_k = (x_k - x_{k-1}) - G(\xi_k - \xi_{k-1})$$

Abbiamo anche visto che essa è legata alla nonlinearietà integrale $inl(\xi_k) = x_k - (G \cdot \xi_k + O)$ dalla relazione

$$inl_k - inl_{k-1} = [x_k - (G \cdot \xi_k + O)] - [x_{k-1} - (G \cdot \xi_{k-1} + O)] = dnl_k$$

Si definisce allora **incertezza di nonlinearietà differenziale** la quantità U_{dnl} tale che

$$|dnl_k| \leq U_{dnl} \quad \forall k$$

La quantità U_{dnl} ha un significato molto importante: infatti, se venisse specificato, nei certificati che accompagnano lo strumento di misura in questione, che **$U_{dnl} < 1 \text{ LSB}$** (ossia che l'incertezza di nonlinearietà differenziale è inferiore al passo di quantizzazione), potremmo immediatamente dedurre che la caratteristica di quantizzazione è monotona crescente ed è priva di codici mancanti (**missing code**).

Non solo, ma la U_{dnl} può aiutarci a trovare una maggiorazione ancora più stretta dell'errore. Infatti, mettiamoci nel caso particolare in cui le due misure dirette, di cui facciamo poi la differenza, coincidano con due livelli di uscita del quantizzatore: ad esempio, se indichiamo ancora con x_1 e x_2 le due misure dirette e con x_{uk} il generico livello di uscita del quantizzatore, supponiamo che

$$\begin{aligned} x_{q2} &= x_{un} && \text{n-simo livello di uscita} \\ x_{q1} &= x_{um} && \text{m-simo livello di uscita} \end{aligned}$$

In base a come funziona il processo di quantizzazione, sappiamo che, con queste posizioni, i valori veri x_1 ed x_2 dei due misurandi cadono nei seguenti intervalli:

$$\begin{aligned} x_1 &\in [\xi_{n-1}, \xi_n] \\ x_2 &\in [\xi_{m-1}, \xi_m] \end{aligned}$$

Se allora facciamo la differenza tra x_2 ed x_1 , otteniamo un valore $y=x_2-x_1$ che cade nel seguente intervallo:

$$\begin{cases} \xi_{m-1} \leq x_2 \leq \xi_m \\ \xi_{n-1} \leq x_1 \leq \xi_n \end{cases} \longrightarrow \xi_{n-1} - \xi_m \leq x_2 - x_1 \leq \xi_n - \xi_{m-1}$$

Vediamo allora di esplicitare meglio gli estremi dell'intervallo appena ottenuto: ad esempio, per l'estremo inferiore possiamo scrivere che

$$\xi_{n-1} - \xi_m = (\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) + (\xi_{n-2} - \xi_{n-3}) + \dots + (\xi_{m+1} - \xi_m) = \sum_{k=m+1}^{n-1} Q_k$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che la quantizzazione reale prevede intervalli di quantizzazione di ampiezza non necessariamente uguale (e coincidente con Q).

Sapendo inoltre che $dnl_k = Q - G \cdot Q_k$, abbiamo che $Q_k = \frac{1}{G}(Q - dnl_k)$, da cui deduciamo che

$$\xi_{n-1} - \xi_m = \frac{1}{G} \sum_{k=m+1}^{n-1} (Q - dnl_k) = \frac{1}{G} \sum_{k=m+1}^{n-1} (Q) - \frac{1}{G} \sum_{k=m+1}^{n-1} dnl_k = \frac{1}{G} (n - m - 1)Q - \frac{1}{G} \sum_{k=m+1}^{n-1} dnl_k$$

In modo del tutto analogo possiamo procedere per l'estremo superiore che contiene $y=x_2-x_1$:

$$\xi_n - \xi_{m-1} = \dots = \frac{1}{G} (n - m + 1)Q - \frac{1}{G} \sum_{k=m}^n dnl_k$$

Abbiamo dunque che

$$\frac{1}{G} (n - m - 1)Q - \frac{1}{G} \sum_{k=m+1}^{n-1} dnl_k \leq x_2 - x_1 \leq \frac{1}{G} (n - m + 1)Q - \frac{1}{G} \sum_{k=m}^n dnl_k$$

D'altra parte, possiamo anche scrivere che

$$y_q = x_{q2} - x_{q1} = x_{un} - x_{um} = Q(n - m)$$

per cui gli estremi dell'intervallo in cui è contenuto y possono essere ulteriormente semplificati:

$$\frac{y_q - Q}{G} - \frac{1}{G} \sum_{k=m+1}^{n-1} dnl_k \leq x_2 - x_1 \leq \frac{y_q + Q}{G} - \frac{1}{G} \sum_{k=m}^n dnl_k$$

Moltiplicando adesso tutti i membri di questa disuguaglianza per G , otteniamo

$$y_q - Q - \sum_{k=m+1}^{n-1} \text{dnl}_k \leq G(x_2 - x_1) \leq y_q + Q - \sum_{k=m}^n \text{dnl}_k$$

Ricordando adesso che $\Delta G = G - 1$, da cui $G = \Delta G + 1$, concludiamo che

$$y_q - Q - \sum_{k=m+1}^{n-1} \text{dnl}_k \leq (\Delta G + 1)(x_2 - x_1) \leq y_q + Q - \sum_{k=m}^n \text{dnl}_k$$

Dato che non conosciamo x_2 ed x_1 , possiamo ragionevolmente approssimare $\Delta G(x_2 - x_1) \cong \Delta G(x_{q2} - x_{q1})$, da cui

$$y_q - Q - \sum_{k=m+1}^{n-1} \text{dnl}_k \leq \Delta G(x_{q2} - x_{q1}) + (x_2 - x_1) \leq y_q + Q - \sum_{k=m}^n \text{dnl}_k$$

D'altra parte, dato che $y_q = x_{q2} - x_{q1}$, otteniamo

$$y_q - \Delta G \cdot y_q - Q - \sum_{k=m+1}^{n-1} \text{dnl}_k \leq (x_2 - x_1) \leq y_q - \Delta G \cdot y_q + Q - \sum_{k=m}^n \text{dnl}_k$$

Con questi passaggi abbiamo sostanzialmente ottenuto una fascia di incertezza in cui compare la non linearità differenziale. Naturalmente, non conoscendo i singoli valori di dnl_k (né in ampiezza né in segno) e ΔG , ma solo le loro rispettive maggiorazioni U_{dnl} e U_G dobbiamo fare qualche altro passaggio: infatti, dato che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} \text{dnl}_k \right| &\leq \sum_{k=m+1}^{n-1} |\text{dnl}_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n-1} U_{\text{dnl}} = U_{\text{dnl}}(n - m - 1) \\ \left| \sum_{k=m}^n \text{dnl}_k \right| &\leq \sum_{k=m}^n |\text{dnl}_k| \leq \sum_{k=m}^n U_{\text{dnl}} = U_{\text{dnl}}(n - m + 1) \\ |\Delta G| &\leq U_G \end{aligned}$$

abbiamo che

$$y_q - U_G \cdot y_q - Q - U_{\text{dnl}}(n - m - 1) \leq (x_2 - x_1) \leq y_q - U_G \cdot y_q + Q - U_{\text{dnl}}(n - m + 1)$$

Riscrivendo questa espressione in modo più tradizionale, possiamo affermare che

$$\boxed{x_2 - x_1 = y_q \pm [U_G \cdot y_q + Q + U_{\text{dnl}}(n - m + 1)]}$$

La fascia di incertezza (simmetrica) così ottenuta corrisponde dunque ad una maggiorazione dell'errore su y_q data da

$$|e(y_q)| = U_G \cdot y_q + Q + U_{\text{dnl}}(n - m + 1)$$

Si tratta adesso di confrontare questa maggiorazione con quella ottenuta precedentemente (in funzione della nonlinearità integrale), ossia

$$|e(y_q)| \leq U_G \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + 2U_{inl} + Q$$

Essendo valide entrambe, la nostra scelta cadrà sulla maggiorazione che risulta essere più piccola.

Questo vale almeno in linea teorica. Nella pratica, invece, capita quasi sempre che le incertezze di nonlinearità risultano uguali: ad esempio, si trova scritto che

$$U_{inl} = U_{dnl} = 1 \text{ LSB} \quad (= Q)$$

In questo caso (in cui cioè entrambe le incertezze sono date pari alla risoluzione), è evidente che risulta più stretta la maggiorazione in cui compare la nonlinearità integrale, per cui useremo quella.

Al contrario, la maggiorazione legata alla nonlinearità differenziale potrebbe rivelarsi più stretta quando risulta $U_{inl} > U_{dnl}$ e quando le due misure dirette x_{q1} e x_{q2} sono molto vicine tra loro.

Misura indiretta per rapporto

Consideriamo adesso una misura indiretta ottenuta come rapporto tra misure dirette: abbiamo intanto che

$$y = \frac{x_2}{x_1}$$

$$y_q = \frac{x_{q2}}{x_{q1}} \longrightarrow e(y_q) = y - y_q = \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_{q2}}{x_{q1}} = \frac{x_2 x_{q1} - x_{q2} x_1}{x_1 \cdot x_{q1}}$$

Calcolando invece l'errore relativo sulla base della formula generale vista a suo tempo, abbiamo quanto segue:

$$e_{y_q} = \frac{e(y_q)}{y_q} \cong \frac{x_{q1}}{y_q} \frac{\partial f}{\partial x_1} e_{x_{q1}} + \frac{x_{q2}}{y_q} \frac{\partial f}{\partial x_2} e_{x_{q2}} = e_{x_{q2}} - e_{x_{q1}} = \frac{e(x_{q2})}{x_{q2}} - \frac{e(x_{q1})}{x_{q1}}$$

Abbiamo cioè trovato (come d'altra parte già sapevamo) che gli errori relativi si sottraggono. Sostituendo al posto di $e(x_{q2})$ e $e(x_{q1})$ le rispettive espressioni, otteniamo

$$\frac{e(y_q)}{y_q} = \frac{\Delta G \cdot x_{q2} + O + \text{inl}(x_{q2}) + e_q(g(x_{q2}))}{x_{q2}} - \frac{\Delta G \cdot x_{q1} + O + \text{inl}(x_{q1}) + e_q(g(x_{q1}))}{x_{q1}} =$$

$$= O \left(\frac{1}{x_{q2}} - \frac{1}{x_{q1}} \right) + \left(\frac{\text{inl}(x_{q2})}{x_{q2}} - \frac{\text{inl}(x_{q1})}{x_{q1}} \right) + \left(\frac{e_q(g(x_{q2}))}{x_{q2}} - \frac{e_q(g(x_{q1}))}{x_{q1}} \right)$$

In questo caso, quindi, come si vede, è scomparso l'errore di guadagno (così come nella misura indiretta per differenza era scomparso l'errore di offset).

Se adesso applichiamo la disuguaglianza triangolare al modulo dell'errore relativo, otteniamo

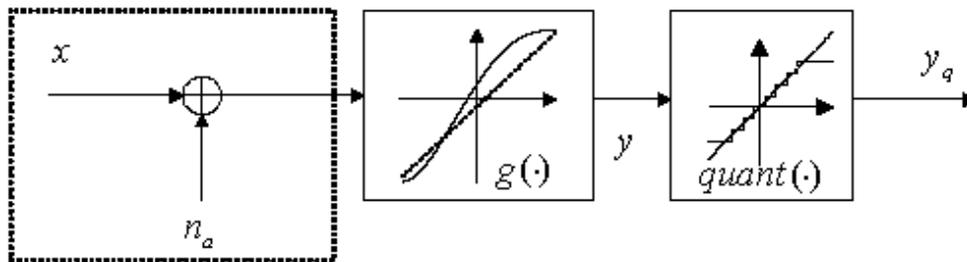
$$\begin{aligned} \left| \frac{e(y_q)}{y_q} \right| &= \left| O \left(\frac{1}{x_{q2}} - \frac{1}{x_{q1}} \right) + \left(\frac{\text{inl}(x_{q2})}{x_{q2}} - \frac{\text{inl}(x_{q1})}{x_{q1}} \right) + \left(\frac{e_q(g(x_{q2}))}{x_{q2}} - \frac{e_q(g(x_{q1}))}{x_{q1}} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| O \left(\frac{1}{x_{q2}} - \frac{1}{x_{q1}} \right) + \left| \frac{\text{inl}(x_{q2})}{x_{q2}} - \frac{\text{inl}(x_{q1})}{x_{q1}} \right| + \left| \frac{e_q(g(x_{q2}))}{x_{q2}} - \frac{e_q(g(x_{q1}))}{x_{q1}} \right| \right| \leq \\ &\leq U_o \cdot \left| \frac{1}{x_{q2}} - \frac{1}{x_{q1}} \right| + (U_{\text{inl}} + U_q) \cdot \left| \frac{1}{x_{q2}} + \frac{1}{x_{q1}} \right| \end{aligned}$$

Questa è dunque l'**incertezza relativa totale** su una misura indiretta ottenuta come rapporto tra due misure dirette.

A questo punto, dovremo proseguire con gli altri casi (somma o prodotto di due misure dirette), ma è evidente quale sia il meccanismo, per cui non procediamo oltre.

TRATTAMENTO DEL RUMORE

A questo punto, dopo aver capito come va calcolata l'incertezza di una misura digitale nell'ipotesi che tale misura non sia affetta da rumore diverso da quello di quantizzazione, dobbiamo vedere se e come cambiano le cose in presenza di **rumore $n_a(t)$** sovrapposto alla grandezza $x(t)$ in ingresso:



Abbiamo trovato in precedenza che l'espressione generale (anche se approssimata) dell'errore di quantizzazione è

$$e(y_q) = y_q - x = \Delta G \cdot x + O + \text{inl}(x) + e_q(g(x)) + n_a$$

Avendo capito come maggiore le prime 4 quantità presenti a secondo membro, dobbiamo capire come maggiore $n_a(t)$, ossia come calcolare l'**incertezza di rumore**. L'analisi da compiere è tutt'altro che semplice.

Incetenza di rumore per una misura diretta

In primo luogo, dobbiamo ipotizzare una distribuzione di probabilità per tale rumore. Servendoci allora del noto teorema del limite centrale, ipotizzeremo sempre che si tratti di rumore gaussiano (ovviamente a media nulla).

Nota la distribuzione di probabilità, il parametro che ci serve conoscere è la potenza di tale rumore, ossia la sua varianza, oppure la sua **deviazione standard**:

$$\sigma_{na} = \sqrt{\sigma_{na}^2} = \sqrt{E[n_a^2]}$$

Nota la deviazione standard del rumore, l'unica possibilità che abbiamo per aumentare l'errore dovuto al rumore è quella di fare riferimento a *intervalli di confidenza* e relativi *livelli di confidenza*. Per esempio, una volta stimata σ_{na} , potremo scrivere che

$$\boxed{|n_a(t)| \leq U_{na} = 3\sigma_{na} \quad \text{con probabilità del 99,7\%}}$$

Infatti, avendo supposto che n_a sia gaussiano, sappiamo che una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana assume valori che, con probabilità del 99,7% (**livello di confidenza**) sono contenuti nell'intervallo $[-3\sigma_{na}, +3\sigma_{na}]$ (**intervallo di confidenza**).

A questo punto, riprendendo l'espressione generale dell'incertezza su una misura diretta, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} |e(y_q)| &\leq U_G \cdot |y_q| + U_O + U_{inl} + U_q + U_{na} = \\ &= U_G \cdot |y_q| + U_O + U_{inl} + U_q + 3\sigma_{na} \quad \text{con probabilità del 99,7\%} \end{aligned}$$

Questa, in effetti, è una possibilità, ma bisogna sottolineare comunque una cosa: in questa espressione, abbiamo in pratica sommato delle incertezze espresse in termini di errori massimi (i primi 4 contributi) ed una incertezza espressa in termini di deviazione standard o intervallo di fiducia; questo, sostanzialmente, deriva dal fatto che le prime sono di natura sistematica, mentre l'ultima è di natura casuale. Questa somma, pur nella sua validità, è composta da termini in qualche modo non omogenei, per cui necessiterebbe di una serie di considerazioni, che tuttavia in questa sede non ci interessano.

Quindi, noi utilizzeremo quella formula dicendo che l'incertezza di misura risulta pari a quella quantità con probabilità del 99,7%, ossia per il 99,7% delle volte in cui viene applicato quello specifico ingresso. Se, invece, l'ingresso cambia ogni volta, allora quella espressione non vale più.

Incetezza di rumore per una misura indiretta

Le cose si complicano ancora di più quando consideriamo una misura indiretta. Per esempio, consideriamo la solita misura indiretta ottenuta come differenza tra due misure dirette: ripetendo gli stessi discorsi visti prima, abbiamo che

$$\begin{aligned} e(y_q) &= e(x_{q2}) - e(x_{q1}) = \\ &= [\Delta G \cdot x_{q2} + O + inl(x_{q2}) + e_q(g(x_{q2})) + n_{a2}(t)] - [\Delta G \cdot x_{q1} + O + inl(x_{q1}) + e_q(g(x_{q1})) + n_{a1}(t)] = \\ &= \Delta G \cdot (x_{q2} - x_{q1}) + (inl(x_{q2}) - inl(x_{q1})) + (e_q(g(x_{q2})) - e_q(g(x_{q1}))) + (n_{a2}(t) - n_{a1}(t)) \end{aligned}$$

Applicando adesso la disuguaglianza triangolare, si sarebbe tentati di scrivere che

$$\begin{aligned} |e(y_q)| &= |\Delta G \cdot (x_{q2} - x_{q1}) + (inl(x_{q2}) - inl(x_{q1})) + (e_q(g(x_{q2})) - e_q(g(x_{q1}))) + (n_{a2}(t) - n_{a1}(t))| \leq \\ &\leq |\Delta G \cdot (x_{q2} - x_{q1})| + |inl(x_{q2}) - inl(x_{q1})| + |e_q(g(x_{q2})) - e_q(g(x_{q1}))| + |n_{a2}(t) - n_{a1}(t)| \leq \\ &\leq |\Delta G| \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + |inl(x_{q2})| + |inl(x_{q1})| + |e_q(g(x_{q2}))| + |e_q(g(x_{q1}))| + |n_{a2}(t)| + |n_{a1}(t)| \leq \\ &\leq U_G \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + 2U_{inl} + 2U_q + 2U_{na} = U_G \cdot |x_{q2} - x_{q1}| + 2U_{inl} + Q + 6\sigma_{na} \end{aligned}$$

A questa scrittura dovremmo poi aggiungere che questo valore di incertezza vale con probabilità del 99,7%.

Tuttavia, questa affermazione sarebbe errata: infatti, dire che $P(|n_a(t)| \leq U_{na}) = 99,7\%$ è cosa diversa dal dire che $P(|n_{a2}(t) - n_{a1}(t)| \leq 2U_{na}) = 99,7\%$ e, anzi, la prima affermazione (vera) non implica la seconda.

In casi come questi, la somma dei contributi di rumore deve essere fatta in potenza, ossia sommando le varianze; la procedura corretta da seguire è la seguente:

$$n_a^{\text{diff}}(t) = n_{a2}(t) - n_{a1}(t)$$

$$\sigma_{n_a^{\text{diff}}} = \sqrt{\sigma_{na1}^2 + \sigma_{na2}^2} = \sqrt{2\sigma_{na}^2} = \sqrt{2}\sigma_{na}$$

$$P(|n_{a2}(t) - n_{a1}(t)| \leq 3\sigma_{n_a^{\text{diff}}}) = P(|n_{a2}(t) - n_{a1}(t)| \leq 3\sqrt{2}\sigma_{na}) = P(|n_{a2}(t) - n_{a1}(t)| \leq \sqrt{2}U_{na}) = 99,7\%$$

Quindi, come si vede da questi passaggi, l'incertezza sulla misura indiretta per differenza, dovuta al rumore e relativamente ad un livello di confidenza del 99,7%, non è $2U_{na}$ come erroneamente ottenuto prima, ma $\sqrt{2}U_{na}$: quindi

$ e(y_q) \leq U_G \cdot x_{q2} - x_{q1} + 2U_{\text{inl}} + 2U_q + \sqrt{2}U_{na}$ con probabilità del 99,7%

INCERTEZZA SU MISURE DI TEMPO

Nei precedenti paragrafi abbiamo descritto come si calcolano le incertezze sulle misure ottenute con **strumenti digitali**. In particolare, abbiamo sottolineato che la presenza di tali incertezze è dovuta alla non idealità del processo di quantizzazione. Naturalmente, questo tipo di incertezze sussistono solo sulle misure di ampiezza delle varie grandezze, ad esempio quando vogliamo misurare il valore di picco o il valore efficace di una sinusoide mandata in ingresso ad un oscilloscopio. Se invece volessimo misurare il periodo di tale sinusoide, cioè se volessimo effettuare in generale una **misura di tempo**, le incertezze da portare in conto non sono più quelle dovute alla quantizzazione reale, ma quelle dovute al campionamento reale⁸.

Quando abbiamo parlato del **campionamento reale**, abbiamo detto che le incertezze da considerare (fornite direttamente dai costruttori) sono le seguenti:

- $|\Delta S| < U_s$: **incertezza di velocità di spazzolamento;**
- $|D| < U_D$: **incertezza di ritardo del trigger;**
- $|t_{bd}(t)| < U_{tbd}$: **incertezza di distorsione della base tempi.**

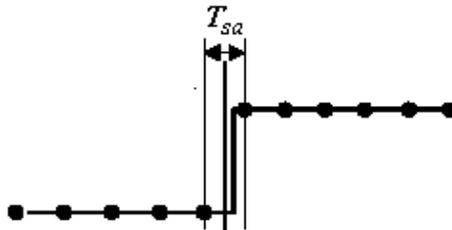
A ben vedere, queste incertezze hanno una perfetta corrispondenza con le incertezze derivanti dalla quantizzazione reale: infatti

⁸ Ricordiamo inoltre che, nel calcolare le incertezze dovute alla quantizzazione reale, l'ipotesi di fondo che abbiamo fatto è quella di avere a disposizione un campionamento effettuato in condizioni ideali, cioè privo di errori.

- l'incertezza di sweep U_S è l'analogo dell'incertezza di guadagno U_G ;
- l'incertezza di trigger U_D è l'analogo dell'incertezza di offset U_D ;
- l'incertezza sulla base tempi U_{tbd} è l'analogo dell'incertezza di nonlinearità integrale U_{int} ;

Abbiamo poi visto, a proposito dell'incertezza dovuta alla quantizzazione reale, che è presente un altro termine, corrispondere al rumore di quantizzazione: $|e_q(g(x))| < U_q = Q/2$. Anche il campionamento reale produce un termine di incertezza analogo a questo, di cui non abbiamo parlato in precedenza: si tratta della cosiddetta **incertezza di risoluzione temporale**.

Per capire di cosa si tratta, consideriamo, come forma d'onda analogica in ingresso al campionatore, un gradino molto ripido (al limite ideale):



Dato che l'intervallo T_{sa} tra un campione e l'altro è finito (pari all'inverso della frequenza di campionamento), può capitare, come mostrato in figura, che venga "perso" l'andamento del segnale tra un campione ed il successivo. Questa perdita di informazione è del tutto analoga a quella prodotta dal processo di quantizzazione ideale: mentre in quel caso parliamo di errore di quantizzazione, in questo caso parliamo di **errore di risoluzione temporale**, indicandolo con $e_{sa}(t)$.

Trattandosi di un errore, non possiamo conoscerlo con precisione, ma è evidente che possiamo fornirne una maggiorazione: infatti, avremo che

$$|e_{sa}(t)| \leq U_{sa} = \frac{T_{sa}}{2}$$

Così come il rumore di quantizzazione è maggiorato (in modulo) dalla metà del passo di quantizzazione, l'errore di risoluzione temporale è maggiorato (sempre in modulo) dalla metà del passo di campionamento, che quindi rappresenta la predetta *incertezza di risoluzione temporale*.

In conclusione, l'incertezza su una misura di tempo, valutata trascurando contributi derivanti da rumore (così come nel caso della quantizzazione ideale), sarà

$$|e(x)| \leq U_S + U_D + U_{tbd} + U_{sa}$$

DATI SULL'INCERTEZZA FORNITI DAI COSTRUTTORI

I costruttori di strumenti (nella sezione **specifications**) forniscono informazioni sull'errore, basandosi sulla sua espressione in termini di guadagno, offset, nonlinearietà, rumore, quantizzazione. Purtroppo ciò non avviene seguendo uno standard o regole precise, il che impone di "interpretare" caso per caso i dati forniti.

Ad ogni modo, abbiamo visto che per gli **errori sistematici di ampiezza** un modo naturale e conveniente di specificare gli errori è il seguente:

$ \Delta G \leq U_g$	incertezza di guadagno	$ O \leq U_o$	incertezza di offset
$ inl(x) \leq U_{inl}$	incertezza di nonlin. integrale	$ e_q \leq U_q$	incertezza di quantizzazione

Allora, leggendo le specifiche dobbiamo cercare di ricondurci a questa descrizione, quando possibile.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>