Appunti di Misure Elettriche

Appendice 2 - Metodo voltamperometrico

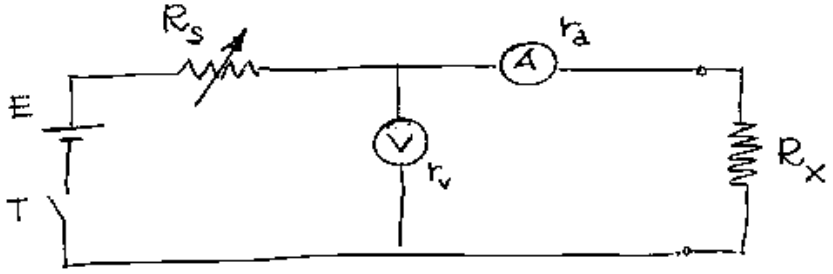
Introduzione 1
Schema del voltmetro a monte 3
Schema del voltmetro a valle 4
Scelta dello schema più conveniente 5
Correzione 5
Conclusioni 7
Esempio numerico 7
Pericolosità dei transitori 11

INTRODUZIONE

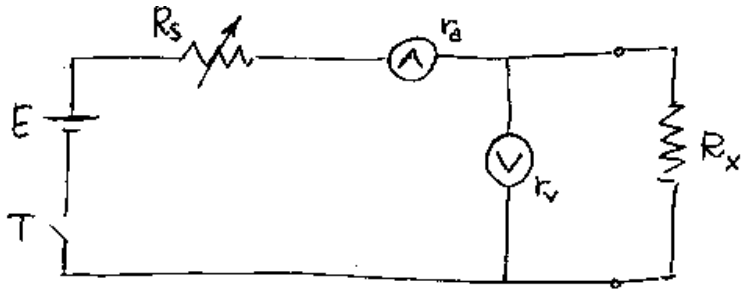
Il **metodo voltamperometrico** serve per misurare, in modo veloce e sbrigativo, il valore di resistenza di un componente. Nel seguito indicheremo con $\mathbf{R_X}$ tale valore incognito.

Sono possibili due configurazioni; in entrambi i casi, si fa un uso congiunto di un voltmetro e di un amperometro:

- la prima è detta con **voltmetro a monte**:

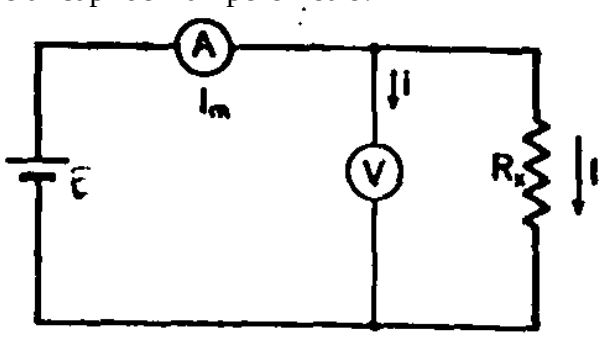


- la prima è detta con **voltmetro a valle**:

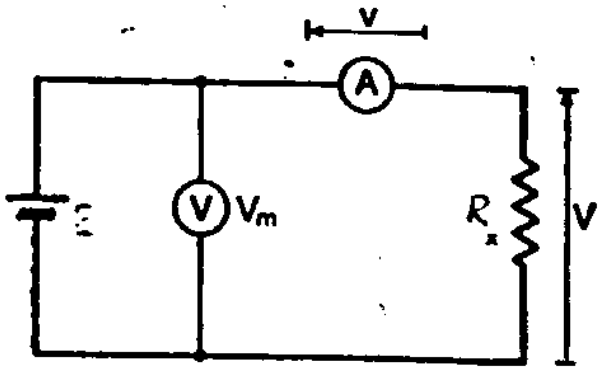


Notiamo che i due circuiti hanno in comune la parte sinistra (costituita da una batteria, inseribile nel circuito tramite apposito interruttore T, e da un resistore variabile R_S) e l'estremità destra (costituita dalla R_X incognita). I due circuiti si differenziano invece per la posizione reciproca del voltmetro (con resistenza interna $\mathbf{r_V}$) e dell'amperometro (con resistenza interna $\mathbf{r_a}$):

- nello schema del voltmetro a monte, l’amperometro misura la corrente che fluisce in R_X, mentre il voltmetro misura non la caduta di tensione ai capi di R_X, ma la somma di questa e della caduta di tensione ai capi dell’amperometro:



- nello schema del voltmetro a valle, invece, l’amperometro non misura la corrente che fluisce in R_X, ma la somma di questa più la corrente assorbita dal voltmetro, mentre quest’ultimo misura effettivamente la caduta di tensione ai capi di R_X.



Allora, *facendo in entrambi i casi il rapporto tra la tensione fornita dal voltmetro e la corrente fornita dall’amperometro, otteniamo una misura affetta da errore sistematico;* in particolare, con lo schema del voltmetro a valle otteniamo un valore più piccolo di quello effettivo (in quanto l’amperometro fornisce una misura più alta), mentre invece con lo schema del voltmetro a monte otteniamo un valore più grande di quello effettivo (in quanto è il voltmetro a fornire una misura più alta).

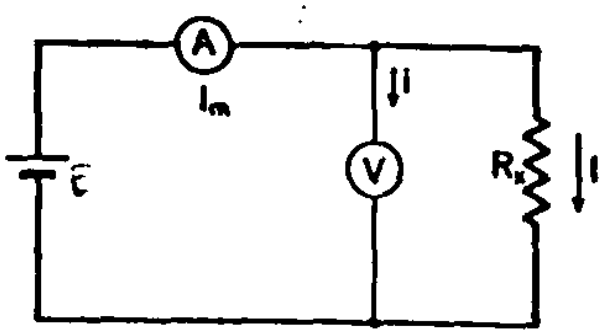
Ovviamente, oltre all’errore sistematico, bisogna sempre considerare l’errore accidentale dovuto agli errori di indicazione dei due strumenti.

Possiamo dire che questo metodo è ben impiegato quando l’errore sistematico è piccolo rispetto a quello casuale.

Autore: Sandro Petrizzelli

SCHEMA DEL VOLTMETRO A MONTE

Facciamo allora una analisi più dettagliata dei metodi proposti, cominciando da quello del **voltmetro a monte**:



Per ottenere la misura corretta, dovremmo porre $R_X=V/I$. Al contrario, il valore che risulta dalle due letture risulta essere

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V + r_a I}{I} = R_X + r_a$$

Questa relazione mostra che il valore ottenuto è sempre maggiore di quello effettivo.
Possiamo facilmente calcolare l'errore sistematico, assoluto e relativo:

$$E_m = R_m - R_X = r_a$$
$$e_m = \frac{R_m - R_X}{R_X} = \frac{r_a}{R_X}$$

E' evidente, in base a queste espressioni, che, per rendere minimo l'errore sistematico, dobbiamo scegliere un amperometro che abbia una resistenza interna r_a il più bassa possibile.

Nel caratterizzare gli amperometri, talvolta i costruttori non forniscono direttamente r_a, ma il **consumo** dello strumento, ossia la caduta di tensione provocata ai morsetti dello strumento quanto questo è attraversato dalla corrente massima (o portata o corrente di fondo scala) I_M: indicando il consumo con $\mathbf{v_M}$, possiamo allora scrivere che

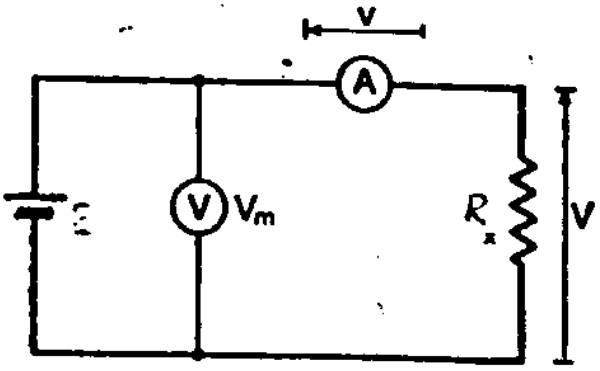
$$r_a = \frac{v_M}{I_M}$$

Questa relazione suggerisce che, a parità di consumo, dovremo prendere, tra due amperometri, quello con portata maggiore. Tuttavia, è bene sottolineare questa portata non deve superare il valore della massima corrente che può essere inviata nel resistore: infatti, dobbiamo ricordarci che, per ridurre l'errore relativo di indicazione compiuto nella lettura dello strumento, è opportuno condurre le misure in prossimità del fondo scala.

Autore: Sandro Petrizzelli

SCHEMA DEL VOLTMETRO A VALLE

Consideriamo adesso lo schema del **voltmetro a valle**:



La misura corretta è sempre $R_X=V/I$, mentre noi invece consideriamo

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V}{I + \frac{V}{r_a}} = \frac{R_X r_v}{R_X + r_v}$$

Otteniamo dunque il parallelo tra la resistenza effettiva e quella del voltmetro, ossia un valore minore di quello effettivo.

Possiamo calcolare l’errore sistematico, assoluto e relativo:

$$E_V = R_m - R_X = \frac{R_X r_v}{R_X + r_v} - R_X = -\frac{R_X^2}{R_X + r_v}$$

$$e_V = \frac{R_m - R_X}{R_X} = \frac{\frac{-R_X^2}{R_X + r_v}}{R_X} = \frac{-R_X}{R_X + r_v}$$

E’ evidente, in base a queste espressioni, che, per rendere minimo l’errore sistematico, dobbiamo scegliere un voltmetro che abbia una resistenza interna r_v il più alta possibile. Nel caso in cui, tra l’altro, questa resistenza sia comunque molto maggiore di quella incognita, possiamo scrivere che

$$E \cong -\frac{R_X}{r_v}$$

$$e \cong -\frac{1}{r_v}$$

Anche per i voltmetri, i costruttori non forniscono sempre r_v, ma il consumo dello strumento, ossia la corrente assorbita dallo strumento quando esso è sottoposto alla tensione massima (o portata o tensione di fondo scala) V_M: indicando il consumo con i_M, possiamo allora scrivere che

$$r_v = \frac{V_M}{i_M}$$

Autore: Sandro Petrizzelli

Deduciamo allora che, a parità di consumo, dovremo prendere, tra due voltmetri, quello con portata maggiore (così come accadeva nel caso precedente per l'amperometro).

Naturalmente, per le stesse ragioni viste nel caso precedente, la portata del voltmetro non deve comunque superare il valore della massima tensione che può essere applicata ai capi del resistore.

SCELTA DELLO SCHEMA PIÙ CONVENIENTE

Nei casi pratici di misura di una resistenza con il metodo voltamperometrico, si deve procedere nel modo seguente:

- in primo luogo, si fissano la corrente e la tensione di alimentazione in base alle caratteristiche del resistore, al fine di non sovraccaricarlo;
- in secondo luogo, si calcolano gli errori relativi e_m ed e_V per gli strumenti disponibili e per le diverse portate da essi consentite;
- infine, si sceglie la misura con lo schema che dà luogo all'errore sistematico più piccola.

Come criteri generali, possiamo invece dire quanto segue:

- lo schema del voltmetro a valle è generalmente da preferirsi quando la resistenza da misurare è dell'ordine di 10Ω o anche meno o comunque quando si possono usare correnti di misura elevate rispetto ai consumi dei voltmetri;
- lo schema del voltmetro a valle, invece, è da preferirsi quando la resistenza da misurare è elevata (al di sopra dei 10kΩ) o comunque quando si possono usare tensioni di misura elevate in rapporto ai consumi degli amperometri;
- in tutti gli altri casi, è sostanzialmente indifferente scegliere l'uno o l'altro metodo.

CORREZIONE

Sappiamo che l'**errore relativo di indicazione**, espresso in funzione dell'*indice di classe* (simbolo: **C**) dello strumento utilizzato, assume la seguente espressione:

$$e = \frac{C}{100}\frac{\delta_{FS}}{\delta}$$

In questa espressione, δ è la generica indicazione letta sulla scala, mentre δ_{FS} è l'indicazione di fondo scala (entrambe sono espresse in *divisioni*, come noto).

Siamo dunque in grado di conoscere l'errore di indicazione relativo sia al voltmetro sia all'amperometro[1]. Potrebbe allora capitare che l'errore relativo sistematico (e_m o e_V) commesso con il metodo prescelto risulti maggiore degli errori relativi di indicazione di voltmetro ed amperometro. In questo caso, possiamo andare ad eliminare l'errore sistematico, correggendo il valore di R_X:

[1] E' opportuno precisare che sarebbe più corretto parlare di **incertezza** e non di errore di indicazione: sappiamo, infatti, che gli errori non possono mai essere conosciuti con esattezza, ma solo maggiorati tramite l'incertezza. Di conseguenza, la classe di precisione consente di determinare solo l'**incertezza (assoluta o relativa) di indicazione**. Ad ogni modo, continueremo nel seguito a parlare di errore, pur tenendo presente però quanto appena sottolineato.

- nel caso del voltmetro a monte, abbiamo visto che l'errore assoluto è rappresentato da un incremento del valore effettivo pari alla resistenza interna dell'amperometro; di conseguenza, se R_m è il valore da noi ricavato, la nostra correzione sarà

$$R_X = R_m - r_a$$

- analogamente, nel caso del voltmetro a valle, abbiamo visto che l'errore assoluto è rappresentato proprio da un decremento del valore effettivo pari a $\frac{R_X^2}{R_X + r_v}$; non essendo nota R_X, faremo una stima dell'errore: se R_m è il valore da noi ricavato, tale stima è $\frac{R_m^2}{R_m + r_v}$, per cui la correzione sarà

$$R_X = R_m + \frac{R_m^2}{R_m + r_v} = \frac{R_m r_v + 2R_m^2}{R_m + r_v}$$

In effetti, però, siamo partiti all'inizio dicendo che il metodo voltamperometrico è un metodo sbrigativo, per cui generalmente queste correzioni non vengono effettuate.

Ad ogni modo, *se si decide di apportare le correzioni, è preferibile usare lo schema del voltmetro a valle, in quanto è possibile conoscere con grande precisione la resistenza interna del voltmetro* (che è praticamente invariante con la temperatura, al contrario di quella dell'amperometro, che invece è fortemente variabile con la temperatura).

Mettiamoci allora nella condizione per cui l'errore sistematico è piccolo rispetto agli errori relativi di indicazione (che sono errori accidentali), che quindi diventano gli unici di nostro interesse. Dobbiamo allora applicare quanto visto in precedenza circa la propagazione degli errori (relativi) in una misura ottenuta come rapporto di due misure dirette:

$$e_{TOT} = \frac{dR_X}{R_X} \cong \frac{dV_m}{V_m} + \frac{dI_m}{I_m} = \frac{C_V}{100}\frac{V_{FS}}{V_m} + \frac{C_A}{100}\frac{I_{FS}}{I_m} = \frac{C_V}{100}\frac{V_M}{V_m} + \frac{C_A}{100}\frac{I_M}{I_m}$$

dove ovviamente C_V e C_A sono le classi di precisione rispettivamente del voltmetro e dell'amperometro, mentre V_M e I_M sono le rispettive portate e V_m e I_m sono le rispettive letture.

Deduciamo che, se le indicazioni degli strumenti sono il più vicino possibile al fondo scala, gli errori relativi di indicazione sono minimi e quindi è anche minimo l'errore complessivo della nostra misura.

Tanto per fare un esempio concreto, supponiamo che sia l'amperometro sia il voltmetro siano di classe 0.2. Supponiamo inoltre che le rispettive portate siano 10A e 100V. Supponiamo infine che le letture siano rispettivamente 9.5A e 98V (entrambe abbastanza vicine al fondo scala). Otteniamo un errore relativo totale pari a

$$e_{TOT} = \frac{0.2}{100}\frac{100}{98} + \frac{0.2}{100}\frac{10}{9.5} = 0.0020 + 0.0021 = 0.0041$$

Se invece gli strumenti fossero di classe 0.5, otterremmo

$$e_{TOT} = \frac{0.5}{100}\frac{100}{98} + \frac{0.5}{100}\frac{10}{9.5} = 0.01025$$

Autore: Sandro Petrizzelli

CONCLUSIONI

Volendo infine dare delle indicazioni generali, possiamo dire sostanzialmente che, a fronte della semplicità di applicazione, il metodo voltamperometrico presenta i seguenti limiti:

limiti di impiego:

- non è possibile misurare resistenze inferiori a qualche Ω, a causa del peso delle resistenze di contatto;
- non è possibile misurare resistenze superiori a 100 kΩ, per problemi dovuti alla influenza delle correnti di precisione;

limiti di precisione:

- la precisione ottenibile dipende strettamente dalla classe degli strumenti adoperati; nella migliore delle ipotesi (ossia, come si è visto, quando l'errore sistematico è trascurabile e le letture sono effettuate a fondo scala), l'errore non potrà essere inferiore allo 0.4% con strumenti di classe 0.2 oppure all' 1% con strumenti di classe 0.5.

ESEMPIO NUMERICO

Facciamo un esempio concreto di applicazione dei concetti esposti nei paragrafi precedenti. Supponiamo di dover misurare la resistenza di alcuni resistori di caratteristiche assegnate (vale a dire che conosciamo, per ciascuno di essi, il valore approssimativo della resistenza e la corrente massima tollerabile). La precisione richiesta alle misure è dell' 1÷1.5 %.

Supponiamo inoltre che il laboratorio ci metta a disposizione i seguenti strumenti, tutti a portata multipla e di classe 0.5:

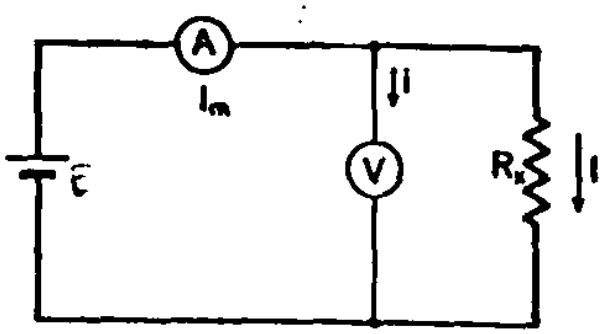
- amperometro: portate 0.6 - 1.2 - 3 - 6 - 12 - 30 - 60 mA
  consumi 60 - 90 - 110 - 115 - 115 - 120 - 120 mV
- amperometro: portate 60 - 120 - 300 mA; 0.6 - 1.2 - 3 - 6 A
  consumo 120 mV
- voltmetro: portate 60 - 120 - 300 - 600 mV; 1.2 - 3 - 6 V
  consumo 0.3 mA
- voltmetro: portate 6 - 12 - 30 - 60 - 120 - 300 - 600 V
  consumo 0.3 mA

Sulla base dei dati a disposizione, dobbiamo per prima cosa calcolare gli errori di consumo per lo schema con il voltmetro a valle e per quello con il voltmetro a monte, prevedendo, in base alla massima corrente di alimentazione, le portate che saranno utilizzate. Le formule da applicare sono quelle trovate prima:

$$e_m = \frac{r_a}{R_X} = \frac{v_M / I_{FS}}{R_X} \qquad e_V = \frac{-R_X}{R_X + r_v} = \frac{-R_X}{R_X + V_{FS} / i_M}$$

Sulla base dei dati così ottenuti, potremo scegliere lo schema che dà luogo al più piccolo errore sistematico. Con tale schema andremo a compiere effettivamente la misura.

Facciamo subito un esempio. Consideriamo lo schema con il voltmetro a monte, da usare per la misura di una resistenza R_X che sappiamo essere approssimativamente di 1Ω:

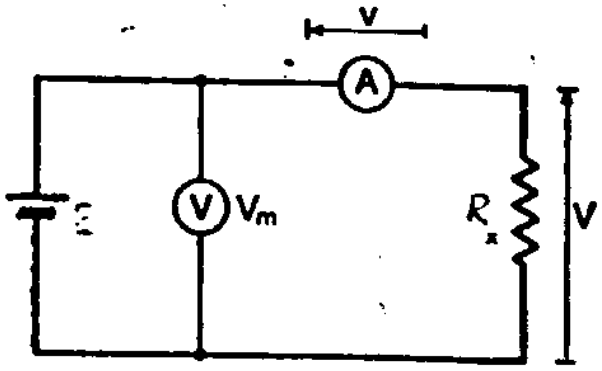


Supponiamo inoltre che tale resistenza tolleri una corrente massima di 0.6A. Supponendo che sia proprio questa la corrente che circola nella resistenza, abbiamo ai capi del voltmetro una tensione di 0.6V; sceglieremo allora il voltmetro con portata V_{FS}=0.6V, che quindi consuma (in base alle specifiche) 0.3mA; da qui deduciamo che la corrente nell'amperometro è di 0.6003 A; sceglieremo l'amperometro con portata più vicina a questo valore è quello con I_{FS}=1.2A, che consuma v_M=120mV. In base alla relazione $e_m = \frac{r_a}{R_X} = \frac{v_M / I_{FS}}{R_X}$, possiamo allora valutare l'errore percentuale commesso:

$$e_m(\%) = \frac{v_M / I_{FS}}{R_X} \cdot 100 = \frac{120\text{mV}}{1\Omega \cdot 1.2\text{A}} \cdot 100 = 10\%$$

Abbiamo dunque un errore del 10%.

Adesso, con lo stesso resistore, usiamo il metodo con il voltmetro a valle:



Dobbiamo questa volta applicare la relazione $e_V = \frac{-R_X}{R_X + V_{FS} / i_M}$, per cui ci servono la portata e il consumo del voltmetro.

Supponiamo ancora una volta che il resistore sia attraversato dalla massima corrente tollerabile, ossia 0.6A. La corrispondente tensione è di 0.6V. Essendo l'amperometro in serie ad R_X, anch'esso è attraversato da 0.6A, per cui sceglieremo l'amperometro con portata I_{FS}=0.6A e quindi con consumo di 120mV. Sommando con i 0.6V ai capi di R_X, otteniamo la tensione ai capi del voltmetro, che risulta essere di 0.720V. Sceglieremo allora il voltmetro con portata V_{FS}=1.2V, che consuma i_M=0.3mA. Il corrispondente errore relativo percentuale è

$$e_V(\%) = \frac{-R_X}{R_X + V_{FS}/i_M} \cdot 100 = -\frac{1\Omega}{1\Omega + \frac{1.2V}{0.3mA}} \cdot 100 \cong -\frac{1\Omega}{\frac{1.2V}{0.0003A}} \cdot 100 = -0.025\%$$

Possiamo dunque costruire una tabella fatta nel modo seguente:

Valore approssimativo di R_X [Ω]	Corrente massima di misura [A]	Tensione di misura [V]	e_m (%)	e_V (%)	Inserzione prescelta
1	**0.6**	**0.6**	**10**	**0.025**	

Possiamo inoltre calcolare l'errore relativo totale di indicazione: la formula da applicare, adattata al nostro caso, è

$$e_{TOT}(\%) = \left(\frac{C_V}{100} \frac{V_{FS}}{V_m} + \frac{C_A}{100} \frac{I_{FS}}{I_m} \right) \cdot 100 = 0.5 \left(\frac{V_{FS}}{V_m} + \frac{I_{FS}}{I_m} \right)$$

Abbiamo allora quanto segue:

voltmetro a monte: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{0.6V}{0.6V} + \frac{1.2A}{0.6A} \right) = 1.5\%$

voltmetro a valle: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{1.2V}{0.6V} + \frac{0.6A}{0.6A} \right) = 1.5\%$

Come si vede, abbiamo un errore relativo di indicazione uguale nei due casi; non solo, ma, in base ai risultati visti prima, esso è inferiore all'errore relativo sistematico commesso con il voltmetro a monte, mentre è di gran lunga superiore a quello commesso con il voltmetro a valle. La nostra scelta ricade dunque su quest'ultimo.

Adesso supponiamo di ripetere lo stesso procedimento con un altro resistore R_X, ancora approssimativamente di 1Ω, ma che tollera una corrente massima di 6A. Seguendo gli stessi discorsi visti prima, si trova quanto segue:

Valore approssimativo di R_X [Ω]	Corrente massima di misura [A]	Tensione di misura [V]	e_m (%)	e_V (%)	Inserzione prescelta
1	**6**	**6**	**2**	**0.0025**	

Calcoliamo anche qui gli errori relativi di indicazione:

voltmetro a monte: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{6V}{6V} + \frac{6A}{6.0003A} \right) = 1\%$

voltmetro a valle: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{12V}{6.12V} + \frac{6A}{6A} \right) = 1.48\%$

In questo caso, l'errore di indicazione è maggiore nello schema del voltmetro a valle, che però presenta un errore sistematico di gran lunga inferiore a quello del voltmetro a monte. Sceglieremo perciò ancora una volta lo schema con il voltmetro a valle.

Consideriamo un altro caso, con un resistore R_X di approssimativamente 10Ω e che tollera una corrente massima di 6A. Seguendo gli stessi discorsi visti prima, si trova quanto segue:

Valore approssimativo di R_X [Ω]	Corrente massima di misura [A]	Tensione di misura [V]	e_m (%)	e_V (%)	Inserzione prescelta
10	**6**	**60**	**0.2**	**0.005**	

Calcoliamo adesso gli errori relativi di indicazione:

voltmetro a monte: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{60\text{V}}{60\text{V}} + \frac{6\text{A}}{6.0003\text{A}}\right) \cong 1\%$

voltmetro a valle: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{60\text{V}}{60.120\text{V}} + \frac{6\text{A}}{6\text{A}}\right) \cong 1\%$

L'errore di indicazione è in questo caso uguale nei due casi ed è inoltre abbastanza maggiore dell'errore sistematico nei due casi. Di conseguenza, è praticamente indifferente scegliere l'uno o l'altro metodo.

Come ultimo caso prendiamo un resistore R_X di approssimativamente 1000Ω e che tollera una corrente massima di 0.06A. Seguendo gli stessi discorsi visti prima, si trova quanto segue:

Valore approssimativo di R_X [Ω]	Corrente massima di misura [A]	Tensione di misura [V]	e_m (%)	e_V (%)	Inserzione prescelta
1000	**0.06**	**60**	**0.2**	**0.5**	

Calcoliamo adesso gli errori relativi di indicazione:

voltmetro a monte: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{60\text{V}}{60\text{V}} + \frac{0.06\text{A}}{0.0603}\right) \cong 0.9975\%$

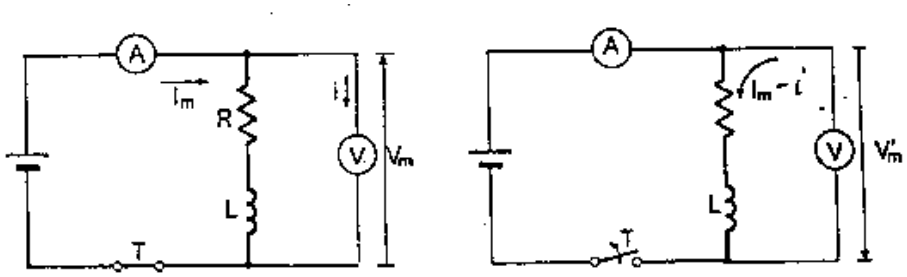
voltmetro a valle: $e_{TOT}(\%) = 0.5\left(\frac{60\text{V}}{60.12\text{V}} + \frac{0.06\text{A}}{0.06\text{A}}\right) \cong 0.999\%$

L'errore di indicazione è in questo caso minore (sia pure di poco) per il voltmetro a monte ed è inoltre maggiore, in entrambi i casi, dell'errore sistematico. Di conseguenza, è preferibile usare il voltmetro a monte.

PERICOLOSITÀ DEI TRANSITORI

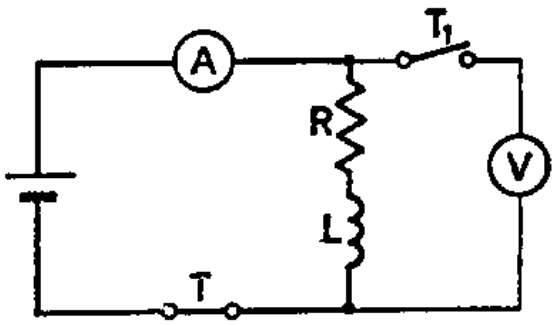
In genere, le misure di resistenza con il metodo voltamperometrico non comportano rischi per gli strumenti, a patto di adottare le solite precauzioni di carattere generale. C'è però un caso in cui è possibile danneggiare seriamente gli strumenti qualora non si adottino accorgimenti specifici: è il caso in cui la resistenza sotto misura presenta una forte induttanza (come per esempio accade per le resistenze degli avvolgimenti di macchine elettriche).

In presenza di tale forte induttanza, la schematizzazione da adottare prevede tale induttanza in serie alla resistenza R_X. Consideriamo ad esempio il caso del voltmetro a monte:



Per compiere la misura, noi chiudiamo il tasto T in modo da collegare la batteria E al resto del circuito (figura di sinistra); una volta effettuata la misura, riapriamo il tasto T (figura di destra), il che comporta una brusca variazione di corrente e quindi anche del flusso magnetico concatenato con l'avvolgimento. Tale variazione di flusso, in base alla legge di Lenz, induce una forza elettromotrice che tende a mantenere la corrente nell'avvolgimento stesso. Questo è un problema, in quanto tale corrente, con il tasto T aperto, tende a chiudersi attraverso il voltmetro. Il valore iniziale di tale corrente è quello che si aveva durante la misura, per cui potrebbe essere elevato; ad esso corrisponderà allora una tensione inversa ai capi del voltmetro, che potrebbe danneggiare lo strumento.

Per evitare questo rischio, è necessario predisporre nel circuito un ulteriore tasto T_1, che va aperto prima di T, che stacca anche il voltmetro dal circuito:



Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1