

Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 2 - Serie di Fourier

Definizione di serie di Fourier di un segnale periodico	1
Esempio: sviluppo di Fourier della funzione coseno	2
Proprietà dello sviluppo in serie di Fourier	3
Proprietà generali	3
Sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale	6
Dimostrazione della formula dei coefficienti dello sviluppo di Fourier per $x(t)$ reale	7
<i>Esempio: onda quadra</i>	13
<i>Esempio: onda triangolare</i>	14
Considerazioni energetiche	16
<i>Osservazione</i>	17
Proprietà di linearità	18
Proprietà di traslazione temporale	19
<i>Esempio</i>	20
Proprietà di inversione dell'asse	21
Proprietà di convoluzione	22
Esempio	23
Approssimazione fornita dallo sviluppo in serie di Fourier	24

DEFINIZIONE DI SERIE DI FOURIER DI UN SEGNALE PERIODICO

Consideriamo un generico segnale $x(t)$ continuo: esso si dice “**periodico**” quando si ripete uguale ogni intervallo di tempo di ampiezza fissa T , ossia quando

$$x(t) = x(t + nT) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } T > 0$$

Si dimostra che questo segnale, oltre che con la sua normale rappresentazione analitica, è esprimibile anche come somma di una particolare serie, detta appunto “**serie di Fourier**”: in particolare si ha che

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove la quantità $f=n/T$ è la cosiddetta “**frequenza**” e dove i coefficienti dello sviluppo sono

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

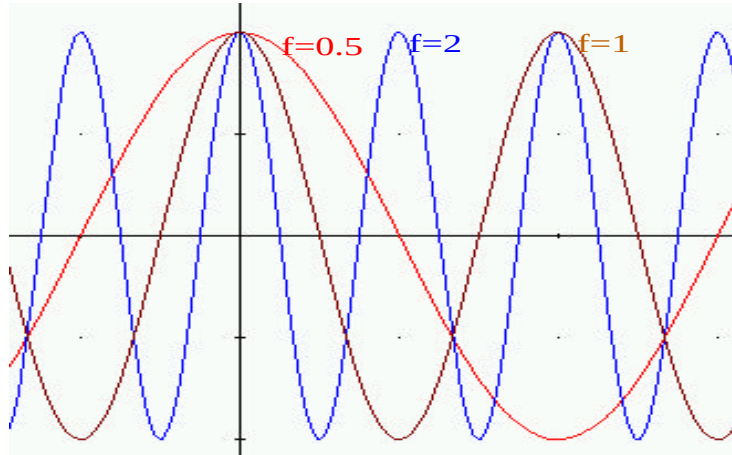
Naturalmente, trattandosi di una serie, essa può convergere o meno.

ESEMPIO: SVILUPPO DI FOURIER DELLA FUNZIONE COSENO

Consideriamo uno dei segnali tradizionali con cui abbiamo a che fare, ossia la funzione coseno: supponiamo in particolare che il segnale sia

$$x(t) = A \cos(2\pi ft)$$

Si tratta evidentemente di una sinusoide di ampiezza A:



Vogliamo lo sviluppo in serie di Fourier di questo segnale. Potremmo procedere applicando la definizione, ossia calcolando il valore dei coefficienti dello sviluppo mediante la formula

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Tuttavia, in questo caso risulta più conveniente seguire un'altra strada: infatti, applicando la seconda formula di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

abbiamo evidentemente che

$$x(t) = A \cos(2\pi ft) = \frac{A}{2} e^{j2\pi ft} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi ft}$$

e quella a secondo membro è già una serie di Fourier. Essa gode ovviamente di alcune caratteristiche particolari:

- in primo luogo, sono nulli tutti i coefficienti x_n tranne quelli per $n=1$ e per $n=-1$, che valgono entrambi $A/2$;
- in secondo luogo, la frequenza di tali termini è la stessa ed è anche uguale a quella del segnale iniziale.

Proprietà dello sviluppo in serie di Fourier

PROPRIETÀ GENERALI

Consideriamo la definizione di serie di Fourier per un segnale periodico $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

$$\text{con } x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Sul segnale $x(t)$ le uniche ipotesi da fare sono che sia periodico e che goda delle tre proprietà necessarie per la convergenza di quella sommatoria. Per il resto, $x(t)$ può essere sia un segnale reale sia anche un segnale complesso.

Per quanto riguarda invece i coefficienti dello sviluppo, generalmente sono complessi e possiamo subito vedere perché: se applichiamo le formule di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

abbiamo che

$$e^{-j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) - j\sin(2\pi f t)$$

per cui, andando a sostituire nell'espressione di x_n otteniamo

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt}_{\text{Re}(x_n)} + j \underbrace{\left(-\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \right)}_{\text{Im}(x_n)}$$

e questo ci conferma che, in generale, gli x_n sono dei numeri complessi.

Una proprietà che si osserva da questa relazione è la seguente: essendo

$$f_n = \frac{n}{T}$$

$$f_{-n} = -\frac{n}{T}$$

è evidente che i coefficienti x_n e x_{-n} hanno la stessa parte reale (in quanto il coseno è una funzione pari), mentre la parte immaginaria differisce del segno (in quanto la funzione seno è una funzione dispari):

$$\begin{aligned}
 x_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_{-n} t) dt + j \left(-\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_{-n} t) dt \right) = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt}_{\text{Re}(x_n)} + j \underbrace{\left(+\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \right)}_{-\text{Im}(x_n)}
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 R_n &= \text{Re}(x_n) = \text{Re}(x_{-n}) = R_{-n} \\
 I_n &= \text{Im}(x_n) = -\text{Im}(x_{-n}) = -I_{-n}
 \end{aligned}$$

Questa proprietà si può sintetizzare dicendo che *i coefficienti x_n e x_{-n} dello sviluppo in serie di Fourier di un generico segnale $x(t)$ (periodico) sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, ossia $x_n = (x_{-n})^*$.*

Sempre dalla relazione ricavata prima possiamo individuare una condizione sufficiente perché il generico x_n sia reale: perché questo accada deve essere ovviamente $\text{Im}(x_n)=0$, ossia deve essere

$$\text{Im}(x_n) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt = 0$$

Dato che i due estremi di integrazione sono simmetrici, deduciamo che questa relazione è senz'altro verificata quando la funzione integranda è una funzione dispari. Ora, dato che la funzione Seno è già dispari, perché quel prodotto sia anch'esso una funzione dispari è necessario che $x(t)$ sia reale e pari.

In conclusione, abbiamo trovato che *i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del generico segnale periodico $x(t)$ sono tutti reali quando $x(t)$ è REALE e PARI.*

In particolare, l'espressione di questi coefficienti in queste condizioni è

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

Considerando, poi, che la funzione integranda, per $x(t)$ reale e pari, è essa stessa reale e pari, possiamo riscrivere questi coefficienti nella forma conclusiva

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 x_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \\
 &\text{per } x(t) \text{ reale e pari}
 \end{aligned}
 }$$

Un esempio classico è proprio il segnale $x(t) = A \cos(2\pi f t)$ che è reale e pari (dato che ovviamente A è reale).

Possiamo ulteriormente perfezionare questa proprietà, considerando direttamente la definizione di serie di Fourier: infatti, data la relazione

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

e considerando che, in base alle formule di Eulero, risulta

$$e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)$$

abbiamo che

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Inoltre, se tiriamo fuori dalle due sommatorie il termine che si ottiene per $n=0$ otteniamo

$$x(t) = [x_0 \cos(2\pi f_0 t) + x_0 \sin(2\pi f_0 t)] + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Ma, ricordando che $f_n = n/T$, è evidente che $f_0 = 0$, per cui

$$x(t) = x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t) + j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Questa è un'altra espressione, detta “**trigonometrica**”, dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico. Da questa espressione possiamo perfezionare la proprietà enunciata prima: infatti, è evidente che, se il segnale $x(t)$ è complesso, anche lo sviluppo in serie di Fourier comprenderà termini complessi, mentre, se il segnale è reale, lo sviluppo in serie dovrà necessariamente contenere solo termini reali; nel caso particolare in cui $x(t)$ è reale e pari, abbiamo detto che i coefficienti x_n sono tutti reali, per cui gli unici eventuali termini complessi vengono dalla seconda sommatoria, ossia

$$j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \sin(2\pi f_n t)$$

Ma, essendo $x(t)$ reale, anche lo sviluppo deve essere reale, per cui la seconda sommatoria deve essere necessariamente nulla.

Possiamo dunque concludere che *lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale $x(t)$ periodico, REALE e PARI, è una serie di soli coseni e precisamente:*

$$x(t) = x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n \cos(2\pi f_n t)$$

Facciamo inoltre osservare che, in base a come sono stati definiti i coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier, si ha che

$$x_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt$$

ossia x_0 è un numero reale coincidente, a meno del termine $2/T$, con l'area che il segnale $x(t)$ sottende nell'intervallo $[0, T/2]$.

Non è ancora finita: infatti, abbiamo prima dimostrato la proprietà per cui $X_n = (X_{-n})^*$. Ma, per $x(t)$ reale e pari, sappiamo che gli x_n sono reali, per cui l'operatore "complesso coniugato" non ha alcun effetto e quindi $X_n = X_{-n}$. Di conseguenza, lo sviluppo in serie può essere scritto nella forma conclusiva

$$x(t) = x_0 + \underbrace{\sum_{n=+1}^{+\infty} 2x_n \cos(2\pi f_n t)}_{x(t) \text{ reale e pari}}$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI UN SEGNALE REALE

Mentre abbiamo appena visto quale sia lo sviluppo in serie di un segnale reale e pari, vediamo adesso se è possibile semplificare in qualche modo il suo sviluppo in serie di Fourier quando è solo reale.

Supponiamo perciò che $x(t)$ sia un segnale reale (senza preoccuparci di vedere se è pari, dispari o nessuna delle due cose). La formula di partenza è ovviamente quella generale, ossia

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Separiamo dalla sommatoria il termine che si ottiene per $n=0$:

$$x(t) = x_0 e^{j2\pi f_0 t} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Possiamo subito osservare che, essendo $f_n = n/T \rightarrow f_0 = 0$, per cui

$$x(t) = x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

A questo punto ci possiamo ricordare di quanto abbiamo trovato poco fa, ossia

$$\begin{aligned} R_n &= \operatorname{Re}(x_n) = \operatorname{Re}(x_{-n}) = R_{-n} \\ I_n &= \operatorname{Im}(x_n) = -\operatorname{Im}(x_{-n}) = -I_{-n} \end{aligned}$$

In base a queste relazioni, lo sviluppo si può scrivere nella forma

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} (x_n e^{-j2\pi f_n t} + x_{-n} e^{j2\pi f_n t})$$

Adesso, esprimendo i coefficienti x_n come differenza tra una parte reale ed una parte immaginaria, abbiamo che

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} ((\operatorname{Re}(x_n) - j \operatorname{Im}(x_n)) e^{-j2\pi f_n t} + (\operatorname{Re}(x_{-n}) - j \operatorname{Im}(x_{-n})) e^{j2\pi f_n t})$$

In base alle relazioni tra x_n e x_{-n} possiamo ulteriormente perfezionare questa scrittura e scrivere che

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} ((\operatorname{Re}(x_n) - j \operatorname{Im}(x_n)) e^{-j2\pi f_n t} + (\operatorname{Re}(x_n) + j \operatorname{Im}(x_n)) e^{j2\pi f_n t}) = \\ &= x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} (\operatorname{Re}(x_n) (e^{j2\pi f_n t} + e^{-j2\pi f_n t}) + j \operatorname{Im}(x_n) (e^{j2\pi f_n t} - e^{-j2\pi f_n t})) \end{aligned}$$

Applicando nuovamente le formule di Eulero, abbiamo che

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} (2 \operatorname{Re}(x_n) \cos(2\pi f_n t) + 2 \operatorname{Im}(x_n) \sin(2\pi f_n t))$$

Nella sommatoria compaiono solo numeri reali: di conseguenza, essendo $x(t)$ reale, non potrà che essere reale anche x_0 , per cui possiamo concludere che *lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico $x(t)$ REALE è dato da*

$$x(t) = R_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} (2 \operatorname{Re}(x_n) \cos(2\pi f_n t) + 2 \operatorname{Im}(x_n) \sin(2\pi f_n t))$$

N.B. E' evidente che da questa relazione discende in modo immediato quella ricavata per $x(t)$ reale e PARI: infatti, in questo caso abbiamo detto che i coefficienti x_n sono reali, per cui $\operatorname{Re}(x_n)=x_n$ e $\operatorname{Im}(x_n)=0$ e lo sviluppo si riduce ai soli coseni.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DEI COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO DI FOURIER PER $x(t)$ REALE

La definizione generale di sviluppo in serie di Fourier di un segnale $x(t)$ è

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove $f_n=n/T$ e dove i coefficienti sono

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt}_{\text{Re}(x_n)} + j \underbrace{\left(-\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \right)}_{\text{Im}(x_n)}$$

Vogliamo adesso dimostrare quest'ultima relazione nel caso in cui il segnale $x(t)$ sia reale. Abbiamo appena detto che lo sviluppo in serie di $x(t)$ assume, se $x(t)$ è reale, l'espressione

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} (2 \text{Re}(x_n) \cos(2\pi f_n t) + 2 \text{Im}(x_n) \sin(2\pi f_n t))$$

Posto

$$\begin{cases} a_0 = x_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n = 2 \text{Re}(x_n) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \\ b_n = 2 \text{Im}(x_n) = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \end{cases}$$

questa espressione diventa

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_n t) \quad (*)$$

Vediamo allora di dimostrare le espressioni di a_0 , a_n e b_n .

Moltiplichiamo ambo i membri della (*) per la quantità $\cos(2\pi f_m t)$ (dove, ovviamente, $f_m = m/T$ con m numero reale per il momento generico): otteniamo

$$x(t) \cos(2\pi f_m t) = a_0 \cos(2\pi f_m t) + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t)$$

Adesso integriamo ambo i membri, rispetto alla variabile t , nell'intervallo $[-T/2, T/2]$:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_m t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} a_0 \cos(2\pi f_m t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) dt + \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) dt \end{aligned}$$

Le due sommatorie possono essere portate fuori dal segno di integrale, come anche i coefficienti a_0 :

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2pf_m t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_m t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt + \\ + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt$$

Vediamo adesso cosa succede al variare del valore di m ; il primo valore che diamo è ovviamente $m=0$: consideriamo che $\cos(0)=1$ otteniamo

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2pf_n t) dt$$

Il primo integrale a secondo membro vale evidentemente T :

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0 T + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2pf_n t) dt$$

Gli integrali contenuti nella seconda sommatoria sono invece tutti nulli: infatti, la funzione Seno è dispari e sappiamo che l'integrale di una funzione dispari, esteso ad un intervallo simmetrico, è $=0$. Quindi

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0 T + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) dt$$

Resta dal calcolare sempre una somma di integrali. Per prima cosa risolviamo l'integrale che si trova dentro la sommatoria per n generico: ricordando che il Coseno è una funzione pari, abbiamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) dt = 2 \int_0^{T/2} \cos(2pf_n t) dt = 2 \frac{1}{2pf_n} \int_0^{T/2} (2pf_n) \cos(2pf_n t) dt = \frac{1}{pf_n} \int_0^{T/2} D(\sin(2pf_n t)) dt = \\ = \frac{1}{pf_n} [\sin(2pf_n t)]_0^{T/2} = \frac{1}{pf_n} \left[\sin\left(2pf_n \frac{T}{2}\right) - \sin(0) \right] = \frac{1}{pf_n} \sin(pf_n T)$$

Ricordando adesso che $f_n=n/T$, abbiamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_n t) dt = \frac{1}{\pi f_n} \sin(n\pi)$$

Dato che n è un numero naturale, abbiamo un Seno calcolato in multipli di π e quindi esso vale 0. Possiamo dunque concludere, ritornando alla relazione di prima, che

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0 T$$

da cui si deduce che

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

e questo è il primo risultato che volevamo dimostrare.

Adesso torniamo alla relazione trovata prima per m generico: era

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2pf_m t) dt &= a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_m t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt + \\ &+ \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt \end{aligned}$$

Vogliamo vedere cosa succede quando m non è nullo. Per farlo, possiamo subito fare delle considerazioni generali su quest'ultima relazione, prima di andare ad esaminare cosa accade per ciascun valore di m : infatti, facciamo per prima cosa vedere che, per $m \neq 0$, il primo integrale a secondo membro vale sempre 0:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(2p \frac{m}{T} t\right) dt &= 2 \int_0^{T/2} \cos\left(2p \frac{m}{T} t\right) dt = 2 \frac{T}{2pm} \int_0^{T/2} \left(2p \frac{m}{T}\right) \cos\left(2p \frac{m}{T} t\right) dt = \frac{T}{pf_n m} \int_0^{T/2} D\left(\sin\left(2p \frac{m}{T} t\right)\right) dt = \\ &= \frac{1}{pf_n m} \left[\sin\left(2p \frac{m}{T} t\right) \right]_0^{T/2} = \frac{1}{pf_n m} \left[\sin\left(2p \frac{m}{2}\right) - \sin(0) \right] = \frac{1}{pf_n m} \sin(mp) = 0 \end{aligned}$$

Quindi, per m non nullo, la relazione da considerare è

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2pf_m t) dt = \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt$$

Facciamo adesso vedere che anche la seconda sommatoria risulta uguale a 0: la funzione che compare all'interno dell'integrale è il prodotto di una funzione dispari (il Seno) per una funzione pari (il Coseno), per cui è a sua volta una funzione dispari; allora, dato che l'integrazione è estesa ad un intervallo simmetrico, sappiamo che essa dà valore 0, per cui concludiamo che la relazione da considerare diventa

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2pf_m t) dt = \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2pf_n t) \cos(2pf_m t) dt$$

Sempre per m generico (ma non nullo), ci interessa sapere quanto vale l'integrale a secondo membro: dimostreremo tra un attimo che esso vale $T/2$ quando $n=m$ e vale 0 altrimenti.

Di conseguenza, quella relazione può anche essere scritta nella forma

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2pf_n t) dt = \frac{T}{2} a_n$$

da cui

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

e questo era il secondo risultato che volevamo dimostrare.

Adesso, l'ultima cosa che dobbiamo dimostrare è l'espressione dei coefficienti b_n .

Il punto di partenza è sempre lo sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$ reale, ossia

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_n t) \quad (*)$$

Moltiplichiamo ambo i membri per la quantità $\sin(2\pi f_m t)$ (dove, ovviamente, $f_m = m/T$ con m numero reale): otteniamo

$$x(t)\sin(2\pi f_m t) = a_0 \sin(2\pi f_m t) + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t)$$

Adesso integriamo ambo i membri, rispetto alla variabile t , nell'intervallo $[-T/2, T/2]$:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_m t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} a_0 \sin(2\pi f_m t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt + \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt \end{aligned}$$

Infine, portiamo fuori dagli integrali ciò che si può:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_m t) dt &= a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_m t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt + \\ &+ \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt \end{aligned}$$

In questo caso, la presenza della quantità $\sin(2\pi f_m t)$ in tutti i termini di entrambi i membri fa sì che, per $m=0$, quella relazione diventi una identità. Consideriamo perciò $m \neq 0$.

In modo analogo a prima, è evidente che l'integrale interno alla prima sommatoria è nullo (la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico), per cui possiamo subito semplificare:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_m t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_m t) dt + \sum_{n=+1}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt$$

E' nullo anche il primo integrale a secondo membro, per lo stesso motivo di prima: quindi

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_m t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt \quad (***)$$

Infine, sempre in modo analogo a prima, possiamo far vedere facilmente che l'integrale presente a secondo membro vale $-T/2$ quando $n=m$ e vale 0 altrimenti. La dimostrazione si riconduce a quella fatta nel caso precedente: le formule di duplicazione del coseno dicono che

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Da qui si ricava che

$$\sin \alpha \sin \beta = -\cos \alpha \cos \beta + \cos(\alpha - \beta)$$

Ponendo $\begin{cases} \alpha = 2\pi f_n t \\ \beta = 2\pi f_m t \end{cases}$, abbiamo che

$$\sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) = -\cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) + \cos[2\pi(f_n - f_m)t]$$

Integrando tra $-T/2$ e $T/2$ otteniamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt = - \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2\pi(f_n - f_m)t] dt$$

L'integrale a primo membro è quello che a noi interessa, per cui, per conoscerne il valore, dobbiamo calcolare i due integrali a secondo membro. Intanto, con calcoli perfettamente analoghi a quelli fatti in precedenza, è facile verificare che il secondo integrale a secondo membro vale 0, per cui

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_n t) \sin(2\pi f_m t) dt = - \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_n t) \cos(2\pi f_m t) dt$$

A questo punto, abbiamo prima dimostrato che l'integrale a secondo membro vale $T/2$ per $m=n$ e 0 altrimenti, per cui quello al primo membro, data la presenza del segno "-", vale $-T/2$ per $m=n$ e 0 altrimenti.

Dimostrato questo, dalla (***) ricaviamo evidentemente che

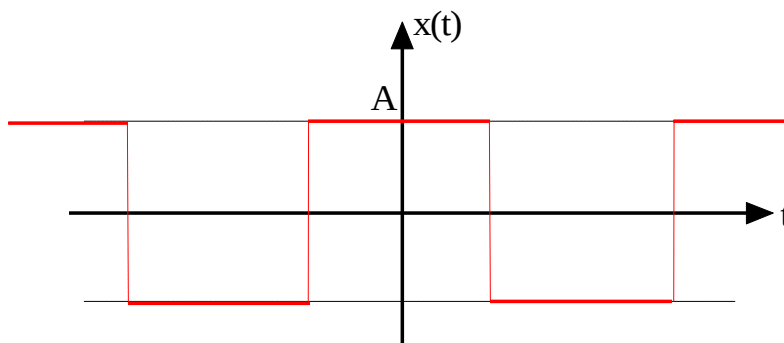
$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt = -\frac{T}{2} b_n$$

da cui otteniamo ciò che cercavamo, ossia

$$b_n = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt$$

Esempio: onda quadra

A titolo di esempio per le formule appena dimostrate, vediamo quanto vale lo sviluppo in serie di Fourier del segnale che conosciamo col nome di “onda quadra”, il cui andamento nel tempo è il seguente:



E' evidente che si tratta di un segnale periodico reale. Facciamo inoltre osservare che la scelta per il riferimento $t=0$ è tutt'altro che casuale: infatti, essa è tale che il segnale risulti anche pari, il che è di grosso vantaggio per la determinazione dello sviluppo in serie di Fourier, che avrà l'espressione

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2x_n \cos(2\pi f_n t)$$

con

$$\begin{cases} a_0 = x_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n = 2 \operatorname{Re}(x_n) = 2x_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \end{cases}$$

E' subito evidente che, detto T il periodo del segnale, si ha che

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{A}{2}$$

Vediamo quanto valgono invece gli altri coefficienti: applicando la definizione e considerando che il Coseno è una funzione pari, abbiamo intanto che

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

Nell'intervallo $[0, T/2]$, il nostro segnale vale A in $[0, T/4]$ e $-A$ in $[T/4, T/2]$, per cui possiamo spezzare l'integrazione e scrivere che

$$a_n = \frac{4}{T} A \int_0^{T/4} \cos(2\pi f_n t) dt - \frac{4}{T} A \int_{T/4}^{T/2} \cos(2\pi f_n t) dt$$

Entrambi questi integrali sono immediati:

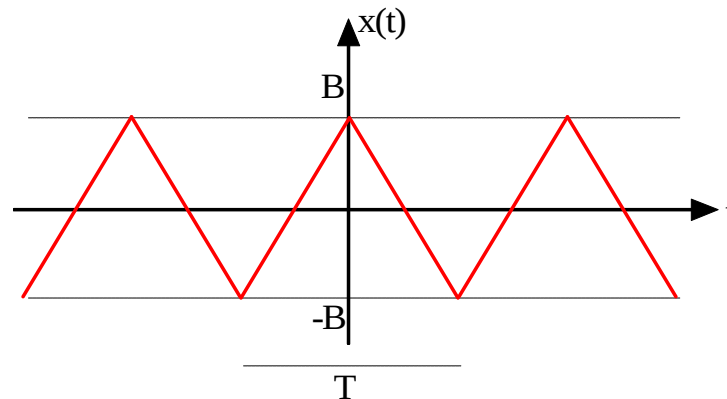
$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4A}{T} \frac{1}{2\pi f_n} \left[\sin(2\pi f_n t) \right]_0^{T/4} - \frac{4A}{T} \frac{1}{2\pi f_n} \left[\sin(2\pi f_n t) \right]_{T/4}^{T/2} = \\
 &= \frac{4A}{2T\pi f_n} \left(\sin\left(2\pi f_n \frac{T}{4}\right) - 0 - \sin\left(2\pi f_n \frac{T}{2}\right) + \sin\left(2\pi f_n \frac{T}{4}\right) \right) = \\
 &= \frac{4A}{2T\pi f_n} \left(\sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) - 0 - \sin(n\pi) + \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) \right) = \frac{4A}{2T\pi f_n} \left(\sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) + \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) \right) = \\
 &= \frac{4A}{T\pi f_n} \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right) = \frac{4A}{\pi n} \sin\left(\frac{n}{2} \pi\right) = 2A \frac{1}{\pi \frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n}{2} \pi\right) = 2A \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Possiamo dunque concludere che lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra è il seguente:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2A \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cos(2\pi f_n t)$$

Esempio: onda triangolare

Analogo al caso precedente è quello della cosiddetta "onda triangolare" (che, tra l'altro, è l'integrale dell'onda quadra):



Anche in questo caso, abbiamo un segnale periodico, reale e pari, per cui l'espressione generale del suo sviluppo in serie di Fourier sarà ancora una volta

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2x_n \cos(2\pi f_n t)$$

con

$$\begin{cases} a_0 = x_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n = 2 \operatorname{Re}(x_n) = 2x_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \end{cases}$$

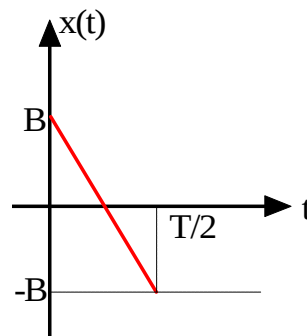
Il coefficiente a_0 è, a meno del termine $1/T$, l'area sottesa dal segnale nell'intervallo $[-T/2, T/2]$: nel nostro caso essa vale $B/2$. Per gli altri coefficienti, abbiamo invece quanto segue: intanto, applicando la definizione, abbiamo che

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

Nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ il nostro segnale $x(t)$ è pari, per cui possiamo aggiungere un fattore moltiplicativo 2 e restringere l'intervallo di integrazione:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

Ci serve adesso una rappresentazione analitica di $x(t)$ nell'intervallo $[0, T/2]$:



Si ha quindi che

$$x(t) = B - \frac{2B}{T/2} t \quad t \in [0, T/2]$$

Andando a sostituire nella relazione di prima, abbiamo che

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(B - \frac{2B}{T/2} t \right) \cos(2\pi f_n t) dt = \frac{4B}{T^2} \int_0^{T/2} \cos(2\pi f_n t) dt - \frac{16B}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi f_n t) dt$$

Cominciamo dal primo integrale, che è immediato:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4B}{T} \frac{1}{2\pi f_n} \left[\sin(2\pi f_n t) \right]_0^{T/2} - \frac{16B}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi f_n t) dt = \frac{2B}{\pi n} \left[\sin(2\pi f_n t) \right]_0^{T/2} - \frac{16B}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi f_n t) dt = \\ &= \frac{2B}{\pi n} \left[\sin\left(2\pi f_n \frac{T}{2}\right) - \sin(0) \right] - \frac{16B}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi f_n t) dt = \frac{2B}{\pi n} [\sin(\pi)] - \frac{16B}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi f_n t) dt = \\ &= -\frac{16B}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(2\pi f_n t) dt \end{aligned}$$

Vediamo adesso quanto vale l'integrale rimasto. Esso può essere risolto per parti, considerando il Coseno come una derivata del Seno:

$$a_n = -\frac{16B}{T^2} \frac{1}{2\pi f_n} \int_0^{T/2} t(2\pi f_n) \cos(2\pi f_n t) dt = -\frac{16B}{T^2} \frac{1}{2\pi f_n} \int_0^{T/2} t d[\sin(2\pi f_n t)] dt =$$

$$= -\frac{16B}{T^2} \frac{1}{2\pi f_n} [\sin(2\pi f_n t)]_0^{T/2} + \frac{16B}{T^2} \frac{1}{2\pi f_n} \int_0^{T/2} \sin(2\pi f_n t) dt = -\frac{8B}{n\pi T} [\sin(2\pi f_n t)]_0^{T/2} + \frac{8B}{n\pi T} \int_0^{T/2} \sin(2\pi f_n t) dt$$

Si verifica facilmente che il primo termine è =0: infatti

$$[\sin(2\pi f_n t)]_0^{T/2} = \left[\frac{T}{2} \sin\left(2\pi f_n \frac{T}{2}\right) - 0 \right] = \left[\frac{T}{2} \sin(n\pi) \right] = 0$$

Quindi rimane

$$a_n = \frac{8B}{n\pi T} \int_0^{T/2} \sin(2\pi f_n t) dt$$

e anche questo è un integrale immediato:

$$a_n = -\frac{8B}{n\pi T} \frac{1}{2\pi f_n} [\cos(2\pi f_n t)]_0^{T/2} = -\frac{4B}{n^2 \pi^2} [\cos(2\pi f_n t)]_0^{T/2} = -\frac{4B}{n^2 \pi^2} \left[\cos\left(2\pi f_n \frac{T}{2}\right) - 1 \right] =$$

$$= -\frac{4B}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{4B}{n^2 \pi^2} [1 - \cos(n\pi)]$$

Quindi, lo sviluppo in serie dell'onda triangolare è

$$x(t) = \frac{B}{2} + \frac{4B}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\pi)}{n^2} \cos(2\pi f_n t)$$

CONSIDERAZIONI ENERGETICHE

Sia sempre $x(t)$ il nostro segnale periodico, reale o complesso. Sappiamo che la definizione generale di **potenza** associata ad un segnale periodico è

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

dove t_0 è un istante scelto a nostro piacimento. Allora, nessuno ci vieta di prendere $t_0 = -T/2$, per cui abbiamo che

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Dimostriamo allora che

$$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2$$

Intanto, dalla teoria sui numeri complessi sappiamo che il modulo di una quantità complessa è pari al prodotto della quantità stessa per il suo complesso coniugato: possiamo allora scrivere che

$$P_X = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)(x(t))^* dt$$

Se lo sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$ è

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Ricordando che la serie di Fourier è un operatore lineare, possiamo scrivere che

$$x^*(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n e^{j2\pi f_n t})^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n)^* (e^{j2\pi f_n t})^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n)^* e^{-j2\pi f_n t}$$

Andando a sostituire questa espressione in quella della potenza, abbiamo che

$$P_X = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)(x(t))^* dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n)^* e^{-j2\pi f_n t} \right) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n)^* \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right)$$

L'integrale che rimane all'interno della sommatoria non è altro che x_n , per cui

$$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2$$

e questo è ciò che volevamo dimostrare.

Osservazione

Sulla base del risultato appena dimostrato ne possiamo far vedere un altro: la definizione di sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$ è

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

e dice in pratica che $x(t)$ è esprimibile come somma di un numero infinito (ma numerabile) di segnali, il generico dei quali è

$$x_n(t) = x_n e^{j2\pi f_n t}$$

L'energia associata a questo segnale si può calcolare mediante la definizione:

$$P_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_n(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_n(t) (x_n(t))^* dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_n e^{j2p_{f_n}t} (x_n e^{-j2p_{f_n}t}) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_n|^2 dt = |x_n|^2$$

Allora, avendo trovato prima che

$$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2$$

possiamo concludere che *la potenza associata al segnale $x(t)$ è pari alla somma delle potenze associate ai segnali che costituiscono lo sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$.*

PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due generici segnali periodici con lo stesso periodo T . Di entrambi i segnali supponiamo di conoscere lo sviluppo in serie di Fourier: siano x_n e y_n i coefficienti dei rispettivi sviluppi. Consideriamo adesso un nuovo segnale che sia una combinazione lineare di $x(t)$ e $y(t)$: in particolare sia

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

Allora, si dimostra intanto che $z(t)$ è anch'esso un segnale periodico di periodo T e quindi, come tale, esso ammette lo sviluppo in serie di Fourier: dimostriamo che i coefficienti di questo sviluppo sono

$$z_n = ax_n + by_n$$

ossia sono una combinazione lineare, sempre mediante i coefficienti a e b , dei coefficienti degli sviluppi di $x(t)$ e $y(t)$.

La dimostrazione è immediata in quanto basta applicare la definizione in base alla quale si calcolano i coefficienti dello sviluppo di Fourier:

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) e^{-j2p_{f_n}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} ax(t) e^{-j2p_{f_n}t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} by(t) e^{-j2p_{f_n}t} dt = \\ &= a \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2p_{f_n}t} dt + b \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j2p_{f_n}t} dt = ax_n + by_n \end{aligned}$$

In base a questa proprietà, quindi, se dobbiamo calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale $z(t)$ periodico e con rappresentazione più o meno complessa, possiamo provare ad esprimerlo come combinazione lineare di altri segnali (sempre periodici con lo stesso periodo di $z(t)$) dei quali conosciamo già o possiamo calcolare facilmente lo sviluppo: in tal modo, lo sviluppo di $z(t)$ sarà una combinazione lineare di tali sviluppi.

PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE TEMPORALE

Sia dato un segnale $x(t)$ periodico di periodo T e siano x_n i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier. Consideriamo quindi il segnale $z(t)$ che si ottiene traslando $x(t)$ di una certa quantità costante α : quindi

$$z(t) = x(t - \alpha)$$

Anche $z(t)$ è ovviamente periodico di periodo T : come tale esso ammette sviluppo in serie di Fourier e noi vogliamo far vedere come i coefficienti di tale sviluppo siano

$$z_n = x_n e^{-j2\pi f_n \alpha}$$

ossia siano il prodotto dei coefficienti dello sviluppo di $x(t)$ per un fattore esponenziale costante.

Anche in questo caso la dimostrazione si effettua sfruttando semplicemente la definizione di coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier: tale definizione dice intanto che

$$z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - a) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Effettuando adesso il cambio di variabile $T = t - \alpha$ in quell'integrale, noi otteniamo

$$z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2-a}^{T/2-a} x(T) e^{-j2\pi f_n (T+a)} dT = e^{-j2\pi f_n a} \frac{1}{T} \int_{-T/2-a}^{T/2-a} x(T) e^{-j2\pi f_n T} dT$$

I coefficienti dello sviluppo in serie del segnale $x(t)$ sono dati da

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

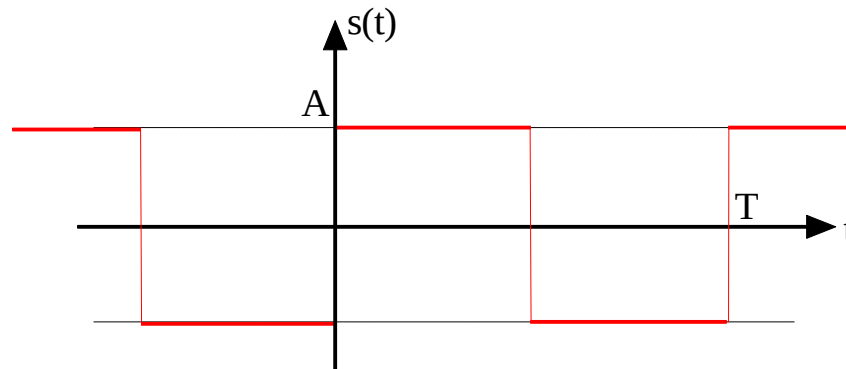
Quest'integrale e quello che compare nella espressione degli z_n differiscono soltanto (oltre che per il nome dato alla variabile di integrazione), per gli estremi di integrazione: tuttavia, in entrambi i casi tale intervallo ha ampiezza T , per cui i due integrali coincidono e noi possiamo dunque concludere che

$$z_n = x_n e^{-j2\pi f_n \alpha}$$

L'utilità di questa proprietà è evidente: se abbiamo un certo segnale, di cui conosciamo lo sviluppo in serie di Fourier, e lo trasliamo di una quantità generica nel tempo, siamo subito in grado di determinare il nuovo sviluppo in serie senza fare ulteriori calcoli, ma semplicemente applicando la relazione appena dimostrata.

Esempio

Vediamo subito una applicazione pratica di questa proprietà. Supponiamo di voler calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del seguente segnale:



Si tratta, evidentemente, di un segnale periodico e reale: sappiamo allora che lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale ha l'espressione generale

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=+1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t) + \sum_{n=+1}^{\infty} b_n \sin(2\pi f_n t)$$

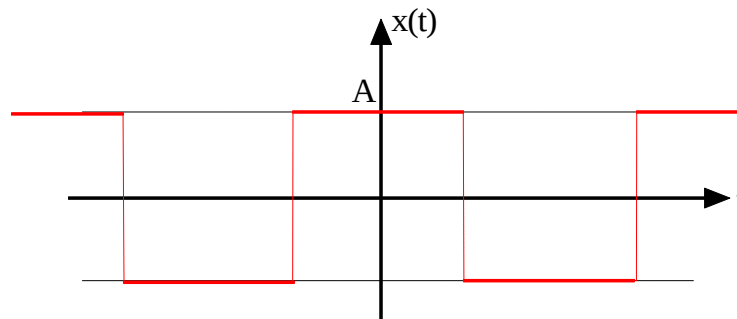
con

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left(\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right) \\ b_n = \frac{2}{T} \operatorname{Im} \left(\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right) \end{cases}$$

Quindi, un primo modo di calcolare lo sviluppo in serie di $s(t)$ è quello di applicare queste ultime tre formule.

Tuttavia, possiamo sfruttare la proprietà di traslazione temporale per risparmiare qualche calcolo, in particolare, come vedremo, quello dei coefficienti b_n .

Infatti, se poi trasliamo il nostro segnale verso sinistra di un tratto pari a $T/4$ (cioè lo trasliamo di $-T/4$), otteniamo il seguente nuovo segnale:



Questo nuovo segnale $x(t)$ ha la particolarità di essere pari, per cui il suo sviluppo di Fourier è una serie di soli coseni e precisamente

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2x_n \cos(2\pi f_n t)$$

con

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ x_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \end{cases}$$

Allora, possiamo trovarci questi coefficienti (cioè dobbiamo risolvere due integrali) e poi possiamo applicare la proprietà di traslazione nel tempo, secondo la quale lo sviluppo di $s(t)$ sarà

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2s_n \cos(2\pi f_n t)$$

con

$$s_n = x_n e^{-j2\pi f_n \left(-\frac{T}{4}\right)}$$

Facciamo allora i calcoli: lo sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$ (che è l'onda quadra) è stato già trovato in precedenza ed era

$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2A \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cos(2\pi f_n t)$$

dove cioè

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{A}{2} \\ x_n &= 2A \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

Possiamo allora affermare che i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale $s(t)$ sono

$$\begin{aligned} s_0 &= x_0 = \frac{A}{2} \\ s_n &= x_n e^{-j2\pi f_n \alpha} = 2A \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{j2\pi f_n \frac{T}{4}} \end{aligned}$$

per cui il suddetto sviluppo è

$$s(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=+1}^{+\infty} 2A \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{j2\pi f_n \frac{T}{4}} \cos(2\pi f_n t)$$

PROPRIETÀ DI INVERSIONE DELL'ASSE

Consideriamo sempre il segnale generico $x(t)$ periodico di periodo T , del quale supponiamo di conoscere lo sviluppo in serie di Fourier (rappresentato dai coefficienti x_n). Se ribaltiamo il segnale rispetto all'asse delle ordinate, otteniamo il nuovo segnale

$$z(t) = x(-t)$$

sempre ovviamente periodico di periodo T . Allora, si dimostra (in modo del tutto analogo ai casi precedenti, ossia tramite l'applicazione della semplice definizione) che lo sviluppo in serie di Fourier di $z(t)$ ha come coefficienti le quantità

$$Z_n = X_{-n}$$

PROPRIETÀ DI CONVOLUZIONE

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due generici segnali periodici con lo stesso periodo T . Di entrambi i segnali supponiamo di conoscere lo sviluppo in serie di Fourier: siano x_n e y_n i coefficienti dei rispettivi sviluppi. Consideriamo adesso un nuovo segnale che si ottenga effettuando il prodotto di convoluzione tra $x(t)$ e $y(t)$: quindi, per definizione di prodotto di convoluzione tra due segnali periodici, si ha che

$$z(t) = x(t) * y(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t-t)dt$$

Si dimostra ancora una volta che anche $z(t)$ è un segnale periodico di periodo T : noi vogliamo adesso dimostrare che il suo sviluppo in serie di Fourier presenta come coefficienti il prodotto dei rispettivi coefficienti degli sviluppi di $x(t)$ e $y(t)$, ossia

$$Z_n = X_n Y_n$$

Applichiamo sempre la definizione di coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale $z(t)$:

$$z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t)e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t-t)dt \right] e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Nelle ipotesi sotto le quali noi stiamo operando sin da quando abbiamo introdotto lo sviluppo in serie di Fourier, è lecito invertire l'ordine di integrazione, per cui possiamo scrivere che

$$z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t-t)e^{-j2\pi f_n t} dt \right] dt$$

Nell'integrale più interno, quello cioè in dt , la funzione $x(\tau)$ non dipende da t , per cui la possiamo portar fuori dell'integrale e scrivere che

$$z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t-t)e^{-j2\pi f_n t} dt \right] dt$$

Adesso, operando, sempre nell'integrale più interno, il cambio di variabile $t-\tau=s$, otteniamo

$$z_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2-t}^{+T/2-t} y(s)e^{-j2\pi f_n (t+s)} ds \right] dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi f_n t} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2-t}^{+T/2-t} y(s)e^{-j2\pi f_n s} ds \right] dt$$

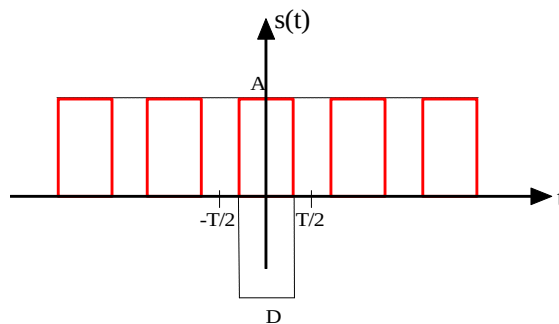
Così facendo, l'integrale più interno risulta essere y_n per definizione, per cui

$$z_n = y_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2p f_n t} dt$$

L'integrale che rimane è invece proprio x_n , per cui la tesi è dimostrata.

ESEMPIO

Consideriamo il segnale rappresentato in figura:



Si tratta evidentemente di un segnale periodico il cui periodo generico T è stato indicato in figura. Vogliamo calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier.

Tale sviluppo ha l'espressione generale

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

per cui determinarlo significa determinare i coefficienti x_n . La formula generale per il calcolo di questi coefficienti è la seguente:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2p f_n t} dt$$

Applichiamo allora tale formula: il fatto che l'integrazione sia ristretta all'intervallo $[-T/2, T/2]$ ci è subito di aiuto in quanto ci accorgiamo che, in tale intervallo, il segnale vale 0 se

$$t \in]-T/2, -D/2[\cup]D/2, T/2[$$

mentre vale semplicemente A quando

$$t \in [-D/2, D/2]$$

dove D è l'area di ogni impulso che costituisce il segnale. Di conseguenza, abbiamo che

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2p f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-D/2}^{D/2} A e^{-j2p f_n t} dt = -\frac{A}{j2p T f_n} \left[e^{jp D f_n} - e^{-jp D f_n} \right] = \\ &= \frac{A}{p T f_n} \sin(p f_n D) \end{aligned}$$

Ricordandoci adesso di come abbiamo definito la funzione seno cardinale di x , ossia

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

possiamo concludere che

$$x_n = \frac{A}{pTf_n} \sin(pf_n D) = \frac{AD}{T} \left[\frac{1}{pf_n D} \sin(pf_n D) \right] = \frac{AD}{T} \text{sinc}(f_n T)$$

In conclusione, quindi, lo sviluppo in serie di Fourier del nostro segnale è il seguente:

$$s(t) = \frac{AD}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\text{sinc}(f_n T)) e^{j2\pi f_n t}$$

Facciamo osservare che la quantità AD/T non è altro che l'area racchiusa da ciascun impulso divisa per il valore del periodo T .

APPROSSIMAZIONE FORNITA DALLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Consideriamo nuovamente la forma esponenziale dello sviluppo in serie di Fourier di un generico segnale $s(t)$ periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove i coefficienti dello sviluppo hanno espressione

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Nell'introdurre tale sviluppo in serie, abbiamo detto che esso costituisce una rappresentazione alternativa del segnale $x(t)$. Ora, supponiamo di non conoscere quale sia l'espressione dei coefficienti x_n , per cui sappiamo solo che sussiste la relazione

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Lo sviluppo a secondo membro consta di infiniti termini e solo includendoli tutti otteniamo una rappresentazione esatta di $x(t)$. Al contrario, se noi consideriamo solo un numero finito di termini, dobbiamo necessariamente ottenere una approssimazione del segnale $x(t)$. In particolare, supponiamo di limitarci a $2N+1$ coefficienti, ossia supponiamo di prendere

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove N è un numero arbitrario da noi fissato. Vogliamo allora vedere come dobbiamo scegliere i coefficienti x_n in modo da ottenere la migliore approssimazione possibile.

Dato che abbiamo parlato di “approssimazione”, è ovvio che dobbiamo anche parlare di “errore”: infatti, per un dato istante t , l’errore che noi commettiamo approssimando il valore di $x(t)$ mediante il valore dello sviluppo di Fourier limitato a $2N+1$ coefficienti è pari a

$$e(t) = x(t) - \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Allora, dato che $e(t)$ è a sua volta un segnale, la migliore approssimazione di $x(t)$ si ottiene per quei coefficienti x_n in corrispondenza dei quali la potenza associata ad $e(t)$ risulta la minima possibile. Il nostro obbiettivo diventa dunque quello di determinare x_n tale che la potenza di $e(t)$ sia minima.

Per definizione, tale potenza vale

$$P_e = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |e(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt$$

Rimandando alla fine il calcolo del limite, vediamo quanto vale l’integrale: sostituendo l’espressione di $e(t)$ e quella del suo complesso coniugato, otteniamo

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} \left[x(t) - \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \right] \left[x(t) - \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \right]^* dt$$

Il complesso coniugato è un operatore lineare, per cui possiamo portarlo dentro le parentesi quadre e successivamente dentro la sommatoria:

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} \left[x(t) - \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \right] \left[(x(t))^* - \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* e^{-j2\pi f_n t} \right] dt$$

Eseguendo adesso il prodotto all’interno dell’integrale, otteniamo 4 diversi integrali:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt &= \int_{-T}^{+T} x(t)(x(t))^* dt + \int_{-T}^{+T} x(t) \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt - \int_{-T}^{+T} (x(t))^* \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} dt + \\ &+ \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt \end{aligned}$$

Concentriamoci sul secondo membro: la funzione integranda del primo termine è il modulo quadro di $x(t)$, per cui

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt &= \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + \int_{-T}^{+T} x(t) \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt - \int_{-T}^{+T} (x(t))^* \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} dt + \\ &+ \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt \end{aligned}$$

Nel secondo e terzo termine, possiamo scambiare sommatoria e integrale:

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + - \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} x(t)x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt - \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} (x(t))^* x_n e^{j2\pi f_n t} + \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Per comodità, nella doppia sommatoria finale, cambiamo il secondo indice in k:

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + - \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} x(t)x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt - \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} (x(t))^* x_n e^{j2\pi f_n t} + \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{k=-N}^{+N} x_k^* e^{-j2\pi f_k t} dt$$

Concentriamoci proprio su tale doppia sommatoria: intanto, abbiamo che

$$\sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{K=-N}^{+N} x_K^* e^{-j2\pi f_K t} = \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{K=-N}^{+N} x_n x_K^* e^{-j2\pi f_K t} e^{j2\pi f_n t}$$

Sviluppando qualche termine della sommatoria interna abbiamo quanto segue:

$$\sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{K=-N}^{+N} x_K^* e^{-j2\pi f_K t} = \sum_{n=-N}^{+N} [\dots + x_n x_{-1}^* e^{-j2\pi f_{-1} t} e^{j2\pi f_n t} + x_n x_0^* e^{j2\pi f_0 t} + x_n x_1^* e^{-j2\pi f_1 t} e^{j2\pi f_n t} + \dots]$$

Non è difficile osservare che quei prodotti valgono 0 quando $n \neq K$ mentre valgono $x_n x_n^*$ altrimenti: di conseguenza, possiamo concludere che

$$\sum_{n=-N}^{+N} x_n e^{j2\pi f_n t} \sum_{K=-N}^{+N} x_K^* e^{-j2\pi f_K t} = \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2$$

e quindi, tornando alla relazione di prima, abbiamo che

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + - \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} x(t)x_n^* e^{-j2\pi f_n t} dt - \sum_{n=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} (x(t))^* x_n e^{j2\pi f_n t} + \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2 dt$$

Ora, nel secondo termine a secondo membro possiamo portare fuori dal segno di integrale il coefficiente x_n^* e lo stesso possiamo fare nel terzo termine con x_n : otteniamo

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + - \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt - \sum_{n=-N}^{+N} x_n \int_{-T}^{+T} (x(t))^* e^{j2\pi f_n t} + \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2 dt$$

Adesso, se noi poniamo

$$a_n = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

$$a_n^* = \int_{-T}^{+T} (x(t))^* e^{j2\pi f_n t} dt$$

è ovvio che questi due valori sono semplicemente delle costanti (ovviamente al variare di n), per cui abbiamo che

$$\int_{-T}^{+T} e(t)(e(t))^* dt = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + - \sum_{n=-N}^{+N} a_n x_n^* - \sum_{n=-N}^{+N} a_n^* x_n + \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2 dt$$

Andando adesso nella definizione di potenza assegnata al segnale $e(t)$, possiamo dunque dire che

$$P_e = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt + - \sum_{n=-N}^{+N} a_n x_n^* - \sum_{n=-N}^{+N} a_n^* x_n + \int_{-T}^{+T} \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2 dt \right]$$

Abbiamo detto che il nostro scopo è quello di determinare x_n in modo tale che P_e risulti minima. Allora ciò che dovremmo fare è calcolare la derivata di P_e rispetto ad x_n , porla uguale a 0 e ricavarne il valore di x_n . Anzi, ricordando che gli x_n sono in generale complessi, dobbiamo calcolare due derivate parziali di P_e , una rispetto a $\text{Re}(x_n)$ e una rispetto a $\text{Im}(x_n)$: imponendo che entrambe queste derivate sia nulle, troviamo i valori di $\text{Re}(x_n)$ e $\text{Im}(x_n)$ in corrispondenza dei quali P_e è la minima possibile.

Facendo i calcoli, si ottiene che i valori di quei due coefficienti sono proprio quelli dati dalla definizione di sviluppo in serie di Fourier, ossia

$$\begin{aligned} \text{Re}(x_n) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt \\ \text{Im}(x_n) &= -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \end{aligned}$$

Questo sta a significare che *volendo limitare lo sviluppo in serie*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

ad un numero finito (pari a $2N+1$) di termini, la migliore approssimazione è quella che si ottiene prendendo come coefficienti x_n proprio quelli dello sviluppo in serie di Fourier.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>