

Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 3 - Trasformata di Fourier (I)

Definizione.....	2
Proprietà generali	3
Osservazione: analogie con lo sviluppo in serie di Fourier	4
Esempio: trasformata del rettangolo	5
Esempio: trasformata del segnale esponenziale positivo	7
Esempio: trasformata del segnale esponenziale negativo	9
Proprietà della trasformata di Fourier.....	9
Proprietà di linearità	9
<i>Esempio</i>	10
Proprietà di traslazione nel tempo.....	11
<i>Esempio: rettangolo traslato</i>	12
Proprietà di traslazione in frequenza.....	13
<i>Esempio</i>	13
Trasformata del prodotto di convoluzione	15
<i>Esempio: convoluzione di due rettangoli</i>	16
Proprietà di modulazione.....	17
Proprietà di scala	18
<i>Conseguenza: ribaltamento temporale di un segnale</i>	19
Proprietà energetica	19
Proprietà di derivazione nel tempo	20
<i>Conseguenza: derivazione nel tempo di ordine n</i>	21
<i>Esempio</i>	21
<i>Esempio</i>	23
<i>Esempio</i>	23
Proprietà di derivazione in frequenza	24
<i>Conseguenza</i>	24
Proprietà di integrazione nel tempo	25
<i>Osservazione</i>	26
<i>Esempio</i>	26
Proprietà: segnale coniugato	27
Proprietà di dualità	28
<i>Esempio</i>	28

DEFINIZIONE

Sappiamo che, dato un segnale $x(t)$, reale o complesso, PERIODICO, è possibile rappresentarlo, oltre che con la sua normale espressione analitica, mediante il seguente **sviluppo in serie di Fourier**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove $f_n = n/T$ è la cosiddetta **frequenza**, dove T è il periodo del segnale e dove i coefficienti dello sviluppo hanno espressione

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt$$

Si tratta cioè di esprimere $x(t)$ come somma di infiniti *segnali esponenziali* del tipo $x_n e^{j2\pi f_n t}$.

Adesso vogliamo trovare un altro strumento attraverso cui è possibile rappresentare un segnale.

Sia perciò $s(t)$ un generico segnale (reale o complesso). Facciamo l'ipotesi (almeno per il momento) che esso NON SIA PERIODICO, il che significa che non ammette lo sviluppo in serie di Fourier citato poco fa. Si definisce invece **trasformata di Fourier** di $s(t)$ (o anche **spettro di ampiezza complessa** di $s(t)$ o semplicemente **spettro**) la funzione

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Si tratta evidentemente di una funzione nella variabile f (che prende ancora una volta il nome di **frequenza**) e, in generale, si tratta di una funzione complessa.

E' abbastanza facile verificare che, nota la trasformata di Fourier $S(f)$ di un segnale $s(t)$, è possibile determinare $s(t)$ mediante una operazione di **antitrasformazione di Fourier**:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

Quest'ultimo concetto proviene da un risultato fondamentale (che non dimostriamo): se esiste, la trasformata di Fourier di un certo segnale è unica. Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra ciascun segnale e la sua trasformata di Fourier (se esiste).

Il significato concreto della formula di antitrasformazione è il seguente: è possibile esprimere $s(t)$ come somma di infiniti segnali esponenziali del tipo $S(f) e^{j2\pi f t}$: ciascuno di questi segnali è contraddistinto da un **modulo** e da una **fase**, che sono evidentemente dati da

$$M(f) = |S(f) e^{j2\pi f t}| = |S(f)|$$

$$\phi(f) = \arg[S(f) e^{j2\pi f t}] = \arg[S(f)] + 2\pi f t$$

Viene da chiedersi quando esiste la trasformata di Fourier di un segnale. E' subito chiaro che le condizioni di esistenza della trasformata di Fourier sono quelle necessarie per la convergenza dei due integrali forniti nelle definizioni date prima. Senza però esaminare nel dettaglio queste condizioni, ci limitiamo a citare un solo risultato fondamentale: dato un segnale a-periodico $s(t)$, esso ammette certamente trasformata di Fourier se è ad energia finita.

Quindi, il fatto che un segnale sia ad energia finita è condizione sufficiente perché esista la sua trasformata di Fourier. Ovviamente, il fatto che si tratti di una condizione sufficiente e non necessaria significa che, nel caso il segnale non sia ad energia finita, è comunque possibile che ammetta la trasformata. Vedremo infatti che questo accade per i **segnali periodici**, che sono notoriamente segnali ad energia nulla (e potenza finita).

Ad ogni modo, salvo diverse specifiche, d'ora in poi noi considereremo sempre segnali ad energia finita, per i quali quindi è possibile calcolare la trasformata. Vale la pena allora ricordare che l'ipotesi di avere un segnale $s(t)$ ad energia finita equivale a richiedere che sia reale o al più nulla la quantità

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

e ricordiamo anche che un segnale ad energia finita è a potenza infinita.

PROPRIETÀ GENERALI

Facciamo qualche ragionamento sulla trasformata $S(f)$ di un segnale $s(t)$ che goda di qualche proprietà particolare: intanto, se applichiamo la definizione data prima e le formule di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

abbiamo che

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt}_{\text{Re}(S(f))} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt}_{\text{Im}(S(f))} \quad (*)$$

Abbiamo cioè suddiviso la trasformata di $s(t)$ come somma di una parte reale e di una parte complessa. Il secondo integrale, ossia $\text{Im}(S(f))$, risulta evidentemente nullo quando la funzione integranda è dispari (in quanto l'intervallo di integrazione è simmetrico): dato che la funzione Seno è già dispari, perché il suo prodotto con $s(t)$ sia dispari, è necessario che $s(t)$ sia reale e pari. Possiamo dunque concludere affermando che la trasformata di Fourier di un segnale $s(t)$ REALE e PARI è una funzione reale e precisamente è

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Al contrario, la trasformata di Fourier di un segnale $s(t)$ che non sia REALE e PARI è certamente una funzione complessa.

Inoltre, dalla stessa relazione (*) e con ragionamenti analoghi, è evidente che la trasformata di Fourier di un segnale $s(t)$ REALE e DISPARI è puramente immaginaria e precisamente vale

$$S(f) = j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi f t) dt$$

Infatti, in queste ipotesi, ad annullarsi è il primo integrale di quella relazione, visto che risulta dispari la sua funzione integranda.

Ancora in base alla relazione (*) e in base al fatto che la funzione Coseno è pari, mentre la funzione Seno è dispari, si nota subito che, se $s(t)$ è reale, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[S(f)] &= \operatorname{Re}[S(-f)] \\ \operatorname{Im}[S(f)] &= -\operatorname{Im}[S(-f)] \end{aligned}$$

Queste relazioni dicono in pratica che la parte reale della trasformata di Fourier di un segnale reale è una funzione pari, mentre il coefficiente della parte immaginaria è una funzione dispari (ovviamente rispetto alla variabile f).

Queste due proprietà possono essere sintetizzate scrivendo che

$$S(-f) = [S(f)]^*$$

dove il simbolo “*” indica ovviamente il “complesso coniugato”.

Ancora, questa stessa proprietà si può esprimere in termini di modulo e fase della trasformata di Fourier: è infatti evidente che

$$\begin{aligned} |S(f)| &= |S(-f)| \\ \angle S(f) &= -\angle S(-f) \end{aligned}$$

Osservazione: analogie con lo sviluppo in serie di Fourier

Le proprietà appena elencate per la $S(f)$ sono del tutto analoghe a quelle viste a suo tempo per lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico. Infatti, per lo sviluppo di Fourier abbiamo trovato quanto segue:

- intanto, abbiamo visto che i coefficienti dello sviluppo di Fourier sono in generale complessi e li abbiamo espressi nella forma

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt}_{\operatorname{Re}(x_n)} + j \underbrace{\left(-\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \right)}_{\operatorname{Im}(x_n)}$$

In modo analogo, abbiamo qui visto che anche la trasformata di Fourier è in generale una funzione complessa della variabile reale f

$$S(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi f t) dt}_{\text{Re}(S(f))} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi f t) dt}_{\text{Im}(S(f))}$$

- abbiamo poi osservato che i coefficienti x_n e x_{-n} presentano la stessa parte reale e la parte immaginaria cambiata di segno ed abbiamo espresso questa proprietà mediante la formula

$$X_n = X_{-n}^*$$

In modo più o meno analogo, per la trasformata di Fourier abbiamo trovato che $S(-f) = S^*(f)$.

- ancora, abbiamo trovato che i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale $x(t)$ (periodico) reale e pari sono tutti reali e uguali a

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

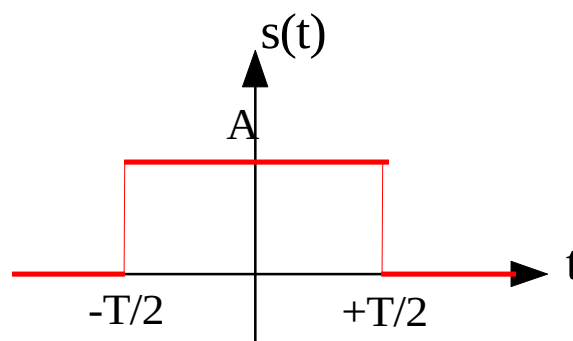
In modo ancora una volta analogo, abbiamo qui trovato che la trasformata di Fourier di un segnale $s(t)$ reale e pari è una funzione reale data da

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi f t) dt$$

Ad ogni modo, tutte queste analogie saranno ancora più chiare quando verrà esaminata la trasformata di Fourier di un segnale periodico.

ESEMPIO: TRASFORMATA DEL RETTANGOLO

Consideriamo il segnale $s(t) = A \text{rect} \frac{t}{T}$, il cui andamento è quello rappresentato in figura:



²T), per cui possiamo calcolarne la trasformata di Fourier. Per farlo, applichiamo semplicemente la

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

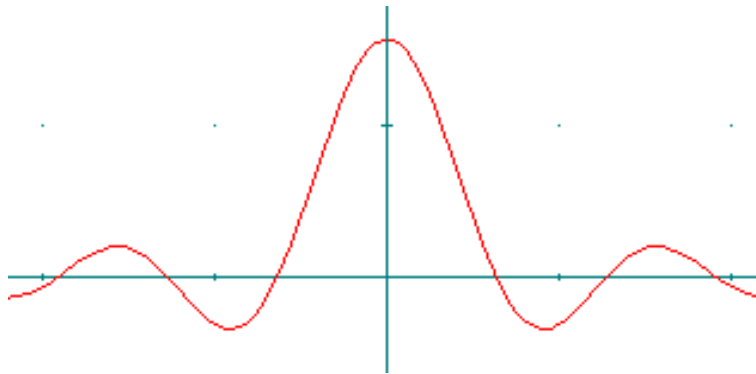
Dato che $s(t)$ è nulla al di fuori dell'intervallo $[-T/2, T/2]$ e dato che, all'interno di tale intervallo, essa vale semplicemente A , possiamo scrivere che

$$S(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} Ae^{-j2\pi ft} dt = -\frac{A}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/2}^{+T/2} = \frac{A}{j2\pi f} \left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT} \right]$$

Applicando le formule di Eulero, abbiamo infine che

$$S(f) = \frac{A}{j2\pi f} \left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT} \right] = \frac{A}{\pi f} \frac{\left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT} \right]}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT)$$

L'andamento qualitativo di questa funzione è il seguente:

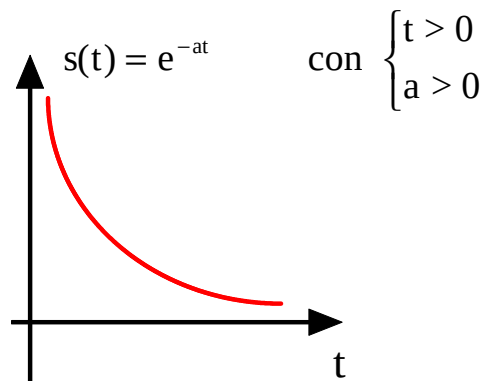


Osserviamo che il punto in cui la curva di $S(f)$ interseca l'asse delle ascisse (ossia l'asse delle frequenze) è AT ed è evidentemente pari all'area del segnale $s(t)$: possiamo cioè scrivere che

$$S(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)dt = AT$$

ESEMPIO: TRASFORMATA DEL SEGNALE ESPONENZIALE POSITIVO

Consideriamo adesso il **segnale esponenziale**:



Anche in questo caso, abbiamo già trovato in precedenza che si tratta di un segnale ad energia finita (la quale vale $1/2a$). Calcoliamone la trasformata di Fourier applicando la definizione:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Il segnale $s(t)$ è nullo prima di 0, per cui possiamo restringere l'intervallo di integrazione e successivamente procedere con i calcoli:

$$S(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{-1}{a + j2\pi f} \left[e^{-(a + j2\pi f)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Vediamo di fare qualche osservazione su questa trasformata: intanto, possiamo razionalizzarla scrivendo che

$$S(f) = \frac{a - j2\pi f}{a^2 - (j2\pi f)^2} = \frac{a - j2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Separando adesso la parte reale da quella immaginaria, troviamo che

$$S(f) = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Si tratta quindi di una funzione complessa, in accordo al fatto per cui $s(t)$ è una funzione reale ma NON è pari.

Possiamo anche verificare la proprietà secondo cui, per $s(t)$ generico, si ha che

$$S(-f) = [S(f)]^*$$

Infatti, si ha che

$$S(-f) = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi(-f)}{a^2 + (2\pi f)^2} = \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} + j \frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

ed effettivamente questa è la complessa coniugata della $S(f)$.

Vediamo inoltre quanto valgono il modulo e la fase di $S(f)$:

$$|S(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(f))^2 + (\operatorname{Im}(f))^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + (2pf)^2}\right)^2 + \left(\frac{2pf}{a^2 + (2pf)^2}\right)^2}$$

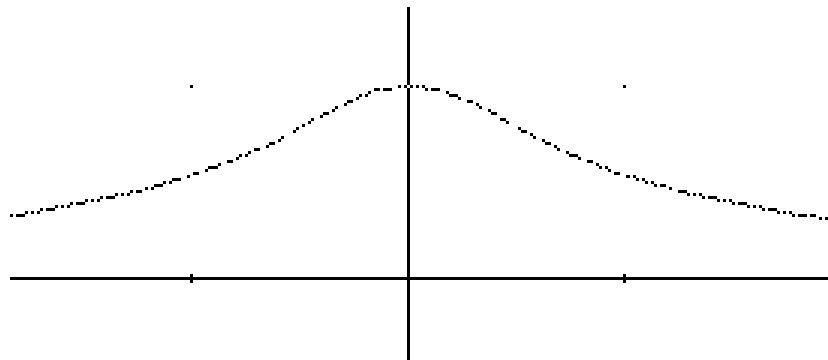
$$\angle S(f) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2pf}{a^2 + (2pf)^2}}{\frac{a}{a^2 + (2pf)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{2pf}{a}$$

Da queste relazioni si evidenziano le proprietà per cui il modulo di $S(f)$ è una funzione pari, mentre la fase è una funzione dispari: infatti, si nota subito che

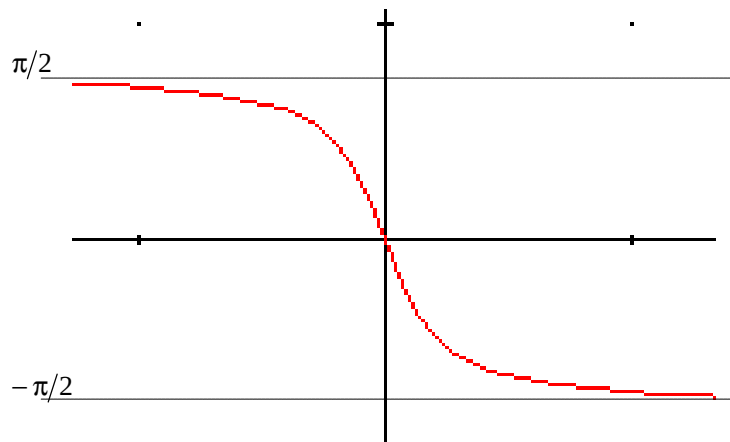
$$|S(f)| = |S(-f)|$$

$$\angle S(f) = -\angle S(-f)$$

L'andamento grafico del modulo di $S(f)$ in funzione f è il seguente:

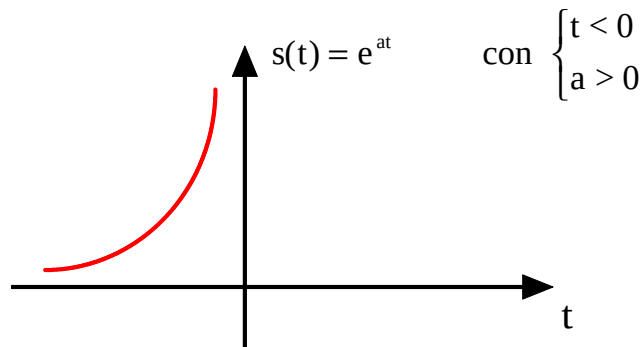


Quello, invece, della fase è il seguente:



ESEMPIO: TRASFORMATA DEL SEGNALE ESPONENZIALE NEGATIVO

Consideriamo un altro tipo di segnale esponenziale e precisamente il seguente:



Anche in questo caso, ovviamente, il segnale risulta ad energia finita (pari sempre a $1/2a$): è facile verificare che la sua trasformata è

$$S(f) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

Il modulo di $S(f)$ è lo stesso di quello trovato nel caso precedente, mentre la fase è

$$\angle S(f) = \operatorname{arctg} \frac{a}{2\pi f}$$

cioè l'inverso del caso precedente.

Proprietà della trasformata di Fourier

PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due segnali tali da ammettere entrambi trasformata di Fourier e siano $X(f)$ e $Y(f)$ le rispettive trasformate. Se effettuiamo una loro **combinazione lineare**, otteniamo un nuovo segnale $z(t) = ax(t) + by(t)$ che si dimostra ammettere anch'esso trasformata di Fourier. Allora, vogliamo far vedere che tale trasformata di Fourier è semplicemente

$$Z(f) = aX(f) + bY(f)$$

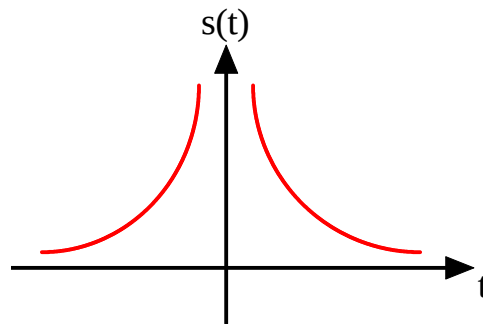
La dimostrazione è immediata se si applica la definizione di trasformata:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = aX(f) + bY(f)$$

Questa proprietà ci può essere utile quando dobbiamo calcolare la trasformata di un segnale dalla espressione particolarmente complessa: possiamo provare ad esprimere il suddetto segnale come una opportuna combinazione lineare di segnali dei quali conosciamo (o, comunque, possiamo calcolare facilmente) la trasformata di Fourier. Se ci riusciamo, la trasformata del nostro segnale sarà combinazione lineare delle rispettive trasformate.

Esempio

Un esempio tipico di applicazione di questa proprietà è il seguente: supponiamo di voler calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s(t)$ il cui andamento temporale è



Possiamo esprimere, in forma analitica, questo segnale sfruttando i due segnali esponenziali visti negli esempi in precedenza: in particolare, si ha che

$$s(t) = u(t)e^{-at} + u(-t)e^{at} \quad \text{con} \begin{cases} a > 0 \\ t \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Allora, la trasformata di Fourier di $s(t)$ si può calcolare o mediante la definizione oppure applicando la proprietà di linearità: posto infatti

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at} & t > 0 \\ y(t) &= e^{at} & t < 0 \end{aligned}$$

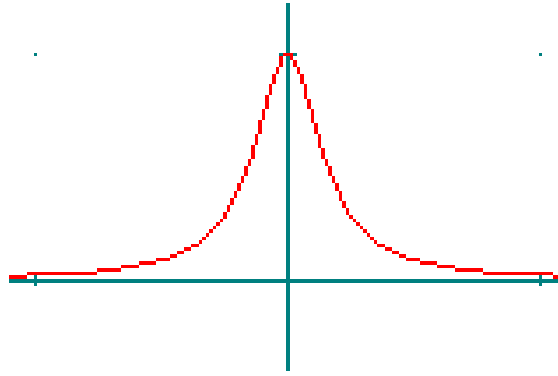
abbiamo che $S(f) = X(f) + Y(f)$.

Ricordando quanto trovato in precedenza, possiamo dunque scrivere che

$$S(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Si nota come $S(f)$ sia risultata una funzione reale, in accordo al fatto per cui $s(t)$ è una funzione reale e pari. Inoltre, la stessa $S(f)$ risulta essere una funzione pari.

L'andamento di questa funzione è il seguente:



Si nota immediatamente che questa funzione si estende teoricamente da $-\infty$ a $+\infty$: si dice allora che il segnale $s(t)$ è a **banda illimitata** (o anche che esso ha *spettro di estensione infinita*), in contrapposizione a quei segnali il cui spettro $S(f)$ si estende invece solo ad un intervallo di estensione finita (nel qual caso si parla di segnali a **banda limitata**).

PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE NEL TEMPO

Sia $x(t)$ un segnale di cui si conosca la trasformata di Fourier $X(f)$. Consideriamo il segnale $z(t)$ che si ottiene traslando $x(t)$ di una quantità α : quindi $z(t) = x(t - \alpha)$. Si dimostra che anche $z(t)$ ammette trasformata di Fourier e noi vogliamo far vedere che essa si ottiene, senza ulteriori calcoli, a partire da $X(f)$ mediante la formula

$$Z(f) = X(f)e^{-j2\pi f\alpha}$$

La dimostrazione si fa sempre mediante la definizione di trasformata:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \alpha)e^{-j2\pi ft} dt$$

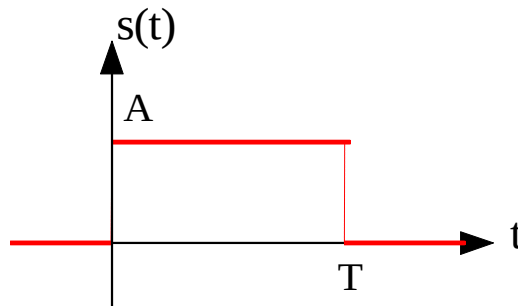
Facendo il cambio di variabile $s=t-\alpha$, otteniamo

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi f(s+\alpha)} ds = e^{-j2\pi f\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi fs} ds = e^{-j2\pi f\alpha} X(f)$$

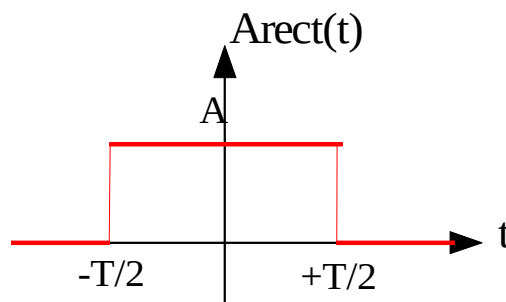
In definitiva, quindi, questa proprietà ci dice che, se conosciamo la trasformata del segnale $x(t)$, possiamo traslare il segnale stesso a nostro piacimento e ottenere la nuova trasformata senza ulteriori calcoli. Detto al contrario, se abbiamo un certo segnale $z(t)$ del quale vogliamo la trasformata, possiamo provare ad interpretarlo come la traslazione di un altro segnale $x(t)$ a noi noto, o comunque del quale possiamo facilmente calcolarci la trasformata $X(f)$, in modo da calcolare $Z(f)$ a partire semplicemente da $X(f)$ moltiplicandolo per quel fattore esponenziale costante (e che dipende dalla traslazione stessa).

Esempio: rettangolo traslato

Possiamo applicare quest'ultima proprietà per il calcolo della trasformata del rettangolo traslato. Per esempio, supponiamo di volere la trasformata del segnale



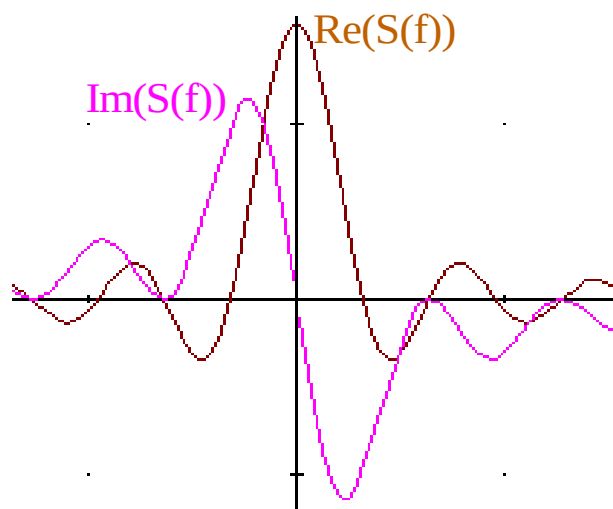
E' evidente che questo non è altro che il segnale rettangolo



traslato però di $T/2$ verso destra: dato allora che la trasformata di $Arect \frac{t}{T}$ vale $ATsinc(fT)$, possiamo concludere che la trasformata di $s(t)$ è

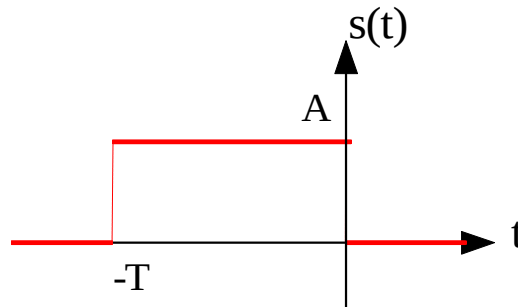
$$S(f) = ATe^{-j2\pi f\left(\frac{T}{2}\right)}sinc(fT) = ATe^{-j\pi fT}sinc(fT)$$

L'andamento qualitativo della parte reale e di quella immaginaria di questo segnale (per $A=1$ e $T=0.5\pi$) sono i seguenti:



Il fatto che sia la parte reale sia la parte immaginaria di $S(f)$ siano di estensione infinita ci dice ancora una volta che il segnale in questione è *a banda illimitata*.

Ovviamente, se il segnale $s(t)$ fosse stato



ossia il rettangolo traslato di $-T/2$, la sua trasformata sarebbe stata

$$S(f) = A T e^{j\pi f T} \text{sinc}(fT)$$

PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE IN FREQUENZA

Sia $x(t)$ un segnale del quale supponiamo di conoscere la trasformata di Fourier $X(f)$. Vogliamo far vedere che, considerando il segnale $z(t) = x(t)e^{j2\pi\alpha t}$, esso ha come trasformata di Fourier la funzione

$$Z(f) = X(f - \alpha)$$

La dimostrazione si effettua ancora un volta mediante la definizione:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi(\alpha - f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f - \alpha)t} dt = X(f - \alpha)$$

Questa proprietà dice dunque che *una traslazione di α nel dominio della frequenza equivale ad una moltiplicazione per il termine esponenziale $e^{j2\pi\alpha t}$ nel dominio del tempo*.

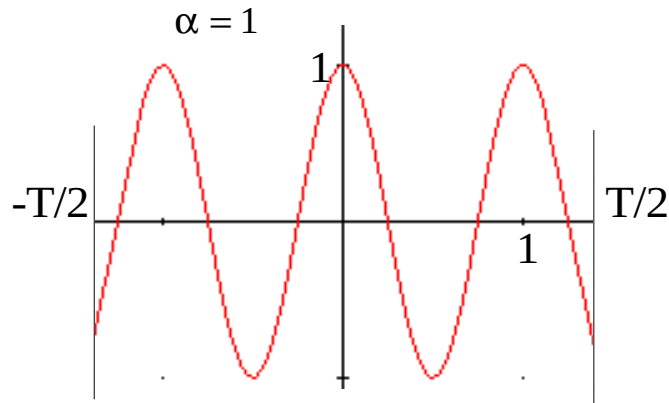
Esempio

Consideriamo il segnale

$$g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi\alpha t)$$

il quale, ricordando le proprietà del “rect”, non è altro che il segnale $A \cos(2\pi\alpha t)$ limitato però

all'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$:



Ne vogliamo calcolare la trasformata di Fourier.

La presenza del segnale rettangolo ci induce subito a fare dei calcoli tali da poterci comunque ricondurre al calcolo della sua trasformata, che sappiamo essere $AT\text{sinc}(fT)$, ed alla applicazione di qualcuna tra le proprietà finora viste.

Applicando le formule di Eulero possiamo esprimere in maniera a noi più utile il segnale $g(t)$: abbiamo infatti che

$$g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \left[\frac{e^{j2\pi\alpha t} + e^{-j2\pi\alpha t}}{2} \right] = \frac{A}{2} e^{j2\pi\alpha t} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{A}{2} e^{-j2\pi\alpha t} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Abbiamo dunque trovato che il nostro segnale $g(t)$ è la somma di due distinti segnali: allora, in base alla proprietà di linearità, possiamo intanto affermare che la $G(f)$ sarà la somma delle rispettive trasformate; quindi, posto

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi\alpha t} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$y(t) = \frac{A}{2} e^{-j2\pi\alpha t} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

possiamo intanto scrivere che

$$G(f) = X(f) + Y(f)$$

A questo punto, si osserva che $x(t)$ è il rettangolo di altezza $A/2$ moltiplicato per il termine esponenziale $e^{j2\pi\alpha t}$: applicando perciò la proprietà di traslazione nel tempo, abbiamo che

$$X(f) = \frac{A}{2} T \text{sinc}((f - \alpha)T)$$

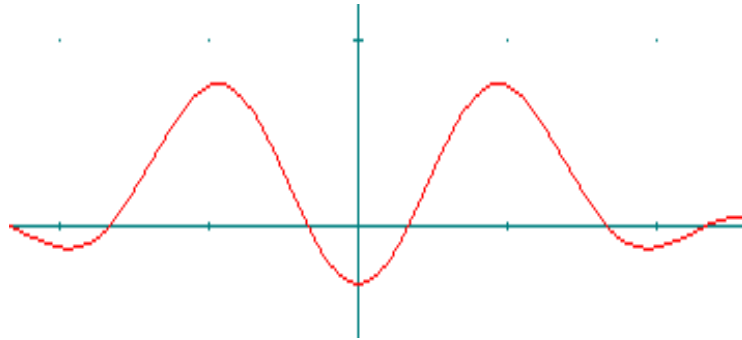
In modo analogo, si vede che

$$Y(f) = \frac{A}{2} T \text{sinc}((f + \alpha)T)$$

In conclusione, la trasformata del nostro segnale è

$$Z(f) = \frac{A}{2} T \text{sinc}((f - \alpha)T) + \frac{A}{2} T \text{sinc}((f + \alpha)T)$$

L'andamento qualitativo di questa funzione è il seguente:



Anche questa funzione ha estensione infinita, per cui il segnale in questione è a *banda illimitata*.

TRASFORMATTA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due segnali dei quali supponiamo di conoscere le trasformate di Fourier $X(f)$ e $Y(f)$. Consideriamo anche il segnale $z(t)$ che si ottiene dalla **convoluzione** di $x(t)$ e $y(t)$, ossia

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Si dimostra che anche questo segnale $z(t)$ ammette trasformata di Fourier: in particolare, vogliamo far vedere che essa è data da

$$Z(f) = X(f)Y(f)$$

Applicando ancora una volta la definizione di trasformata, abbiamo che

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau e^{-j2\pi ft}dt$$

Nelle ipotesi in cui stiamo lavorando, possiamo scambiare l'ordine di integrazione, per cui abbiamo che

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt d\tau$$

La funzione $x(\tau)$ non dipende dalla variabile di integrazione t dell'integrale più interno, per cui possiamo portarla fuori: quindi

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt \right] d\tau$$

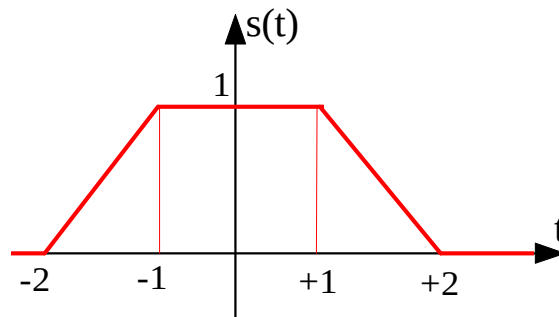
In questo modo, si nota che l'integrale più interno non sia altro che la trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ traslato di una quantità pari a τ : quindi, applicando la proprietà di traslazione nel tempo, possiamo scrivere che

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)Y(f)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = Y(f)X(f)$$

Quindi, questa proprietà ci dice che una convoluzione nel dominio del tempo equivale ad un semplice prodotto nel dominio della frequenza.

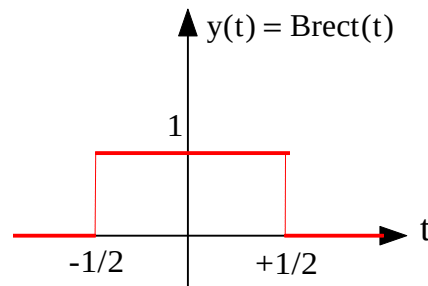
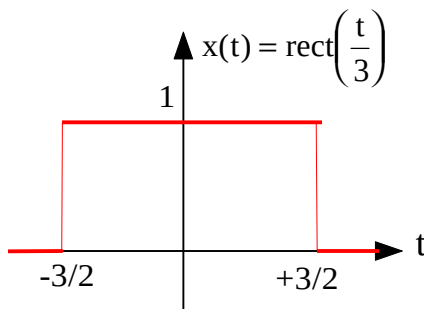
Esempio: convoluzione di due rettangoli

Consideriamo il seguente segnale $s(t)$:



Ne vogliamo calcolare la trasformata. Un primo modo è ovviamente quello di trovare l'espressione analitica di questo segnale (cosa non difficile visto che abbiamo una funzione lineare e tratti) e di calcolarne successivamente la trasformata applicando la definizione.

Tuttavia, possiamo risparmiarci un po' di calcoli ricordando che questo trapezio può essere visto come la convoluzione dei seguenti segnali:



Sulla base di ciò, applicando l'ultima proprietà dimostrata, il calcolo di $Z(f)$ diventa immediato:

$$Z(f) = X(f)Y(f) = [3\text{sinc}(f)][\text{sinc}(3f)]$$

L'andamento di questa funzione è come quello della funzione seno cardinale, con la differenza che lo smorzamento delle oscillazioni (nel dominio della frequenza) è molto più rapido.

PROPRIETÀ DI MODULAZIONE

Sia $s(t)$ un segnale del quale supponiamo di conoscere la trasformata di Fourier, che indichiamo con $S(f)$. Consideriamo il nuovo segnale $z(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t)$. Si dimostra che anch'esso ammette trasformata di Fourier: in particolare, vogliamo far vedere che la sua trasformata è

$$Z(f) = \frac{1}{2} S(f - f_0) + \frac{1}{2} S(f + f_0)$$

Per prima cosa, possiamo applicare le formule di Eulero per modificare l'espressione del segnale $z(t)$: possiamo infatti scrivere che

$$z(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t) = s(t) \left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right] = \frac{s(t)}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{s(t)}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Così facendo abbiamo ottenuto che il segnale $z(t)$ è la somma di due segnali, per cui, posto

$$x(t) = \frac{s(t)}{2} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = \frac{s(t)}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

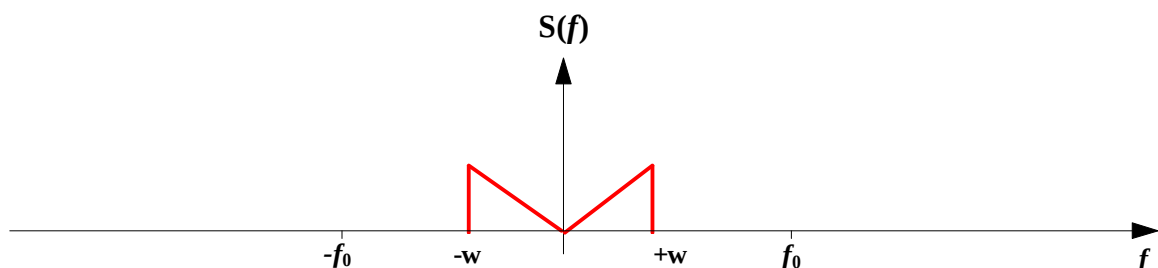
possiamo intanto applicare la proprietà di linearità e scrivere che

$$Z(f) = X(f) + Y(f)$$

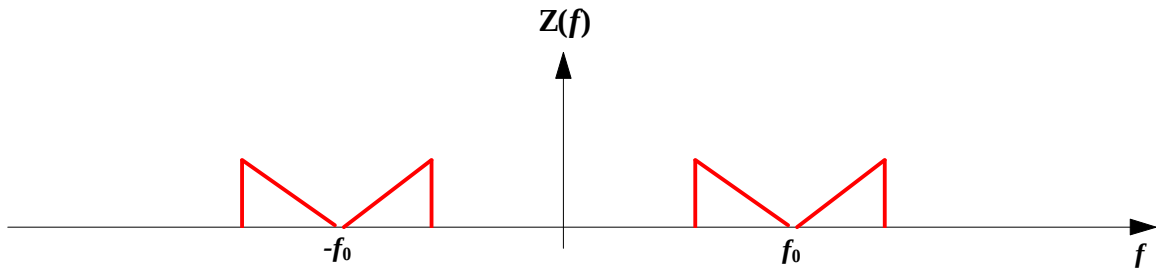
Ora, sia $x(t)$ e sia $y(t)$ consistono nel prodotto di una costante, $1/2$, con il segnale $s(t)$ e con un termine esponenziale: applicando allora la proprietà di traslazione in frequenza, abbiamo che

$$Z(f) = X(f) + Y(f) = \frac{1}{2} S(f - f_0) + \frac{1}{2} S(f + f_0)$$

Nella pratica, questa proprietà dice quanto segue: dato il segnale $x(t)$ e data la sua trasformata $S(f)$, la trasformata del segnale $z(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t)$ non è altro che la somma di due $S(f)$, ciascuna modulata in ampiezza del termine $1/2$, l'una traslata di $+f_0$ e l'altra traslata di $-f_0$. Ad esempio, se supponiamo che lo spettro (cioè la trasformata di Fourier) di $s(t)$ sia



lo spettro del segnale $z(t)$, a meno del fattore di scala $1/2$, sarà



Le ultime due figure mostrano alcune cose molto interessanti:

- in primo luogo, notiamo che, a differenza dei segnali considerati nei precedenti esempi, la funzione $S(f)$ si estende su un intervallo finito di frequenza, che abbiamo indicato con $[-w, +w]$. Si dice allora che $s(t)$ è un segnale **a banda limitata** e w prende il nome di **banda** del segnale;
- in secondo luogo, notiamo che la funzione $Z(f)$, pur essendo definita anch'essa su un intervallo di ampiezza finita, risulta diversa da $S(f)$: infatti, mentre $S(f)$ è non nulla solo in un intervallo $[-w, +w]$ centrato su $f=0$, $Z(f)$ è non nulla solo in due intervalli $[-f_0-w, -f_0+w]$ e $[+f_0-w, +f_0+w]$, simmetrici rispetto a $f=0$. In entrambi i casi, si parla di segnali a banda limitata, ma si dice che $S(f)$ è un **segnale passa-basso**, mentre $Z(f)$ è un **segnale passa-banda**. Questi concetti saranno comunque approfonditi in seguito.

PROPRIETÀ DI SCALA

Sia dato ancora il generico segnale $s(t)$ dotato di trasformata $S(f)$. Consideriamo inoltre il segnale $z(t) = s(at)$. Anche questo segnale si dimostra avere trasformata di Fourier e noi vogliamo far vedere che essa vale

$$Z(f) = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad \text{con} \quad \frac{1}{|a|} = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{se } a > 0 \\ -\frac{1}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per la dimostrazione, applichiamo la definizione di trasformata di Fourier supponendo per il momento che sia $a > 0$: abbiamo che

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(at) e^{-j2\pi ft} dt$$

Facendo il cambio di variabile $\tau = at$, otteniamo

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

Nel caso in cui, invece, sia $a < 0$, la differenza con il caso precedente sta nel fatto che, a seguito del cambio di variabile, gli estremi di integrazione si invertono, ossia diventano $+\infty$ e $-\infty$; di conseguenza, abbiamo che

$$Z(f) = \int_{+\infty}^{-\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{a}} d\tau = -\frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

Conseguenza: ribaltamento temporale di un segnale

Da questa proprietà si deduce una ovvia conseguenza: infatti, se noi prendiamo $a = -1$, otteniamo che la trasformata di $z(t) = s(-t)$ è uguale a

$$Z(f) = S(-f)$$

Deduciamo la seguente proprietà: dato il segnale $s(t)$ e data la sua trasformata $S(f)$, la trasformata del segnale che si ottiene da $s(t)$ ribaltandolo rispetto all'asse delle ordinate, ossia il segnale $s(-t)$, non è altro che la funzione $S(f)$ ribaltata anch'essa rispetto all'asse delle ordinate.

PROPRIETÀ ENERGETICA

Sia $s(t)$ un segnale che ammette trasformata di Fourier e sia $S(f)$ tale trasformata: vogliamo far vedere che l'energia assegnata a questi due segnali è la stessa, ossia che

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

Intanto, ricordando che il modulo quadro di una quantità complessa è pari al prodotto della quantità stessa per il suo complesso coniugato, abbiamo che

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s^*(t) dt$$

Ora, possiamo esprimere $s(t)$ come antitrasformata di Fourier del segnale $S(f)$: abbiamo perciò

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

In modo analogo, per $s^*(t)$ abbiamo che

$$s^*(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f) e^{j2\pi ft} df$$

Sostituendo questa relazione nell'espressione dell'energia, abbiamo che

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f) e^{j2\pi f t} df \right) dt$$

Possiamo adesso scambiare l'ordine di integrazione (cosa che risulta lecita nelle ipotesi sotto cui stiamo lavorando), in modo da ottenere che

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) S^*(f) e^{j2\pi f t} dt \right) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j2\pi f t} dt \right) df$$

L'integrale interno è proprio la trasformata di Fourier di $s(t)$, per cui possiamo concludere che

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(f) S(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE NEL TEMPO

Consideriamo un segnale $s(t)$ che ammetta trasformata di Fourier e sia $S(f)$ tale trasformata. Consideriamo anche il segnale che si ottiene derivando $s(t)$ rispetto al tempo, ossia $z(t) = \frac{ds(t)}{dt}$. Si dimostra che anche questo segnale ammette trasformata di Fourier e vogliamo far vedere che essa vale

$$Z(f) = (j2\pi f) S(f)$$

E' possibile dimostrare questa relazione in due modi differenti: il primo modo consiste semplicemente nell'applicare la definizione e nel tener conto che si suppone $s(t)$ ad energia finita; il secondo modo usa invece l'antitrasformata di Fourier.

Vediamo il primo modo: applicando la definizione di trasformata di Fourier, abbiamo intanto che

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt$$

Questo integrale si può risolvere per parti: si ottiene in tal modo

$$Z(f) = \left[s(t) e^{-j2\pi f t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{d}{dt} (e^{-j2\pi f t}) dt = \left[s(t) e^{-j2\pi f t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - (-j2\pi f) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

A questo punto, ricordando l'ipotesi fondamentale secondo cui $s(t)$ è ad energia finita, è chiaro che $s(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e quando $t \rightarrow -\infty$, per cui la parentesi quadra risulta nulla e rimane

$$Z(f) = + (j2\pi f) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = (j2\pi f) S(f)$$

Il significato concreto di questa proprietà si può riassumere dicendo che *l'operazione di derivazione nel tempo di un segnale $s(t)$ ha l'effetto di esaltare le alte frequenze*: infatti, avendo trovato che

$$Z(f) = (j2\pi f)S(f)$$

è chiaro, quando il valore di f in quella relazione è particolarmente elevato, esso influenza notevolmente il valore di $Z(f)$, mentre, quando è piccolo, non incide più di tanto.

Conseguenza: derivazione nel tempo di ordine n

Questa proprietà ha una conseguenza abbastanza ovvia: infatti, se, dopo averla applicata al segnale $s'(t)$, ossia dopo aver ottenuto che

$$\text{Fourier}[s'(t)] = (j2\pi f)\text{Fourier}[s(t)]$$

la applichiamo al segnale $s''(t)$, otteniamo che la sua trasformata vale

$$\text{Fourier}[s''(t)] = (j2\pi f)\text{Fourier}[s'(t)] = (j2\pi f)^2 \text{Fourier}[s(t)]$$

Applicandola n volte, otteniamo dunque che

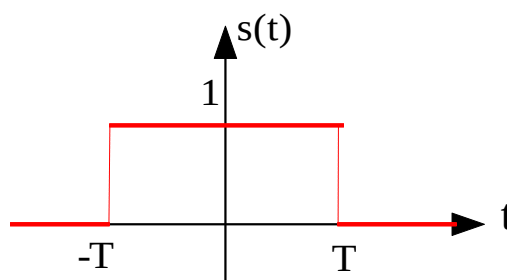
$$\text{Fourier}[s^{(n)}(t)] = (j2\pi f)^n \text{Fourier}[s(t)]$$

Da un punto di vista applicativo, questa proprietà si utilizza nel modo seguente: supponiamo di dover calcolare la trasformata di Fourier di un dato segnale $s(t)$ e supponiamo anche che questo segnale abbia una espressione particolarmente complessa; anziché calcolarci direttamente $S(f)$, possiamo provare a determinare $s'(t)$: se questo segnale ha una espressione che ci facilita il calcolo della sua trasformata, possiamo calcolare tale trasformata e poi risalire a $S(f)$ mediante la formula appena dimostrata. Se, invece, anche $s'(t)$ risulta complesso a sua volta, possiamo provare a determinare $s''(t)$ e a ripetere lo stesso ragionamento.

E' ovvio che, se è necessario andare oltre $s''(t)$, la convenienza di questa proprietà viene a mancare ed è perciò consigliabile seguire altre strade.

Esempio

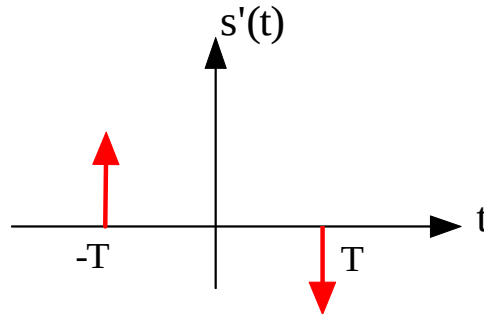
Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



Questa trasformata è stata già calcolata in precedenza. Questa volta, vogliamo effettuare il calcolo sfruttando la proprietà di derivazione nel tempo, secondo la quale

$$\text{Fourier}[s(t)] = \frac{\text{Fourier}[s'(t)]}{(j2\pi f)}$$

Vediamo allora come è fatto il segnale derivato di $s(t)$:



La sua rappresentazione analitica è

$$s'(t) = \delta(t + T) - \delta(t - T)$$

dove la funzione $\delta(t)$ è il noto **impulso di Dirac**. Quindi, il segnale $s'(t)$ non è altro che la somma di due impulsi.

Vediamo quanto vale la trasformata di $s'(t)$, applicando semplicemente la definizione:

$$\text{Fourier}[s'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t + T) e^{-j2\pi ft} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - T) e^{-j2\pi ft} dt$$

Possiamo utilizzare una proprietà di $\delta(t)$ che sarà approfondita più avanti: secondo questa proprietà, data una qualsiasi funzione $f(t)$, sussiste la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = f(t)$$

Applicando questa proprietà per il calcolo di quei due integrali, abbiamo che

$$\text{Fourier}[s'(t)] = e^{-j2\pi f(-T)} - e^{-j2\pi fT}$$

Questa relazione può essere scritta in forma migliore: infatti, applicando le formule di Eulero, abbiamo che

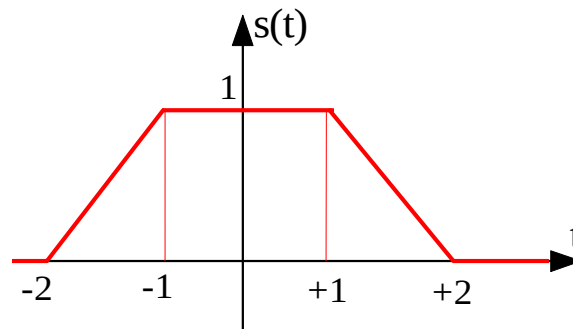
$$\text{Fourier}[s'(t)] = e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} = (2j) \frac{e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}}{2j} = 2j \sin(2\pi fT)$$

Adesso, possiamo applicare la proprietà di derivazione nel tempo: abbiamo che

$$S(f) = \frac{\text{Fourier}[s'(t)]}{j2\pi f} = \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} = 2T \text{sinc}(2fT)$$

Esempio

Consideriamo il segnale rappresentato in figura:



Abbiamo già in precedenza calcolato la sua trasformata, ottenendo

$$S(f) = [3\text{sinc}(f)][\text{sinc}(3f)]$$

Vogliamo allora calcolare quanto vale la trasformata della derivata prima di questo segnale.

Abbiamo due modi per procedere: dato che l'andamento temporale di $s(t)$ è piuttosto semplice, possiamo trovare l'espressione di $s'(t)$ e poi calcolarne la trasformata mediante la definizione; oppure, senza andare a calcolare $s'(t)$, possiamo applicare la proprietà di derivazione nel tempo: così facendo, otteniamo subito che

$$Z(f) = \text{Fourier}[s'(t)] = (j2\pi f) \text{Fourier}[s(t)] = (j2\pi f)[3\text{sinc}(f)][\text{sinc}(3f)]$$

L'espressione di questa trasformata può in verità essere semplificata: infatti, ricordando la definizione della funzione seno cardinale, abbiamo che

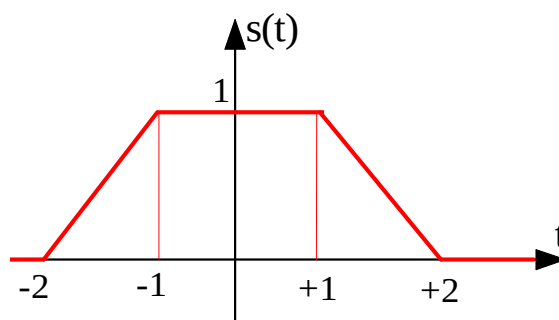
$$Z(f) = (j2\pi f)[3\text{sinc}(f)] \left[\frac{\sin(3\pi f)}{3\pi f} \right] = (j2)\text{sinc}(f)\sin(3\pi f)$$

Applicando adesso le formule di Eulero, abbiamo che

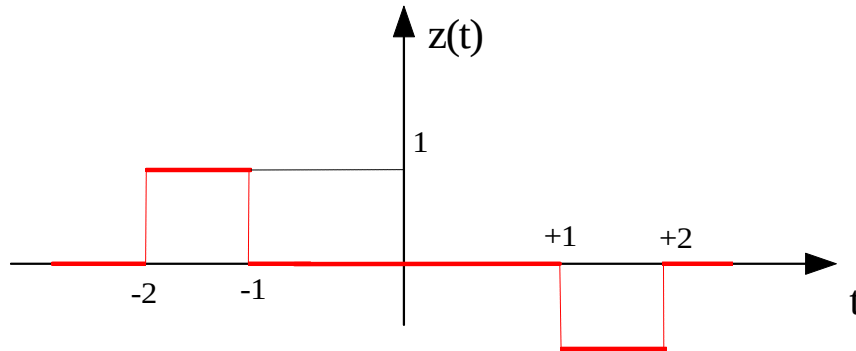
$$Z(f) = (j2)\text{sinc}(f) \left[\frac{e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f}}{2j} \right] = (e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f})\text{sinc}(f)$$

Esempio

Il problema dell'esempio precedente poteva anche essere posto in altro modo e vediamo quale. Sia dato il seguente segnale $s(t)$:



Vogliamo calcolare la sua trasformata di Fourier sapendo che la trasformata del suo segnale derivato $z(t)$, il cui andamento è



vale

$$Z(f) = (e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f}) \text{sinc}(f)$$

Applicando la proprietà di derivazione nel tempo, abbiamo immediatamente che

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{Z(f)}{j2\pi f} = \frac{(e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f}) \text{sinc}(f)}{j2\pi f} = \text{sinc}(f) \left[\frac{(e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f})}{j2\pi f} \right] = 3 \text{sinc}(f) \left[\frac{e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f}}{j2(3\pi f)} \right] = \\ &= 3 \text{sinc}(f) \frac{1}{3\pi f} \left[\frac{e^{j3\pi f} - e^{-j3\pi f}}{2j} \right] = 3 \text{sinc}(f) \frac{\sin(3\pi f)}{3\pi f} = 3 \text{sinc}(f) \text{sinc}(3f) \end{aligned}$$

PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE IN FREQUENZA

Consideriamo sempre il generico segnale $s(t)$ e la sua trasformata di Fourier $S(f)$: si può facilmente dimostrare che la funzione che si ottiene da $S(f)$ derivando rispetto a f , ossia la funzione

$Z(f) = \frac{dS(f)}{df}$, è la trasformata del segnale

$$z(t) = (-j2\pi t)s(t)$$

Conseguenza

Anche in questo caso, così come nella proprietà di derivazione nel tempo, otteniamo la relazione generale per cui la trasformata del segnale

$$z(t) = (-j2\pi t)^n s(t)$$

è la funzione $Z(f) = \frac{d^n S(f)}{df^n}$.

PROPRIETÀ DI INTEGRAZIONE NEL TEMPO

Consideriamo un generico segnale $s(t)$ che ammetta trasformata di Fourier e indichiamo con $S(f)$ tale trasformata. Consideriamo anche il segnale

$$z(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$

Si dimostra che, nell'ipotesi che sia $S(0)=0$, anche $z(t)$ ammette trasformata di Fourier: in particolare, vogliamo far vedere che essa vale

$$Z(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f}$$

Applicando la definizione di trasformata di Fourier, abbiamo intanto che

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Moltiplicando e dividendo per il termine $(-j2\pi f)$ otteniamo che

$$Z(f) = -\frac{1}{j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) (-j2\pi f) e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{1}{j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \frac{d}{dt} (e^{-j2\pi f t}) dt$$

L'integrale così ottenuto può essere calcolato allora per parti:

$$Z(f) = -\frac{1}{j2\pi f} [z(t) e^{-j2\pi f t}]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt$$

Prima di calcolare l'integrale rimasto, vediamo quanto vale il primo termine: si osserva subito come, a prescindere di quanto vale $z(t)$ per $t=+\infty$ e per $t=-\infty$, l'altro termine, ossia $e^{-j2\pi f t}$, vale zero per entrambi quei valori di t . Quindi, il primo termine è nullo e rimane

$$Z(f) = \frac{1}{j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt$$

Vediamo allora quanto vale $dz(t)/dt$:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] = s(t)$$

Andando a sostituire nell'espressione di quell'integrale, otteniamo

$$Z(f) = \frac{1}{j2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{j2\pi f} S(f)$$

Osservazione

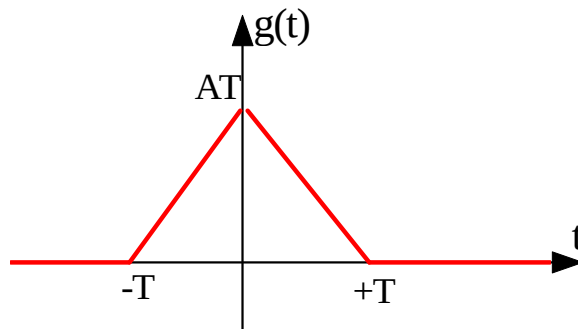
Prima di passare ad un esempio, facciamo notare come l'ipotesi per cui deve essere $S(0)=0$ equivale a dire che

$$S(f=0) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi(f=0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

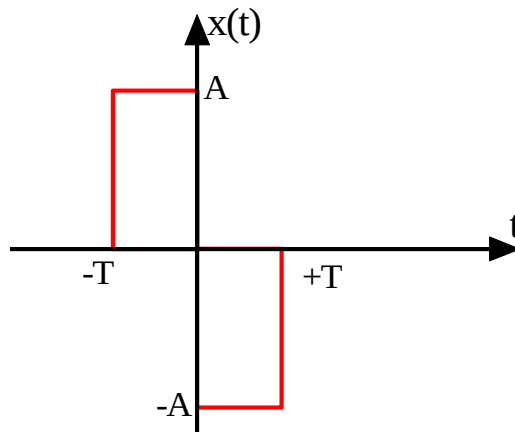
ossia che il segnale $s(t)$ deve avere area nulla.

Esempio

Vogliamo calcolare la trasformata del seguente segnale:



Un primo modo di ottenere $G(f)$ è senz'altro quello di ricavare l'espressione analitica di questo segnale (cosa non difficile in questo caso) e poi di applicare la definizione. Tuttavia, risulta senz'altro più conveniente la strada che passa per la proprietà di integrazione nel tempo: infatti, è facile verificare che $g(t)$ si può ottenere per integrazione di un altro segnale $x(t)$ fatto nel modo seguente:



Possiamo cioè porre $g(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, dove evidentemente $x(t)$ è la somma di due rettangoli

traslati, dei quali noi conosciamo ormai bene la trasformata. Dato inoltre che $x(t)$ è un segnale ad area nulla, possiamo applicare la proprietà di integrazione nel tempo, ottenendo quanto segue: in primo luogo, dobbiamo trovare l'espressione di $x(t)$, che è la somma di due rettangoli, entrambi di base T e altezza A , traslato il primo di $-T/2$ ed il secondo di $+T/2$; quindi

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - \text{Arect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

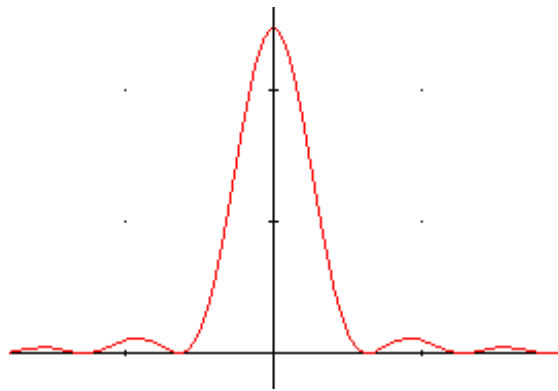
Adesso, per calcolare la trasformata di questo segnale dobbiamo applicare, in successione, la proprietà di linearità e quella di traslazione nel tempo: quindi

$$X(f) = AT\text{sinc}(fT)e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - AT\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = AT\text{sinc}(fT)[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}]$$

Nota $X(f)$, possiamo ottenere $G(f)$ mediante la proprietà di integrazione:

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{1}{j2\pi f} X(f) = \frac{1}{j2\pi f} AT\text{sinc}(fT)[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] = \frac{AT}{\pi f} \text{sinc}(fT) \left[\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j} \right] = \\ &= \frac{AT}{\pi f} \text{sinc}(fT) \sin(\pi fT) = AT^2 \text{sinc}^2(fT) \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT^2 \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

L'andamento qualitativo di questo segnale (per $T=\pi/2$ e $A=1$) è il seguente:



PROPRIETÀ: SEGNALE CONIUGATO

Siano dati sempre il segnale $s(t)$ e la sua trasformata di Fourier $S(f)$. Consideriamo il nuovo segnale $z(t) = s^*(t)$. Si dimostra che anche $z(t)$ ammette trasformata di Fourier: vogliamo far vedere che essa vale

$$Z(f) = S^*(-f)$$

La dimostrazione si effettua come al solito tramite la definizione:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Il termine $e^{-j2\pi ft}$ può essere visto come il complesso coniugato del termine $e^{j2\pi ft}$, per cui

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)(e^{j2\pi ft})^* dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)(e^{j2\pi ft}) dt \right]^*$$

Adesso, ponendo $f = -(-f)$ abbiamo che

$$Z(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) (e^{-j2\pi(-f)t}) dt \right]^* = S^*(-f)$$

PROPRIETÀ DI DUALITÀ

Consideriamo il solito segnale $s(t)$ e supponiamo che sia $S(f)$ la sua trasformata. E' ovvio che $S(f)$ è una normale funzione nella variabile f : se allora cambiamo il nome di questa variabile da f a t , otteniamo una nuova funzione $z(t) = S(t)$ che ha la stessa struttura di $S(f)$ ma è funzione del tempo.

Si dimostra che anche $z(t)$ ammette trasformata di Fourier e, in particolare, ci apprestiamo a far vedere che tale trasformata vale

$$Z(f) = s(-f)$$

ossia si tratta di una funzione che ha la stessa struttura del segnale $s(t)$ ma dipende dalla frequenza anziché dal tempo.

Si usa ancora una volta la definizione di trasformata di Fourier:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Per comodità, poniamo $f = \sigma$: quindi

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j2\pi \sigma t} dt$$

Poniamo anche $t = f$: quindi

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{-j2\pi \sigma f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi(-\sigma)f} df$$

Quella ottenuta non è altro che la formula di antitrasformazione di Fourier del segnale $S(f)$ all'istante $t = -\sigma$: quindi $Z(\sigma) = s(-\sigma)$. Ponendo $\sigma = f$ si ottiene la tesi.

Esempio

Consideriamo il segnale $s(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$. Sappiamo ormai bene che la trasformata di questo segnale è la funzione $S(f) = AT \text{sinc}(fT)$, della quale abbiamo in precedenza già riportato l'andamento grafico. Se noi, al posto di f , poniamo 2ω , questa funzione diventa semplicemente

$$S(\omega) = AT \text{sinc}(2\omega T)$$

Allora, supponiamo di avere un altro segnale e precisamente

$$z(t) = AT \text{sinc}(2\omega t)$$

Possiamo calcolarci la sua trasformata di Fourier applicando la proprietà di dualità, in quanto $z(t)$ ha evidentemente la stessa struttura di $S(f)$: quindi

$$Z(f) = s(-f) = \text{Arect}\left(\frac{-f}{T}\right)$$

Essendo poi la funzione "rect" una funzione pari, possiamo concludere che

$$Z(f) = s(-f) = \text{Arect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>