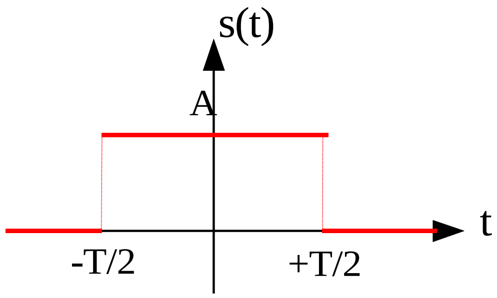
Appunti di Teoria dei Segnali
Capitolo 3 - Trasformata di Fourier (II)

Caratteristiche e proprietà dell’impulso di Dirac

DEFINIZIONE

Vogliamo adesso studiare le principali proprietà della funzione denominata **impulso di Dirac**: essa viene convenzionalmente indicata con il simbolo “**δ(t)**” e può essere vista come un rettangolo, di area unitaria, con base che tende a 0 e altezza che tende a +∞. Vediamo nel dettaglio questo concetto.

Consideriamo il segnale rappresentato in figura:

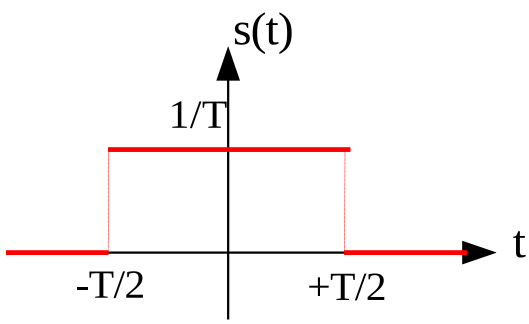


Sappiamo ormai bene che si tratta della funzione $s(t) = A\mathrm{rect}\frac{t}{T}$ che spesso viene anche chiamata **impulso di durata finita** (o anche **impulso rettangolare**) proprio in contrapposizione a quello che stiamo per dire. A livello analitico, s(t) è ottenibile come somma di due opportuni gradini:

$$s(t) = Au\left(t + \frac{T}{2}\right) - Au\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Per A generico, quel segnale ha area pari ad AT. Evidentemente, perché esso abbia area unitaria, deve essere A=1/T, ossia l’espressione analitica del segnale deve essere

$$s(t) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



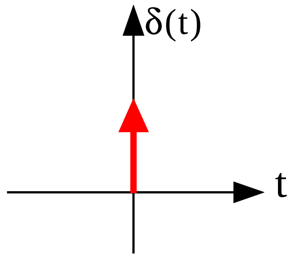
E’ anche evidente che, per T→0, l’area del segnale rimane invariata e pari ad 1: la base tende a zero e l’altezza tende all’infinito.

Allora, si definisce rigorosamente **impulso di Dirac** il segnale

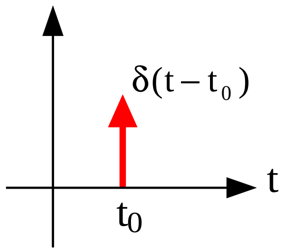
$$\boxed{\delta(t) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{T\to 0}\left[\frac{1}{T}\left(u\left(t+\frac{T}{2}\right)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\right]}$$

cioè appunto il limite, per t→0, dell'impulso di area unitaria e durata finita.

Solitamente, lo si indica graficamente nel modo seguente:



Ovviamente, questa figura è relativa al caso in cui l'impulso è applicato nell'istante t=0: se, al contrario, esso fosse applicato in un istante t_0 diverso da 0, allora il segnale sarebbe **$\delta(t-t_0)$** e la rappresentazione sarebbe



Vediamo qualche proprietà fondamentale di questo segnale (che è ovviamente ideale, in quanto è impossibile realizzarlo dal punto di vista fisico).

1° PROPRIETÀ: AREA UNITARIA

Intanto, abbiamo detto che una delle proprietà fondamentali è quella di avere <u>area unitaria</u>: da un punto di vista analitico, ciò significa che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1}$$

ed anche che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt = 1 \qquad \forall t_0$$

2° PROPRIETÀ: PROPRIETÀ DI SETACCIO

Un’altra proprietà è la seguente: consideriamo il segnale $z(t)=\delta(t-t_0)s(t)$ (dove s(t) è un segnale generico) e facciamone l’integrale tra -∞ e +∞:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)s(t)dt$$

Dato che il $\delta(t-t_0)$ vale, per definizione, sempre zero tranne che nell’istante $t=t_0$, dove invece vale 1, è ovvio che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)s(t)dt=s(t_0)}$$

Questa proprietà prende il nome di **proprietà di setaccio**, nel senso che essa prende, tra tutti i valori assunti da s(t) nel suo intervallo di definizione, solo quello relativo all’istante di applicazione dell’impulso. E’ ovvio che un caso particolare si ha quando $t_0=0$: in questo caso, abbiamo che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)s(t)dt=s(0)}$$

3° PROPRIETÀ: PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Una immediata conseguenza della proprietà di setaccio ha a che fare con il prodotto di convoluzione: infatti, dato sempre un segnale s(t) generico, il prodotto di convoluzione di questo segnale per il δ(t) vale per definizione

$$s(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Il segnale δ(t) è una funzione chiaramente pari, per cui

$$\delta(t-\tau)=\delta\big(-(\tau-t)\big)=\delta(\tau-t)$$

Sostituendo in quell’integrale, abbiamo che

$$s(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$$

Quell’integrale, in base alla proprietà di setaccio vista prima, vale s(t): quindi

$$\boxed{s(t)*\delta(t)=s(t)}$$

ossia l*a convoluzione di un segnale per l’impulso di Dirac è pari sempre al segnale stesso.*

In modo analogo, possiamo affermare *che ogni segnale può anche essere espresso come convoluzione di se stesso per l'impulso unitario (non traslato).*

Uso dell'impulso di Dirac per la trasformata di Fourier

TRASFORMATA DI FOURIER DELL'IMPULSO DI DIRAC

Vediamo per prima cosa quanto vale la trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac: applicando la normale definizione, abbiamo che

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Sempre in base alla proprietà di setaccio, abbiamo che quell'integrale è pari al termine esponenziale calcolato nel punto di applicazione dell'impulso, ossia t=0: quindi

$$\boxed{I(f) = \left[e^{-j2\pi ft}\right]_{t=0} = 1}$$

Quindi *la trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac vale 1.*

E' chiaro che, se l'impulso è $A\delta(t)$, la sua trasformata vale A: questa proprietà dice dunque che <u>*ad un impulso nel dominio del tempo corrisponde una costante nel dominio della frequenza.*</u>

Vediamo di sfruttare adesso quanto detto fino ad ora a proposito dell'impulso di Dirac per enunciare alcune importanti proprietà della trasformata di Fourier.

PROPRIETÀ: TRASFORMATA DI UN SEGNALE COSTANTE

Richiamiamo la *proprietà di dualità* della trasformata di Fourier: essa dice che, dato un segnale s(t) e data la sua trasformata S(f), la trasformata del segnale S(t) (ossia di una funzione, nella variabile t, che ha la stessa struttura di S(f)) è la funzione s(-f). In termini schematici, possiamo scrivere che

$$s(t) \longleftrightarrow S(f)$$

$$S(t) \longleftrightarrow s(-f)$$

(dove la freccia a due punte indica evidentemente la <u>corrispondenza biunivoca</u> tra segnale e trasformata di Fourier).

Allora, se abbiamo un segnale costante $z(t) = A$, in base alla proprietà di dualità e in base al fatto che la trasformata di $A\delta(t)$ vale A, possiamo affermare che la trasformata di z(t) vale

$$Z(f) = A\delta(-f)$$

Ma, essendo la funzione δ una funzione pari, è ovvio che

$$Z(f) = A\delta(-f) = A\delta(f)$$

Quindi abbiamo che

$$\boxed{\begin{array}{l} A\delta(t) \longleftrightarrow A \\ A \longleftrightarrow A\delta(-f) \end{array}}$$

Nel caso particolare in cui A=1, abbiamo dunque che

$$\boxed{1 \longleftrightarrow \delta(f)}$$

ossia che *l'antitrasformata della funzione d(f) è la funzione costante pari ad 1.*

Conseguenza

Possiamo allora ricavare due importanti relazioni se sfruttiamo quanto appena ricavato: sappiamo che, dato un segnale s(t) che ammette trasformata di Fourier, la formula di trasformazione è

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

mentre quella di antitrasformazione è

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df$$

Allora, avendo detto

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$
$$1 \longleftrightarrow \delta(f)$$

la formula di antitrasformazione diventa

$$\boxed{\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}df}$$

mentre quella di trasformazione diventa

$$\boxed{\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}dt}$$

Queste sono dunque due relazioni che consentono di esprimere l'impulso di Dirac nel dominio del tempo e in quello della frequenza.

PROPRIETÀ: TRASFORMATA DELL'IMPULSO TRASLATO

Vediamo adesso quanto vale la trasformata dell'impulso traslato: in base alla *proprietà di traslazione nel tempo*, sappiamo che, dato s(t) generico e data la sua trasformata S(f), la trasformata del segnale $s(t-t_0)$ vale

$$S(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Allora, dato l'impulso δ(t) e la sua trasformata δ(f)=1, è chiaro che la trasformata dell'impulso traslato $\delta(t-t_0)$ sarà semplicemente

$$\delta(f)e^{-j2\pi f t_0}=e^{-j2\pi f t_0}$$

Quindi concludiamo che

$$\boxed{\delta(t-t_0)\longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}}$$

PROPRIETÀ: ANTITRASFORMATA DELL'IMPULSO TRASLATO

Un'altra relazione ancora si ottiene sfruttando la *proprietà di traslazione in frequenza* della trasformata di Fourier: questa proprietà dice, in generale, che, dato s(t) e data la sua trasformata S(f), la funzione $S(f-f_0)$ risulta essere la trasformata di Fourier del segnale $s(t)e^{j2\pi f_0 t}$, dove, appunto, il termine esponenziale tiene conto della traslazione.

Allora, ricordando che l'antitrasformata di δ(f) è 1, si ricava in modo immediato che la funzione $\delta(f-f_0)$ è la trasformata del segnale $e^{j2\pi f_0 t}$.

Quindi concludiamo che

$$\boxed{e^{-j2\pi f_0 t}\longleftrightarrow \delta(f-f_0)}$$

Esempio: trasformata di Fourier della funzione Coseno

Consideriamo il seguente segnale:

$$s(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$$

Questo è un <u>segnale di potenza</u> (e quindi ad energia infinita) come tutti i <u>segnali periodici</u>. Ne vogliamo calcolare la trasformata di Fourier sfruttando le proprietà prima enunciante[1].

Se applichiamo le formule di Eulero, abbiamo intanto che

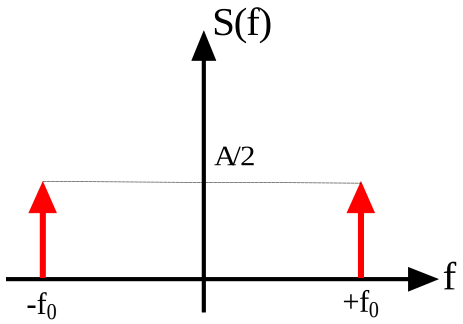
$$s(t)=\frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}\right)=\frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

[1] In seguito, parleremo nel dettaglio delle trasformate dei segnali periodici e forniremo una formula generale per calcolarle

In tal modo, s(t) risulta essere la somma di due esponenziali, ciascuno moltiplicato per il fattore A/2: allora, avendo trovato prima che la trasformata del segnale $e^{j2\pi f_0 t}$ è la funzione $\delta(f-f_0)$, applicando questo risultato e applicando anche la proprietà di linearità deduciamo che

$$S(f)=\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$

Si osserva come questa funzione sia REALE, in accordo al fatto che il segnale s(t) è reale e pari.
Da un punto di vista grafico la funzione S(f) è la seguente:



Esempio: trasformata di Fourier della funzione Seno

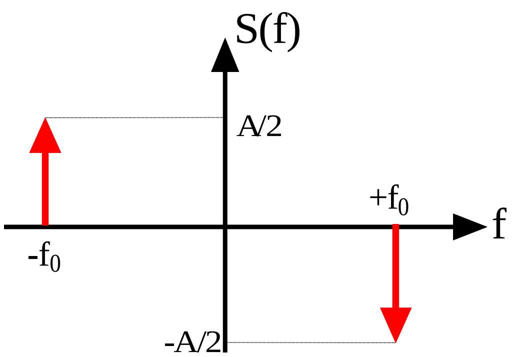
In modo analogo a prima, possiamo calcolare la trasformata del segnale $s(t)=A\sin(2\pi f_0 t)$.
Se applichiamo ancora una volta le formule di Eulero, abbiamo che

$$s(t)=\frac{A}{2j}e^{j2\pi f_0 t}-\frac{A}{2j}e^{-j2\pi f_0 t}$$

e quindi

$$S(f)=\frac{A}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{A}{2j}\delta(f+f_0)$$

In questo caso, la funzione che si ottiene è puramente immaginaria, in accordo al fatto che s(t) è questa volta reale e dispari.
Graficamente, abbiamo qualcosa di diverso da prima:

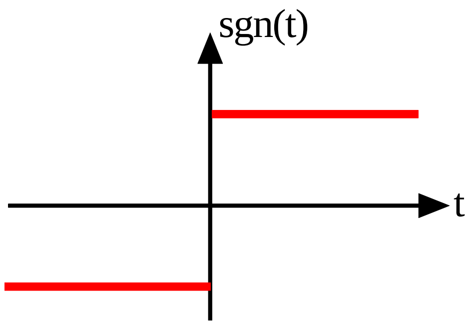


Esempio: trasformata del segnale sgn(t)

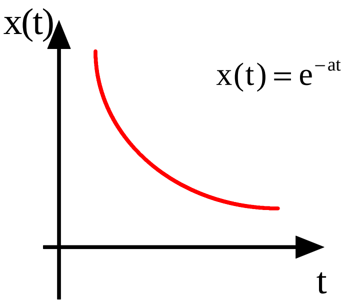
Consideriamo il seguente segnale:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

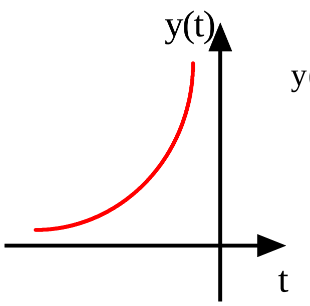
Esso viene solitamente indicato con "**sgn(t)**" e il suo andamento grafico è il seguente:



Vogliamo calcolarne la trasformata di Fourier. Usiamo a questo scopo il concetto di *limite* nel modo seguente: consideriamo i due segnali esponenziali



$$x(t) = e^{-at} \qquad \begin{cases} t > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$



$$y(t) = e^{at} \qquad \text{con} \begin{cases} t < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

Sono evidenti due cose:

- in primo luogo, per quanto riguarda e^{-at}, quanto più $a \to 0$, tanto più il segnale tende al valore costante =1;
- allo stesso modo, per quanto riguarda e^{at}, quanto più $a \to 0$, tanto più il segnale tende al valore costante =1, oppure, quanto più $a \to 0$, tanto più il segnale $-e^{at}$ tende al valore -1.

Quindi

$$\lim_{a \to 0} e^{-at} = 1$$

$$\lim_{a \to 0} \left(-e^{at}\right) = 1$$

Possiamo allora dare del segnale s(t) la seguente rappresentazione:

$$s(t) = \lim_{a \to 0} \left[u(t)e^{-at} - u(-t)e^{at} \right]$$

E’ possibile dimostrare che, effettivamente, se calcoliamo la trasformata del secondo membro (incluso il limite) essa coincide con quella di s(t). Vediamo allora quanto vale questa trasformata.

Sappiamo già che

$$\mathrm{Fourier}\left[u(t)e^{-at}\right] = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$\mathrm{Fourier}\left[u(-t)e^{at}\right] = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

per cui

$$S(f) = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f}\right] = \lim_{a\to 0}\left[\frac{-j4\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}\right] = (-j4\pi f)\lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}\right] = \frac{1}{j\pi f}$$

Osservazione

Facciamo osservare una interessante conseguenza di questo risultato. Riprendiamo la *proprietà di dualità*: schematicamente, tale proprietà dice che

$$s(t) \longleftrightarrow S(f)$$

$$S(t) \longleftrightarrow s(-f)$$

Allora, avendo trovato poco fa che

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

è evidente che

$$\frac{1}{j\pi f} \longleftrightarrow \mathrm{sgn}(-f)$$

Dato poi che la funzione sgn(t) è evidentemente una funzione dispari, concludiamo che

$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow -\mathrm{sgn}(f)$$

Questo stesso risultato si poteva comunque ottenere per altra via e precisamente applicando la *proprietà di scala*, secondo la quale la trasformata di z(t)=s(-t) è uguale a

$$Z(f) = S(-f)$$

Nel nostro caso, se prendiamo $s(t) = \frac{1}{j\pi t}$, è evidente che

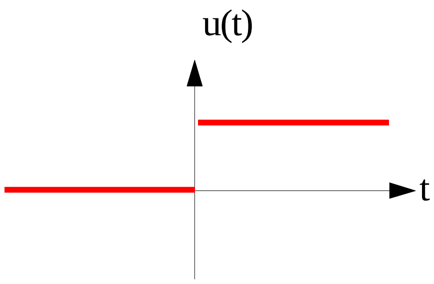
$$-\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{sgn}(f)$$

e, quindi, se prendiamo $s(t) = -\frac{1}{j\pi t}$, avremo

$$\boxed{\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow -\,\mathrm{sgn}(f)}$$

Esempio: trasformata di Fourier del gradino unitario

Calcoliamo la trasformata della funzione gradino unitario

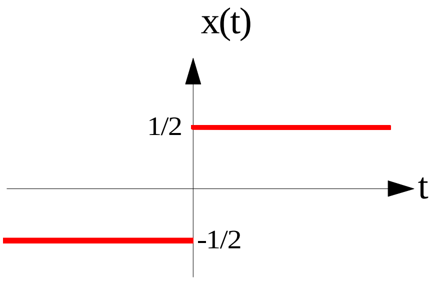


$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Intanto, possiamo rappresentare analiticamente questo segnale nel modo seguente:

$$u(t) = \left[u(t) - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}$$

In questo modo, u(t) risulta la somma del segnale costante pari a ½ e del segnale $x(t) = u(t) - \frac{1}{2}$, la cui rappresentazione è



Questo non è altro che il segnale ½sgn(t), per cui

$$u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) + \frac{1}{2}$$

Dobbiamo calcolare la trasformata di questo segnale: la trasformata di sgn(t) è stata calcolata in precedenza e vale $\frac{1}{j\pi f}$. La trasformata di un segnale costante A abbiamo detto che vale Aδ(f), per cui possiamo concludere che la trasformata del gradino unitario è

$$\boxed{U(f) = \frac{1}{2j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

GENERALIZZAZIONE DELLA PROPRIETÀ DI INTEGRAZIONE NEL TEMPO

Quando abbiamo enunciato la *proprietà di integrazione nel tempo* della trasformata di Fourier, abbiamo detto quanto segue: dato un generico segnale s(t) che ammetta trasformata di Fourier e data la sua trasformata S(f), dato inoltre il segnale

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau$$

esso, nell’ipotesi che sia S(0)=0, ammette trasformata di Fourier, la quale vale

$$Z(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f}$$

Vogliamo adesso vedere quanto vale Z(f) nell’ipotesi generale per cui S(0)≠0.

Intanto, usando la definizione del segnale **gradino unitario u(t)**, possiamo esprimere in altro modo il segnale z(t) e precisamente

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

L’integrale ottenuto non è altro che il prodotto di convoluzione tra il segnale s(t) ed il gradino unitario, per cui possiamo scrivere che $z(t) = s(t) * u(t)$. Ricordandoci allora che ad una convoluzione nel tempo corrisponde un semplice prodotto nel dominio della frequenza, abbiamo che $Z(f) = S(f)U(f)$. La trasformata del gradino unitario è stata calcolata nell’esempio precedente, per cui

$$Z(f) = S(f)\left[\frac{1}{2j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right] = \frac{S(f)}{2j\pi f} + \frac{1}{2}S(f)\delta(f)$$

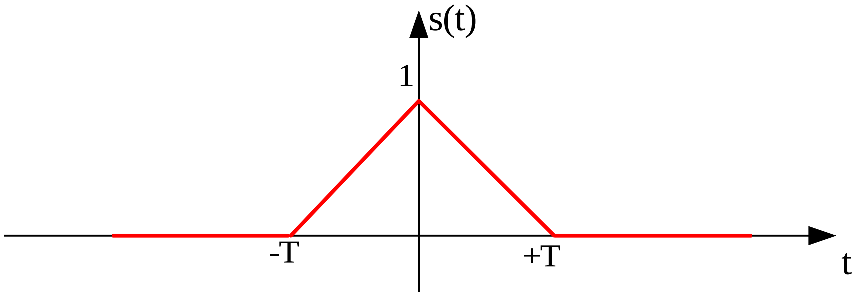
A questo punto ci ricordiamo che il prodotto di una funzione per l’impulso di Dirac è pari al valore della funzione nel punto di applicazione dell’impulso, che in questo caso è f=0, per cui

$$\boxed{Z(f) = \frac{S(f)}{2j\pi f} + \frac{1}{2}S(0)}$$

Appare subito ovvio che, se S(0)=0, si ottiene quanto ricavato in precedenza.

ESEMPIO

Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



La prima strada è quella di applicare semplicemente la definizione e vediamo perciò a che cosa ci porta: intanto, la definizione dice che

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Essendo s(t) nullo al di fuori dell'intervallo [-T,T], possiamo restringere l'intervallo di integrazione:

$$S(f) = \int_{-T}^{+T} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Possiamo adesso spezzare l'intervallo di integrazione in due pezzi:

$$S(f) = \int_{-T}^{0} \left(\frac{t}{T} + 1 \right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{0}^{T} \left(-\frac{t}{T} + 1 \right) e^{-j2\pi ft} dt$$

Questa può anche essere riscritta nel modo seguente:

$$S(f) = \int_{-T}^{T} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-T}^{0} \frac{t}{T} e^{-j2\pi ft} dt - \int_{0}^{T} \frac{t}{T} e^{-j2\pi ft} dt$$

Il primo integrale è immediato:

$$\int_{-T}^{T} e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{1}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T}^{T} = -\frac{1}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT} \right] = \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} = 2T\operatorname{sinc}(2fT)$$

Quindi, abbiamo che

$$S(f) = 2T\operatorname{sinc}(2fT) + \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} t e^{-j2\pi ft} dt - \frac{1}{T} \int_{0}^{T} t e^{-j2\pi ft} dt$$

Restano gli altri due integrali, che sono identici tranne che per gli estremi di integrazione: allora, risolviamo (per parti) il generico di essi in modo indefinito e poi passiamo a considerare gli estremi di integrazione:

$$\int te^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{-j2\pi f}\int tD\left(e^{-j2\pi ft}\right)dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[te^{-j2\pi ft}\right] + \frac{1}{j2\pi f}\int e^{-j2\pi ft}dt =$$

$$= -\frac{1}{j2\pi f}\left[te^{-j2\pi ft}\right] - \frac{1}{(j2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi ft}\right] = -\frac{1}{j2\pi f}\left[te^{-j2\pi ft}\right] + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi ft}\right]$$

Adesso consideriamo gli estremi di integrazione:

$$\int_{-T}^{0} te^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[te^{-j2\pi ft}\right]_{-T}^{0} + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T}^{0} = -\frac{1}{j2\pi f}\left[-Te^{j2\pi fT}\right] + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[1 - e^{j2\pi fT}\right]$$

$$\int_{0}^{T} te^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[te^{-j2\pi ft}\right]_{0}^{T} + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{0}^{T} = -\frac{1}{j2\pi f}\left[Te^{-j2\pi fT}\right] + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi fT} - 1\right]$$

Torniamo allora alla espressione di S(f) e facciamo i seguenti passaggi:

$$S(f) = 2T\text{sinc}(2fT) + \frac{1}{T}\left[\frac{Te^{j2\pi fT}}{j2\pi f} + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left(1 - e^{j2\pi fT}\right)\right] - \frac{1}{T}\left[-\frac{Te^{-j2\pi fT}}{j2\pi f} + \frac{1}{(2\pi f)^2}\left(e^{-j2\pi fT} - 1\right)\right] =$$

$$= 2T\text{sinc}(2fT) + \left[\frac{e^{j2\pi fT}}{j2\pi f} + \frac{1}{T(2\pi f)^2}\left(1 - e^{j2\pi fT}\right)\right] + \left[\frac{e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f} - \frac{1}{T(2\pi f)^2}\left(e^{-j2\pi fT} - 1\right)\right] =$$

$$= 2T\text{sinc}(2fT) + \frac{1}{j2\pi f}\left[e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}\right] + \frac{1}{T(2\pi f)^2}\left[\left(1 - e^{j2\pi fT}\right) + \left(1 - e^{-j2\pi fT}\right)\right] =$$

$$= 2T\text{sinc}(2fT) + \frac{\cos(2\pi fT)}{j\pi f} + \frac{1}{T(2\pi f)^2}\left[2 - \left(e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}\right)\right] =$$

$$= 2T\text{sinc}(2fT) + \frac{\cos(2\pi fT)}{j\pi f} + \frac{2}{T(2\pi f)^2} - \frac{1}{T(2\pi f)^2}\left[e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}\right] =$$

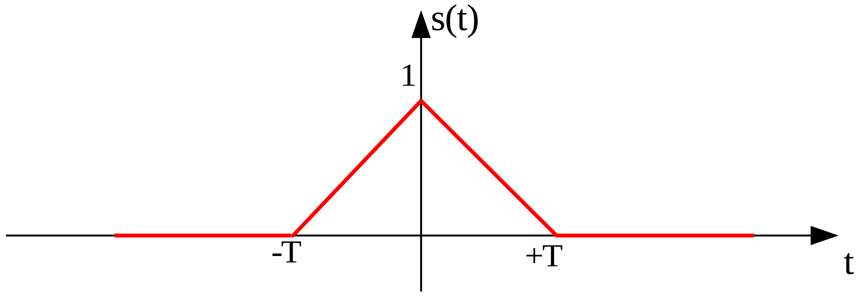
$$= 2T\text{sinc}(2fT) + \frac{\cos(2\pi fT)}{j\pi f} + \frac{2}{T(2\pi f)^2} - \frac{\cos(2\pi fT)}{2T(\pi f)^2}$$

In conclusione, quindi, abbiamo trovato che

$$S(f) = 2T\text{sinc}(2fT) + \frac{\cos(2\pi fT)}{j\pi f} + \frac{2}{T(2\pi f)^2} - \frac{\cos(2\pi fT)}{2T(\pi f)^2}$$

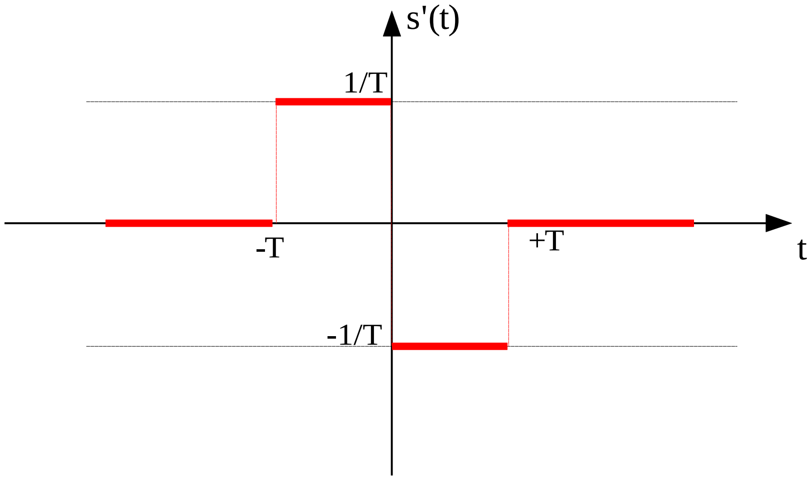
Vogliamo allora vedere se è possibile risparmiare tutti questi calcoli per arrivare ad S(f), ottenendo magari una espressione più semplice.

Proviamo ad utilizzare la *proprietà di derivazione nel tempo*. Riprendiamo il diagramma di s(t) in funzione di t e ricaviamo quello del suo segnale derivato s’(t):



Dato che s(t)=0 per t<T e per t>T, lo stesso accade per s'(t). Nell'intervallo [-T,0], s(t) ha espressione $\frac{t}{T}+1$, per cui la sua derivata vale 1/T; infine, per [0,T], l'espressione di s(t) è $-\frac{t}{T}+1$, per cui la sua derivata è -1/T.

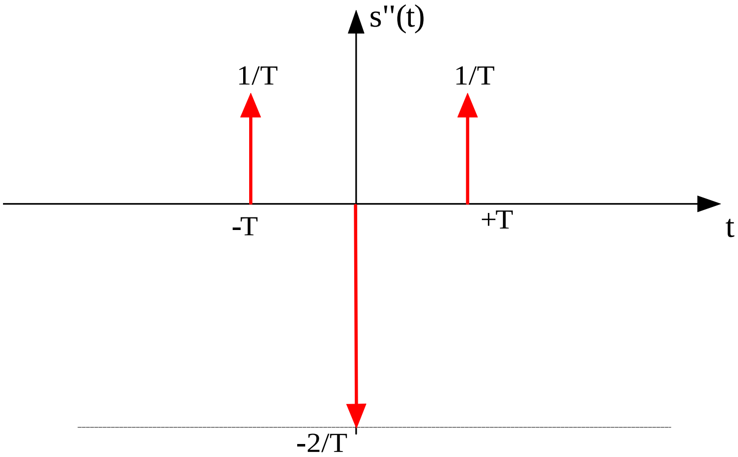
In conclusione, il segnale derivato di s(t) ha il seguente andamento:



Anche questo segnale ha una espressione complessa. Proviamo allora con l'ulteriore segnale derivato:

- per t<-T e t>+T, s'(t) vale 0 e quindi altrettanto vale s''(t);
- in t=-T s'(t) passa da 0 a 1/T, per cui il segnale derivato è un impulso di area 1/T;
- in t=0, s'(t) passa da 1/T a -1/T, per cui s''(t) sarà un impulso di area 2/T e rivolto in senso opposto al precedente;
- infine, in t=+T, s'(t) passa -1/T a 0, per cui s''(t) è nuovamente un impulso positivo di area 1/T.

In conclusione, s''(t) è il seguente:



L'espressione analitica di questo segnale è

$$s''(t) = \frac{1}{T}\delta(t+T) - \frac{2}{T}\delta(t) + \frac{1}{T}\delta(t-T)$$

e fa quindi al caso nostro in quanto è estremamente semplice. La sua trasformata è infatti

$$\text{Fourier}[s''(t)] = \frac{1}{T}e^{-j2\pi fT} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T}e^{j2\pi fT}$$

Essa può anche essere riscritta nella forma

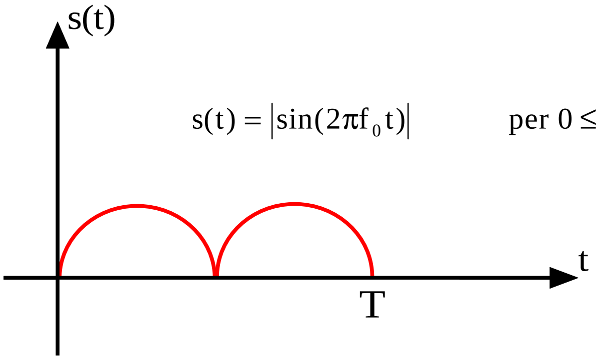
$$\text{Fourier}[s''(t)] = \frac{1}{T}\left(e^{-j2\pi fT} + e^{j2\pi fT} - 2\right) = \frac{1}{T}\left[2\frac{e^{-j2\pi fT} + e^{j2\pi fT}}{2} - 2\right] = \frac{1}{T}\left(2\cos(2\pi fT) - 2\right)$$

A questo punto, in base alla proprietà di derivazione nel tempo, abbiamo che

$$S(f) = \frac{\text{Fourier}[s'(t)]}{j2\pi f} = \frac{\text{Fourier}[s''(t)]}{(j2\pi f)^2} = \frac{\frac{1}{T}\left(2\cos(2\pi fT) - 2\right)}{-(2\pi f)^2}$$

ESEMPIO

Consideriamo il segnale $x(t) = |\sin(2\pi f_0 t)|$. Di questo segnale, presa f_0 generica, consideriamo la restrizione all'intervallo [0,T] e indichiamola con s(t):



$$s(t) = |\sin(2\pi f_0 t)| \qquad \text{per } 0 \le t \le T \text{ e con } T = \frac{1}{f_0}$$

Il segnale s(t) è dunque solo la parte positiva e compresa in [0,T] della funzione Seno con periodo appunto T. Vogliamo la trasformata di Fourier di s(t).

Ci sono diversi modi per calcolare la sua trasformata. Il modo più generale è ovviamente quello di utilizzare la definizione di trasformata di Fourier di un segnale generico:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(2\pi ft)dt}_{\mathrm{Re}(S(f))} + j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(2\pi ft)dt}_{\mathrm{Im}(S(f))}$$

In linea di massima, data la struttura della nostra funzione, non conviene tanto calcolare l'integrale

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

quanto, piuttosto, i due integrali

$$\mathrm{Re}(S(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(2\pi ft)dt$$

$$\mathrm{Im}(S(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(2\pi ft)dt$$

Tenendo conto che s(t) è nulla al di fuori del periodo T e, all'interno di tale periodo, vale $|\sin(2\pi f_0 t)|$, abbiamo che

$$\mathrm{Re}(S(f)) = \int_{0}^{T} |\sin(2\pi f_0 t)|\cos(2\pi ft)dt$$

$$\mathrm{Im}(S(f)) = \int_{0}^{T} |\sin(2\pi f_0 t)|\sin(2\pi ft)dt$$

ma è evidente che questi due integrali non sono affatto facili da calcolare. E' consigliabile allora scegliere qualche altra strada.

Un primo metodo alternativo potrebbe essere quello che si basa sulla seguente osservazione: se trasliamo s(t) di T/2 verso sinistra, otteniamo un nuovo segnale che risulta essere PARI. Questo ci è di aiuto in quanto sappiamo che la trasformata di un segnale pari è reale: allora, indicato con x(t) il segnale traslato, ossia

$$x(t) = \left|\sin\left(2\pi f_0\left(t + \frac{T}{2}\right)\right)\right|$$

la sua trasformata vale

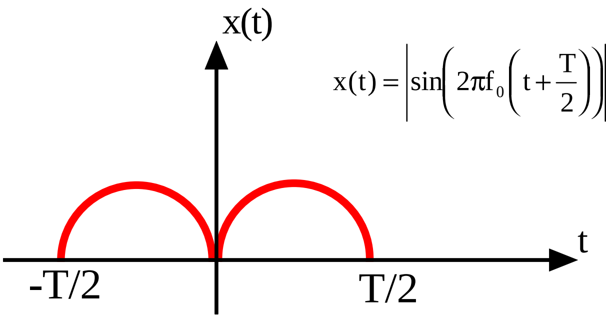
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\left(2\pi f_0\left(t + \frac{T}{2}\right)\right)\right|\cos(2\pi ft)dt$$

e quindi, in base alla proprietà di traslazione nel tempo, la trasformata di s(t) è

$$S(f) = X(f)e^{j2\pi f\frac{T}{2}}$$

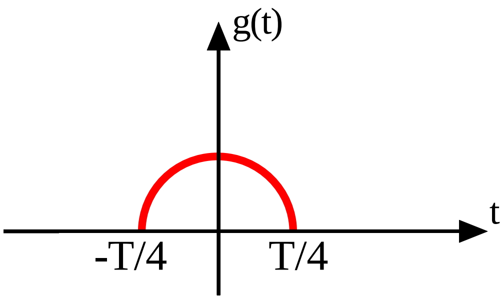
Tuttavia, anche in questo caso, l’integrale che ci troviamo a dover calcolare non è immediato. Possiamo allora provare a seguire una terza strada, che è una via di mezzo tra quella appena citata e un’altra, più volte utilizzata, che è quella di usare la proprietà di derivazione nel tempo. Vediamo nei dettagli.

Consideriamo il segnale x(t) di cui abbiamo appena parlato:



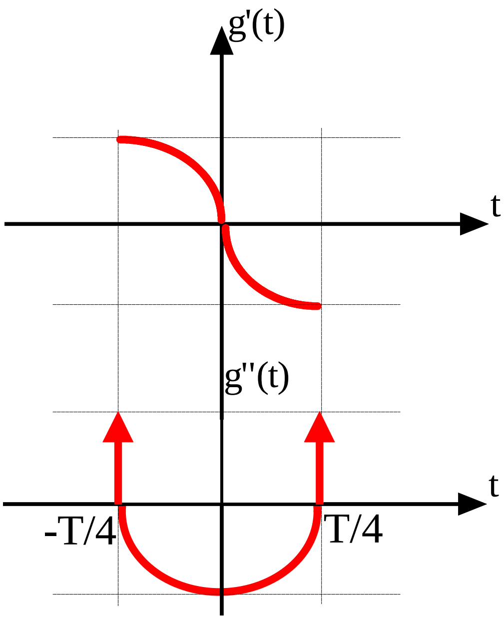
$$x(t) = \left|\sin\left(2\pi f_0\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)\right| \qquad -\frac{T}{2} \le t \le +\frac{T}{2}$$

Questo segnale può essere visto come la somma di due archi di circonferenza identici a quello della figura seguente, uno traslato di -T/4 e l’altro traslato di +T/4:



Allora, possiamo trovare la trasformata di g(t); da essa risalire a quella di x(t) mediante il teorema di traslazione nel tempo e, ancora mediante questo teorema, possiamo infine trovare la trasformata di s(t).

Il problema si riduce quindi a trovare la trasformata di g(t). Ed è qui che possiamo sfruttare il teorema di derivazione nel tempo. Infatti, vediamo quale andamento temporale hanno i segnali g’(t) e g’’(t):



Si nota come l'espressione del segnale g''(t) sia per noi particolarmente comoda: infatti, si tratta della somma di due impulsi unitari traslati e del segnale g(t) ribaltato rispetto all'asse delle ascisse. Possiamo cioè scrivere che

$$g''(t) = -g(t) + \delta\left(t + \frac{T}{4}\right) + \delta\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

Trasformando ambo i membri secondo Fourier abbiamo che

$$\text{Fourier}[g''(t)] = -G(f) + e^{j2\pi f\frac{T}{4}} + e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}$$

Inoltre, in base al teorema di derivazione nel tempo, si ha che

$$\text{Fourier}[g''(t)] = (j2\pi f)^2 G(f)$$

per cui

$$(j2\pi f)^2 G(f) = -G(f) + e^{j2\pi f\frac{T}{4}} + e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}$$

Esplicitando G(f) e usando le formule di Eulero otteniamo

$$G(f) = \frac{e^{j2\pi f\frac{T}{4}} + e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}}{1-(2\pi f)^2} = \frac{2}{1-(2\pi f)^2}\frac{e^{j\pi f\frac{T}{2}} + e^{-j\pi f\frac{T}{2}}}{2} = \frac{2}{1-(2\pi f)^2}\cos\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$$

A questo punto, dato che era

$$x(t) = g\left(t - \frac{T}{4}\right) + g\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

la trasformata di x(t) sarà

$$X(f) = G(f)e^{j2\pi f\frac{T}{4}} + G(f)e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} = \frac{2}{1-(2\pi f)^2}\left(e^{j\pi f\frac{T}{2}} + e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\right)\cos\left(\pi f\frac{T}{2}\right) = \frac{4}{1-(2\pi f)^2}\cos^2\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$$

Infine, dato che era $s(t) = x\left(t + \frac{T}{2}\right)$, possiamo concludere che

$$S(f) = X(f)e^{j2\pi f\frac{T}{2}} = \frac{4}{1-(2\pi f)^2}e^{j\pi fT}\cos^2\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$$

Trasformata di Fourier di segnali periodici

DEFINIZIONE

Quando abbiamo introdotto il concetto di trasformata di Fourier, abbiamo detto che, dato un segnale s(t), condizione sufficiente perché esso possa ammettere trasformata è che sia ad energia finita. Evidentemente, non sono ad energia finita i segnali periodici e questo è il motivo per cui, fino ad ora, ci siamo occupati solo di segnali a-periodici.

Tuttavia, sempre in quella sede, abbiamo sottolineato come la condizione di avere energia finita sia sufficiente ma comunque non necessaria perché un segnale possa ammettere trasformata di Fourier. Ecco allora che *è possibile avere anche dei segnali ad energia infinita (cioè segnali di potenza) che ammettono trasformata di Fourier:* questo è, per esempio, quello che accade per i segnali Sen(t) e Cos(t), le cui trasformate sono state calcolate in precedenza sfruttando le proprietà dell’impulso di Dirac.

I segnali Seno e Coseno sono due tipici **segnali periodici**: in questo paragrafo, noi vogliamo ricavare una formula generale per il calcolo della trasformata di Fourier di segnali periodici.

Sia dato perciò un segnale g(t) periodico, tale cioè che $g(t)=g(t+nT)$, dove n è un numero intero, mentre T è una quantità reale positiva. Mentre, fino ad ora, abbiamo trattato volutamente solo segnali aperiodici, vogliamo adesso calcolare la trasformata di Fourier di g(t) periodico.

La prima cosa che facciamo è esprimere g(t) mediante lo **sviluppo in serie di Fourier**: quindi

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove ricordiamo che $f_n=n/T$ e che i coefficienti dello sviluppo hanno espressione generale

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

Dobbiamo allora valutare quanto valgono questi coefficienti c_n. Consideriamo, a tale scopo, un nuovo segnale, che coincide con g(t) nell’intervallo [-T/2,T/2] mentre è nullo all’esterno: si tratta dunque della **restrizione di g(t)** all’intervallo [-T/2,T/2] e la indichiamo perciò con $\mathbf{g_R(t)}$.

In base a questa definizione, si deduce che $g_R(t)$ è certamente un segnale ad energia finita, per cui possiamo calcolarci la sua trasformata di Fourier: applicando la normale definizione, abbiamo che

$$G_R(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_R(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Facciamo vedere come quest’ultima funzione sia particolarmente utile per il calcolo dei coefficienti c_n dello sviluppo in serie di g(t): infatti, in base a come è stata definita la $g_R(t)$ e in base alla formula prima richiamata per il calcolo dei c_n, è ovvio che

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g_R(t)e^{-j2\pi f_n t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g_R(t)e^{-j2\pi f_n t}dt$$

L'integrale ottenuto è pari proprio alla trasformata di $g_R(t)$ calcolata per $f=f_n=n/T$, per cui concludiamo che

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}G_R\left(\frac{n}{T}\right)}$$

e quindi che lo sviluppo in serie di Fourier di s(t) è

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}G_R\left(\frac{n}{T}\right)e^{j2\pi f_n t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}G_R\left(\frac{n}{T}\right)e^{j2\pi f_n t}$$

A questo punto, calcoliamo G(f) come trasformata del secondo membro di quest'ultima relazione:

$$G(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\text{Fourier}\left[G_R\left(\frac{n}{T}\right)e^{j2\pi f_n t}\right] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}G_R\left(\frac{n}{T}\right)\text{Fourier}\left[e^{j2\pi f_n t}\right]$$

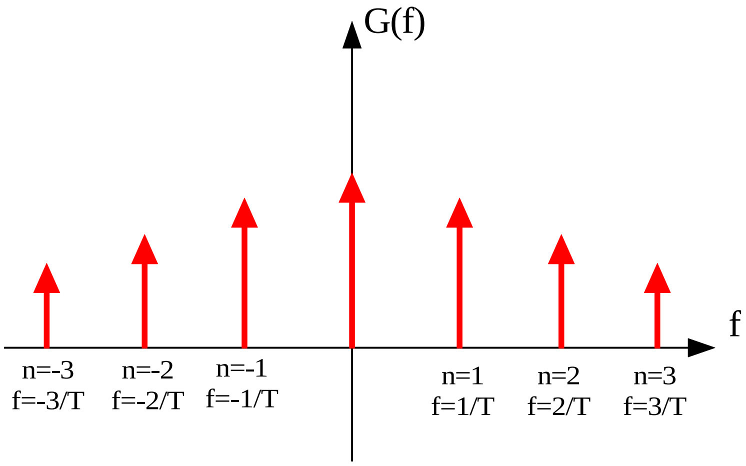
Abbiamo in precedenza trovato che la trasformata di quel segnale esponenziale è l'impulso traslato in avanti di una quantità f_n, per cui

$$\boxed{G(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}G_R\left(\frac{n}{T}\right)\delta(f-f_n)}$$

Abbiamo dunque ottenuto che *la trasformata di Fourier di un segnale periodico è una successione di impulsi posizionati su frequenze multiple della frequenza fondamentale n/T e di area pari a $G_R(n/T)$.* Sviluppando parzialmente quella sommatoria, abbiamo che

$$G(f) = \ldots + \frac{1}{T}G_R\left(\frac{-1}{T}\right)\delta\left(f+\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T}G_R(0)\delta(f) + \frac{1}{T}G_R\left(\frac{1}{T}\right)\delta\left(f+\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T}G_R\left(\frac{2}{T}\right)\delta\left(f-\frac{2}{T}\right) + \ldots$$

per cui la rappresentazione grafica è la seguente:



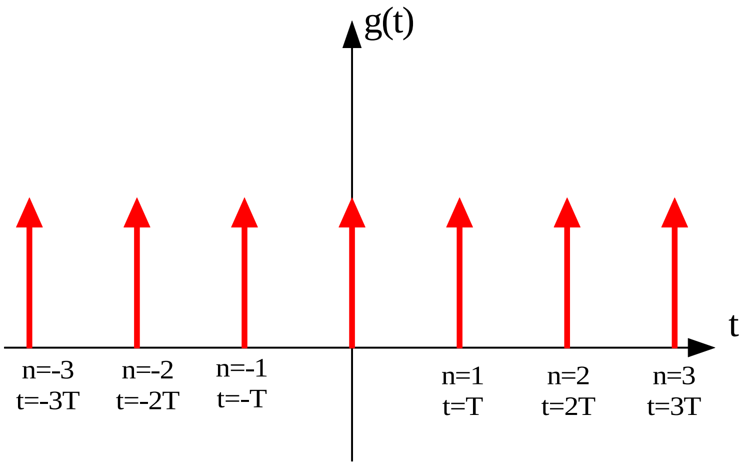
E' importante sottolineare che l'aver usato "altezze" via via decrescenti per gli impulsi, man mano che aumenta la frequenza, è del tutto casuale: sono teoricamente possibili infiniti andamenti dell'ampiezza degli impulsi al variare della frequenza.

ESEMPIO: SUCCESSIONE DI IMPULSI

Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale periodico:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Si tratta di una **successione di impulsi** (detta talvolta **pettine di impulsi**) di area costante unitaria, che possiamo così visualizzare:



Applicando la formula generale trovata prima, abbiamo che

$$G(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_R\left(\frac{n}{T}\right) \delta(f - f_n)$$

per cui è evidente che dobbiamo calcolare i valori di $G_R(n/T)$.

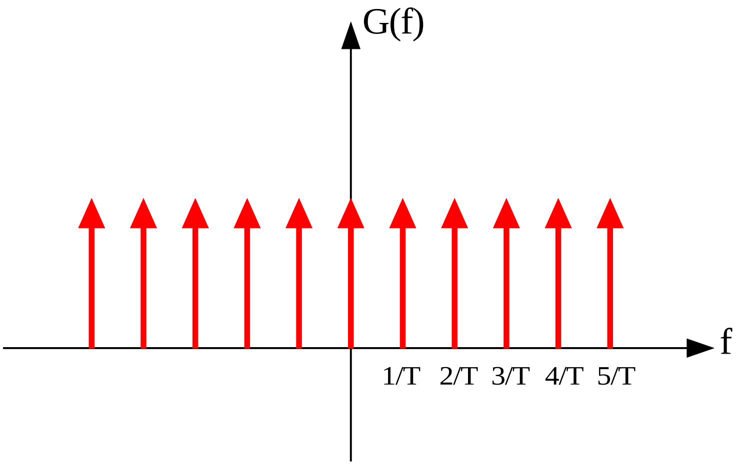
Intanto, la funzione G_R è definita come trasformata di Fourier della restrizione di g(t) all'intervallo [-T/2,T/2]: in questo intervallo, g(t) è δ(t), per cui $g_R(t)=\delta(t)$: la trasformata dell'impulso di Dirac è 1, per cui concludiamo che

$$G_R\left(\frac{n}{T}\right) = 1 \qquad \forall n$$

e quindi che

$$G(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_n) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

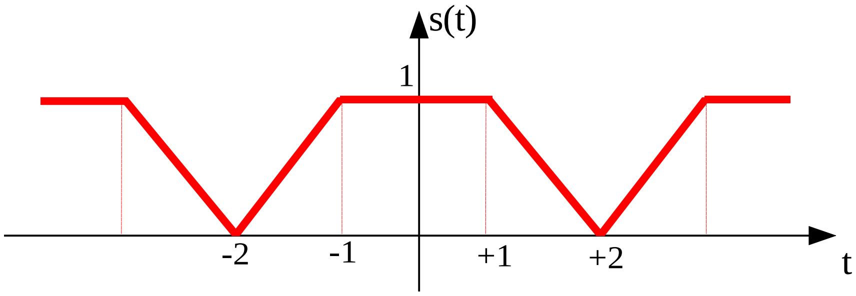
La rappresentazione grafica di questa funzione è la seguente:



In definitiva, abbiamo trovato che *ad una successione di impulsi di area costante nel dominio del tempo corrisponde una successione di impulsi, sempre di area costante, nel dominio della frequenza.* Facciamo anche osservare che, se il periodo fosse T=1, le due successioni di impulsi sarebbero formalmente identiche, ossia gli impulsi (oltre ad avere la stessa altezza) sarebbero traslati, nel dominio del tempo e in quello della frequenza, della stessa quantità 1.

ESEMPIO

Vogliamo calcolare adesso la trasformata di Fourier del segnale rappresentato in figura:



Si tratta evidentemente di un segnale periodico di periodo T=4.
Il primo passo consiste nell'esprimere s(t) mediante lo sviluppo in serie di Fourier: quindi

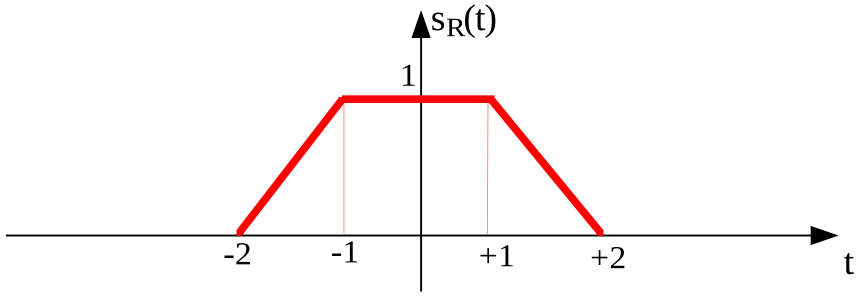
$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi f_n t}$$

Il secondo passo è il calcolo dei coefficienti c_n tramite la trasformata della restrizione di s(t) all'intervallo [-T/2,T/2].

L'ultimo passo sarà l'applicazione della formula generale

$$S(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_R\left(\frac{n}{T}\right)\delta(f-f_n)$$

Cominciamo perciò a trovare quale sia la restrizione di s(t) all'intervallo [-2,+2]:



Dobbiamo trovare la trasformata di Fourier di questo segnale: in precedenza, abbiamo ricavato tale trasformata tenendo presente che $s_R(t)$ è il prodotto di convoluzione di due rettangoli di altezza 1 e di base rispettivamente 1 e 3; abbiamo in particolare trovato che

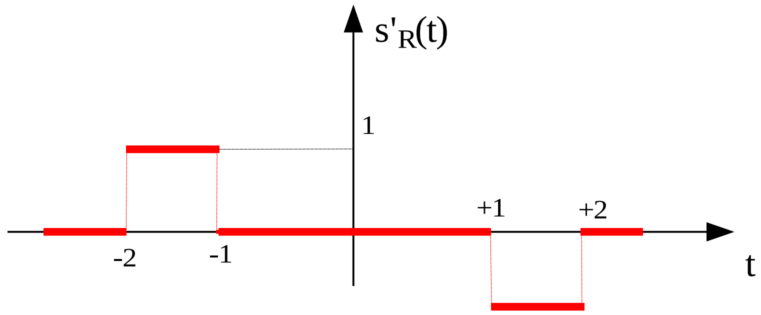
$$S_R(f) = [3\text{sinc}(f)][\text{sinc}(3f)]$$

Questa volta applichiamo un altro metodo, basato sulla proprietà di derivazione nel tempo: tale proprietà dice che, dato un segnale x(t) e data la sua trasformata X(f), sussiste la relazione

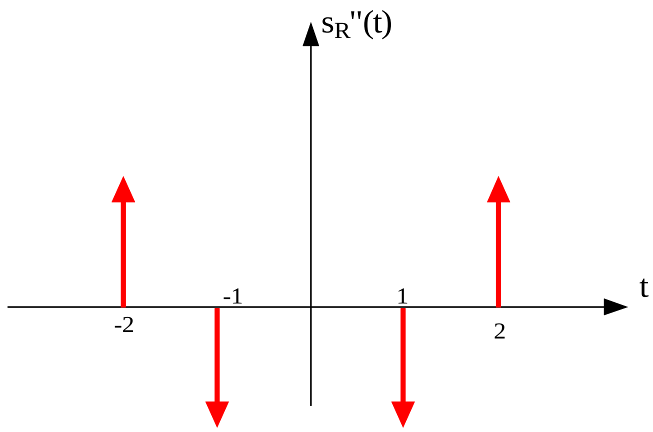
$$\text{Fourier}\left[x^{(n)}(t)\right] = (j2\pi f)^n X(f)$$

Perché può essere conveniente applicare questa relazione? Perché è possibile che, trovando il segnale derivato di x(t), esso abbia un espressione particolarmente semplice, il che rende altrettanto semplice il calcolo della sua trasformata e, quindi, il calcolo di quella di x(t). Vediamo cosa accade nel nostro caso.

Il segnale derivato di $s_R(t)$ è il seguente:



Anche la trasformata di questo segnale non è facile da calcolare; proviamo allora a vedere se è più facile il calcolo di quella dell’ulteriore segnale derivato, ossia $s_R''(t)$. Dobbiamo perciò determinare come è fatto questo segnale. Verifichiamo che esso è fatto nel modo seguente:



Per farlo sfruttiamo due proprietà: la prima riguarda il segnale impulso di Dirac e dice che

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)d\tau = 1 \qquad \forall t > t_0$$

La seconda è quella per cui il segnale s_R'(t) è il segnale ottenuto da s_R''(t) per integrazione. Dobbiamo far vedere quanto segue: a partire da s_R''(t), per integrazione, deve accadere che

- per t<-2 $\rightarrow$ s_R'(t)=0
- per -2<t<-1 $\rightarrow$ s_R'(t)=1
- per -1<t<+1 $\rightarrow$ s_R'(t)=0
- per +1<t<+2 $\rightarrow$ s_R'(t)=-1
- per t>+2 $\rightarrow$ s_R'(t)=0

Ponendo per comodità x(t)=s_R(t), vediamo cosa accade nel nostro caso:

- per t<-2 $\rightarrow$ x''(t) vale 0, per cui vale anche zero x'(t)

- per -2<t<-1 $\rightarrow$ x''(t) coincide con l'impulso traslato di -2, per cui

$$\int_{-\infty}^{t} x''(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau + 2)d\tau = 1$$

- per -1<t<+1 $\rightarrow$ x''(t) è la differenza di due impulsi opposti, uno traslato di -1 e l'altro traslato di +1, per cui

$$\int_{-\infty}^{t} x''(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau + 1)d\tau - \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - 1)d\tau = 1 - 1 = 0$$

- per +1<t<+2 $\rightarrow$ x''(t) coincide con l'impulso ribaltato rispetto all'asse delle ascisse e traslato di +2, per cui

$$\int_{-\infty}^{t} x''(\tau)d\tau = -\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - 2)d\tau = -1$$

Abbiamo dunque giustificato la struttura di s_R''(t). Questo segnale ci fa' molto comodo in quanto è immediato il calcolo della sua trasformata: trattandosi di una somma di 4 impulsi traslati ed essendo la trasformata di un impulso traslato $\delta(t-t_0)$ pari a $e^{-j2\pi f t_0}$, deduciamo che

$$S_R''(f) = e^{-j2\pi f(-2)} - e^{-j2\pi f(-1)} - e^{-j2\pi f(+1)} + e^{-j2\pi f(+2)}$$

Applicando le formule di Eulero, si ha che

$$S_R''(t) = 2[\cos(4\pi f) - \cos(2\pi f)]$$

Applicando adesso la proprietà di derivazione nel tempo, otteniamo che

$$S_R(f) = \frac{S_R''(f)}{(j2\pi f)^2} = \frac{2[\cos(4\pi f) - \cos(2\pi f)]}{(j2\pi f)^2}$$

A questo punto, è possibile fare qualche manipolazione algebrica su questa funzione: infatti, sommando membro a membro *le formule di duplicazione del coseno* si ottiene

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

Applicando questa formula nel nostro caso, otteniamo

$$S_R(f) = -\frac{2[\cos(2\pi f)-\cos(4\pi f)]}{(j2\pi f)^2} = -\frac{4\left[\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi f)-\cos(4\pi f)\right)\right]}{(j2\pi f)^2} = -\frac{4[\sin(\pi f)\sin(3\pi f)]}{(j2\pi f)^2} =$$
$$= \frac{[\sin(\pi f)\sin(3\pi f)]}{\pi^2 f^2} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\left(3\frac{\sin(3\pi f)}{3\pi f}\right) = 3\text{sinc}(f)\text{sinc}(3f)$$

e questo era il risultato che in precedenza avevamo trovato per altra strada.

Adesso, la funzione $S_R(f)$ ci serve per valutare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione s(t): infatti, si ha che

$$c_n = \frac{1}{T}S_R\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}3\text{sinc}\left(\frac{n}{T}\right)\text{sinc}\left(\frac{3n}{T}\right)$$

e quindi che

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}3\text{sinc}\left(\frac{n}{T}\right)\text{sinc}\left(\frac{3n}{T}\right)\right]e^{j2\pi f_n t}$$

Infine, noti i coefficienti dello sviluppo, possiamo applicare la formula generale

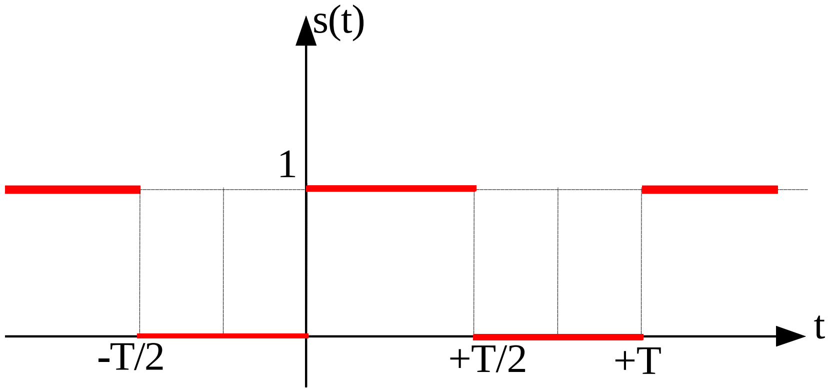
$$S(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S_R\left(\frac{n}{T}\right)\delta(f-f_n)$$

per cui possiamo concludere che la trasformata di Fourier del nostro segnale periodico vale

$$S(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}3\text{sinc}\left(\frac{n}{T}\right)\text{sinc}\left(\frac{3n}{T}\right)\right]\delta(f-f_n) = \frac{3}{T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\text{sinc}\left(\frac{n}{T}\right)\text{sinc}\left(\frac{3n}{T}\right)\right]\delta(f-f_n)$$

ESEMPIO: ONDA QUADRA

Calcoliamo la trasformata di Fourier del seguente segnale periodico, che è una classica onda quadra che oscilla tra il valore nullo ed il valore unitario:



Ricordiamo, a titolo di curiosità, che un'onda quadra è caratterizzata da un parametro noto come **duty cicle**: esso è definito come il rapporto (percentuale) tra la frazione τ di periodo T durante la quale il segnale è a livello alto e il periodo stesso:

$$\text{duty cicle} = \frac{\tau}{T}\cdot 100$$

Nel caso che stiamo considerando, è evidente che, in ciascun periodo, il segnale si mantiene al livello alto per un tempo τ=T/2, il che comporta, in base alla definizione appena fornita, che il duty cicle sia del **50%**.

Andiamo allora a calcolare la trasformata di questo segnale, che viene usata in moltissime applicazioni elettroniche. Applicando la definizione di trasformata di un segnale periodico, abbiamo che

$$S(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_R\left(\frac{n}{T}\right)\delta(f-f_n)$$

dove $\mathbf{S_R(f)}$ è la trasformata del segnale s(t) ristretto all'intervallo [0,T]. Facciamo allora i calcoli:

$$\begin{aligned}
S_R(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_R(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^T s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^{T/2} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{-j2\pi f}\int_0^{T/2} D\left[e^{-j2\pi ft}\right]dt = \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_0^{T/2} = \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j\pi fT}-1\right] = \frac{1}{j2\pi f}\left[1-e^{-j\pi fT}\right] = \\
&= \frac{1}{j2\pi f}e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\left[e^{j\pi f\frac{T}{2}} - e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\right] = \frac{1}{\pi f}e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right)
\end{aligned}$$

Da qui, la trasformata di s(t) risulta

$$\begin{aligned}
S(f) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_R\left(\frac{n}{T}\right)\delta(f-f_n) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{T}{\pi n}e^{-j\pi\frac{n}{2}}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)\delta(f-f_n) = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi n}e^{-j\pi\frac{n}{2}}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)\delta(f-f_n)
\end{aligned}$$

Questa espressione mostra le caratteristiche fondamentali dello spettro dell’onda quadra in questione: infatti, oltre a trattarsi (come è ovvio che sia), di uno **spettro a righe** (composto cioè da impulsi), è evidente che sono presenti solo le **righe** (cioè appunto gli impulsi) corrispondenti a valori dispari di n: il motivo è chiaramente nel coefficiente $\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)$, che vale 1 quando n è dispari, mentre invece vale 0 quando n è pari.

Generalmente, si esprime questo fatto dicendo che lo spettro di un’onda quadra con duty cicle del 50% comprende solo le **armoniche** (o righe impulsi) dispari.

Oltre a questo, si nota anche un’altra importante caratteristica: infatti, la generica di queste armoniche è moltiplicata per il coefficiente

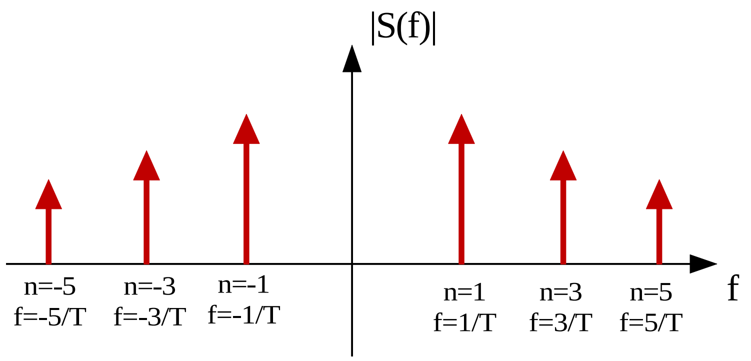
$$\frac{1}{\pi n}e^{-j\pi\frac{n}{2}}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)$$

Questo coefficiente è chiaramente complesso, ossia presenta un modulo ed una fase: considerando solo <u>valori dispari di n</u> (in quanto per quelli pari si è visto che non ci sono armoniche), abbiamo che il modulo e la fase del generico coefficiente sono

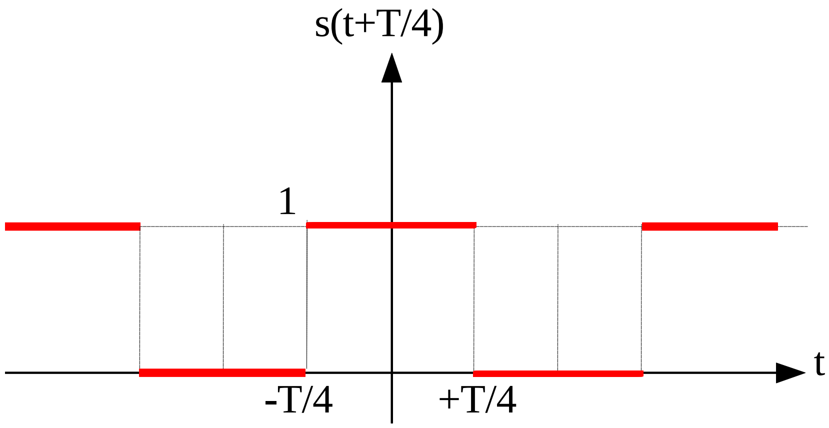
$$M(n) = \left|\frac{1}{\pi n}e^{-j\pi\frac{n}{2}}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)\right| = \frac{1}{\pi n}\left|\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)\right| = \frac{1}{\pi n}$$

$$\phi(n) = \arg\left(\frac{1}{\pi n}e^{-j\pi\frac{n}{2}}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)\right) = -\pi\frac{n}{2}$$

Si nota immediatamente che il modulo diminuisce all’aumentare di n; questo significa che le **armoniche di ordine maggiore** (cioè con n maggiore) hanno minore ampiezza delle **armoniche di ordine minore**. In altre parole, man mano che consideriamo armoniche $\delta(f-f_n)$ a frequenza $f_n=n/T$ via via maggiore, la loro ampiezza diminuisce sempre più, fino ovviamente ad un punto oltre il quale tale ampiezza è praticamente zero:



Per quanto riguarda, invece, la fase dei coefficienti, essa fa sì che lo spettro S(f) dell’onda quadra sia complesso. Questo deriva dal fatto che s(t) è un segnale reale e dispari. Se, invece, traslassimo s(t) di T/4 verso sinistra (cioè in anticipo), otterremmo un segnale reale e pari, che quindi avrebbe uno spettro puramente reale:



Le caratteristiche dello spettro di questo segnale sono identiche a quelle dello spettro appena ricavato, con la differenza di non presentare alcuna fase. Infatti, andando a calcolare nuovamente $S_R(f)$ sotto le nuove ipotesi, troviamo facilmente che

$$S_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_R(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{T/4} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{3T/4}^{T} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-T/4}^{T/4} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} - e^{j2\pi f\frac{T}{4}}\right] = \frac{1}{\pi f}\left[e^{j\pi f\frac{T}{2}} - e^{-j\pi f\frac{T}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi f}\sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$$

ed è evidentemente scomparso il termine esponenziale che determinare la presenza di una fase non nulla.

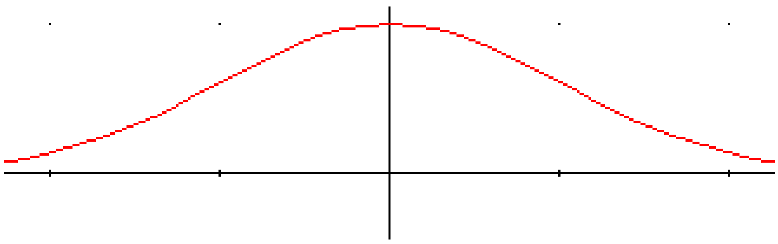
Impulso gaussiano

DEFINIZIONE E TRASFORMATA DI FOURIER

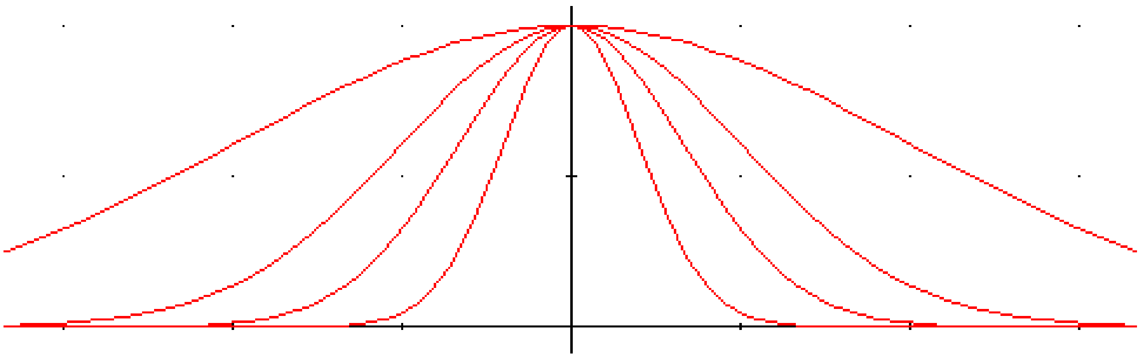
Si definisce **impulso gaussiano** il seguente segnale:

$$s(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}$$

L'andamento di questo segnale è il seguente:



Quando maggiore è σ_t, tanto più la campana si assottiglia:



Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier di questo segnale. Per farlo, intendiamo avvalerci della proprietà di derivazione nel tempo e di quella di dualità.

In primo luogo, il segnale derivato ha l'espressione

$$s'(t) = -\frac{t}{\sigma_t^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}$$

Se moltiplichiamo e dividiamo per 2π, abbiamo che

$$s'(t) = -\frac{2\pi t}{2\pi\sigma_t^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}$$

In base alla proprietà di derivazione nel tempo, la trasformata di questo segnale è legata a quella di s(t) dalla relazione

$$\mathrm{Fourier}[s'(t)] = j2\pi f S(f)$$

Vediamo allora quanto vale la trasformata di s'(t): abbiamo che

$$\mathrm{Fourier}[s'(t)] = \mathrm{Fourier}\left[-\frac{2\pi t}{2\pi\sigma_t^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}\right] = \frac{1}{2\pi\sigma_t^2}\mathrm{Fourier}\left[-2\pi t e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}\right]$$

La funzione da trasformare è il segnale s(t) moltiplicato per il termine 2πt. Vogliamo far vedere che la trasformata di tale funzione è

$$\frac{1}{j}\frac{dS(f)}{df}$$

Per farlo, applichiamo la proprietà di dualità: abbiamo prima detto che, in base alla proprietà di derivazione nel tempo, per un generico segnale x(t) si ha che

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathrm{Fourier}} j2\pi f X(f)$$

Portando il termine j al primo membro, abbiamo che

$$\frac{1}{j}\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathrm{Fourier}} 2\pi f X(f)$$

Applicando a questa relazione la proprietà di dualità e successivamente la proprietà di scala, abbiamo che

$$-2\pi t X(-t) \xleftrightarrow{\mathrm{Fourier}} \frac{1}{j}\frac{dx(f)}{dt}$$

Nel nostro caso, il segnale da trasformare è $-2\pi t e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}$, ossia è $-2\pi t s(t)$ (si tenga presente che s(t) è un segnale pari) per cui la sua trasformata, in base alla proprietà di dualità, sarà $\frac{1}{j}\frac{dS(f)}{df}$.

Quindi, abbiamo che

$$\mathrm{Fourier}\left[-2\pi t e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}}\right] = \frac{1}{j}\frac{dS(f)}{dt}$$

Andando a sostituire nella relazione nell'espressione dello spettro di s'(t), otteniamo dunque che

$$\mathrm{Fourier}[s'(t)] = \frac{1}{2\pi\sigma_t^2}\frac{1}{j}\frac{dS(f)}{df}$$

D’altra parte, avevamo anche trovato che

$$\text{Fourier}\left[s'(t)\right] = j2\pi f S(f)$$

per cui concludiamo che

$$j2\pi f S(f) = \frac{1}{2\pi\sigma_t^2}\frac{1}{j}\frac{dS(f)}{df}$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili, dalla quale possiamo ottenere quanto vale S(f): separando le variabili otteniamo

$$\frac{dS(f)}{S(f)} = -\left(2\pi\sigma_t\right)^2 f df$$

Integrando in modo indefinito, abbiamo che

$$\int \frac{dS(f)}{S(f)} = \int -\left(2\pi\sigma_t\right)^2 f df$$

e quindi

$$\log S(f) = -\left(2\pi\sigma_t\right)^2 \frac{f^2}{2} + \cos t$$

e quindi ancora

$$\boxed{S(f) = Ae^{-\frac{\left(2\pi\sigma_t f\right)^2}{2}}}$$

A ben guardare, anche S(f), graficamente, è una campana: infatti, se noi poniamo $2\pi\sigma_t = \frac{1}{\sigma_f}$, otteniamo una espressione del tipo

$$S(f) = Ae^{-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}}$$

e questa è la stessa espressione di s(t). Naturalmente, dato che σ_f è il reciproco, a meno del termine 2π, di σ_t, è chiaro che quanto più schiacciata è la campana di s(t), tanto più appiattita sarà quella di S(f) e viceversa. Ad ogni modo, ad una campana nel dominio del tempo corrisponde una campana anche nel dominio della frequenza.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1