Appunti di Teoria dei Segnali
Capitolo 4 - Campionamento ideale

Introduzione: definizione di campionamento 1
Ricostruzione del segnale a partire dai suoi campioni 2
Considerazioni energetiche 9
Esempio 12

INTRODUZIONE: DEFINIZIONE DI CAMPIONAMENTO

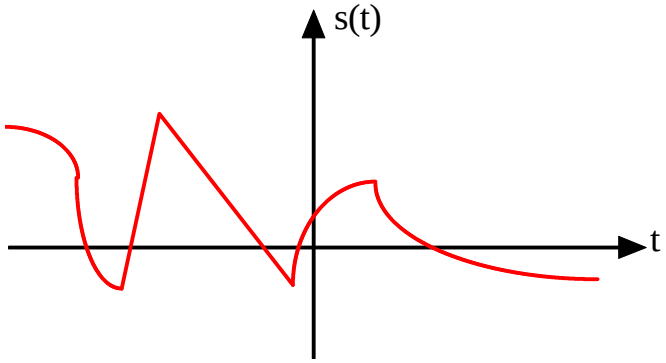
Consideriamo un **segnale s(t) continuo**. Su questo segnale facciamo come unica ipotesi quella per cui deve essere ad ENERGIA FINITA, dove ricordiamo che l'**energia** associata ad un segnale vale per definizione

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

Questa ipotesi comporta una serie di conseguenze fondamentali:

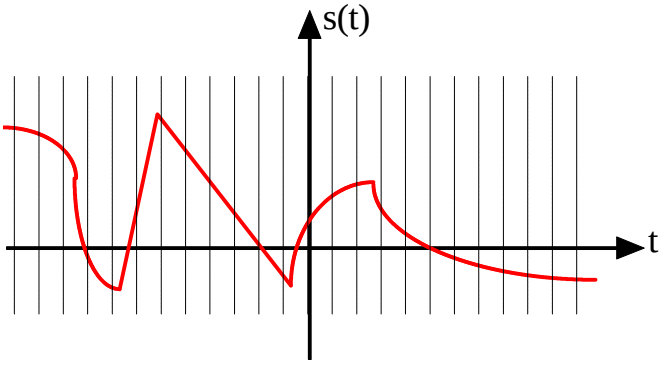
- la prima è che certamente s(t) non può essere un segnale periodico, in quanto sappiamo che questi segnali sono segnali di potenza (cioè ad energia nulla);
- la seconda è che ci siamo garantiti l'esistenza dello spettro S(f) di tale segnale;
- infine, la terza è che anche S(f) sia un segnale ad energia finita, in quanto sappiamo che l'energia associata ad s(t) è la stessa associata ad S(f).

Il segnale s(t) ha ovviamente un certo andamento nel tempo: **campionare** s(t) significa considerare i valori che esso assume per valori discreti di t che siano multipli interi di una quantità fissa T. Per esempio, supponiamo che il nostro segnale s(t) abbia l'andamento mostrato nella figura seguente:



Per campionare s(t), non dobbiamo far altro che scegliere un valore T (reale positivo) e valutare i valori che s(t) assume negli istanti

$$t = nT \qquad \text{con } n=-\infty \, , \, ... \, , \, -2, \, -1 \, , \, 0 \, , \, +1 \, , \, +2 \, , \, ... \, . \, +\infty$$



Il valore scelto per T prende il nome di **periodo di campionamento**: evidentemente, esso rappresenta *l'intervallo di tempo che intercorre tra due misure successive del valore di s(t).*

L'inverso di T, ossia $f_C=1/T$, prende invece il nome di **frequenza di campionamento** e rappresenta *il numero di valori di s(t) che si valutano nell'unità di tempo*. Quanto più piccolo è T, tanto maggiore è f_C e quindi tanti più campioni raccogliamo nell'unità di tempo.

RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE A PARTIRE DAI SUOI CAMPIONI

Ci proponiamo di verificare la possibilità di ottenere l'andamento esatto, cioè l'andamento continuo nel tempo, del segnale s(t) a partire solo dalla conoscenza dei suoi campioni. Vedremo perciò come è possibile fare questo e sotto quali ipotesi il risultato finale risulta valido.

Intanto, è ovvio che l'insieme dei valori di s(nT) che otteniamo negli istanti t=nT, cioè i nostri **campioni**, costituiscono ciò che noi abbiamo definito "segnale discreto": lo possiamo dunque indicare con la notazione s(nT). Prende invece il nome di **segnale campionato** di s(t) il segnale che si ottiene mediante la formula

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT)$$

Si tratta evidentemente di un segnale CONTINUO costituito da una successione di impulsi, ciascuno traslato di una quantità nT rispetto all'origine e di area pari al valore del corrispondente campione s(nT). Questo segnale campionato ha la particolarità di assumere, in ogni istante, il valore che ivi assume s(t): per esempio, possiamo verificare come il valore assunto dal segnale campionato in t=0 sia lo stesso che ivi assume s(t), ossia $s_C(t)\big|_{t=0} = s(0)$.

Per la verifica, cominciamo a sviluppare parzialmente quella sommatoria: si ha che

$$s_C(t) = \ldots + s(-2T)\delta(t+2T) + s(-T)\delta(t+T) + s(0)\delta(0) + s(T)\delta(t-T) + s(2T)\delta(t-2T) + \ldots$$

Quando t=0, questa scrittura diventa

$$s_C(t=0) = \ldots + s(-2T)\delta(+2T) + s(-T)\delta(+T) + s(0)\delta(0) + s(T)\delta(-T) + s(2T)\delta(-2T) + \ldots$$

Ma gli impulsi δ assumono valore nullo negli istanti diversi da 0, per cui rimane

$$s_C(t=0) = s(0)\delta(0)$$

Inoltre, $\delta(0)=1$, per cui concludiamo che

$$s_C(t=0) = s(0)$$

che era ciò che volevamo verificare.

Fatta questa verifica, vogliamo calcolare quanto vale la trasformata di Fourier del segnale campionato $s_C(t)$. Intanto, possiamo manipolare ulteriormente l'espressione di questo segnale: infatti, considerando che il prodotto $s(nT)\delta(t-nT)$ ha senso solo per $t=nT$, mentre vale 0 altrove, noi possiamo porre proprio $t=nT$, in modo da ottenere

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t-nT) = s(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

A partire da questa espressione, calcoliamo $S_C(f)$, la quale sarà evidentemente pari alla trasformata del secondo membro; questo secondo membro è costituito da un prodotto: ricordando allora che un prodotto nel dominio del tempo equivale ad una convoluzione nel dominio della frequenza (proprietà di convoluzione in frequenza), possiamo scrivere che

$$S_C(f) = S(f) * \text{Fourier}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\right]$$

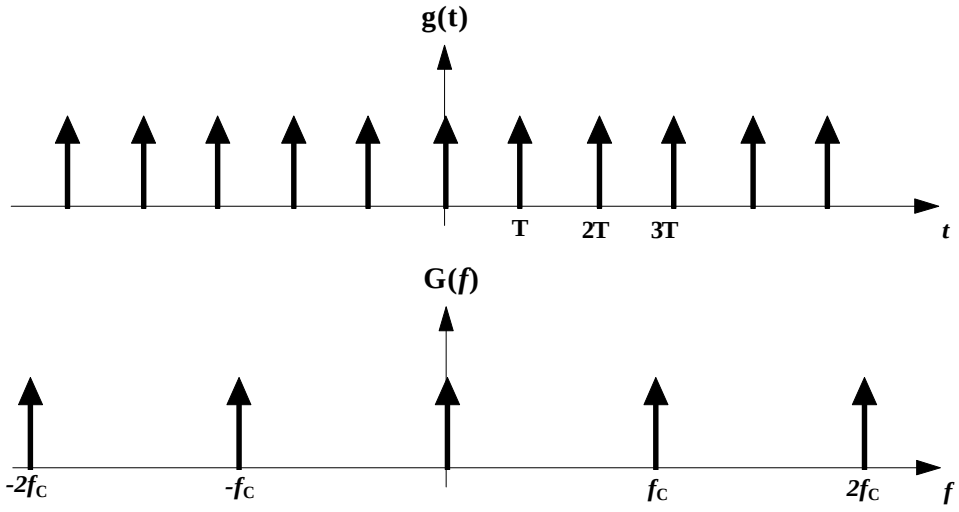
In precedenza abbiamo trovato che la trasformata di Fourier del segnale

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

che rappresenta una successione di impulsi (ed è infatti chiamato **pettine di impulsi** o **pettine di campionamento**), è il segnale

$$G(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

che rappresenta a sua volta una successione di impulsi:



Andando a sostituire nella espressione di $S_C(f)$ otteniamo

$$S_C(f) = S(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

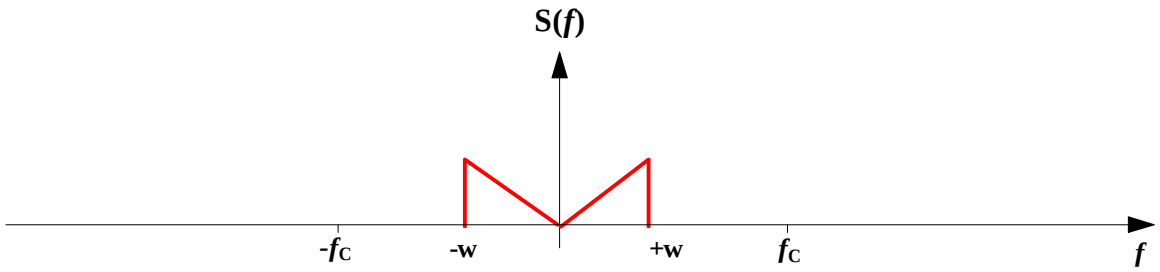
A questo punto, ci ricordiamo che la convoluzione tra un qualsiasi segnale e l’impulso traslato è pari al segnale stesso calcolato nello stesso punto in cui è applicato l’impulso, per cui concludiamo che lo spettro (cioè la trasformata di Fourier) del segnale campionato è

$$\boxed{S_C(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right)}$$

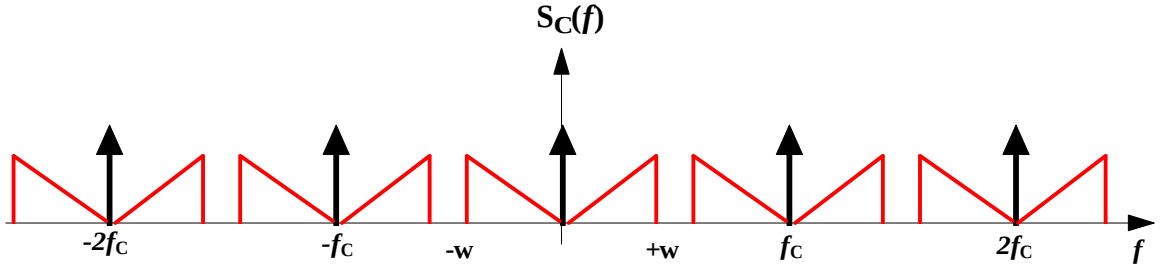
Come è fatto questo spettro? Dato che la funzione S(f) non è altro che lo spettro del nostro segnale s(t), deduciamo che ***$S_C(f)$ consiste in una successione di repliche, a meno del fattore costante 1/T, dello spettro di s(t), ciascuna traslata rispetto all’origine di una quantità pari ad un multiplo della frequenza di campionamento f_C=1/T:*** infatti, andando a sviluppare parzialmente quella sommatoria, troviamo evidentemente che

$$S_C(f) = ..+\frac{1}{T}S\left(f+\frac{2}{T}\right)+\frac{1}{T}S\left(f+\frac{1}{T}\right)+\frac{1}{T}S(f)+\frac{1}{T}S\left(f-\frac{1}{T}\right)+\frac{1}{T}S\left(f-\frac{2}{T}\right)+...-$$

Per essere più chiari, supponiamo che lo spettro di s(t) sia del tipo seguente:



Lo spettro del segnale campionato sarà allora del tipo seguente:



Spettro del segnale campionato per il segnale della figura precedente. Gli impulsi posizionati sulla frequenza f_C e sui suoi multipli rappresentano lo spettro del pettine di campionamento, indicato al fine di evidenziare l’effetto della convoluzione: S(f) viene collocato a cavallo di ciascun impulso di campionamento (in frequenza). In figura sono indicate solo le repliche a cavallo della frequenza 0, di $\pm f_C$ e di $\pm 2f_C$,, ma sono da considerarsi anche le repliche a cavallo degli infiniti altri multipli della frequenza di campionamento

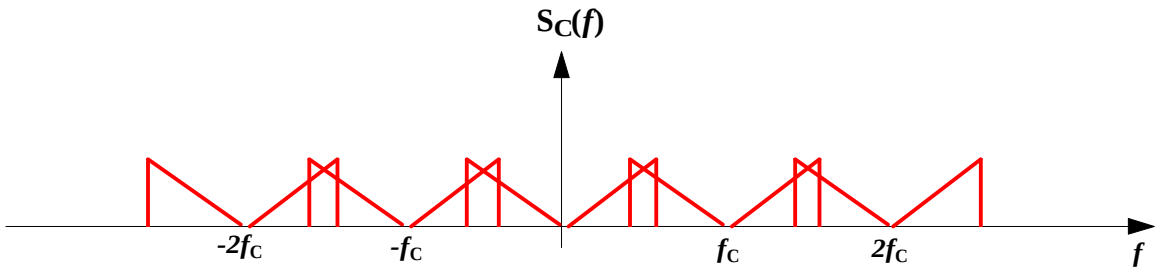
Autore: Sandro Petrizzelli

Quindi, fino ad ora, noi abbiamo fatto questo: una volta noti i campioni del nostro segnale, abbiamo costruito in modo analitico il segnale campionato ed il suo spettro e abbiamo trovato che tale spettro è costituito da una successione di infinite repliche (a meno del termine 1/T) dello spettro di s(t). Allora, è evidente che, se riusciamo ad isolare, a partire da queste infinite repliche, una sola di esse, per esempio quella centrata nell'origine, avremo ottenuto proprio lo spettro di s(t) dal quale potremo risalire, mediante la **formula di antitrasformazione**, all'espressione di s(t).

Si pongono allora due domande: come è possibile isolare lo spettro di s(t) a partire dallo spettro di $s_C(t)$ e, in secondo luogo, quando è possibile far questo?

La risposta alla prima domanda è a noi nota: basta infatti moltiplicare $S_C(f)$ per un **rettangolo** opportuno, tale cioè che azzeri tutte le altre repliche mentre lasci più o meno invariata quella "centrale" (questo concetto sarà approfondito più avanti).

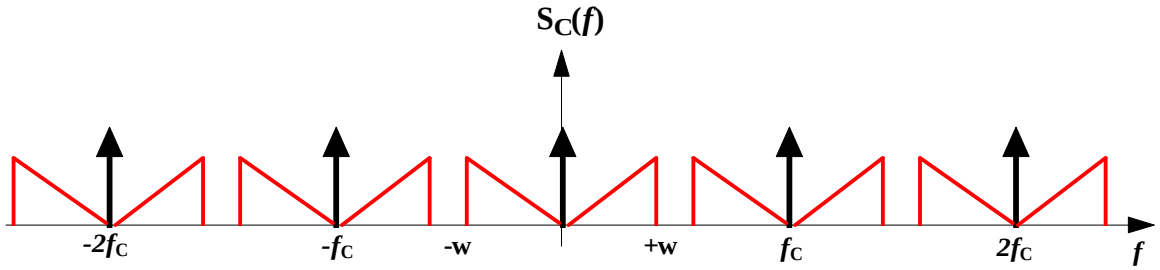
La risposta alla seconda domanda discende a sua volta da quanto appena detto: infatti, è ovvio che possiamo isolare S(f), cioè la replica centrale, solo a condizione che essa non sia sovrapposta alle altre repliche. Infatti, è chiaro che se $S_C(f)$ è quello disegnato poco fa, siamo in grado di trovare 2 valori -w,+w tali che il rettangolo avente per estremi tali valori racchiuda solo la replica centrale mentre non racchiuda le altre. Al contrario, se $S_C(f)$ fosse del tipo



è chiaro che noi non potremo mai trovare un intervallo [-w,+w] che racchiuda solo la replica centrale.

Questo ci consente dunque di dire che *la condizione necessaria perché sia possibile ricostruire il segnale s(t) a partire dai suoi campioni è che le repliche di S(f) che costituiscono $S_C(f)$, cioè lo spettro del segnale campionato, non si sovrappongano reciprocamente.*

Vediamo allora cosa deve succedere affinché non ci sia la sovrapposizione delle repliche. E' subito evidente che la posizione delle repliche dipende strettamente dal valore della frequenza di campionamento f_C (cioè dal valore del periodo di campionamento T): allora, indicato con [-w,+w], dove w è la cosiddetta **banda** di $S_C(f)$, l'intervallo (simmetrico rispetto all'origine) che racchiude la replica centrale, ossia



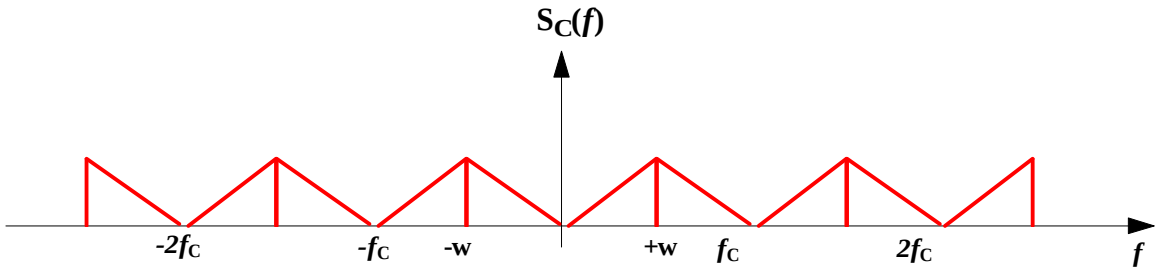
è evidente che, affinché non si abbia la sovrapposizione delle repliche, deve essere

$$f_C \geq 2w$$

Autore: Sandro Petrizzelli

Questa, che prende il nome di **condizione di Nyquist**, è la prima condizione necessaria per la ricostruzione del segnale s(t) a partire dal suo segnale campionato: *la frequenza di campionamento deve essere scelta maggiore o al più uguale al doppio di w.*

Il valore limite è ovviamente $f_C=2w$, nel quale caso avremmo $S_C(f)$ fatto nel modo seguente:



N.B. Ricordiamo che il fatto per cui gli estremi dell'intervallo in cui è definita ciascuna replica siano simmetrici rispetto ad un valore centrale deriva da una proprietà fondamentale della trasformata di Fourier: si tratta della proprietà secondo cui la parte reale della trasformata di Fourier è una funzione pari in f (per maggiori dettagli vedere il paragrafo sulle proprietà generali della trasformata di Fourier)

Non è ancora finita: è ovvio che la condizione di Nyquist non ha senso quando $w=\infty$, ossia quando lo spettro di s(t) NON è **a banda limitata**: tra l'altro, in quel caso, tale spettro si estende da $-\infty$ e $+\infty$ ed è quindi inevitabile che le repliche, a prescindere dal valore della frequenza di campionamento, si sovrappongano. Per esempio, non sarà mai possibile ricostruire un segnale s(t) il cui spettro sia una funzione periodica. Come anche non sarà mai possibile ricostruire un segnale il cui spettro sia una costante, come per esempio accade per l'impulso $\delta(t)$, il cui spettro è una costante.

Quindi, la seconda ed ultima condizione per poter ricostruire s(t) a partire dai suoi campioni è che *lo spettro di s(t) deve essere a banda limitata.*

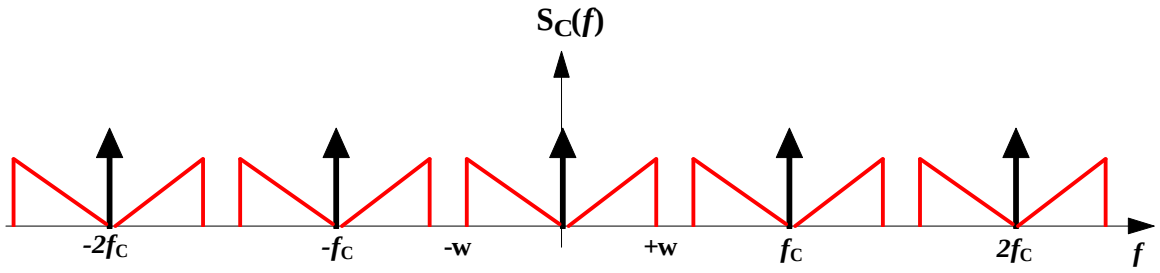
Sotto, dunque, le due condizioni esaminate, possiamo arrivare alla espressione di s(t) a partire dai valori dei suoi campioni: facciamo osservare che questa espressione non è approssimata, ma è esatta.

Ritornando adesso all'aspetto matematico della questione, abbiamo detto che per isolare S(f) a partire da $S_C(f)$ basta moltiplicare quest'ultima funzione per un opportuno rettangolo: vediamo allora quali devono essere le caratteristiche di questo rettangolo. In primo luogo, ricordando che l'espressione dello spettro del segnale campionato è

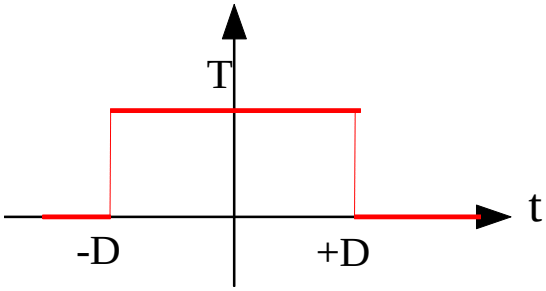
$$S_C(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

è chiaro che le repliche di S(f) di cui è composto sono a meno del fattore 1/T. Di conseguenza, se il rettangolo ha altezza pari proprio a T, noi siamo certi che il suo prodotto per $S_C(f)$ dà la replica nelle "dimensioni" corrette.

In secondo luogo è importante la base del rettangolo, la quale deve essere tale da conservare la replica cui siamo interessati e da azzerare tutte le altre. Allora, supponendo che $S_C(f)$ sia



è chiaro il rettangolo



andrà scelto con $D \in [+w, f_C - w[$.

Solo in questo modo è possibile ottenere l'azzeramento di tutte le altre repliche. Al valore di D si dà il nome di **frequenza di carico del filtro**.

Vediamo infine come si arriva, da un punto di vista matematico, al segnale s(t) a partire dallo spettro del suo segnale campionato: abbiamo detto che la prima cosa è la moltiplicazione per un opportuno rettangolo, al fine di ottenere proprio lo spettro di s(t). Detto $S_r(f)$ l'esito del prodotto, abbiamo dunque che

$$S_r(f) = S_C(f)\left[\text{Trect}\left(\frac{f}{2D}\right)\right]$$

A meno di *interferenze*, $S_r(f)$ è dunque esattamente lo spettro di s(t) (il pedice "r" sta per "ricostruito"). Con una operazione di antitrasformazione di Fourier, arriviamo all'espressione di $s_r(t)$: dato che abbiamo un prodotto nel dominio della frequenza, otterremo un prodotto di convoluzione nel dominio del tempo, per cui

$$s_r(t) = \text{Fourier}^{-1}[S_C(f)] * \text{Fourier}^{-1}\left[\text{Trect}\left(\frac{f}{2D}\right)\right]$$

L'antitrasformata di $S_C(f)$ è il segnale campionato, per cui

$$s_r(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right] * \text{Fourier}^{-1}\left[\text{Trect}\left(\frac{f}{2D}\right)\right]$$

L'antitrasformata di un rettangolo di altezza T e base 2D è invece $2DT\text{sinc}(2Dt)$, per cui

$$s_r(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT)\right] * [2DTsinc(2Dt)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [s(nT)\delta(t-nT)] * [2DTsinc(2Dt)] =$$

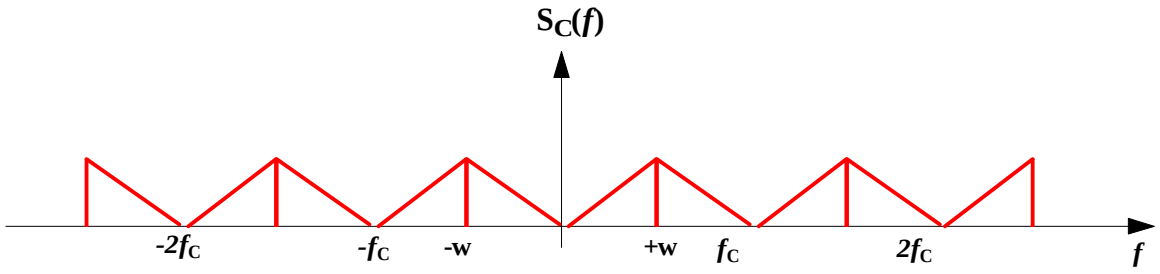
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2DTs(nT)[(\delta(t-nT)) * (sinc(2Dt))] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2DTs(nT)(sinc(2D(t-nT)))$$

In conclusione, la formula di ricostruzione del segnale s(t) è la seguente:

$$\boxed{s_r(t) = 2DT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)sinc(2D(t-nT))}$$

E' ovvio che, avendo a che fare con una serie di infiniti termini, questa formula di ricostruzione è ideale, ossia non è realizzabile nella pratica. Tuttavia, essa serve per mostrare che effettivamente la ricostruzione di s(t) a partire dai campioni è teoricamente possibile senza che venga effettuata alcuna approssimazione. Vedremo nel seguito cosa si fa in realtà.

Prima di proseguire, vediamo che cosa succede nel caso particolare in cui decidiamo di prendere la frequenza di campionamento esattamente uguale al doppio della banda w dello spettro S(f), ossia $f_C = \frac{1}{T} = 2w$. Questo implica che lo spettro del segnale campionato sia del tipo



e quindi anche che la frequenza di carico del filtro sia D=w, ossia pari alla banda dello spettro di s(t).

Mettendo insieme queste due relazioni, si trova ovviamente che

$$2DT = 2wT = f_C T = 1$$

In base a questa relazione, la frequenza di carico del filtro risulta essere la metà della frequenza di campionamento, che è a sua volta pari al doppio della banda di s(t).

In queste condizioni, la formula di ricostruzione si riduce a

$$\boxed{s_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)sinc(f_C(t-nT))}$$

CONSIDERAZIONI ENERGETICHE

Abbiamo dunque detto che la formula

$$s_r(t) = 2DT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\big(2D(t-nT)\big)$$

consente una ricostruzione esatta (teorica) del segnale s(t) noti che siano i suoi campioni. Come conferma intuitiva del fatto che il segnale discreto s(nT) costituisca una valida rappresentazione alternativa del segnale s(t) (il che ci consentirà, più avanti, di esaminare un altro metodo per arrivare all'espressione di s(t)), verifichiamo che l'energia associata a questi due segnali, uno discreto e l'altro continuo, sia esattamente la stessa.

Per definizione, l'energia associata al segnale continuo s(t) è data da

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt$$

mentre quella associata ad un segnale discreto s(nT) è

$$E'_S = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2$$

Noi intendiamo far vedere che E_S=E'_S.

Partiamo dall'espressione di E_S: avendo detto che $s(t)=s_r(t)$, possiamo sostituire a s(t) l'espressione ottenuta nella formula di ricostruzione, per cui

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2DT \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\big(2D(t-nT)\big) \right|^2 dt$$

Per comodità, facciamo l'ipotesi di scegliere $f_C=2w$: abbiamo detto che, in questo caso, la formula di ricostruzione risulta leggermente semplificata, per cui abbiamo che

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\big(f_C(t-nT)\big) \right|^2 dt$$

Sappiamo che il modulo di una quantità complessa è pari al prodotto della quantità stessa per il suo complesso coniugato, per cui

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\big(f_C(t-nT)\big) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(mT)\,\mathrm{sinc}\big(f_C(t-mT)\big) \right)^* dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\big(f_C(t-nT)\big) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} [s(mT)]^* \big[\mathrm{sinc}\big(f_C(t-mT)\big)\big]^* \right) dt$$

La funzione seno cardinale è una funzione reale, per cui l'operatore "complesso coniugato" non la modifica in alcun modo:

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[s(mT)\right]^*\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-mT)\right)\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)\left[s(mT)\right]^*\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-mT)\right)\right)dt$$

Possiamo adesso scambiare il segno di integrale con il segno di sommatoria:

$$E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)\left[s(mT)\right]^*\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-mT)\right)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(nT)\left[s(mT)\right]^*\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)\mathrm{sinc}\left(f_C(t-mT)\right)dt$$

A questo punto, utilizziamo un risultato fondamentale circa questo integrale: si dimostra infatti che esso vale T quando n=m mentre vale 0 in tutti gli altri casi. E' evidente, allora, che possiamo far scomparire una delle due sommatorie, scrivendo che

$$E_S = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\left(s(nT)\right)^* = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|s(nT)\right|^2$$

e questo era quello che volevamo dimostrare.

Facciamo vedere adesso il risultato che poco fa abbiamo dato per buono: dobbiamo cioè dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)\mathrm{sinc}\left(f_C(t-mT)\right)dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Un primo modo di effettuare la dimostrazione potrebbe essere quello di sostituire al "sinc" la sua espressione e di fare i relativi calcoli. Noi invece seguiamo un'altra strada, che passa per l'applicazione della cosiddetta "**proprietà del valore iniziale**" della trasformata di Fourier: questa proprietà dice che, dato un segnale g(t) che ammette trasformata di Fourier e data la sua trasformata G(f), sussiste la relazione

$$G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$$

Vediamo come possiamo applicare questa proprietà al nostro caso: se noi consideriamo come segnale g(t) la funzione integranda, ossia

$$g(t) = \mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)\mathrm{sinc}\left(f_C(t-mT)\right)$$

dobbiamo far vedere che

$$G(0)=\begin{cases}T & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

Calcoliamo allora quanto vale la trasformata di Fourier di g(t): trattandosi di un prodotto nel dominio del tempo, avremo un prodotto di convoluzione nel dominio della frequenza; inoltre, trattandosi del prodotto tra due "sinc" traslati, avremo un prodotto di convoluzione tra due rettangoli, ciascuno moltiplicato per un termine esponenziale:

$$G(f)=\left[\frac{1}{f_C}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_C}\right)e^{-j2\pi f\frac{n}{f_C}}\right]*\left[\frac{1}{f_C}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_C}\right)e^{-j2\pi f\frac{m}{f_C}}\right]$$

Applicando adesso la definizione di prodotto di convoluzione, abbiamo che

$$G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{f_C}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}\right]\left[\frac{1}{f_C}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi(f-\sigma)\frac{n}{f_C}}\right]d\sigma=$$

$$=\frac{1}{f_C^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi(f-\sigma)\frac{n}{f_C}}d\sigma$$

Vediamo ora cosa accade per f=0:

$$G(0)=\frac{1}{f_C^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}\,\mathrm{rect}\left(-\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}d\sigma$$

Il "rect" è una funzione pari, per cui

$$G(0)=\frac{1}{f_C^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}d\sigma$$

Il prodotto tra due rettangoli uguali è pari ad uno qualsiasi dei due rettangoli stessi, per cui

$$G(0)=\frac{1}{f_C^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\sigma}{f_C}\right)e^{-j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}e^{j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}d\sigma$$

Inoltre, la funzione del "rect" è semplicemente quella di azzerare la funzione integranda al di fuori dell'intervallo $[-f_C/2,+f_C/2]$. Possiamo allora eliminare il "rect" restringendo l'intervallo di integrazione:

$$G(0)=\frac{1}{f_C^2}\int_{-f_C/2}^{+f_C/2}e^{-j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}e^{j2\pi\sigma\frac{n}{f_C}}d\sigma=\frac{1}{f_C^2}\int_{-f_C/2}^{+f_C/2}e^{j2\pi\sigma(m-n)\frac{1}{f_C}}d\sigma$$

Già a questo punto si nota che, quando m=n, G(0)=T: infatti, se m=n, la funzione integranda vale 1 e quindi l'integrale dà come risultato

$$G(0) = \frac{f_C}{f_C^2} = \frac{1}{f_C} = T$$

Vediamo invece cosa succede quando m≠n: intanto, risolvendo l'integrale di prima abbiamo che

$$G(0) = \frac{1}{f_C^2}\frac{f_C}{j2\pi(m-n)}\left[e^{j2\pi\sigma(m-n)\frac{1}{f_C}}\right]_{-f_C/2}^{+f_C/2} = \frac{1}{j2\pi f_C(m-n)}\left[e^{j\pi(m-n)} - e^{-j\pi(m-n)}\right]$$

Applicando adesso le formule di Eulero, possiamo riscrivere G(0) nella forma

$$G(0) = \frac{1}{\pi f_C(m-n)}\left[\frac{e^{j\pi(m-n)} - e^{-j\pi(m-n)}}{2j}\right] = \frac{1}{\pi f_C(m-n)}\sin(\pi(m-n))$$

L'argomento del Seno, quando m≠n, è un multiplo intero di π e quindi il Seno si annulla sempre. Dato che il denominatore è invece non nullo, deduciamo che, quando m≠n, G(0)=0.

ESEMPIO

Supponiamo di voler ricostruire il segnale x(t) sapendo che la sua banda è w (ovviamente limitata) e che i suoi campioni, misurati con una frequenza di campionamento f_C=1/T=2w, valgono tutti 0 tranne i seguenti tre:

$$x(0) = 1$$
$$x\left(-\frac{1}{2w}\right) = 0.5$$
$$x\left(+\frac{1}{2w}\right) = 0.5$$

Dobbiamo semplicemente applicare la formula generale di ricostruzione, che, per f_C=2w, è

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)$$

Sviluppando quella sommatoria e tenendo conto che gli unici termini non nulli sono quelli per n=-1,0,+1, abbiamo quanto segue:

$$x_r(t) = x(-T)\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t+T)\right) + x(0)\,\mathrm{sinc}\left(f_C t\right) + x(T)\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-T)\right) =$$
$$= x\left(-\frac{1}{2w}\right)\mathrm{sinc}\left(f_C(t+T)\right) + x(0)\,\mathrm{sinc}\left(f_C t\right) + x\left(\frac{1}{2w}\right)\mathrm{sinc}\left(f_C(t-T)\right)$$

Sostituendo i valori dei campioni, otteniamo

$$x_r(t) = 0.5\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t+T)\right) + \mathrm{sinc}\left(f_C t\right) + 0.5\,\mathrm{sinc}\left(f_C(t-T)\right)$$

Sostituendo adesso l'espressione della funzione "sinc" otteniamo

$$x_r(t) = 0.5\frac{\sin\left(\pi f_C(t+T)\right)}{\pi f_C(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi f_C t\right)}{\pi f_C t} + 0.5\frac{\sin\left(\pi f_C(t-T)\right)}{\pi f_C(t-T)}$$

Ricordando che $f_C=1/T$, abbiamo inoltre che

$$x_r(t) = 0.5\frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}(t+T)\right)}{\pi f_C(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C t} + 0.5\frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}(t-T)\right)}{\pi f_C(t-T)} =$$

$$= 0.5\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}+\pi\right)}{\pi f_C(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C t} + 0.5\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}-\pi)\right)}{\pi f_C(t-T)}$$

Adesso, ricordando la proprietà della funzione Seno secondo cui

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$$
$$\sin(\alpha-\pi) = -\sin(\alpha)$$

abbiamo che

$$x_r(t) = -0.5\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}\right)}{\pi f_C(t+T)} + \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C t} - 0.5\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}\right)}{\pi f_C(t-T)} = \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C}\left[-\frac{0.5}{t+T}+1-\frac{0.5}{t-T}\right] =$$

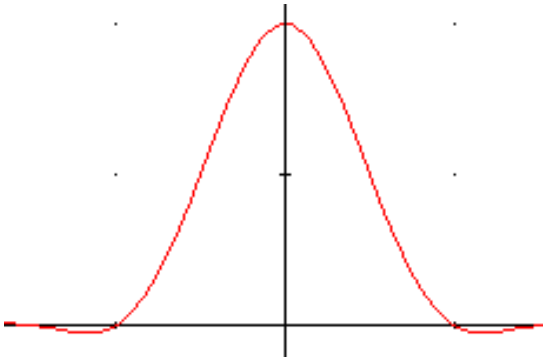
$$= \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C}\left[\frac{-0.5t+0.5T+t^2-T^2-0.5t-0.5T}{t^2-T^2}\right] = \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C}\left[\frac{t^2-T^2-t}{t^2-T^2}\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{\pi f_C}\left[1-\frac{t}{t^2-T^2}\right] = \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{2\pi w}\left[1-\frac{t}{t^2-T^2}\right]$$

Proseguendo con i calcoli, si arriva al seguente risultato finale:

$$x_r(t) = \frac{\sin\left(\pi\frac{1}{T}t\right)}{2\pi w t}\left[\frac{1}{1-(2wt)^2}\right]$$

L’andamento grafico di questo segnale è il seguente (per w=2):



A titolo di esercizio, ricaviamo l’espressione dello spettro di $x_r(t)$: per farlo, partiamo dalla relazione

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 0.5\text{sinc}\left(f_C(t+T)\right)+\text{sinc}\left(f_C t\right)+0.5\text{sinc}\left(f_C(t-T)\right)= \\ &= 0.5\text{sinc}\left(2w\left(t+\frac{1}{2w}\right)\right)+\text{sinc}(2wt)+0.5\text{sinc}\left(2w\left(t-\frac{1}{2w}\right)\right)= \\ &= 0.5\text{sinc}(2wt+1)+\text{sinc}(2wt)+0.5\text{sinc}(2wt+1) \end{aligned}$$

La trasformata di questo segnale si può calcolare sfruttando una serie di proprietà a noi note: in primo luogo, applicando la proprietà di linearità noi abbiamo che

$$X_r(f) = 0.5\text{Fourier}\left[\text{sinc}(2wt+1)\right]+\text{Fouriere}\left[\text{sinc}(2wt)\right]+0.5\text{Fourier}\left[\text{sinc}(2wt+1)\right]$$

Ricordandoci adesso che la trasformata del segnale $z(t)=\text{sinc}(2\omega t)$ si calcola mediante la proprietà di dualità e vale

$$Z(f)=\frac{1}{2w}\text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$$

abbiamo che

$$X_r(f) = 0.5\text{Fourier}\left[\text{sinc}(2wt+1)\right]+\frac{1}{2w}\text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)+0.5\text{Fourier}\left[\text{sinc}(2wt+1)\right]$$

Ricordandoci infine della proprietà di traslazione nel tempo, concludiamo che

$$X_r(f)=\frac{1}{4w}\text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)e^{-j\pi f\frac{1}{w}}+\frac{1}{2w}\text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)+\frac{1}{4w}\text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)e^{j\pi f\frac{1}{w}}$$

Possiamo inoltre applicare le formule di Eulero, ottenendo che

$$X_r(f) = \frac{1}{2w}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)\left[1+\frac{1}{2}e^{-j\pi f\frac{1}{w}}+\frac{1}{2}e^{j\pi f\frac{1}{w}}\right] = \frac{1}{2w}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi f}{w}\right)\right]$$

Da questa espressione, in particolare dalla presenza della funzione “rect”, di nota che lo spettro X(f) del nostro segnale è certamente a banda limitata, il che costituisce la condizione fondamentale perché si possa operare la ricostruzione di s(t) a partire dai suoi campioni.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1