Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 7- Trasformata di Fourier discreta

INTRODUZIONE

Sappiamo che i segnali si dividono in due categorie fondamentali:

- i segnali “*continui*” s(t) sono quelli definiti appunto con continuità nel tempo;
- i segnali “*discreti*” s(nT) sono invece definiti solo in istanti discreti **t=nT** multipli interi di una quantità fissa T.

A proposito dei segnali continui, abbiamo definito la trasformata di Fourier nel modo seguente:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Abbiamo anche detto che non sempre questa trasformata esiste, ma che, per esempio, esiste sempre per i segnali ad energia finita.

Inoltre, abbiamo parlato del cosiddetto **campionamento**, ossia sostanzialmente della possibilità di “ricostruire” un segnale tempo-continuo s(t) a partire dai suoi campioni s(nT), cioè a partire dai valori che s(t) assume in precisi istanti di tempo t=nT. Evidentemente, l’insieme dei campioni s(nT) costituisce un segnale discreto. Proprio in funzione del campionamento e della importanza che per noi assumono i segnali discreti come s(nT), appare conveniente studiarne più a fondo le proprietà, partendo proprio dalla introduzione di una operazione di trasformazione di Fourier analoga a quella definita per i segnali continui.

DEFINIZIONE

Sia dato dunque un generico segnale discreto s(nT). Si definisce **trasformata di Fourier per segnali discreti** (brevemente **DTFT**, che sta per *Discrete Time Fourier Transform*) la seguente funzione:

$$\boxed{S(f) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) e^{-j2\pi fnT}}$$

Si tratta evidentemente di una *funzione continua nella variabile f* e si nota subito l’analogia con la trasformata per segnali continui: al posto dell’integrale qui abbiamo una sommatoria e al posto del dt qui abbiamo un T.

La prima cosa da dire su questa nuova trasformata è che non sempre essa esiste, ossia non sempre quella sommatoria converge. Tuttavia, così come accade per i segnali continui, la convergenza è assicurata nella ipotesi per cui il segnale s(nT) è ad energia finita, ossia nell’ipotesi che sia finita e non nulla la quantità

$$E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T |s(nT)|^2$$

Per il momento, quindi, in tutti i nostri discorsi supporremo di trattare solo segnali discreti ad energia finita.

Un’altra osservazione importante riguarda una proprietà fondamentale della funzione S(f): si verifica, infatti, che S(f) è una funzione (in f) periodica di periodo 1/T.

Formula di antitrasformazione discreta

Così come esiste la formula di trasformazione secondo Fourier, esiste anche quella di antitrasformazione, ossia la possibilità di ricavare s(nT) conoscendo la sua trasformata S(f). Vediamo allora come si ricava questa formula.

Consideriamo la definizione appena data, ossia

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per il termine $e^{j2\pi fmT}$ (con m generico numero intero): abbiamo

$$S(f)e^{j2\pi fmT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}e^{j2\pi fmT}$$

Adesso integriamo su un periodo:

$$\int_{-1/2T}^{+1/2T} S(f)e^{j2\pi fmT}df = \int_{-1/2T}^{+1/2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}e^{j2\pi fmT}df$$

Per comodità poniamo F=1/T:

$$\int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fmT}df = \int_{-F/2}^{+F/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}e^{j2\pi fmT}df$$

Concentriamoci solo sul secondo membro: possiamo intanto scambiare la sommatoria con l'integrale, per cui

$$\int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fmT}df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-F/2}^{+F/2} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}e^{j2\pi fmT}df$$

Portando fuori dall'integrale i termini che non dipendono da f, abbiamo

$$\int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fmT}df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT) \int_{-F/2}^{+F/2} e^{j2\pi f(m-n)T}df$$

Adesso risolviamo l'integrale a secondo membro per m ed n generici:

$$\int_{-F/2}^{+F/2} e^{j2\pi f(m-n)T}df = \frac{1}{j2\pi(m-n)T}\int_{-F/2}^{+F/2} D\left[e^{j2\pi f(m-n)T}\right]df = \frac{1}{j2\pi(m-n)T}\left[e^{j2\pi f(m-n)T}\right]_{-F/2}^{+F/2} =$$
$$= \frac{1}{j2\pi(m-n)T}\left[e^{j2\pi\frac{F}{2}(m-n)T} - e^{-j2\pi\frac{F}{2}(m-n)T}\right] = \frac{1}{j2\pi(m-n)T}\left[e^{j\pi(m-n)} - e^{-j\pi(m-n)}\right] =$$
$$= \frac{\sin(\pi(m-n))}{\pi(m-n)T} = \frac{F\sin(\pi(m-n))}{\pi(m-n)}$$

Quando m≠n, abbiamo come argomento del Seno, un multiplo intero di π, per cui quella frazione vale 0. Viceversa, quando n=m, in base alla proprietà per cui $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, la frazione vale F.

Abbiamo dunque trovato che

$$\int_{-F/2}^{+F/2} e^{j2\pi f(m-n)T}df = \begin{cases} F & n=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tornando allora alla relazione

$$\int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fmT}df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\int_{-F/2}^{+F/2} e^{j2\pi f(m-n)T}df$$

appare evidente che l'unico termine, della sommatoria a secondo membro, che risulta non nullo è quello che si ottiene per n=m, per cui si ha

$$\int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fmT}df = Ts(mT)F = s(mT)$$

Abbiamo dunque concluso che la **formula di antitrasformazione di Fourier per segnali discreti** è la seguente:

$$\boxed{s(nT) = \int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fnT}df}$$

Facciamo anche qui notare la profonda analogia con la formula di antitrasformazione nel caso continuo, ossia la formula

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df$$

Esempio: esponenziale discreto

Come primo esempio di calcolo della trasformata di Fourier discreta, consideriamo il segnale **esponenziale discreto**, ossia il segnale

$$x(nT) = a^n u(nT)$$

dove ricordiamo che il segnale **gradino discreto** è definito come

$$u(nT) = \begin{cases} 1 & n>0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

Supponiamo inoltre che |a|<1.
Calcoliamo la trasformata di Fourier di questo segnale usando la definizione: abbiamo che

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Tx(nT)e^{-j2\pi fnT}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ta^n u(nT)e^{-j2\pi fnT}=T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

Essendo il segnale u(nT) nullo per n<0, possiamo restringere l'intervallo di sommatoria:

$$X(f)=T\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j2\pi fnT}=T\sum_{n=0}^{+\infty}\left(ae^{-j2\pi fT}\right)^n$$

Adesso, avendo supposto che $|a|<1$, quella somma non è altro che quella della serie geometrica, per cui possiamo concludere che

$$X(f)=T\frac{1}{1-ae^{-j2\pi fT}}$$

Nota X(f), potremmo per esempio provare a calcolare quanto vale $|X(f)|^2$, funzione che prende il nome di **spettro di energia** del segnale x(nT):

$$|X(f)|^2=\frac{T^2}{\left|1-ae^{-j2\pi fT}\right|^2}=\frac{T^2}{\left|1-a\left(\cos(2\pi fT)-j\sin(2\pi fT)\right)\right|^2}=$$

$$=\frac{T^2}{\left|1-a\cos(2\pi fT)+ja\sin(2\pi fT)\right|^2}=\frac{T^2}{\left(1-a\cos(2\pi fT)\right)^2+\left(a\sin(2\pi fT)\right)^2}=\frac{T^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi fT)}$$

Esempio: impulso discreto traslato

Il segnale **impulso discreto** è definito come

$$\delta(nT)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & n=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

In modo analogo, allora, il segnale **impulso discreto traslato** sarà definito come

$$s(nT)=\delta(nT-n_0T)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & n=n_0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Calcoliamo allora la trasformata di Fourier di quest'ultimo segnale: applicando la definizione, abbiamo che

$$S(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\delta(nT-n_0T)e^{-j2\pi fnT}$$

In base ad una nota proprietà della funzione impulso, il prodotto di una funzione per un impulso, sia nel caso continuo sia in quello discreto, è pari al prodotto della funzione stessa, calcolata nel punto di applicazione dell'impulso, per l'impulso stesso: quindi, l'unico termine di quella sommatoria che risulta non nullo è quello per $n=n_0$, per cui abbiamo

$$S(f) = T\delta(n_0 T)e^{-j2\pi f n_0 T} = e^{-j2\pi f n_0 T}$$

Naturalmente, se l'impulso non è traslato, ossia $n_0=0$, si ha che la sua trasformata è semplicemente pari ad 1.

Possiamo dunque riassumere queste considerazioni nella scrittura

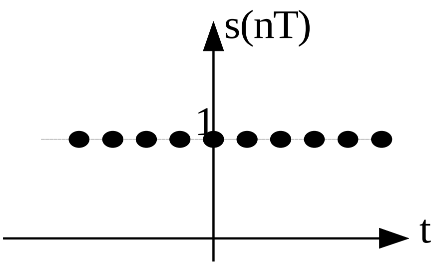
$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(nT) \longleftrightarrow 1 \\ \delta(nT - n_0 T) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f n_0 T} \end{array}}$$

Anche in questo caso, il risultato ottenuto è identico al caso continuo, dove si ha che

$$\begin{array}{l} \delta(t) \longleftrightarrow 1 \\ \delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \end{array}$$

Esempio

Consideriamo il segnale discreto s(nT) rappresentato in figura:



Calcoliamone la trasformata di Fourier: in base alla definizione, possiamo subito scrivere che

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi f nT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Te^{-j2\pi f nT} = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f nT}$$

Proprietà della DTFT

ENERGIA

Vediamo adesso quali sono le principali proprietà della trasformata di Fourier per segnali discreti. E' abbastanza intuitivo aspettarsi dei risultati assolutamente analoghi a quelli trovati nel caso continuo.

Sia dato il generico segnale s(nT) ad energia finita: sappiamo che questa energia è data dalla formula

$$E_S = \sum_{n=.\infty}^{+\infty} T|s(nT)|^2$$

Vediamo allora come è possibile esprimere E_S in funzione della trasformata S(f) di s(nT). Intanto, possiamo riscrivere E_S nel modo seguente:

$$E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\left(s(nT)\right)^*$$

Adesso, al posto della s(nT) alla quale va applicato l'operatore di complesso coniugato, sostituiamo l'espressione di s(nT) che si ottiene in base alla formula di antitrasformazione di Fourier:

$$E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\left(\int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fnT}df\right)^*$$

Data la linearità dell'operatore "complesso coniugato", lo portiamo dentro l'integrale:

$$E_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\int_{-F/2}^{+F/2} \left(S(f)\right)^* e^{-j2\pi fnT}df$$

A questo punto scambiamo l'integrale con la sommatoria:

$$E_S = \int_{-F/2}^{+F/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\left(S(f)\right)^* e^{-j2\pi fnT}df$$

S(f) non dipende dall'indice n della sommatoria, per cui lo possiamo portare fuori:

$$E_S = \int_{-F/2}^{+F/2} \left(S(f)\right)^* \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}\right]df$$

Il termine tra parentesi quadre non è altro, per definizione, che S(f), per cui possiamo concludere che

$$\boxed{E_S = \int_{-F/2}^{+F/2} \left|S(f)\right|^2 df}$$

Abbiamo cioè trovato che *l'energia associata al segnale s(nT) è la stessa che è associata alla sua trasformata di Fourier.*

Questo è lo stesso identico risultato trovato a suo tempo per i segnali continui.

SIMMETRIA HERMITIANA

Consideriamo sempre il generico s(nT) ad energia finita. La definizione di trasformata di Fourier dice che

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

In base alle proprietà dei numeri complessi, sappiamo di poter scrivere che

$$\cos x - j\sin x = e^{-jx}$$

e quindi possiamo riscrivere S(f) nella forma

$$\boxed{S(f) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT)}_{\mathrm{Re}[S(f)]} - j\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\sin(2\pi fnT)}_{\mathrm{Im}[S(f)]}}$$

Questa è una rappresentazione alternativa di S(f), che ce la fornisce come somma di una parte reale e di una immaginaria.

In particolare, ciò che si nota in questa formula, data la parità della funzione Coseno e la disparità della funzione Seno, è che, quando s(nT) è un segnale REALE, sussistono le relazioni

$$\mathrm{Re}[S(f)] = \mathrm{Re}[S(-f)]$$
$$\mathrm{Im}[S(f)] = -\mathrm{Im}[S(-f)]$$

che poi possono essere sintetizzate nell’unica relazione

$$\boxed{S(-f) = (S(f))^*}$$

MODULO E FASE DELLA DTFT

Sempre nell’ipotesi di s(nT) reale, si verifica anche che il modulo di S(f) è una funzione pari in f, ossia che $|S(f)| = |S(-f)|$, e che la fase di S(f) è una funzione dispari in f, ossia $\langle S(f) = -\langle S(-f)$.

Anche in questo caso, si tratta delle stesse proprietà trovate nel caso continuo, tranne per il fatto che, in quel caso, non c’era la limitazione di s(nT) reale.

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE (DISCRETO) REALE

E’ inoltre possibile trovare una espressione semplificata della trasformata di Fourier quando s(nT) è un segnale reale e pari oppure quando è reale e dispari.

Il punto di partenza è la definizione di trasformata, in forma trigonometrica, per il generico segnale s(nT) ad energia finita:

$$S(f) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT)}_{\mathrm{Re}[S(f)]} - j\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\sin(2\pi fnT)}_{\mathrm{Im}[S(f)]}$$

Nella seconda sommatoria, per n=0, il Seno si annulla, per cui possiamo escludere il valore n=0:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT) - j\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} Ts(nT)\sin(2\pi fnT)$$

Nella prima sommatoria, invece, per n=0, il Coseno vale 1, per cui possiamo scrivere che

$$S(f) = Ts(0) + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT) - j\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty} Ts(nT)\sin(2\pi fnT)$$

Adesso, scomponiamo l'argomento della seconda sommatoria in due pezzi nel modo seguente:

$$S(f) = Ts(0T) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT) - j\sum_{n=+1}^{+\infty}\left[Ts(nT)\sin(2\pi fnT) + Ts(-nT)\sin(-2\pi fnT)\right]$$

Stessa cosa facciamo per la prima sommatoria:

$$S(f) = Ts(0T) + \sum_{n=+1}^{+\infty}\left[Ts(nT)\cos(2\pi fnT) + Ts(-nT)\cos(-2\pi fnT)\right] - j\sum_{n=+1}^{+\infty}\left[Ts(nT)\sin(2\pi fnT) + Ts(-nT)\sin(-2\pi fnT)\right]$$

Dato che il Coseno è pari mentre il Seno è dispari, possiamo riscrivere S(f) nella forma

$$S(f) = Ts(0T) + \sum_{n=+1}^{+\infty}\left[Ts(nT)\cos(2\pi fnT) + Ts(-nT)\cos(2\pi fnT)\right] - j\sum_{n=+1}^{+\infty}\left[Ts(nT)\sin(2\pi fnT) - Ts(-nT)\sin(2\pi fnT)\right] =$$

$$= Ts(0T) + \sum_{n=+1}^{+\infty} T\left[s(nT) + s(-nT)\right]\cos(2\pi fnT) - j\sum_{n=+1}^{+\infty} T\left[s(nT) - s(-nT)\right]\sin(2\pi fnT)$$

A questo punto, facciamo l'ipotesi che s(nT) sia un segnale reale e pari: questo significa che s(nT)=s(-nT), il che implica che la seconda sommatoria sia nulla e che si abbia

$$\boxed{\underbrace{S(f) = Ts(0T) + 2\sum_{n=+1}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT)}_{s(nT)\ \text{reale e pari}}}$$

Avendo detto che s(nT) è reale, è evidente che risulta essere reale anche S(f).

Viceversa, se supponiamo che s(nT) sia reale e dispari, il che significa che s(nT)=-s(-nT), ad annullarsi è la prima sommatoria, per cui l'espressione di S(f) diventa

$$\boxed{\underbrace{S(f) = Ts(0T) - j2\sum_{n=+1}^{+\infty} Ts(nT)\sin(2\pi fnT)}_{s(nT)\ \text{reale e dispari}}}$$

In questo caso, al contrario di prima, S(f) non è necessariamente immaginaria: lo è solo se s(0T)=0.

Ancora una volta, facciamo osservare come dei risultati analoghi sono stati trovati per la trasformata di Fourier di un segnale s(t) continuo e reale: quando s(t) è pari, la sua trasformata è

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(2\pi ft)dt$$

mentre, quando è dispari, la sua trasformata è

$$S(f) = j\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(2\pi ft)dt$$

LINEARITÀ

Consideriamo due segnali discreti x(nT) e y(nT): supponiamo che siano entrambi ad energia finita, per cui sussistono le rispettive trasformate di Fourier, che indichiamo con X(f) e Y(f). Allora, questa proprietà dice che la trasformata di Fourier del segnale $z(nT) = ax(nT) + by(nT)$ è semplicemente data da

$$Z(f) = aX(f) + bY(f)$$

Dimostriamo questo risultato mediante la semplice definizione:

$$Z(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Tz(nT)e^{-j2\pi fnT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T(ax(nT) + by(nT))e^{-j2\pi fnT} = a\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Tx(nT)e^{-j2\pi fnT} + b\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ty(nT)e^{-j2\pi fnT} =$$
$$= aX(f) + bY(f)$$

TRASLAZIONE NEL TEMPO

Consideriamo il generico segnale s(nT) discreto e ad energia finita: sotto questa ipotesi, esso ammette certamente trasformata di Fourier e la indichiamo con S(f). Consideriamo poi il nuovo segnale $z(nT) = s(nT - n_0T)$. Questa proprietà dice che la sua trasformata di Fourier è

$$Z(f) = S(f)e^{-j2\pi fn_0T}$$

TRASLAZIONE IN FREQUENZA

Sia sempre s(nT) un generico segnale discreto ad energia finita con trasformata di Fourier S(f). Questa proprietà afferma che la funzione $Z(f) = S(f - f_0)$ è la trasformata di Fourier del segnale

$$z(nT) = s(nT)e^{j2\pi f_0 nT}$$

PROPRIETÀ DI INVERSIONE DELL'ASSE

Dati sempre s(nT) generico segnale discreto ad energia finita e la sua trasformata di Fourier S(f), questa proprietà afferma che la trasformata del segnale $z(nT) = s(-nT)$, cioè di s(nT) ribaltato rispetto all'asse delle ordinate, è semplicemente

$$Z(f) = S(-f)$$

ossia S(f) ribaltata anch'essa rispetto all'asse delle ordinate.

In pratica, quindi, *ad un ribaltamento nel dominio del tempo corrisponde un ribaltamento nel dominio della frequenza.*

CONVOLUZIONE NEL TEMPO

Consideriamo due segnali discreti x(nT) e y(nT), entrambi ad energia finita e quindi dotati delle rispettive trasformate di Fourier X(f) e Y(f). Allora, questa proprietà dice che la trasformata di Fourier del segnale $z(nT) = x(nT) * y(nT)$ è semplicemente data da

$$Z(f) = X(f)Y(f)$$

Quindi, in modo del tutto analogo al caso continuo, *ad una convoluzione nel dominio del tempo corrisponde un prodotto nel dominio della frequenza.*

Esempio

Consideriamo i seguenti due segnali:

$$x_1(nT) = \begin{cases} 1 & n = -1,0,+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x_2(nT) = \begin{cases} 1 & n = -1,0,+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si tratta di due segnali evidentemente uguali, che presentano solo 3 valori non nulli.
Vogliamo il prodotto di convoluzione di questi segnali, ossia il segnale

$$x(nT) = x_1(t) * x_2(t)$$

Per ottenere x(nT) abbiamo due modi di procedere: il primo è quello di applicare la definizione di *prodotto di convoluzione per segnali discreti*; il secondo è quello di utilizzare la trasformata di Fourier e, in particolare, la proprietà di convoluzione nel tempo, in modo da lavorare nel dominio della frequenza per poi passare al dominio del tempo.

Vediamo entrambi i metodi, a partire dal primo. La definizione di prodotto di convoluzione tra due segnali discreti è la seguente:

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T x_1(kT) x_2(nT - kT)$$

Vediamo cosa ci dà questa formula nel nostro caso: la prima considerazione che possiamo fare è che gli unici valori di k per i quali abbiamo dei valori non nulli sono -1,0,+1, in quanto, per tutti gli altri valori, $x_1(kT)=0$. Possiamo perciò semplificare la formula e scrivere che

$$x(nT) = Tx_1(-1T)x_2(nT+1T) + Tx_1(0T)x_2(nT-0T) + Tx_1(+1T)x_2(nT-1T)$$

Tutti e tre i valori di $x_1(nT)$ che qui compaiono valgono 1, per cui possiamo ancora scrivere

$$x(nT) = Tx_2(nT+1T) + Tx_2(nT-0T) + Tx_2(nT-1T)$$

A questo punto, tutto dipende da quale valore prendiamo per n: infatti, gli unici valori di $x_2(nT)$ non nulli sono quelli per n=-1,0,+1.

Si nota allora che

$$\begin{aligned}
&x(0T) = Tx_2(1T) + Tx_2(0T) + Tx_2(-1T) = 3T\\
&x(+1T) = Tx_2(+2T) + Tx_2(1T) + Tx_2(0T) = 2T\\
&x(-1T) = Tx_2(0T) + Tx_2(-1T) + Tx_2(-2T) = 2T\\
&x(+2T) = Tx_2(+3T) + Tx_2(+2T) + Tx_2(+1T) = 1T\\
&x(-2T) = Tx_2(-T) + Tx_2(-2T) + Tx_2(-3T) = 1T\\
&x(+3T) = Tx_2(+4T) + Tx_2(+3T) + Tx_2(+2T) = 0\\
&x(-3T) = Tx_2(-2T) + Tx_2(-3T) + Tx_2(-4T) = 0\\
&x(nT) = 0 \qquad n < -2 \vee n > +2
\end{aligned}$$

Si nota, dunque, come sia piuttosto scomodo lavorare con la definizione, ossia nel dominio del tempo. Vediamo come cambiano le cose nel dominio della frequenza: intanto, in base alla proprietà di convoluzione nel tempo, la trasformata di Fourier del segnale x(nT) che andiamo cercando è

$$X(f) = X_1(f)X_2(f)$$

Calcoliamoci allora le trasformate dei due segnali di partenza: la prima osservazione che possiamo fare è che, essendo uguali $x_1(nT)$ e $x_2(nT)$, saranno uguali anche le rispettive trasformate, per cui ci basta calcolarne una sola; in secondo luogo, è evidente che tali segnali sono entrambi reali e pari, per cui possiamo usare la formula

$$S(f) = Ts(0T) + 2\sum_{n=+1}^{+\infty} Ts(nT)\cos(2\pi fnT)$$

Abbiamo perciò che

$$\begin{aligned}
&X_1(f) = Tx_1(0T) + 2\sum_{n=+1}^{+\infty} Tx_1(nT)\cos(2\pi fnT) = Tx_1(0T) + 2Tx_1(+1T)\cos(+2\pi fT) =\\
&= Tx_1(0T) + 2Tx_1(+1T)\cos(+2\pi fT) = T + 2T\cos(+2\pi fT)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
X_1(f) = 1 + 2T\cos(+2\pi fT)\\
X_2(f) = 1 + 2T\cos(+2\pi fT)
\end{aligned}$$

Il loro prodotto è dunque

$$X(f)=\left(1+2T\cos(2\pi fT)\right)^2=1+4T^2\cos^2(2\pi fT)+4T\cos(+2\pi fT)$$

Dovendo antitrasformare, è consigliabile mettere X(f) in una forma per noi più comoda: in primo luogo, possiamo sfruttare la formula trigonometrica

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

e quindi

$$X(f)=1+4T^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4\pi fT)\right]+4T\cos(2\pi fT)=1+2T^2+2T^2\cos(4\pi fT)+4T\cos(2\pi fT)$$

Adesso, esprimendo i due Coseni mediante le formule di Eulero, abbiamo che

$$X(f)=1+2T^2+2T^2\frac{e^{j4\pi fT}+e^{-j4\pi fT}}{2}+4T\frac{e^{j2\pi fT}+e^{-2\pi fT}}{2}=$$
$$=1+2T^2+T^2e^{j4\pi fT}+T^2e^{-j4\pi fT}+2Te^{j2\pi fT}+2Te^{-j2\pi fT}$$

Per nostra comodità, poniamo T=1, per cui l'espressione conclusiva di X(f) diventa

$$X(f)=3+e^{j4\pi f}+e^{-j4\pi f}+2e^{j2\pi f}+2e^{-j2\pi f}$$

A questo punto dovremmo antitrasformare questa espressione: tuttavia, anziché applicare la formula generale

$$x(nT)=\int_{-F/2}^{+F/2}X(f)e^{j2\pi fnT}df$$

possiamo seguire una strada più comoda. Infatti, in base alla definizione di trasformata di Fourier, deve essere

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}xs(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

Anzi, avendo detto che T=1, abbiamo

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)e^{-j2\pi fn}$$

Sviluppiamo parzialmente questa sommatoria:

$$X(f)=..+x(-2T)e^{j4\pi f}+x(-1T)e^{j2\pi f}+x(0T)+x(+1T)e^{-j2\pi f}+x(+2T)e^{-j4\pi f}+\dots$$

Confrontando questa espressione con quella ottenuta prima, ossia

$$X(f)=3+e^{j4\pi f}+e^{-j4\pi f}+2e^{j2\pi f}+2e^{-j2\pi f}$$

si deduce che x(nT) è il seguente:

$$\begin{aligned} &x(0T)=3\\ &x(+1T)=2\\ &x(-1T)=2\\ &x(+2T)=1\\ &x(-2T)=1\\ &x(nT)=0 \quad n\neq 0,\pm1,\pm2 \end{aligned}$$

Ovviamente, questo è lo stesso risultato ottenuto prima lavorando nel dominio del tempo.

CONVOLUZIONE IN FREQUENZA

Dati sempre x(nT) e y(nT) e le rispettive trasformate di Fourier X(f) e Y(f), questa proprietà dice che la trasformata del segnale $z(nT)=x(nT)y(nT)$ è semplicemente data da

$$Z(f)=X(f)*Y(f)$$

Quindi, ancora una volta in modo del tutto analogo al caso continuo, *ad una convoluzione nel dominio della frequenza corrisponde un prodotto nel dominio della tempo.*

DERIVAZIONE IN FREQUENZA

Consideriamo il generico segnale s(nT) discreto ad energia finita e la sua trasformata di Fourier S(f). Consideriamo poi il nuovo segnale $z(nT)=(nT)s(nT)$. Questa proprietà dice che la sua trasformata di Fourier è

$$Z(f)=\frac{j}{2\pi}\frac{dS(f)}{df}$$

Dimostriamo questo risultato applicando ancora una volta la definizione: in primo luogo, abbiamo che

$$Z(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Tz(nT)e^{-j2\pi fnT}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}T(nT)s(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

Moltiplicando e dividendo per - 1/j2π, otteniamo

$$Z(f)=\frac{-\frac{1}{j2\pi}}{-\frac{1}{j2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}T(nT)s(nT)e^{-j2\pi fnT}=-\frac{1}{j2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}T(-j2\pi nT)s(nT)e^{-j2\pi fnT}=$$

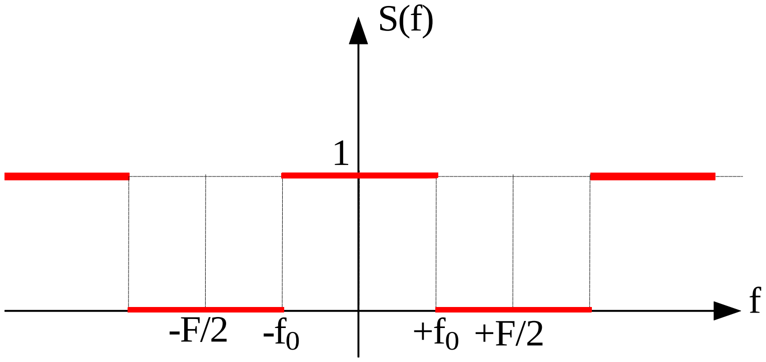
$$=-\frac{1}{j2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}T\frac{d}{df}\left[s(nT)e^{-j2\pi fnT}\right]=-\frac{1}{j2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{d}{df}\left[Ts(nT)e^{-j2\pi fnT}\right]$$

Scambiando la derivata con la sommatoria, abbiamo

$$Z(f) = -\frac{1}{j2\pi}\frac{d}{df}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT} = -\frac{1}{j2\pi}\frac{dS(f)}{df}$$

ESEMPIO

Supponiamo di avere a disposizione la seguente funzione S(f):



Supponendo di sapere che questo è lo spettro del segnale discreto s(nT), vogliamo l'espressione di s(nT). Il problema è di immediata risoluzione, in quanto è sufficiente applicare la formula di antitrasformazione di Fourier per i segnali discreti:

$$s(nT) = \int_{-F/2}^{+F/2} S(f)e^{j2\pi fnT}df = \int_{-f_0}^{+f_0} e^{j2\pi fnT}df = \frac{1}{j2\pi nT}\int_{-f_0}^{+f_0} D\left[e^{j2\pi fnT}\right]df = \frac{1}{j2\pi nT}\left[e^{j2\pi fnT}\right]_{-f_0}^{+f_0} =$$

$$= \frac{1}{j2\pi nT}\left[e^{j2\pi f_0 nT} - e^{-j2\pi f_0 nT}\right] = \frac{1}{\pi nT}\sin(2\pi f_0 nT) = 2f_0 \mathrm{sinc}(2f_0 nT)$$

Quindi, il nostro segnale s(nT) è

$$s(nT) = 2f_0 \mathrm{sinc}(2f_0 nT)$$

Applicazione al campionamento

Facciamo un rapido riepilogo dei concetti sul campionamento. Campionare un segnale tempo-continuo s(t) significa determinare i valori s(nT) che il segnale in questione assume in istanti di tempo t=nT multipli di una quantità fissa T. L'utilità del campionamento sta nella possibilità, sotto opportune ipotesi, di ricostruire con esattezza il segnale s(t) a partire dai suoi campioni s(nT). A livello teorico e sotto le ipotesi che la rendono possibile, la ricostruzione si effettua nel modo seguente: si considera intanto il cosiddetto "*segnale campionato*", ossia

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT)$$

che è evidentemente un segnale tempo-continuo; se ne calcola quindi la trasformata di Fourier, che risulta essere

$$S_C(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Questa trasformata risulta composta da una successione di infinite repliche, a meno del fattore 1/T, dello spettro S(f) del segnale s(t). Allora, si isola, da essa, la componente simmetrica rispetto all'asse della ordinate, ossia

$$S_r(f) = S_C(f)\left[\mathrm{Trect}\left(\frac{f}{f_C}\right)\right]$$

dove $f_C=1/T$ è la frequenza di campionamento ed è stata presa in questo caso pari al doppio della banda del segnale s(t) (ossia, nel nostro caso, $f_c=2f_0$).

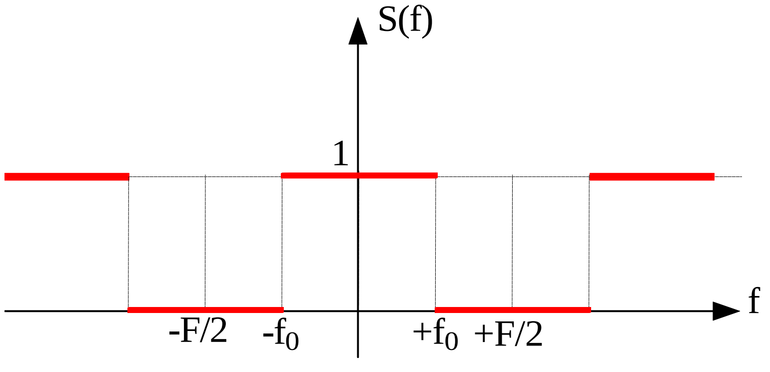
Infine antitrasformando $S_r(f)$, si ottiene il segnale s(t) ricostruito secondo la formula

$$s_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\mathrm{sinc}\left(f_C(t-nT)\right)$$

E' subito ovvio, quindi, che, se sono noti i campioni s(nT) del segnale s(t), è possibile effettuare la ricostruzione di quest'ultimo semplicemente applicando l'ultima formula scritta. Viceversa, quando abbiamo delle informazioni circa il nostro segnale s(t), ma NON abbiamo i suoi campioni, la ricostruzione esatta di s(t) è possibile solo a patto di conoscere delle <u>opportune</u> informazioni circa s(t).

Quali possono essere queste informazioni? Vogliamo mostrare che una di queste informazioni può essere lo spettro del segnale s(nT), ossia la trasformata discreta di Fourier del segnale costituito dai campioni di s(t).

Consideriamo perciò una funzione $S_C(f)$ il cui andamento in funzione di f è lo stesso di quello esaminato nell'ultimo esercizio risolto:



Due caratteristiche di $S_C(f)$ che si notano subito sono le seguenti:

- la prima è che si tratta di uno spettro periodico di periodo pari ad F;
- la seconda è che ciascuna *componente* dello spettro (cioè ciascuna *replica* dello spettro del nostro segnale s(t)) è "a banda limitata" (e pari a f_0).

Queste due caratteristiche fanno sì che $S_C(f)$ possa essere interpretato (e quindi utilizzato) come lo spettro del segnale campionato del nostro s(t), ossia come lo spettro del segnale

$$s_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT)$$

per cui, isolando la replica centrale e antitrasformandola, possiamo ottenere il segnale s(t).

Quindi, una possibile informazione che ci consente di effettuare la ricostruzione completa di s(t) è lo spettro del suo segnale campionato.

Un'altra possibilità potrebbe essere invece quella per cui $S_C(f)$, anziché essere lo spettro del segnale campionato $s_C(t)$ (che è un segnale continuo, per cui la trasformata è fatta nel caso continuo), è lo spettro del segnale s(nT), che costituisce una ottima approssimazione di $s_C(t)$, in quanto assume, per ciascun valore di nT, lo stesso valore che ivi assume $s_C(t)$. Allora, in questo caso, possiamo pensare di procedere nel modo seguente:

- antitrasformare S(f), in modo discreto, in modo da ottenere il segnale s(nT);
- ricaviamo s(t) sostituendo t=nT nell'espressione s(nT).

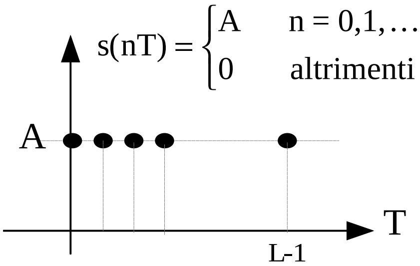
Nel nostro caso, se S(f) ha l'andamento prima disegnato, abbiamo visto che la sua antitrasformata discreta è $s(nT) = 2f_0 \text{sinc}(2f_0 nT)$, per cui si deduce che s(nT) è l'insieme dei campioni del segnale

$$s(t) = 2f_0 \text{sinc}(2f_0 t)$$

ESEMPIO

Sia dato il seguente segnale discreto:

$$s(nT) = \begin{cases} A & n = 0,1,\ldots,L-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Si tratta evidentemente di un segnale ad energia finita, in quanto si estende per un intervallo limitato (da t=0 a t=(L-1)T). Possiamo dunque calcolarci la sua trasformata di Fourier: applicando la definizione abbiamo intanto che

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(nT)e^{-j2\pi fnT} = A\sum_{n=0}^{L-1} Te^{-j2\pi fnT} = AT\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi fnT}$$

La sommatoria a secondo membro si può ricondurre a quella della serie geometrica a patto di considerare che qui abbiamo un numero finito L di termini, mentre la serie geometrica ha infiniti termini: possiamo allora scrivere che

$$S(f) = AT\left[\left(\frac{1}{1.-e^{-j2\pi fT}}\right) - \frac{e^{-j2\pi fTL}}{1.-e^{-j2\pi fT}}\right] = AT\frac{1-e^{-j2\pi fTL}}{1.-e^{-j2\pi fT}}$$

Possiamo manipolare algebricamente il numeratore al fine di ricondurci alla funzione Seno:

$$S(f) = AT\frac{e^{-j2\pi f\frac{L}{2}T}\left(e^{+j2\pi f\frac{L}{2}T} - e^{-j2\pi f\frac{L}{2}T}\right)}{1.-e^{-j2\pi fT}} = AT\frac{e^{-j2\pi f\frac{L}{2}T}\left(e^{+j\pi fLT} - e^{-j\pi fLT}\right)}{1.-e^{-j2\pi fT}} =$$

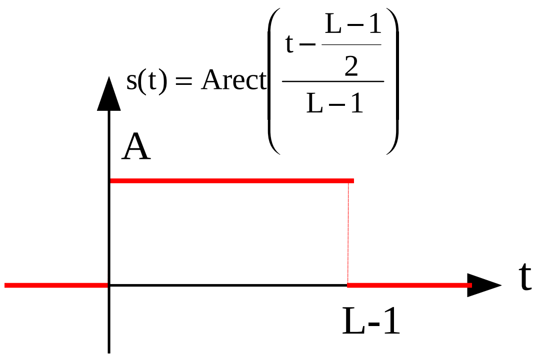
$$= (2j)ATe^{-j2\pi f\frac{L}{2}T}\frac{\sin(\pi fLT)}{1.-e^{-j2\pi fT}}$$

Discorso analogo possiamo fare per il denominatore:

$$S(f) = (2j)ATe^{-j2\pi f\frac{L}{2}T}\frac{\sin(\pi fLT)}{e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\left(e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right)} = \ldots = ATe^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}T}\frac{\sin(\pi fLT)}{\sin(\pi fT)}$$

Osservazione

Il segnale s(nT) considerato in questo esercizio può essere visto come l’insieme dei campioni del seguente segnale:



Vediamo quanto vale la trasformata (continua) di questo segnale:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^{L-1} Ae^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{-j2\pi f}\int_0^{L-1} D\left[e^{-j2\pi ft}\right]dt = \frac{A}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_0^{L-1} =$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f(L-1)} - 1\right] = \frac{A}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f(L-1)} - 1\right] = \frac{A}{-j2\pi f}e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}}\left[e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}} - e^{j2\pi f\frac{L-1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{A}{\pi f}e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}}\left[\frac{e^{j2\pi f\frac{L-1}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}}}{2j}\right] = \frac{A}{\pi f}e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}}\sin\left(\pi f(L-1)\right) = A(L-1)e^{-j2\pi f\frac{L-1}{2}}\mathrm{sinc}\left(f(L-1)\right)$$

Si può osservare come questa trasformata sia diversa, fondamentalmente per la mancanza di un Seno, da quella calcolata prima per il segnale s(nT). Questo ci dice che, al contrario di quanto visto nell’applicazione precedente, non possiamo ricostruire s(t) a partire da s(nT) ricavato per antitrasformazione discreta.

Questo deriva dal fatto per cui lo spettro di s(t), ossia la funzione S(f) appena calcolata, non è a banda limitata, il che, come sappiamo, impedisce di utilizzare il campionamento ai fini della ricostruzione (per i problemi legati all’*aliasing*).

Segnali discreti periodici

INTRODUZIONE

I segnali che abbiamo fino ad ora trattato sono quelli determinati continui (periodici e a-periodici) e quelli determinati discreti (periodici e a-periodici). Tra questi, gli UNICI che noi possiamo trattare al calcolatore sono quelli discreti periodici: vogliamo allora far vedere perché è possibile questo e come lo si fa.

Intanto, consideriamo un generico segnale discreto s(nT): dire che è **periodico di periodo T_P** significa dire che esso soddisfa alla relazione

$$s(nT) = s(nT + T_p)$$

dove, ovviamente, T_P è anch'esso un multiplo intero della quantità fissa T. Possiamo perciò porre

$$\text{periodo} \quad = \quad T_P \quad = \quad NT$$

e, in analogia con i segnali periodici continui, possiamo anche porre

$$\text{frequenza} \quad = \quad F \quad = \quad 1/T_P \quad = \quad 1/NT$$

Vogliamo trovare una rappresentazione di s(nT) quanto più comoda possibile ai fini della trattazione mediante calcolatore. In particolare, arriveremo a trovare una nuova espressione della trasformata di Fourier discreta, relativa appunto ai segnali discreti periodici, e la sfrutteremo per ricavare da essa una nuova e più comoda espressione del segnale s(nT).

Trasformata di Fourier per segnali discreti periodici (DFT)

DEFINIZIONE

Per arrivare all'obbiettivo che ci siamo proposti, cominciamo a far uso dei concetti a noi noti circa i segnali periodici continui: in particolare, sappiamo che ogni segnale continuo periodico s(t) può essere espresso mediante il suo sviluppo in serie di Fourier secondo la formula generale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k e^{j2\pi f_k t}$$

In questa formula, $f_k = k/T_P$ (dove T_P è appunto il periodo del segnale), mentre i coefficienti s_k , proprio in conseguenza della periodicità di s(t), si possono valutare in vario modo: un primo modo è quello di utilizzare la definizione generale, ossia

$$s_k = \frac{1}{T}\int_{-T_P/2}^{T_P/2} s(t)e^{-j2\pi f_k t}dt$$

Un altro modo consiste invece nello sfruttare i concetti legati alla trasformata di Fourier per segnali continui: indicata con $s_P(t)$ la restrizione di s(t) al periodo e indicata poi con $S_P(f)$ la sua trasformata, abbiamo infatti dimostrato che vale la relazione

$$s_k = \frac{1}{T_P} S_P\left(\frac{k}{T_P}\right)$$

Usando questa espressione, lo sviluppo in serie di s(t) diventa

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_P} S_P\left(\frac{k}{T_P}\right) e^{j2\pi f_k t}$$

e questa si può anche scrivere nella forma

$$s(t) = F\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P(kF) e^{j2\pi f_k t}$$

A questo punto, se consideriamo l’istante generico t=nT, otteniamo che il valore assunto da s(t) in questo istante è

$$s(nT) = F\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_P(kF) e^{j2\pi f_k nT}$$

Inoltre, avendo posto $F = \frac{1}{T_P} = \frac{1}{NT}$, ed essendo $f_k = \frac{k}{T_P}$, è chiaro che

$$f_k nT = \frac{k}{T_P} nT = kn\frac{T}{T_P} = k\frac{n}{N}$$

per cui

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F S_P(kF) e^{j2\pi k\frac{n}{N}}$$

Ponendo allora genericamente $c_k = FS_P(kF)$, possiamo affermare che <u>il generico segnale discreto periodico s(nT) si può esprimere secondo la formula</u>

$$\boxed{s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k\frac{n}{N}}}$$

Ora, noi siamo partiti dicendo che volevamo trovare una rappresentazione di s(nT) utilizzabile al calcolatore: è evidente che questo obbiettivo non è stato ancora raggiunto, in quanto al secondo membro di questa relazione compare una sommatoria di INFINITI termini. <u>Quello che faremo</u>

adesso, allora, a partire da questa formula, è ricavare una espressione di s(nT) come somma di un numero FINITO di termini.

Cominciamo a sviluppare quella sommatoria, soffermandoci in particolare su termini per k positivo:

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j2\pi k\frac{n}{N}} + c_0 + c_1 e^{j2\pi\frac{n}{N}} + c_2 e^{j4\pi\frac{n}{N}} + \ldots + c_N e^{j2\pi n} +$$

$$+ c_{N+1} e^{j2\pi(N+1)\frac{n}{N}} + c_{N+2} e^{j2\pi(N+2)\frac{n}{N}} + \ldots + c_{2N} e^{j4\pi n} +$$

$$+ c_{2N+1} e^{j2\pi(2N+1)\frac{n}{N}} + c_{2N+2} e^{j2\pi(2N+2)\frac{n}{N}} + \ldots + c_{3N} e^{j6\pi n} + \ldots$$

Cosa si osserva in questo sviluppo? La prima cosa è che

$$e^{j2\pi m} = 1 \qquad \forall m \in N$$

Infatti

$$e^{j2\pi m} = \cos(2\pi m) + j\sin(2\pi m) = 1$$

Quindi, *i termini dello sviluppo che si ottengono per valori di k multipli interi di N sono tutti costituiti dal solo coefficiente c_K:*

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j2\pi k\frac{n}{N}} + c_0 + c_1 e^{j2\pi\frac{n}{N}} + c_2 e^{j4\pi\frac{n}{N}} + \ldots + c_N +$$

$$+ c_{N+1} e^{j2\pi(N+1)\frac{n}{N}} + c_{N+2} e^{j2\pi(N+2)\frac{n}{N}} + \ldots + c_{2N} +$$

$$+ c_{2N+1} e^{j2\pi(2N+1)\frac{n}{N}} + c_{2N+2} e^{j2\pi(2N+2)\frac{n}{N}} + \ldots + c_{3N} + \ldots$$

Inoltre si osserva che

$$e^{j2\pi k\frac{n}{N}} = e^{j2\pi(k+N)\frac{n}{N}}$$

Infatti, si ha che

$$e^{j2\pi(k+N)\frac{n}{N}} = e^{j2\pi k\frac{n}{N}} e^{j2\pi N\frac{n}{N}} = e^{j2\pi k\frac{n}{N}} e^{j2\pi n} = e^{j2\pi k\frac{n}{N}}$$

Quindi possiamo ulteriormente semplificare il nostro sviluppo:

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j2\pi k\frac{n}{N}} + c_0 + c_1 e^{j2\pi\frac{n}{N}} + c_2 e^{j4\pi\frac{n}{N}} + ... + c_N +$$
$$+ c_{N+1} e^{j2\pi\frac{n}{N}} + c_{N+2} e^{j4\pi\frac{n}{N}} + ... + c_{2N} +$$
$$+ c_{2N+1} e^{j2\pi\frac{n}{N}} + c_{2N+2} e^{j4\pi\frac{n}{N}} + ... + c_{3N} + ...$$

Si notano adesso delle interessanti simmetrie nello sviluppo appena scritto: infatti, sia per i termini con k positivo sia per quelli (non scritti) con k negativo, si nota che i termini esponenziali si ripetono periodicamente ogni N termini.

Possiamo allora raccogliere a fattor comune tutti i termini che contengono lo stesso fattore esponenziale:

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j2\pi k\frac{n}{N}} + \left(c_1 + c_{N+1} + c_{2N+1} + ...\right) e^{j2\pi\frac{n}{N}} +$$
$$+ \left(c_2 + c_{N+2} + c_{2N+2} + ...\right) e^{j4\pi\frac{n}{N}} +$$
$$+ \left(c_3 + c_{N+3} + c_{2N+3} + ...\right) e^{j6\pi\frac{n}{N}} + ... +$$
$$+ \left(c_0 + c_N + c_{2N} + c_{3N} + ...\right)$$

Includendo anche i termini per k positivi, possiamo scrivere che

$$s(nT) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mN}\right) + \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m+N}\right) e^{j2\pi\frac{n}{N}} + \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m+2N}\right) e^{j4\pi\frac{n}{N}} + ... + \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m+(N-1)N}\right) e^{j2\pi n\frac{N-1}{N}}$$

Abbiamo dunque ottenuto di poter esprimere s(nT) come somma di un numero FINITO N di termini, anche se, in ciascuno di questi termini, compare un coefficiente che è pari alla somma di infiniti altri termini. Il generico di questi termini, in base a quanto appena ricavato, è

$$d_k e^{j2\pi n\frac{k}{N}} \quad \text{con} \quad d_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m+kN}$$

In definitiva, quindi, s(nT) è esprimibile nella forma

$$\boxed{s(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi n\frac{k}{N}}}$$

Allora, il nostro obbiettivo (cioè quello di trattare s(nT) mediante un calcolatore) sarà raggiunto se riusciremo a trovare una espressione alternativa dei coefficienti d_k.

Effettivamente, questa rappresentazione esiste: infatti, partendo dalla espressione di s(nT), moltiplichiamo ambo i membri per il termine

$$e^{-j2\pi r\frac{n}{N}}$$

con r generico numero intero. Otteniamo

$$s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi n\frac{k}{N}} e^{-j2\pi r\frac{n}{N}}$$

e questa si può scrivere anche nella forma

$$s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}}$$

Adesso sommiamo ambo i membri per n che va da 0 ad N-1:

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}}$$

Al secondo membro possiamo scambiare le due sommatorie e portare poi fuori d_k dalla sommatoria interna: così facendo, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}}$$

A questo punto, cerchiamo di vedere quanto vale la sommatoria interna nel secondo membro, ossia

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n\frac{k-r}{N}}$$

E' evidente che, se r-k è un multiplo di N, i termini esponenziali valgono tutti 1, per cui quella sommatoria vale N: possiamo dunque scrivere che

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}} = \begin{cases} N & r-k = mN \\ ? & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e resta da vedere che cosa succede quando r-k non è multiplo di N. Facciamo vedere che quella sommatoria vale 0 in quel caso.

Sfruttando la serie geometrica e le sue proprietà, possiamo scrivere che

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j2\pi\frac{r-k}{N}}\right)^n = \frac{1-e^{-j2\pi\frac{r-k}{N}N}}{1-e^{-j2\pi\frac{r-k}{N}}} = \frac{1-e^{-j2\pi(r-k)}}{1-e^{-j2\pi\frac{r-k}{N}}}$$

Il numeratore è evidentemente nullo, in quanto l'esponente è un multiplo intero della quantità j2π. Il denominatore, invece, è certamente non nullo: infatti, l'unica possibilità perché sia nullo è che k-r sia un multiplo di N e questo lo stiamo escludendo per ipotesi. Quindi, quella frazione è nulla, ossia è nulla la sommatoria, quando k-r non è un multiplo di N, ossia

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}} = \begin{cases} N & r-k=mN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La relazione generale in cui compariva questa sommatoria era

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n\frac{r-k}{N}}$$

La variabilità del termine r-k dipende solo dalle variabilità di k, mentre r si intende fissato da noi. Ora, abbiamo trovato che gli unici valori di k per cui la sommatoria interna è diversa da zero sono quelli tali che il termine r-k sia un multiplo intero di N; tuttavia, dato che k varia tra 0 ed N-1, l'unico multiplo di N che si riesce ad ottenere con r-k è per r-k=0, ossia per k=r. Quindi, possiamo scrivere che

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} = d_r N$$

da cui quindi si ricava che

$$d_r = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} \qquad r = 0,1,\ldots,N-1$$

Dato che abbiamo una sommatoria di un numero FINITO di termini, abbiamo raggiunto il nostro fatidico obbiettivo: abbiamo cioè trovato che, *dato un generico segnale s(nT) discreto periodico, di periodo NT, esso è esprimibile mediante la formula*

$$s(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi n\frac{k}{N}}$$

dove i coefficienti sono

$$d_r = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi r\frac{n}{N}} \qquad r = 0,1,\ldots,N-1$$

Le due somme in questione sono entrambe implementabili al calcolatore.

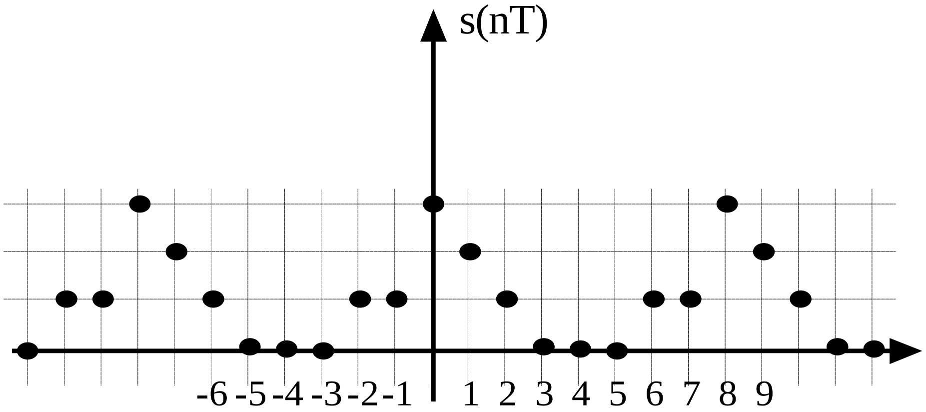
Si definisce allora **trasformata di Fourier per segnali discreti periodici** (abbreviato **D.F.T.**) il segnale discreto S(kF) che soddisfa alle seguenti relazioni:

$$s(nT) = F\sum_{k=0}^{N-1} S(kF)e^{j2\pi n\frac{k}{N}} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

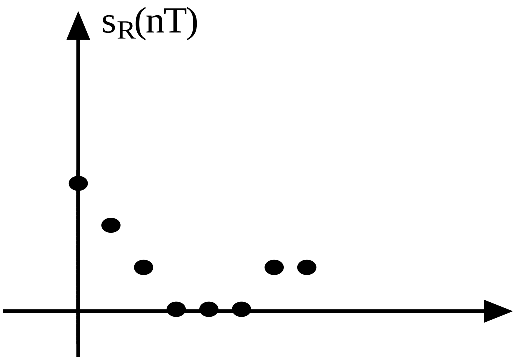
$$S(kF) = T\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Esempio

Supponiamo che il nostro segnale discreto periodico s(nT) sia il seguente:



Si tratta evidentemente di un segnale periodico di periodo N=8: tanto per visualizzarlo meglio, la sua **restrizione al periodo** è



Volendone trovare una rappresentazione analitica, è la seguente:

$$s(nT) = \begin{cases} 3 & n = mT \\ 2 & n = 1 + mT \\ 1 & n = 2 + mT \ \vee \ n = 6 + mT \ \vee \ n = 7 + mT \\ 0 & n = 3 + mT \ \vee \ n = 4 + mT \ \vee \ n = 5 + mT \end{cases}$$

La sua trasformata di Fourier, in base alla definizione, è la seguente:

$$\underbrace{S(kF)}_{k=0,1,\dots,7} = T\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} = T\sum_{n=0}^{7} s(nT)e^{-j2\pi k\frac{n}{7}}$$

Sviluppando la sommatoria, otteniamo

$$\underbrace{S(kF)}_{k=0,1,\dots,7} = T\left(s(0T) + s(T)e^{-j2\pi k\frac{1}{7}} + s(2T)e^{-j4\pi k\frac{1}{7}} + s(3T)e^{-j6\pi k\frac{1}{7}} + \ldots + s(7T)e^{-j2\pi k} \right)$$

e quindi, per ottenere l'espressione completa di S(kF), basta sostituire i valori di s(nT).

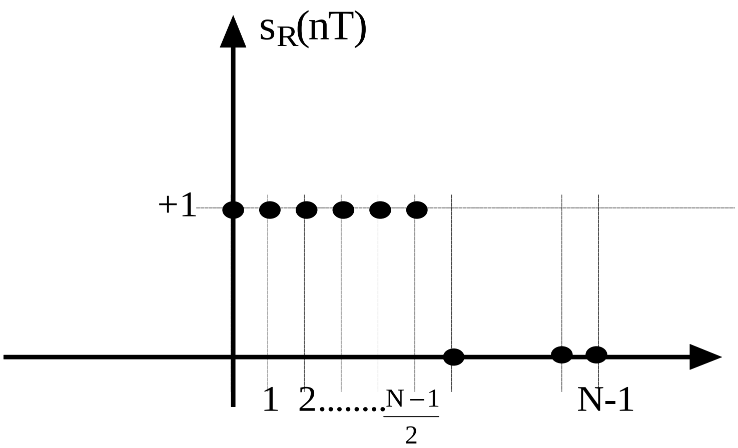
In modo del tutto analogo, se fosse nota S(kF) e noi volessimo trovare s(nT), ci basterebbe applicare la formula di antitrasformazione, ossia

$$\underbrace{s(nT)}_{n=0,1,\dots,7} = F\sum_{k=0}^{7} S(kF)e^{j2\pi n\frac{k}{7}}$$

Naturalmente, a voler essere precisi, dobbiamo porre un pedice "R" al segnale s(nT) che ricaviamo da quest'ultima formula, in quanto vengono forniti solo i valori relativi all'intervallo [0,7T].

Esempio

Sia dato adesso il segnale $s_R(t)$ che è la restrizione all'intervallo [0,T] del segnale s(nT) discreto periodico:



La rappresentazione analitica di questo segnale è la seguente:

$$s_R(nT) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & \frac{N-1}{2} < n \le N-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vogliamo la trasformata di Fourier di s(nT), che è un segnale discreto periodico di periodo N. Applicando semplicemente la definizione, abbiamo che

$$\underbrace{S(kF)}_{k=0,1,....,N-1} = T\sum_{n=0}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} = T\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} s(nT)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} + T\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} s(nT)e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} = T\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} e^{-j2\pi k\frac{n}{N}} =$$

$$= T\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}\left(e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}\right)^n = T\frac{1-e^{-j2\pi k\frac{N/2}{N}}}{1-e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}} = T\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}}$$

Con ulteriori manipolazioni algebriche, è possibile trovare una ulteriore rappresentazione della funzione S(kF): infatti, riarrangiando il primo membro e applicando poi le formule di Eulero al primo membro, si ha che

$$\underbrace{S(kF)}_{k=0,1,....,N-1} = T\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}} = Te^{-j\pi\frac{k}{2}}\frac{e^{j\pi\frac{k}{2}}-e^{-j\pi\frac{k}{2}}}{1-e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}} = (2j)Te^{-j\pi\frac{k}{2}}\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{1-e^{-j2\pi k\frac{1}{N}}}$$

Facendo adesso un discorso analogo per il denominatore, otteniamo

$$\underbrace{S(kF)}_{k=0,1,....,N-1} = (2j)Te^{-j\pi\frac{k}{2}}\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{e^{-j2\pi k\frac{1}{2N}}\left(e^{j2\pi k\frac{1}{2N}}-e^{-j2\pi k\frac{1}{2N}}\right)} = (2j)Te^{-j\pi\frac{k}{2}}e^{j2\pi k\frac{1}{2N}}\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\left(e^{j2\pi k\frac{1}{2N}}-e^{-j2\pi k\frac{1}{2N}}\right)} =$$

$$= Te^{-j\pi\frac{k}{2}}e^{j\pi k\frac{1}{N}}\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{k}{N}\right)} = Te^{-j\pi k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)}\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{k}{N}\right)}$$

Quindi, la trasformata di Fourier del nostro segnale s(nT) è la seguente:

$$\underbrace{S(kF)}_{k=0,1,....,N-1} = Te^{-j\pi k\left(\frac{N-2}{N}\right)}\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{k}{N}\right)}$$

PROPRIETÀ

Le proprietà di cui gode la trasformata di Fourier per segnali discreti periodici sono le stesse della trasformata di Fourier per segnali discreti generici, per cui ne elenchiamo velocemente le principali.

Prima, però, di passare in rassegna tali proprietà, osserviamo una cosa importante: quando abbiamo introdotto la trasformata di Fourier di un generico segnale discreto s(nT), ossia la funzione

$$S(f) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)e^{-j2\pi fnT}$$

abbiamo visto che si tratta di una funzione continua (periodica) della variabile f e abbiamo anche detto che essa esiste certamente quando s(nT) è un segnale ad energia finita.

Con la DFT (trasformata di Fourier per segnali discreti periodici) le cose cambiano, per due motivi fondamentali, oltre, ovviamente, che per il fatto che essa è relativa SOLO a segnali periodici:

- in primo luogo, la DFT è una funzione discreta;
- in secondo luogo, è evidente che i segnali periodici (siano essi discreti o continui) non sono certo dei segnali ad energia finita.

Linearità

Consideriamo due segnali discreti periodici x(nT) e y(nT) e indichiamo con X(kF) e Y(kF) le rispettive trasformate. Allora, questa proprietà dice che la trasformata di Fourier del segnale

$$z(nT) = ax(nT) + by(nT)$$

è semplicemente data da

$$Z(kF) = aX(kF) + bY(kF)$$

Traslazione nel tempo

Consideriamo il generico segnale s(nT) discreto e periodico e la sua trasformata di Fourier S(kF); consideriamo inoltre il nuovo segnale

$$z(nT) = s(nT - n_0 T)$$

Questa proprietà dice che la sua trasformata di Fourier è

$$Z(kF) = S(kF)e^{-j2\pi f\frac{n_0}{N}}$$

Traslazione in frequenza

Sia sempre s(nT) un generico segnale discreto periodico con trasformata di Fourier S(kF). Questa proprietà afferma che la funzione

$$Z(kF) = S(kF - k_0 F)$$

è la trasformata di Fourier del segnale

$$z(nT) = s(nT)e^{j2\pi n\frac{k_0}{N}}$$

Convoluzione nel tempo

Consideriamo due segnali discreti x(nT) e y(nT), entrambi periodici e siano X(kF) e Y(kF) le rispettive trasformate. Allora, questa proprietà dice che la trasformata di Fourier del segnale

$$z(nT) = x(nT) * y(nT)$$

è semplicemente data da

$$Z(kF) = X(kF)Y(kF)$$

Convoluzione in frequenza

Dati sempre x(nT) e y(nT) e le rispettive trasformate di Fourier X(kF) e Y(kF), questa proprietà dice che la trasformata del segnale

$$z(nT) = x(nT)y(nT)$$

è semplicemente data da

$$Z(kF) = X(kF) * Y(kF)$$

Potenza

Sia sempre s(nT) un generico segnale discreto periodico con trasformata di Fourier S(kF). Noi sappiamo che la potenza di un segnale discreto periodico è definita dalla relazione

$$P_X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(nT)|^2$$

Vogliamo far vedere che questa è la stessa potenza che risulta associata alla trasformata di s(nT), ossia vogliamo far vedere che sussiste la relazione

$$\boxed{P_X = F^2\sum_{n=0}^{N-1}|X(kF)|^2}$$

dove ricordiamo che F=1/NT.

La dimostrazione è semplice: intanto, applicando la definizione di potenza, abbiamo che

$$P_X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(nT)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)\left(x(nT)\right)^*$$

Sostituendo alla x(nT) sotto l'operatore di complesso coniugato, la sua espressione come antitrasformata di S(kF), abbiamo

$$P_X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)\left(F\sum_{k=0}^{N-1}S(kF)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}\right)^* = \frac{F}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)\sum_{k=0}^{N-1}\left(S(kF)\right)^*e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}\frac{F}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}x(nT)\left(S(kF)\right)^*e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}$$

Scambiando adesso le due sommatorie, ottengo

$$P_X = \frac{F}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\left(S(kF)\right)^* e^{-j2\pi n\frac{k}{N}} = \frac{F}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(S(kF)\right)^*\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}} =$$

$$= \frac{F}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\left(S(kF)\right)^*\sum_{n=0}^{N-1} Tx(nT)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}} = \frac{F}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\left(S(kF)\right)^* S(kF) = F^2\sum_{k=0}^{N-1}\left|S(kF)\right|^2$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1