Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 9 - I processi stocastici

DEFINIZIONE DI REALIZZAZIONE E DI PROCESSO STOCASTICO

Riprendiamo la definizione che abbiamo dato di *variabile aleatoria* (o variabile casuale) monodimensionale: dato un certo fenomeno (o *esperimento casuale*) e dato il suo *spazio di campioni* S, una variabile aleatoria è una funzione

$$X: S \rightarrow R$$

che associa un numero reale ad ogni campione appartenente ad S.

La definizione di processo stocastico è una generalizzazione di questo concetto.

Sia dato sempre lo spazio di campioni S: a ciascun campione appartenente ad S noi possiamo associare, anziché un valore reale, una generica funzione reale di variabile reale: questa funzione prende il nome di **realizzazione** o anche **funzione campione** . Questa associazione di funzioni ai campioni presenti in S, o se vogliamo, l'insieme delle funzioni campioni scelte, prende il nome appunto di **processo stocastico**.

E' ovvio che, dato S, il numero di realizzazioni che possiamo associare ad esso dipende dal numero di campioni contenuti in S: se S è un insieme finito, allora avremo un numero finito di realizzazioni; se S è un insieme infinito (numerabile o non numerabile), noi avremo un numero infinito (numerabile o non numerabile) di realizzazioni ad esso associate.

D'altro canto, dato sempre S, noi possiamo associare ad esso infiniti tipi di realizzazione, così come, nel caso delle variabili aleatorie, possiamo definire infiniti tipi di variabili aleatorie.

Una cosa importante è la seguente: *le realizzazioni che costituiscono un processo stocastico sono funzioni deterministiche, nel senso che sono ben definite; la casualità è insita solo nella scelta di una forma d'onda, piuttosto che un altra, da associare a ciascun campione di S.*

DEFINIZIONE DI VARIABILE ALEATORIA ESTRATTA DA UN PROCESSO STOCASTICO

Consideriamo adesso una generica realizzazione tra quelle associate ad S; in particolare, supponiamo che essa sia associata ad un certo campione A contenuto in S: avendo detto che una realizzazione è una funzione di variabile reale, nessuno ci impedisce di prendere come variabile proprio il tempo t, per cui possiamo genericamente indicare la realizzazione con f(t). In realtà, la notazione più corretta sarebbe $f(t,A)$, proprio al fine di indicare che la funzione f(t) è associata all'evento A. Tuttavia, per semplificare le nostre notazioni, tralasciamo di indicare A e quindi consideriamo semplicemente f(t).

Ora prendiamo un istante particolare $t=t_0$ e valutiamo il valore $f(t_0)$ che la realizzazione assume in tale istante: essendo f(t) una funzione reale di variabile reale, è ovvio che $f(t_0)$ è un numero reale; è allora chiaro che, nel momento in cui noi fissiamo t_0, non facciamo altro che associare un valore reale al campione A. Se ripetiamo lo stesso procedimento con tutte le realizzazioni che costituiscono il processo stocastico considerato, noi non facciamo altro che associare dei numeri reali ai campioni di S, ossia abbiamo una variabile aleatoria. Quindi, *possiamo passare da un processo stocastico ad una semplice variabile aleatoria semplicemente considerando un istante di tempo particolare e valutando i valori assunti dalle realizzazioni (che costituiscono il processo) in tale istante.* Ci si esprime allora dicendo che **si estrae dal processo la variabile aleatoria all'istante $t=t_0$**. E' subito ovvio che, al variare dell'istante t_0 prescelto, noi avremo diverse variabili aleatorie.

Come sarà approfondito più avanti, la completa conoscenza del processo stocastico implica la conoscenza delle leggi di distribuzione di tutte le variabili aleatorie che è possibile estrarre dal processo.

Esempio

Vogliamo qui chiarire, con un esempio, sia il concetto di processo stocastico associato ad uno spazio di campioni sia il concetto di variabile aleatoria estratta da un processo stocastico.
Supponiamo di avere uno spazio di campioni così costituito:

$$S = \{1,2,\dots,N\}$$

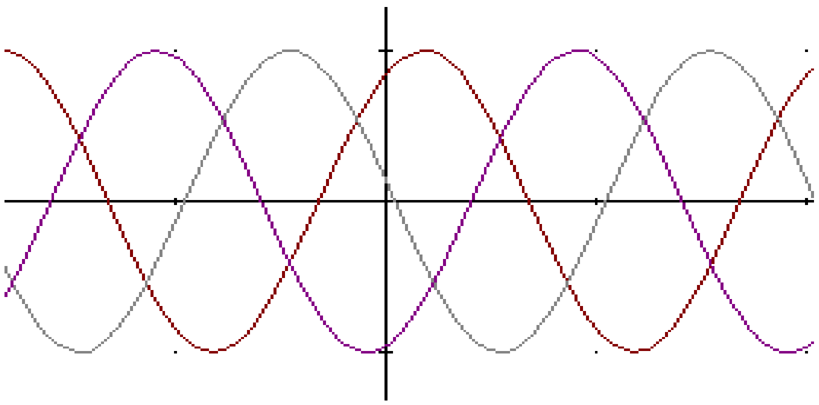
Si tratta cioè dell'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 ed un certo massimo N. Supponiamo adesso di considerare la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(t,\theta) = A\sin(2\pi t + \theta) \qquad \text{con } \theta \in S$$

E' ovvio che, al variare di θ in S, noi otteniamo N funzioni diverse e precisamente

$$\begin{aligned} & f_1(t) = A\sin(2\pi t + 1) \\ & f_2(t) = A\sin(2\pi t + 2) \\ & \dots \\ & f_N(t) = A\sin(2\pi t + N) \end{aligned}$$

Associare tali funzioni agli N campioni contenuti in S costituisce appunto un processo stocastico: queste funzioni costituiscono appunto il processo stocastico.
E' ovvio che noi possiamo scegliere un altro tipo di funzioni associate ai campioni di S e quindi ottenere un altro processo stocastico diverso dal precedente. Questo per dire che, dato uno spazio di campioni S, esistono infiniti processi stocastici ad esso associabili.
Se adesso diagrammiamo le funzioni prima indicate, otteniamo qualcosa del genere:



E' chiaro che, se noi scegliamo un arbitrario istante t_0 e consideriamo i valori assunti da tutte le N realizzazioni, avremo N valori reali, che corrispondono all'insieme di definizione di una variabile aleatoria.

E' abbastanza intuitivo accorgersi che possiamo avere 4 tipi di realizzazioni:

- la prima possibilità è quella di funzioni continue del tempo, ossia funzioni definite per ogni istante di tempo, e a valori continui, ossia funzioni che possono assumere, in ciascun istante, qualsiasi valore reale; l'esempio di prima è un caso che rientra in questa categoria;
- la seconda possibilità è quella di funzioni continue del tempo ma a valori discreti, ossia funzioni che possono assumere, in ciascun istante, solo determinati valori reali: per esempio, funzioni che possono assumere solo i valori 0 e 1 o qualcosa del genere;
- la terza possibilità è quella di funzioni discrete del tempo, ossia funzioni definite solo per istanti multipli di una certa quantità fissa, e a valori continui;
- infine, la quarta possibilità è quella di funzioni discrete del tempo e a valori discreti.

E' chiaro che *la natura delle realizzazioni impone dei vincoli sulla natura delle variabili aleatorie che noi possiamo estrarre dal processo.* Infatti, a partire da realizzazioni a valori continui, noi avremo variabili aleatorie continue, ossia dotate di una funzione densità; viceversa, a partire da realizzazioni a valori discreti, noi avremo variabili aleatorie discrete.

CARATTERISTICHE STATISTICHE DELLE VARIABILI ALEATORIE ESTRATTE DA UN PROCESSO STOCASTICO

Supponiamo dunque di avere un certo fenomeno, il cui spazio degli eventi sia S, e supponiamo di avere un processo stocastico associato a tale fenomeno: questo significa che noi, secondo un certo criterio, abbiamo associato a ciascun campione appartenente ad S una funzione reale di variabile reale. Supponiamo anche, per comodità, che tali funzioni siano continue nel tempo e a valori continui.

E' chiaro che, se noi fissiamo N istanti di tempo generici $t_1, t_2, \dots, t_N$, otteniamo, a partire dalle realizzazioni scelte, N diverse variabili aleatorie estratte dal processo e le indichiamo con $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$. Per ciascuna di queste variabili aleatorie valgono ovviamente tutte le considerazioni che noi abbiamo fatto in generale per una variabile aleatoria: tanto per citarne una, data la variabile aleatoria X(t) estratta dal processo all'istante t, essa avrà una certa funzione densità di probabilità $f_{X(t)}(x)$; a partire da tale funzione, noi possiamo definire il valor medio di X(t), che sarà

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x)dx$$

Naturalmente, essendo t generico, il valore di $E[X(t)]$ sarà, in generale, funzione di t, come qualsiasi altro parametro associato a X(t). Vedremo in seguito cosa accade quando viene a mancare questa dipendenza dal tempo.

Inoltre, noi sappiamo che, dato un certo numero di variabili aleatorie, è possibile associare ad esse la cosiddetta funzione di distribuzione congiunta: allora, date $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$, si definisce **funzione di distribuzione congiunta** delle N variabili aleatorie estratte dal processo la funzione

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P\left(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_N) \le x_N\right)$$

Per semplificarci i ragionamenti, consideriamo solo due variabili aleatorie $X(t_1), X(t_2)$ estratte dal processo; possiamo definire le seguenti funzioni:

distribuzione congiunta: $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = P\left(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\right)$

densità congiunta: $f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$

correlazione: $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

covarianza: $C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - E[X(t_1)]][X(t_2) - E[X(t_2)]]\}$

In particolare, facciamo notare che la covarianza e la correlazione sono legate dalla seguente relazione:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

Questa relazione indica evidentemente che *se le due variabili $X(t_1)$ e $X(t_2)$ sono a media nulla, la loro correlazione corrisponde alla loro covarianza.*

Processo di Bernoulli

DEFINIZIONE

Un **processo di Bernoulli** è un esempio semplice di processo stocastico in cui le realizzazioni sono discrete nel tempo e a valori discreti. In particolare, le ipotesi sulle quali si basa tale processo sono fondamentalmente 2:

- intanto, ciascuna realizzazione può assumere solo i valori 0 ed 1;
- inoltre, estraendo una qualsiasi variabile aleatoria da un processo di Bernoulli, la probabilità che essa assuma valore 1 è p, mentre la probabilità che assuma valore 0 è ovviamente 1-p.

Solitamente, questo processo, tempo-discreto a valori discreti, si indica con I_n, dove I_n è la variabile aleatoria così definita:

$$I_n = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$$

PARAMETRI STATISTICI

E' immediato calcolarsi i principali parametri statistici della variabile aleatoria I_n; cominciamo dalla media, per esempio: applicando semplicemente la definizione, abbiamo che

$$E(I_n) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot (p) = p$$

Passiamo al momento del secondo ordine:

$$E(I_n^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot (p) = p$$

Infine la varianza:

$$Var(I_n) = E(I_n^2) - E^2(I_n) = p - p^2$$

Si nota subito che <u>sia i momenti sia la varianza sono indipendenti dal tempo</u>. Vedremo più avanti che questo fatto è indice di <u>*stazionarietà*</u> del processo.

Una caratteristica importante del processo di Bernoulli è che, *data una generica realizzazione, ogni valore risulta del tutto indipendente dagli altri.* Si parla per questo motivo di **processo puramente casuale**. Questo ci permette di fare il seguente discorso: consideriamo gli istanti $n_0, n_1, \ldots, n_N$: in corrispondenza di questi istanti e delle realizzazioni associate al processo, noi otteniamo le variabili aleatorie $I_{n0}, I_{n1}, \ldots, I_{nN}$; l'indipendenza di cui si diceva ci consente di scrivere che

$$P(I_{n0} = x_0, I_{n1} = x_1, \ldots, I_{nN} = x_n) = P(I_{n0} = x_0)P(I_{n1} = x_1) \ldots . P(I_{nN} = x_n)$$

Inoltre, sempre l'indipendenza ci mette nelle ipotesi della formula di Bernoulli, ossia ci consente di scrivere che

$$P(I_n = 1 \ \text{k volte}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

APPLICAZIONE

Consideriamo adesso la variabile aleatoria definita nel modo seguente:

$$D_n = 2I_n - 1$$

dove I_n è la generica variabile del processo di Bernoulli. Dato che

$$I_n = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$$

è evidente che possiamo caratterizzare D_n nel modo seguente:

$$D_n = \begin{cases} -1 & 1-p \\ +1 & p \end{cases}$$

Calcoliamo anche qui i parametri statistici:

media : $E(D_n) = E(2I_n - 1) = 2E(I_n) - E(1) = 2E(I_n) - 1 = 2p - 1$

varianza : $Var(D_n) = Var(2I_n - 1) = Var(2I_n) - Var(1) = 4Var(I_n) - 0 = 4p(1-p)$

Calcoliamo inoltre quanto vale $P(D_n = 1 \text{ k volte})$, ossia la probabilità che la variabile aleatoria assuma k volte il valore 1 (dove ovviamente k≤n). Perché D_n assuma valore 1 k volte, è necessario che la variabile I_n assuma il valore 1 k volte, per cui

$$P(D_n = 1 \text{ k volte}) = P(I_n = 1 \text{ k volte}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

APPLICAZIONE: PASSEGGIATA CASUALE UNIDIMENSIONALE

Consideriamo adesso la seguente variabile aleatoria:

$$S_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

Essa prende il nome di **passeggiata casuale unidimensionale**.

Calcoliamo ancora una volta i parametri statistici, a cominciare dalla media: data la linearità della media e dato $E(D_n)=2p-1$, è immediato scrivere che

$$E(S_n) = E(D_1) + E(D_2) + \ldots + E(D_n) = n(2p-1)$$

In modo analogo, se supponiamo che e variabili $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sono indipendenti, la varianza risulta essere

$$Var(S_n) = Var(D_1) + Var(D_2) + \ldots + Var(D_n) = n[4p(1-p)]$$

Un'altra proprietà interessante di questa variabile è la seguente: per come è stata definita, il suo valore è pari alla somma dei valori assunti dalle variabili $D_1, D_2, \ldots, D_n$; dato che tali variabili assumono solo i valori +1 o -1, è chiaro che i valori assunti da S_n sono

$$\{-n, -(n-1), -(n-2), \ldots, 0, +1, +2, \ldots, n-2, n-1, n\}$$

Allora proviamo a calcolare quanto vale la probabilità che S_n assuma valore generico 2k-n, ossia proviamo a calcolare $P(S_n = 2k - n)$. E' subito chiaro che quell'evento si verifica quando k variabili, tra $D_1, D_2, \ldots, D_n$, assumono valore 1 e le rimanente n-k assumono valore -1: infatti

$$(1 \cdot k) + [-1 \cdot (n-k)] = 2k - n$$

Quindi possiamo scrivere che

$$P(S_n = 2k - n) = P(D_n = 1 \text{ k volte}, D_n = -1 \text{ n-k volte})$$

Ora, però è ovvio che l'evento $D_n = -1$ n-k volte si verifica certamente quando si verifica l'evento $D_n = 1$ k volte, per cui possiamo semplicemente scrivere che

$$P(S_n = 2k - n) = P(D_n = 1 \text{ k volte})$$

Ricordando infine che

$$P(D_n = 1 \text{ k volte}) = P(I_n = 1 \text{ k volte}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

possiamo concludere che

$$P(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Calcoliamo adesso la correlazione di S_n: fissati due istanti generici n e k ed estratte dal processo le corrispondenti variabili aleatorie S_n e S_k, per definizione abbiamo che

$$C_S(n,k) = E\{[S_n - E(S_n)][S_k - E(S_k)]\}$$

Sostituendo l'espressione si S_n e S_k abbiamo poi che

$$C_S(n,k) = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} D_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{k} D_j - E\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right)\right]\right\}$$

Data la linearità della media, possiamo scrivere anche che

$$C_S(n,k) = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} (D_i - E(D_i))\right]\left[\sum_{j=1}^{k} (D_j - E(D_j))\right]\right\}$$

Possiamo anche raggruppare le due sommatorie:

$$C_S(n,k) = E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} (D_i - E(D_i))(D_j - E(D_j))\right]$$

Adesso, sempre in base alla linearità della media, possiamo portare fuori le due sommatorie e scrivere che

$$C_S(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} E\left[(D_i - E(D_i))(D_j - E(D_j))\right]$$

A questo punto, consideriamo il termine $E[(D_i - E(D_i))(D_j - E(D_j))]$: si tratta della media delle variabili aleatorie $(D_i - E(D_i))$ e $(D_j - E(D_j))$. Dobbiamo distinguere 2 casi:

- quando i≠j, queste due variabili sono certamente indipendenti tra loro, per cui possiamo scrivere che

$$E\left[\left(D_i - E(D_i)\right)\left(D_j - E(D_j)\right)\right] = E\left[D_i - E(D_i)\right]E\left[D_j - E(D_j)\right] = \left[E(D_i) - E(D_i)\right]\left[E(D_j) - E(D_j)\right] = 0$$

- quando, invece i=j, abbiamo che

$$C_S(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} E\left[\left(D_i - E(D_i)\right)\left(D_j - E(D_j)\right)\right] = \sum_{i=1}^{\min(n,k)} E\left[\left(D_i - E(D_i)\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{\min(n,k)} Var(D_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\min(n,k)} 4p(1-p) = \left[\min(n,k)\right]\left[4p(1-p)\right]$$

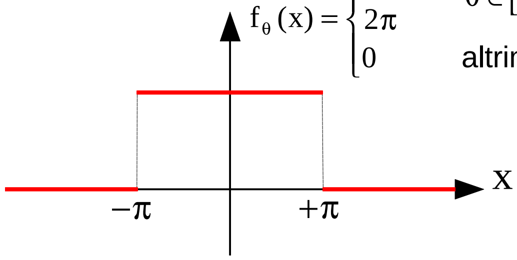
Possiamo dunque concludere che

$$C_S(n,k) = \left[\min(n,k)\right]\left[4p(1-p)\right]$$

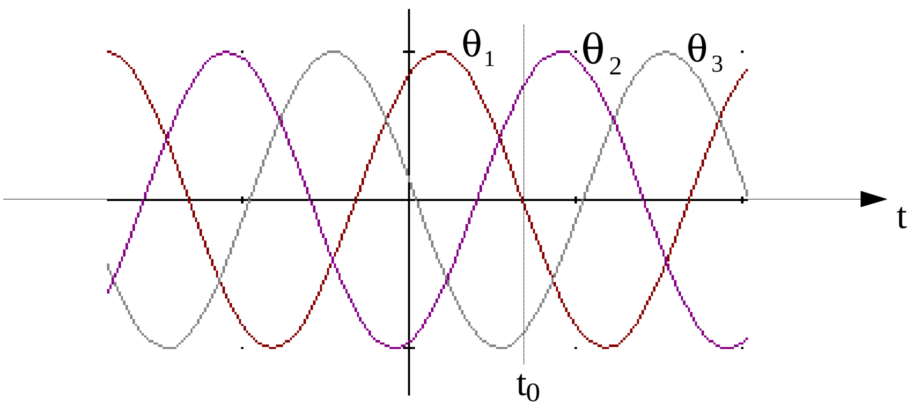
ESEMPIO

Consideriamo una variabile aleatoria θ che sia distribuita uniformemente nell'intervallo [-π,+π]:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \theta \in [-\pi,+\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Supponiamo inoltre di avere la funzione $f(t,\theta) = A\sin(2\pi t + \theta)$. Evidentemente, una volta fissato l'istante di tempo t, anche f(t,θ) è una variabile aleatoria. Viceversa, al variare del valore assunto da θ, noi abbiamo una serie di funzioni del tempo t che possiamo rappresentare graficamente nel modo seguente:



E' chiaro che, se scegliamo un arbitrario istante t_0 e consideriamo i valori assunti da tutte le N realizzazioni, avremo N valori reali, che corrispondono all'insieme di definizione della variabile aleatoria $f(t,\theta)$: per comodità, indichiamo tale variabile aleatoria con Y(t), per cui

$$Y(t) = A\sin(2\pi t + \theta)$$

E' abbastanza chiaro che questa variabile aleatoria Y(t) non sia altro che una funzione della variabile aleatoria θ. Vogliamo allora calcolare le caratteristiche statistiche di Y(t).

Per esempio, per il calcolo della media possiamo applicare il noto teorema sulla media di funzioni di variabili aleatorie: in base a questo teorema, data la variabile aleatoria X con densità $f_X(x)$ e data la variabile aleatoria Y=g(X), la media di Y è data da

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Nel nostro caso, X è θ, mentre g(x) è la funzione f(t), per cui abbiamo che

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\sin(2\pi t + x) f_X(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} A\sin(2\pi t + x)\frac{1}{2\pi} dx = \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2\pi t + x) dx = 0$$

Passiamo alla correlazione: per definizione si ha che

$$R_Y(t_1,t_2) = E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]$$

dove t_1 e t_2 sono due istanti generici. Sostituendo le rispettive espressioni, abbiamo che

$$R_Y(t_1,t_2) = E\left[A\sin(2\pi t_1 + \theta)A\sin(2\pi t_2 + \theta)\right] = A^2 E\left[\sin(2\pi t_1 + \theta)\sin(2\pi t_2 + \theta)\right] = \ldots$$

Per quanto riguarda, invece, la covarianza, sappiamo che

$$C_Y(t_1,t_2) = R_Y(t_1,t_2) - E\left[Y(t_1)\right]E\left[Y(t_1)\right]$$

Avendo però trovato che E(Y)=0, è chiaro che

$$C_Y(t_1,t_2) = R_Y(t_1,t_2)$$

Processo di Poisson

DEFINIZIONE

Il **processo (stocastico) di Poisson** fa parte dei cosiddetti *processi puntuali*, cioè processi nei quali la casualità è inerente il tempo in cui si verificano certi fenomeni.

Consideriamo dunque un generico fenomeno (o esperimento casuale); noi siamo particolarmente interessati alle seguenti grandezze:

- considerato un generico intervallo di tempo $[t_0,t_1]$, siamo innanzitutto interessati a conoscere il numero di eventi, legati al nostro fenomeno, che si verificano entro questo intervallo;
- inoltre, dato un generico evento del fenomeno, noi siamo interessati a conoscere il cosiddetto **tempo di interarrivo**, ossia il tempo che intercorre tra l'evento considerato e quello immediatamente successivo;
- infine, scelto un istante arbitrario, ci interessa il cosiddetto **tempo di attesa**, ossia il tempo che intercorre tra l'istante considerato e l'istante in cui si verifica l'evento successivo.

Per indagare su questi parametri, facciamo una serie di ipotesi preliminari:

1. indichiamo con λ la cosiddetta **intensità del processo**, ossia il <u>numero medio di eventi che si verificano nell'unità di tempo</u>; la prima ipotesi che facciamo è che questo λ non sia dipendente dal tempo, ma sia costante. Che cosa significa questa ipotesi? In termini formali, significa che il numero medio di eventi che si verificano nell'unità di tempo è sempre lo stesso. In termini più concreti, significa quanto segue: se consideriamo un generico intervallo di tempo di ampiezza T, il numero medio di eventi che si verificano in tale intervallo è pari a λT.

   Possiamo vederla anche in altro modo: se indichiamo con N(T) una variabile aleatoria che ci dà il numero di eventi che si verificano nell'intervallo di ampiezza T, questa prima ipotesi dice in pratica che il valore di $P(N(T)=k)$ (cioè la probabilità che ci siano k eventi nell'intervallo T) non dipende da quale sia l'istante iniziale e quale quello finale dell'intervallo scelto, ma solo dall'ampiezza T dell'intervallo stesso: ciò significa che noi possiamo subito scrivere che

   $$P(N(T)=k)=P(N(t,t+T)=k)$$

2. adesso, dato sempre l'intervallo di ampiezza T prima citato, supponiamo di dividerlo in n intervallini più piccoli, tutti di ampiezza δ: questo implica subito che valga la relazione

   $$n\delta = T$$

   Allora, la nostra seconda ipotesi è duplice: da un lato, supponiamo che la probabilità che si verifichi più di 1 evento in ciascun δ sia trascurabile; dall'altro, supponiamo che la probabilità che si verifichi 1 evento nel generico δ sia pari ad un generico p.

   Vediamo di esprimere anche analiticamente queste ipotesi: indichiamo con $N(t_1,t_2)$ una variabile aleatoria che fornisce il numero di eventi che si verificano nell'intervallo $[t_1,t_2]$; allora, come intervallo di tempo ne scegliamo uno di ampiezza δ e precisamente l'intervallo [t,t+δ]: le ipotesi prima citate dicono quindi che

$$P(N(t,t+\delta)=1)=p$$
$$P(N(t,t+\delta)=0)=1-p$$
$$P(N(t,t+\delta)>1)\cong 0$$

Possiamo subito mettere insieme la prima e la seconda ipotesi nel modo che segue: se N(t1,t2) fornisce il numero di eventi che si verificano nel generico intervallino δ, la relazione $P(N(t,t+\delta)=1)=p$ dice in pratica che il numero medio di eventi che si verificano in un generico intervallino δ è pari a p; allora, dato che l'intervallo di ampiezza T è la somma di n intervallini δ, allora è ovvio che il numero medio di eventi che si verificano in T è pari a np; tuttavia, questo numero medio di eventi in T era stato prima valutato come λT, per cui possiamo scrivere che

$$np=\lambda T$$

3. l'ultima ipotesi è la seguente: consideriamo due intervalli di tempo $[t_1,t_2]$ e $[t_3,t_4]$ e supponiamo che siano disgiunti, ossia non abbiano istanti di tempo in comune; la nostra ipotesi è che il numero di eventi che si verificano nel primo intervallo sia indipendente dal numero di eventi che si verificano nel secondo e viceversa.

FORMULA DI POISSON

Vediamo adesso quale uso si può fare delle ipotesi appena formulate: in particolare, indicata con N(T) la variabile aleatoria che fornisce il numero di eventi che si verificano nell'intervallo di ampiezza T, proviamo a calcolare quanto vale $P(N(T)=k)$. Questa è la probabilità che, durante l'intervallo di ampiezza di T (quale che esso sia, in base alla ipotesi numero 1), si verifichino k eventi; avendo noi diviso l'intervallo T in n intervalli di ampiezza δ e avendo anche detto che, in ciascuno di essi, si possono verificare o 0 eventi o 1 evento, è chiaro che quella è pari alla probabilità che in k di questi n intervallini ci sia 1 evento e nei rimanenti n-k non ci sia alcun evento. In base alle ipotesi (2) e (3), noi siamo inoltre in condizione di applicare la formula di Bernoulli, per cui possiamo scrivere che

$$P(N(T)=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Adesso proviamo a manipolare algebricamente questa relazione: per prima cosa, possiamo sviluppare il termine binomiale e scrivere che

$$P(N(T)=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

Adesso, ricordando che vale la relazione $np=\lambda T$, possiamo porre $p=\frac{\lambda T}{n}$, per cui

$$P(N(T)=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}$$

Sviluppando il fattoriale di n, abbiamo che

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)\dots}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}$$

E' chiaro che i termini successivi al termine (n-k+1) sono gli stessi dello sviluppo di (n-k)!, per cui possiamo semplificare e scrivere che

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-k}$$

Adesso disponiamo in modo diverso questi termini:

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}$$

A questo punto, calcoliamo il limite di questa relazione per $n\to\infty$, ossia anche per $\delta\to 0$:

$$P\left(N(T)=k\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]$$

Tiriamo fuori dal limite l'unico termine indipendente da n:

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]$$

Il limite della prima frazione è evidentemente pari ad 1 in quanto numeratore e denominatore sono infiniti dello stesso ordine:

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]$$

E' anche uguale ad 1 il limite della prima parentesi, in quanto si tratta di un noto limite notevole:

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-k}\right]$$

E' anche un limite notevole quello rimasto, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{P\left(N(T)=k\right)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}}$$

Questa è la cosiddetta **formula di Poisson**, che dà la probabilità che in un intervallo di ampiezza T si verifichino k eventi di un processo di Poisson, detti appunto **eventi di Poisson**.

A partire da quella formula, possiamo facilmente far vedere che essa rispecchia perfettamente le 3 ipotesi da cui siamo partiti: intanto, al posto di T generico, poniamo un altrettanto generico ΔT, supponendo che sia piccolo, per cui abbiamo che

$$P\big(N(\Delta T)=k\big)=\frac{(\lambda\Delta T)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta T}$$

Adesso sviluppiamo questa formula per k=0,1,2:

$$P\big(N(\Delta T)=0\big)=e^{-\lambda\Delta T}$$
$$P\big(N(\Delta T)=1\big)=(\lambda\Delta T)e^{-\lambda\Delta T}$$
$$P\big(N(\Delta T)=2\big)=\frac{(\lambda\Delta T)^2}{2}e^{-\lambda\Delta T}$$

Se ΔT è piccolo, possiamo sviluppare in serie il termine esponenziale, arrestandoci al primo termine, ossia $e^{-\lambda\Delta T}=1-\lambda\Delta T$. Abbiamo quindi che

$$P\big(N(\Delta T)=0\big)=1-\lambda\Delta T$$
$$P\big(N(\Delta T)=1\big)=(\lambda\Delta T)(1-\lambda\Delta T)=\lambda\Delta T-\lambda^2\Delta T^2\cong\lambda\Delta T$$
$$P\big(N(\Delta T)=2\big)=\frac{(\lambda\Delta T)^2}{2}(1-\lambda\Delta T)\cong 0$$

La prima relazione dice che la probabilità che non ci siano arrivi nell'intervallo ΔT è pari a 1-λΔT; la seconda dice invece che, nello stesso intervallo, la probabilità che ci sia 1 solo arrivo è pari a λΔT; infine l'ultima dice che vale circa 0 la probabilità che in ΔT si verifichino 2 (o più) arrivi. Se noi poniamo λΔT=p, è immediata la concordanza con l'ipotesi numero (2) da cui siamo partiti.

TEMPO DI INTERARRIVO

Come già anticipato all'inizio, prende il nome di **tempo di interarrivo** l'intervallo di tempo che intercorre tra due eventi (o arrivi) successivi. Evidentemente si tratta di una variabile aleatoria: la indichiamo con τ_1 e ci preoccupiamo di valutarne le caratteristiche statistiche.

La prima cosa cui siamo interessati è ovviamente la funzione di distribuzione $F_{\tau 1}(x)$: applicando la semplice definizione di questa funzione, possiamo subito scrivere che $F_{\tau 1}(x)=P(\tau_1\le x)$ ed anche che $F_{\tau 1}(x)=1-P(\tau_1>x)$. Che cos'è $P(\tau_1>x)$? Dato l'evento considerato, essa indica la probabilità che l'evento successivo avvenga non prima di un intervallo di tempo di ampiezza x; detto anche in altro modo, dato l'istante in cui si è verificato l'evento considerato, è la probabilità che nell'intervallo di ampiezza x che parte da tale istante non si verifichi alcun evento: quindi

$$F_{\tau 1}(x)=1-P(N(x)=0)$$

Quella probabilità si può calcolare mediante la formula di Poisson, per cui

$$F_{\tau 1}(x) = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Quindi, la funzione distribuzione di probabilità del tempo di interarrivo è

$$F_{\tau 1}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

il che ci dice che il tempo di interarrivo ha una distribuzione esponenziale con parametro λ, ossia ha una funzione densità di probabilità che è

$$\boxed{f_{\tau 1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

TEMPO DI ATTESA

Fissato un certo istante di tempo t, il **tempo di attesa** è una variabile aleatoria che indica il tempo che intercorre tra l'istante t e l'istante in cui si verifica l'evento immediatamente successivo. Indichiamo questa variabile aleatoria con θ e andiamo a valutare le sue caratteristiche statistiche.

In modo analogo a quanto fatto per il tempo di interarrivo, possiamo subito scrivere che

$$F_\theta(x) = P(\theta \le x) = 1 - P(\theta > x)$$

$P(\theta > x)$ è la probabilità che il tempo che passa tra l'istante t e l'arrivo successivo sia maggiore di x; detto in altre parole, è la probabilità che, nell'intervallo di ampiezza x, non si verifichi alcun arrivo. Possiamo perciò scrivere che

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

dal che si conclude che anche il tempo di attesa ha distribuzione esponenziale, ossia che

$$\boxed{f_\theta(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

Facciamo osservare che <u>il tempo di attesa ed il tempo di arrivo, pur avendo la stessa distribuzione, sono comunque due variabili aleatorie diverse</u>.

Una osservazione importante è la seguente: a suo tempo, abbiamo detto che una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale è una variabile <u>*senza memoria*</u>; quindi, τ_1 e θ sono senza memoria: per τ_1 questo significa che esse non tiene conto in alcun modo del tempo trascorso tra l'ultimo arrivo e quello considerato; per θ, questo significa che essa non tiene conto del tempo trascorso tra l'ultimo arrivo e l'istante considerato.

Per capire meglio questo concetto, facciamo il discorso seguente: consideriamo un generico istante t e consideriamo l'istante t' in cui si verifica l'evento immediatamente successivo; questo significa che θ=t-t'; allora dire che θ è senza memoria significa dire che la probabilità che θ=t-t' non cambia a prescindere dal fatto che l'ultimo arrivo, prima dell'istante t, si sia verificato molto vicino a t oppure molto lontano. Discorso esattamente analogo per τ_1.

DISTRIBUZIONE UNIFORME DEL TEMPO DI ARRIVO

Consideriamo adesso un generico intervallo di tempo di ampiezza T e consideriamo la variabile aleatoria N(T) che fornisce il numero di arrivi in tale intervallo. Supponiamo che si sia verificato 1 solo arrivo, ossia che N(T)=1. Prende il nome di **tempo di arrivo** la variabile aleatoria che fornisce l'istante in cui si è verificato tale arrivo. Si tratta di una variabile aleatoria in quanto è ovvio che questo istante può cadere in un punto qualsiasi dell'intervallo considerato. Indicata con X tale variabile aleatoria, facciamo vedere che essa è uniformemente distribuita su X, ossia facciamo vedere che la sua funzione di densità di probabilità è

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & x \in [0, T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

Per definizione, noi possiamo intanto scrivere che $F_X(x) = P(X \le x)$. Anzi, a voler essere più rigorosi, avendo supposto inizialmente che nell'intervallo [0,T] si sia verificato 1 solo arrivo, noi dobbiamo scrivere che

$$F_X(x) = P(X \le x | N(T) = 1)$$

Usando la formula delle probabilità condizionate, questa diventa

$$F_X(x) = \frac{P(X \le x \cap N(T) = 1)}{P(N(T) = 1)}$$

$P(X \le x)$ significa che quell'unico arrivo si è verificato nell'intervallo [0,x], mentre nell'intervallo rimanente [x,T] non si sono verificati arrivi: possiamo dunque scrivere che

$$F_X(x) = \frac{P(N(x) = 1 \cap N(T - x) = 0)}{P(N(T) = 1)}$$

Ora, in base alle ipotesi numero (3) del processo di Poisson, quello che succede nell'intervallo [0,x] è indipendente da quello che succede nell'intervallo]x,T], per cui

$$F_X(x) = \frac{P(N(x) = 1)P(N(T - x) = 0)}{P(N(T) = 1)}$$

A questo punto, tutte quelle probabilità si possono calcolare usando la formula di Poisson

$$P(N(T) = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

Si ha perciò che

$$F_X(x) = \frac{(\lambda x e^{-\lambda x})(e^{-\lambda(T-x)})}{\lambda T e^{-\lambda T}}$$

da cui si ricava facilmente che $F_X(x)=\frac{x}{T}$ e quindi che $f_X(x)=\frac{1}{T}$

FUNZIONE CARATTERISTICA DI UNA VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

Supponiamo di avere una variabile aleatoria X che abbia la seguente funzione di probabilità:

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k=0,1,\dots,\infty}$$

Si dice che X ha **distribuzione di Poisson con parametro** λ. Si tratta evidentemente di una variabile aleatoria DISCRETA, della quale vogliamo calcolare la funzione caratteristica.

Applicando la definizione, abbiamo che

$$\Phi_X(\nu)=E\left[e^{j\nu X}\right]=\sum_i e^{j\nu x_i}P(x_i)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{j\nu k}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{j\nu k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}e^{j\nu k}\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{j\nu}\right)^k}{k!}=e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}$$

A partire dalla funzione caratteristica, sappiamo di poter calcolare il momento di qualsiasi ordine mediante la nota formula

$$E\left[X^k\right]=\frac{1}{j^k}\frac{d^k\Phi_X(\nu)}{d\nu^k}\bigg|_{\nu=0}$$

Calcoliamo allora il momento del primo ordine (ossia la media) e quello del secondo ordine:

$$E[X]=\frac{1}{j}\frac{d\Phi_X(\nu)}{d\nu}\bigg|_{\nu=0}=\frac{1}{j}\frac{d}{d\nu}\left(e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}\right)\bigg|_{\nu=0}=\frac{1}{j}e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}\frac{d}{d\nu}\left(\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)\right)\bigg|_{\nu=0}=$$

$$=\frac{1}{j}e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}\lambda\frac{d}{d\nu}\left(e^{j\nu}-1\right)\bigg|_{\nu=0}=\frac{1}{j}e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}\lambda je^{j\nu}\bigg|_{\nu=0}=\lambda$$

$$E\left[X^k\right]=\frac{1}{j^k}\frac{d\ \ \Phi_X(\nu)}{d\nu^k}\bigg|_{\nu=0}=-\frac{d^2}{d\nu^2}\left(e^{\lambda\left(\ ^{j\nu}-1\right)}\right)\bigg|_{\nu=0}=-\frac{d}{d\nu}\frac{d}{d\nu}\left(e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}\right)\bigg|_{\nu=0}=$$

$$=-\frac{d}{d\nu}\left(e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}\frac{d}{d\nu}\left(\lambda\left(e^{\ \nu}-1\right)\right)\right)\bigg|_{\nu=0}=-\frac{d}{d\nu}\left(\lambda e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)}je^{j\nu}\right)\bigg|_{\nu=0}=$$

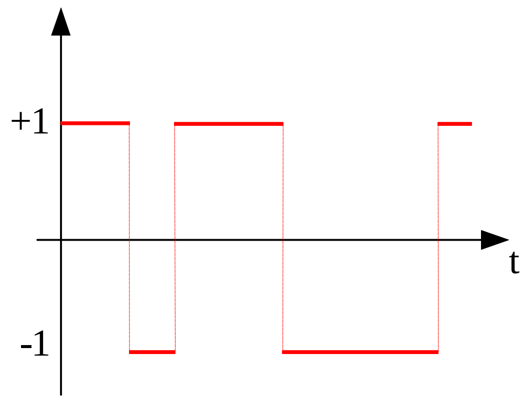
$$=-j\lambda\frac{d}{d\nu}\left(e^{\lambda\left(\ ^{j\nu}-1\right)+j\nu}\right)\bigg|_{\nu=0}=-j\lambda e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)+\ \nu}\frac{d}{d\nu}\left(\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)+j\nu\right)\bigg|_{\nu=0}=$$

$$=-j\lambda e^{\lambda\left(e^{j\nu}-1\right)+j\nu}\left(j\lambda e^{j\nu}+j\right)\bigg|_{\nu=0}=-j\lambda^2\left(j\lambda+j\right)\big|_{\nu=0}=\lambda^2+\lambda$$

Processo telegrafico casuale

DEFINIZIONE

Un **processo telegrafico casuale** è un processo in cui ogni realizzazione può assumere solo due diversi valori (o *stati*) e precisamente +1 e -1. Per esempio, una possibile realizzazione del processo può essere la seguente:



Supponiamo che il cambiamento di stato, da +1 a -1 oppure da -1 a +1, sia condizionato al verificarsi di un evento di Poisson: non appena si verifica un evento di Poisson, si verifica il cambiamento di stato e lo stato non cambia finche non si verifica un ulteriore evento di Poisson.

Se noi indichiamo con X(t) la variabile aleatoria estratta dal processo all'istante t, vogliamo calcolare la probabilità che il processo (o il *sistema*) si trovi nello stato +1 all'istante t, ossia vogliamo calcolare $P(X(t)=1)$.

Questa probabilità può essere calcolata mediante il teorema delle probabilità totali: considerando come partizione quella relativa all'istante t=0, possiamo scrivere che

$$P(X(t)=1)=P(X(t)=1|X(0)=1)P(X(0)=1)+P(X(t)=1|X(0)=0)P(X(0)=0)$$

A questo punto facciamo una ipotesi semplificativa: supponiamo che il processo assuma i valori +1 e -1 con la stessa probabilità, che quindi sarà pari ad ½ in quanto +1 e -1 sono le uniche possibilità: quindi

$$P(X(t)=1)=P(X(t)=1|X(0)=1)\frac{1}{2}+P(X(t)=1|X(0)=0)\frac{1}{2}$$

Adesso riflettiamo su quelle probabilità condizionate:

- $P(X(t)=1|X(0)=1)$ è la probabilità che all'istante t il processo si trovi nello stato +1 dopo che all'istante t=0 si trovava nello stato +1; avendo detto che i cambiamenti di stato avvengono ogniqualvolta si verifica un evento di Poisson, è evidente che noi possiamo ritrovare il processo nello stato +1 all'istante t SOLO SE nell'intervallo [0,t] c'è stato un numero pari di eventi di Poisson; indicata allora con N(t) la variabile aleatoria che tiene conto del numero di eventi di Poisson nell'intervallo (0,t), possiamo scrivere che

$$P(X(t)=1|X(0)=1)=P(N(t)\ \text{è pari})$$

- in modo del tutto analogo, $P\left(X(t)=1 \middle| X(0)=0\right)$ è la probabilità che all'istante t il processo si trovi nello stato +1 dopo che all'istante t=0 si trovava nello stato 0; questo è possibile SOLO SE nell'intervallo [0,t] c'è stato un numero dispari di eventi di Poisson, per cui

$$P\left(X(t)=1 \middle| X(0)=0\right)=P\left(N(t)\ \text{è dispari}\right)$$

Quindi abbiamo che

$$P\left(X(t)=1\right)=P\left(N(t)\ \text{è pari}\right)\frac{1}{2}+P\left(N(t)\ \text{è dispari}\right)\frac{1}{2}$$

Adesso dobbiamo valutare quelle due probabilità, sfruttando ancora una volta la formula di Poisson

$$P\left(N(T)=k\right)=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}$$

Abbiamo perciò che

$$P\left(N(t)\ \text{è pari}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!}$$

$$P\left(N(t)\ \text{è dispari}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Per esprimere in modo più comodo quelle due sommatorie, possiamo osservare quanto segue: lo sviluppo in serie della funzione esponenziale è

$$e^{\lambda t}=1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^n}{n!}+\ldots$$

$$e^{-\lambda t}=1-\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n(\lambda t)^n}{n!}+\ldots$$

Se sommiamo membro a membro questi sviluppi otteniamo

$$e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}=2+2\frac{(\lambda t)^2}{2!}+2\frac{(\lambda t)^4}{4!}+\ldots+2\frac{(\lambda t)^{2n}}{n!}+\ldots=2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!}$$

da cui

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!}=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}\right)$$

In modo del tutto analogo, sottraendo membro a membro gli sviluppi di prima, si ottiene

$$e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}=2(\lambda t)+2\frac{(\lambda t)^3}{3!}+2\frac{(\lambda t)^5}{5!}+\ldots+2\frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

e quindi

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right)$$

Tornando dunque all'espressione di $P(X(t)=1)$, possiamo scrivere che

$$P(X(t)=1) = P(N(t) \text{ è pari})\frac{1}{2} + P(N(t) \text{ è dispari})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i}}{(2i)!} + \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{2i+1}}{(2i+1)!} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\right)\right) + \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right)\right) = \frac{1}{4}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\right) + \frac{1}{4}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}\right) = \frac{1}{2}$$

Abbiamo dunque concluso che

$$\boxed{P(X(t)=1) = \frac{1}{2}}$$

Appare abbastanza ovvio che sarà anche $P(X(t)=-1) = \frac{1}{2}$, per cui possiamo scrivere che

$$\boxed{X(t) = \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \end{cases}}$$

Questa è dunque la struttura delle variabile aleatoria estratta, al generico istante t, da un processo telegrafico casuale.

CARATTERISTICHE STATISTICHE

Adesso, considerata la variabile aleatoria X(t) appena caratterizzata, valutiamone le principali caratteristiche statistiche.

E' subito ovvio che la media di X(t) vale

$$E[X(t)] = +1 \cdot \frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Il fatto che X(t) sia a media nulla implica che

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)] = R_X(t_1,t_2)$$

Valutiamo allora la correlazione di X(t): per definizione si ha che

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

Dobbiamo dunque calcolare la media della variabile aleatoria $Z(t_1,t_2)=X(t_1)X(t_2)$. Dato che X(t) può assumere solo i valori +1 e -1, è chiaro che anche $Z(t_1,t_2)$ può assumere gli stessi valori, per cui possiamo applicare la definizione di media e scrivere che

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E[Z(t_1,t_2)]=(+1)\cdot P(Z(t_1,t_2)=1)+(-1)\cdot P(Z(t_1,t_2)=-1)=\\&=P(Z(t_1,t_2)=1)-P(Z(t_1,t_2)=-1)\end{aligned}$$

Quando accade che $Z(t_1,t_2)=1$? Quando $X(t_1)$ e $X(t_2)$ valgono entrambe +1 o -1, ossia quando assumono lo stesso valore: quindi

$$R_X(t_1,t_2)=P(X(t_1)=X(t_2))-P(Z(t_1,t_2)=-1)$$

In modo del tutto analogo, $Z(t_1,t_2)=-1$ accade quando $X(t_1)$ e $X(t_2)$ sono diverse, per cui

$$R_X(t_1,t_2)=P(X(t_1)=X(t_2))-P(X(t_1)\neq X(t_2))$$

Adesso, quando accade che $X(t_1)=X(t_2)$? Dato che si presuppone $t_2>t_1$, dire che $X(t_1)=X(t_2)$ significa dire che il processo assume lo stesso stato agli istanti t_1 e t_2: ciò accade quando nell'intervallo $[t_1,t_2]$ avviene un numero pari di eventi di Poisson, per cui

$$P(X(t_1)=X(t_2))=P(N(t_2-t_1)\ \text{è pari})$$

In modo del tutto analogo, dire che $X(t_1)\neq X(t_2)$ significa dire che il processo assume uno stato diverso agli istanti t_1 e t_2: ciò accade quando nell'intervallo $[t_1,t_2]$ avviene un numero dispari di eventi di Poisson, per cui

$$P(X(t_1)\neq X(t_2))=P(N(t_2-t_1)\ \text{è dispari})$$

Quindi possiamo scrivere che

$$R_X(t_1,t_2)=P(N(t_2-t_1)\ \text{è pari})-P(N(t_2-t_1)\ \text{è dispari})$$

Prima avevamo trovato che

$$P(N(t)\ \text{è pari})=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}\right)=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\lambda t}\right)$$
$$P(N(t)\ \text{è dispari})=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\lambda t}\right)$$

In questo caso, quindi, si ha che

$$P(N(t_2-t_1)\ \text{è pari})=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)$$
$$P(N(t_2-t_1)\ \text{è dispari})=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)$$

e quindi possiamo concludere che

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\left(1+2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)-\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right)=e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$

Si nota che R_X (e quindi anche C_X) non dipende da t_1 e t_2 in modo assoluto, ma solo da t_2-t_1.

Processi stocastici stazionari

INTRODUZIONE

Quando abbiamo introdotto i processi stocastici, abbiamo detto che, per caratterizzare un generico processo stocastico, noi dobbiamo conoscere la funzione di distribuzione congiunta, che abbiamo indicato con

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)}(x_1,x_2,\dots,x_N) = P\left(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\dots,X(t_N)\le x_N\right)$$

dove $X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)$ sono N variabili aleatorie estratte dal processo nei generici istanti $t_1,t_2,\dots,t_N$.

Diamo allora la seguente definizione:

*Def. Un processo stocastico si dice **stazionario in senso stretto** quando la funzione di distribuzione congiunta risulta invariante rispetto alle traslazioni temporali*

In termini matematici, questo significa che, fissata una generica quantità reale τ, deve essere verificata la seguente relazione:

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)}(x_1,x_2,\dots,x_N) = F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\dots,X(t_N+\tau)}(x_1,x_2,\dots,x_N)$$

In altri termini, *un processo stocastico è stazionario in senso stretto se le sue caratteristiche statistiche non variano al variare del tempo.*

La relazione appena citata vale per qualsiasi valore di N: allora, prendendo alcuni valori particolari di N, possiamo vedere quali implicazioni essa abbia.

Cominciamo col prendere N=1: in questo caso, la relazione si riduce a

$$F_{X(t_1)}(x_1) = P\left(X(t_1)\le x_1\right) = F_{X(t_1+\tau)}(x_1) = P\left(X(t_1+\tau)\le x_1\right)$$

Questa relazione dice in pratica che, *dato un processo stocastico stazionario in senso stretto, dati due istanti qualsiasi di tempo e date le corrispondenti variabili aleatorie estratte dal processo, tali due variabili sono identiche dal punto di vista statistico, ossia*

$$f_{X(t_1)}(x) = f_{X(t_1+\tau)}(x)$$

Passiamo adesso a N=2: in questo caso, la relazione generale si riduce a

$$\begin{aligned} F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) &= P\left(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2\right) = \\ &= F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau)}(x_1,x_2) = P\left(X(t_1+\tau)\le x_1, X(t_2+\tau)\le x_2\right)\end{aligned}$$

Se, per esempio, prendiamo τ=-t_1, questa diventa

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = P\big(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2\big) =$$
$$= F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2) = P\big(X(0)\le x_1, X(t_2-t_1)\le x_2\big)$$

Questa relazione indica che *la distribuzione congiunta delle variabili aleatorie* $X(t_1)$ *e* $X(t_2)$ *non dipende in modo assoluto da t_1 e t_2 ma solo dalla loro differenza t_2-- t_1.*

Per approfondire ulteriormente il concetto, valutiamo quanto vale la correlazione di tali variabili aleatorie: per definizione, possiamo intanto scrivere che

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Ma, essendo

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2)$$

sarà anche

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = f_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2)$$

per cui

$$\boxed{R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2)dx_1dx_2}$$

Si nota dunque che *la correlazione tra le due variabili aleatorie non dipende in modo assoluto da t_1 e t_2 ma solo dalla loro differenza t_2 - t_1.*

Diamo adesso una seconda definizione circa la stazionarietà di un processo stocastico:

*Def. Un processo stocastico si dice **stazionario in senso lato** quando sono verificate le seguenti due condizioni:*

1.presa la variabile aleatoria X(t) estratta dal processo al generico istante t, la sua media risulta indipendente dal tempo

2.prese due variabile aleatorie estratte dal processo negli istanti generici t_1 e t_2 , la loro funzione di correlazione non dipende in modo assoluto da t_1 e t_2 ma solo dalla loro differenza t_2 - t_1.

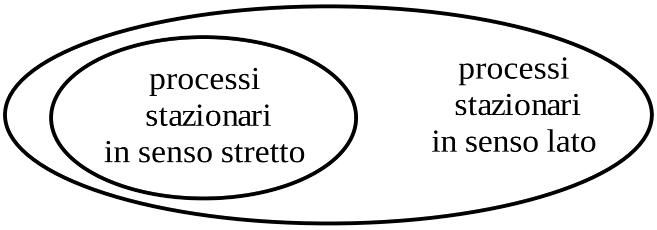
In termini matematici, quindi, perché il processo sia stazionario in senso lato, deve accadere che

$$\boxed{\begin{cases} E[X(t)] = m_X & \forall t \\ R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2-t_1) & \forall t_1,t_2 \end{cases}}$$

In base alle due proprietà trovate prima, per N=1 e N=2, per un processo stazionario in senso stretto, appare ovvio che *un processo stazionario in senso stretto è senz'altro un processo stazionario in senso lato.*

In generale, invece, non vale l'implicazione inversa, ossia non è detto che un processo stazionario in senso lato sia anche stazionario in senso stretto.

Possiamo cioè schematizzare la situazione nel modo seguente:



Esempio: processo telegrafico casuale

A titolo di esempio, vediamo se il processo telegrafico casuale, introdotto in precedenza, è stazionario in senso stretto, in senso lato o in entrambi.

Perché il processo sia stazionario in senso lato deve accadere che la sua media sia indipendente dal tempo e che la sua correlazione dipenda dalla differenza dei tempi e non dai tempi assoluti: effettivamente, quando noi abbiamo studiato questo processo, abbiamo trovato che la sua media è

$$E[X(t)] = +1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0$$

e che la sua correlazione è $R_X(t_1,t_2) = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$, per cui possiamo dedurre che <u>effettivamente si tratta di un processo stazionario in senso lato</u>.

E' possibile però verificare che <u>si tratta anche di un processo stazionario in senso stretto</u>. Vediamo come.

Dobbiamo dimostrare che

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_N)}(a_1,a_2,\dots,a_N) = F_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\dots,X(t_N+\tau)}(a_1,a_2,\dots,a_N)$$

ossia anche che

$$P\big(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2,\dots,X(t_N)=a_N\big) = P\big(X(t_1+\tau)=a_1, X(t_2+\tau)=a_2,\dots,X(t_N+\tau)=a_N\big)$$

dove ricordiamo che $a_i = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad i = 1,2,,N$.

Allora partiamo dal primo membro e vediamo di arrivare al secondo.

Usando le probabilità condizionate, noi possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} &P\big(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2,\dots,X(t_N)=a_N\big) = \\ &= P\big(X(t_N)=a_N \,|\, X(t_1)=a_1,\dots,X(t_{N-1})=a_{N-1}\big)P\big(X(t_1)=a_1,\dots,X(t_{N-1})=a_{N-1}\big) \end{aligned}$$

Al secondo membro abbiamo il prodotto di una probabilità condizionata per una probabilità assoluta: possiamo esprimere anche quest'ultima come prodotto di una probabilità condizionata e di una probabilità assoluta, ottenendo che

$$
\begin{aligned}
&P\left(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2, \ldots, X(t_N)=a_N\right)= \\
&= P\left(X(t_N)=a_N \middle| X(t_{N-1})=a_{N-1}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-1})=a_{N-1} \middle| X(t_{N-2})=a_{N-2}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) P\left(X(t_{N-2})=a_{N-2}, \ldots, X(t_1)=a_1\right)
\end{aligned}
$$

Possiamo procedere ancora con lo stesso metodo, per cui

$$
\begin{aligned}
&P\left(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2, \ldots, X(t_N)=a_N\right)= \\
&= P\left(X(t_N)=a_N \middle| X(t_{N-1})=a_{N-1}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-1})=a_{N-1} \middle| X(t_{N-2})=a_{N-2}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-2})=a_{N-2} \middle| X(t_{N-3})=a_{N-3}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) P\left(\middle| X(t_{N-3})=a_{N-3}, \ldots, X(t_1)=a_1\right)
\end{aligned}
$$

Continuando in questo modo, si dobbiamo fermare quando otteniamo quanto segue:

$$
\begin{aligned}
&P\left(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2, \ldots, X(t_N)=a_N\right)= \\
&= P\left(X(t_N)=a_N \middle| X(t_{N-1})=a_{N-1}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-1})=a_{N-1} \middle| X(t_{N-2})=a_{N-2}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-2})=a_{N-2} \middle| X(t_{N-3})=a_{N-3}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&\ldots. \\
&P\left(X(t_3)=a_3 \middle| X(t_2)=a_2, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(\middle| X(t_2)=a_2 \middle| X(t_1)=a_1\right) P\left(X(t_1)=a_1\right)
\end{aligned}
$$

Ci dobbiamo fermare in quanto evidentemente l'ultima proprietà assoluta che noi abbiamo ottenuto non è più esprimibile mediante le probabilità condizionate.

A questo punto, dobbiamo vedere se possiamo valutare quanto valgono le probabilità che compaiono in quella formula. In primo luogo, dallo studio che abbiamo fatto del processo telegrafico casuale, possiamo subito scrivere che $P\left(X(t_1)=a_1\right)=\frac{1}{2}$, per cui abbiamo che

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2, \ldots, X(t_N)=a_N\right)= \\
&=P\left(X(t_N)=a_N \middle| X(t_{N-1})=a_{N-1}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-1})=a_{N-1} \middle| X(t_{N-2})=a_{N-2}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(X(t_{N-2})=a_{N-2} \middle| X(t_{N-3})=a_{N-3}, \ldots, X(t_1)=a_1\right) \\
&\ldots. \\
&P\left(X(t_3)=a_3 \middle| X(t_2)=a_2, X(t_1)=a_1\right) \\
&P\left(\middle| X(t_2)=a_2 \middle| X(t_1)=a_1\right)\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Passiamo a $P\left(\middle|X(t_2)=a_2\middle|X(t_1)=a_1\right)$: questa è la probabilità che all'istante t_2 il processo si trovi nello stato a_2 sapendo che all'istante t_1 esso si trovava nello stato a_1. Chiaramente, ricordando che i cambiamenti di stato in un processo telegrafico casuale avvengono in corrispondenza del verificarsi di eventi di Poisson, noi possiamo affermare che quella probabilità è pari alla probabilità che nell'intervallo $[t_1,t_2]$ si verifichi o un numero pari di eventi di Poisson (nel quale caso $a_2=a_1$) oppure un numero dispari di eventi di Poisson (nel qual caso $a_2 \neq a_1$). Quindi possiamo scrivere che

$$P\left(\middle|X(t_2)=a_2\middle|X(t_1)=a_1\right)=P\left(N(t_2-t_1)\ \text{è pari}\ \cup\ N(t_2-t_1)\ \text{è dispari}\right)$$

Adesso passiamo a $P\left(X(t_3)=a_3\middle|X(t_2)=a_2, X(t_1)=a_1\right)$: ciò che possiamo osservare, in accordo a quanto visto poco fa, è che questa probabilità condizionata può essere semplificata, in quanto è chiaro che ciò che a noi interessa è quello che succede nell'intervallo $[t_2,t_3]$, mentre non influisce minimamente sull'evento $X(t_3)=a_3$ quello che accade prima di t_2.

$$\begin{aligned}
P\left(X(t_3)=a_3\middle|X(t_2)=a_2, X(t_1)=a_1\right) &= P\left(\middle|X(t_3)=a_3\middle|X(t_2)=a_2\right)= \\
&=P\left(N(t_3-t_2)\ \text{è pari}\ \cup\ N(t_3-t_2)\ \text{è dispari}\right)
\end{aligned}$$

Stesso discorso, ovviamente, per gli altri termini di quel prodotto:

$$\begin{aligned}
P\left(X(t_4)=a_4\middle|X(t_3)=a_3, X(t_2)=a_2, X(t_1)=a_1\right) &= P\left(\middle|X(t_4)=a_4\middle|X(t_3)=a_3\right)= \\
&=P\left(N(t_4-t_3)\ \text{è pari}\ \cup\ N(t_4-t_3)\ \text{è dispari}\right)
\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots.$$

$$\begin{aligned}
P\left(X(t_N)=a_N\middle|X(t_{N-1})=a_{N-1},\ldots, X(t_1)=a_1\right) &= P\left(\middle|X(t_N)=a_N\middle|X(t_{N-1})=a_{N-1}\right)= \\
&=P\left(N(t_N-t_{N-1})\ \text{è pari}\ \cup\ N(t_N-t_{N-1})\ \text{è dispari}\right)
\end{aligned}$$

Possiamo dunque scrivere che

$$\begin{aligned}
&P\left(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2, \ldots, X(t_N)=a_N\right)= \\
&=P\left(X(t_N)=a_N\middle|X(t_{N-1})=a_{N-1}\right)P\left(X(t_{N-1})=a_{N-1}\middle|X(t_{N-2})=a_{N-2}\right)\ldots P\left(\middle|X(t_2)=a_2\middle|X(t_1)=a_1\right)\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Con lo stesso identico ragionamento, possiamo calcolare $P(X(t_1+\tau)=a_1, X(t_2+\tau)=a_2, ..., X(t_N+\tau)=a_N)$: si trova evidentemente che

$$\begin{aligned}&P(X(t_1+\tau)=a_1, X(t_2+\tau)=a_2, ..., X(t_N+\tau)=a_N) = \\ &= P(X(t_N+\tau)=a_N | X(t_{N-1}+\tau)=a_{N-1}) P(X(t_{N-1}+\tau)=a_{N-1} | X(t_{N-2}+\tau)=a_{N-2}) ... P(|X(t_2+\tau)=a_2 | X(t_1+\tau)=a_1) \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Confrontando le due ultime relazioni, possiamo concludere che tutti i termini della prima coincidono con i rispettivi termini della seconda: infatti, ricordando che valgono le caratteristiche del processo di Poisson, secondo cui, dato un intervallo di tempo, ciò che interessa di tale intervallo è la sua ampiezza e non l'istante di inizio e quello di fine, noi possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}&P(X(t_N+\tau)=a_N | X(t_{N-1}+\tau)=a_{N-1}) = P(X(t_N)=a_N | X(t_{N-1})=a_{N-1}) \\ &P(X(t_{N-1}+\tau)=a_{N-1} | X(t_{N-2}+\tau)=a_{N-2}) = P(X(t_{N-1})=a_{N-1} | X(t_{N-2})=a_{N-2}) \\ &... \\ &P(|X(t_2+\tau)=a_2 | X(t_1+\tau)=a_1) = P(|X(t_2)=a_2 | X(t_1)=a_1)\end{aligned}$$

per cui

$$P(X(t_1)=a_1, X(t_2)=a_2, ..., X(t_N)=a_N)) = P(X(t_1+\tau)=a_1, X(t_2+\tau)=a_2, ..., X(t_N+\tau)=a_N))$$

PROPRIETÀ DELLA CORRELAZIONE DI UN PROCESSO STOCASTICO STAZIONARIO IN SENSO LATO

Supponiamo di avere un processo stocastico e supponiamo che esso sia stazionario in senso lato: come detto in precedenza, questo significa che

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_X & \forall t \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

La proprietà sulla correlazione può anche essere riscritta nel modo seguente:

$$R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) \qquad \forall t, \tau$$

Vediamo qualche proprietà di cui gode $R_X(t,t+\tau)$.

Una prima proprietà utile è quella per cui la funzione $R_X(\tau)$ è una funzione pari, ossia tale che

$$\boxed{R_X(\tau) = R_X(-\tau)}$$

Inoltre, è evidente che

$$R_X(0) = R_X(t,t) = E[X(t), X(t)] = E[X^2(t)]$$

La quantità $R_X(0)$ prende il nome di **potenza statistica del processo**: si tratta di una quantità importante per varie ragioni; tra queste, una riguarda l'esistenza della relazione seguente:

$$\boxed{\left|R_X(\tau)\right| \le R_X(0)}$$

Vediamo di dimostrare questa proprietà: la relazione da cui si parte è $E\left[\left(X(t) \pm X(t+\tau)\right)^2\right] \ge 0$. Sviluppando quel quadrato abbiamo che

$$E\left[X^2(t) + X^2(t+\tau) \pm 2X(t)X(t+\tau)\right] \ge 0$$

Adesso, data la linearità della media, abbiamo che

$$E\left[X^2(t)\right] + E\left[X^2(t+\tau)\right] \pm 2E\left[X(t)X(t+\tau)\right] \ge 0$$

Adesso, ricordiamo che $E\left[X^2(t)\right] = R_X(0)$, per cui

$$R_X(0) + R_X(0) \pm 2E\left[X(t)X(t+\tau)\right] \ge 0$$

e quindi

$$2R_X(0) \pm 2E\left[X(t)X(t+\tau)\right] \ge 0$$

Da questa si ricava infine che

$$-R_X(0) \le E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$$
$$R_X(0) \le E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$$

ossia la tesi.

N.B. Poiché la covarianza differisce dall'autocorrelazione solo per una costante, è ovvio che anch'essa gode delle stesse proprietà appena dimostrate

ESERCIZIO

Sia dato un processo stocastico associato al seguente spazio degli eventi: $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Supponiamo che la probabilità di ciascuno di quegli eventi sia 1/5.

Supponiamo inoltre che le realizzazioni che costituiscono il processo siano le seguenti:

$$f(t, A_1) = -\sqrt{2}\cos(t)$$
$$f(t, A_2) = -\sqrt{2}\sin(t)$$
$$f(t, A_3) = \sqrt{2}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)$$
$$f(t, A_4) = \cos(t) - \sin(t)$$
$$f(t, A_5) = \sin(t) - \cos(t)$$

Vogliamo verificare se il processo è stazionario in senso stretto, in senso lato in entrambi o in nessuno dei due.

Cominciamo col verificare se il processo è stazionario in senso lato. Indicata con X(t) la variabile aleatoria estratta dal processo al generico istante t, noi dobbiamo verificare se sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_X & \forall t \\ R_X(t,t+\tau) = R_X(\tau) & \forall t,\tau \end{cases}$$

Calcoliamo per prima la media di X(t): la semplice definizione dice che

$$\boxed{E[X(t)] = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} f(t, A_k)}$$

Esplicitando quella somma, abbiamo quanto segue:

$$E[X(t)] = \frac{1}{5}\left[-\sqrt{2}\cos(t) - \sqrt{2}\sin(t) + \sqrt{2}(\cos(t)+\sin(t)) + (\cos(t)-\sin(t)) + (\sin(t)-\cos(t))\right] = 0$$

La prima condizione è verificata, in quanto la media risulta costante e quindi indipendente dal tempo. Passiamo alla correlazione: la definizione dice questa volta che

$$\boxed{R_X(t,t+\tau) = E[X(t),X(t+\tau)] = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} f(t,A_k) f(t+\tau, A_k)}$$

Esplicitiamo anche qui la sommatoria: facendo i conti, si trova che

$$R_X(t,t+\tau) = \frac{1}{5} 6\cos(\tau)$$

dal che si deduce che anche la seconda condizione è verificata, visto che $R_X(t,t+\tau)$ risulta dipendente solo da τ e non da t.

Quindi, il processo considerato è stazionario in senso lato.

Verifichiamo se il processo è stazionario in senso stretto. Quello che dobbiamo far vedere è che, ad esempio, estratte due variabili aleatorie negli istanti generici t1 e t2, la loro funzione di distribuzione congiunta risulta indipendente dal tempo..... Ciò che si trova è che il processo non è stazionario in senso stretto.

ESERCIZIO

Siano X ed Y due variabili aleatorie, indipendenti tra loro, entrambe distribuite uniformemente nell'intervallo (0,1). Si consideri inoltre il processo stocastico la cui variabile aleatoria estratta al generico istante t è $Z(t) = X\sin(Yt)$. Vogliamo calcolare la media e la correlazione del processo, al fine di stabilire se sia stazionario in senso lato o meno.

Per quanto riguarda il valore medio di Z(t), possiamo intanto scrivere che $E[Z(t)] = E[X\sin(Yt)]$. Essendo X ed Y indipendenti tra loro, possiamo sfruttare una nota proprietà della media e scrivere che

$$E[Z(t)] = E[X]E[\sin(Yt)]$$

La media della variabile X, che poi coincide con quella della variabile Y, si calcola facilmente data la semplicità della struttura della X stessa: infatti, la funzione densità di X è

$$f_X(x) = 1 \quad x \in [0,1]$$

per cui la sua media vale

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Abbiamo dunque che

$$E[Z(t)] = \frac{1}{2} E[\sin(Yt)]$$

L'altra media che dobbiamo calcolare è quella di una variabile aleatoria funzione di Y: a tale scopo, possiamo allora usare un noto teorema per scrivere che

$$E[\sin(Yt)] = \int_0^1 \sin(yt) dy = -\frac{1}{t}[\cos(yt)]_0^1 = \frac{1}{t}(1-\cos(t))$$

e quindi possiamo concludere che

$$E[Z(t)] = \frac{1}{2t}(1-\cos(t))$$

Abbiamo trovato che la media dipende dal tempo, per cui possiamo sin da ora concludere che il processo non è stazionario.

A titolo si esercizio, andiamo comunque a calcolare la correlazione del processo: usando la solita definizione, possiamo scrivere che

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z(t_2)]$$

Sostituendo l'espressione di Z(t), abbiamo che

$$R_Z(t_1, t_2) = E[X\sin(Yt_1)X\sin(Yt_2)] = E[X^2 \sin(Yt_1)\sin(Yt_2)]$$

Sempre in accordo alla indipendenza di X ed Y, possiamo anche scrivere che

$$R_Z(t_1, t_2) = E[X^2]E[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)]$$

Il calcolo del termine $E[X^2]$ è immediato:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Più complesso è invece quello del termine $E\left[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)\right]$. Intanto, usando la nota formula trigonometrica

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

e usando inoltre la linearità della media, abbiamo che

$$E\left[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)\right]=\frac{1}{2}E\left[\cos(Y(t_1-t_2))-\cos(Y(t_1+t_2))\right]=$$
$$=\frac{1}{2}E\left[\cos(Y(t_1-t_2))\right]-\frac{1}{2}E\left[\cos(Y(t_1+t_2))\right]$$

Facendo i calcoli in modo analogo a prima, abbiamo che

$$E\left[\cos(Y(t_1-t_2))\right]=\frac{1}{t_2-t_1}\sin(t_2-t_1)$$
$$E\left[\cos(Y(t_1+t_2))\right]=\frac{1}{t_2+t_1}\sin(t_2+t_1)$$

per cui

$$E\left[\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t_2-t_1}\sin(t_2-t_1)-\frac{1}{t_2+t_1}\sin(t_2+t_1)\right]$$

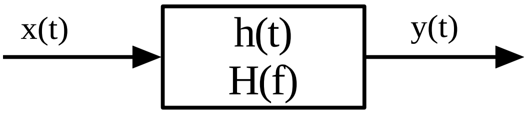
e quindi

$$R_Z(t_1,t_2)=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{t_2-t_1}\sin(t_2-t_1)-\frac{1}{t_2+t_1}\sin(t_2+t_1)\right]$$

Processi stocastici stazionari e sistemi lineari

INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un sistema lineare tempo-invariante, che sappiamo di poter schematizzare nel modo seguente:



Noi sappiamo che un sistema è un oggetto che, ricevendo un certo segnale x(t) in ingresso opera su di esso una qualche operazione, rappresentata, per i sistemi lineari tempo-invarianti, dalla convoluzione con h(t) nel dominio del tempo e/o dal prodotto con H(f) nel dominio della frequenza, e genera una certa uscita y(t).

Il segnale che giunge in ingresso al sistema non necessariamente è un segnale determinato, nel senso che noi non necessariamente ne conosciamo la struttura. Anzi, al contrario, un sistema viene progettato pensando che i segnali che gli arriveranno in ingresso, per quanto accomunati da qualche caratteristica comune, siano i più vari possibile. Di conseguenza, noi possiamo pensare di applicare in ingresso al nostro sistema una variabile aleatoria X(t) estratta da un processo stocastico al generico istante t. In pratica, ciò significa che noi poniamo in ingresso al sistema il processo stocastico.

Vogliamo far vedere che, se il sistema è lineare e tempo-invariante e se il processo stocastico considerato è stazionario in senso lato, l'uscita Y(t) del sistema rappresenta anch'essa la generica variabile aleatoria estratta da un processo stocastico stazionario in senso lato. In altre parole, quindi, la linearità e la tempo-invarianza del nostro sistema garantiscono la conservazione della proprietà di stazionarietà in senso lato.

Per dimostrare questo, in base alla definizione di processo stocastico stazionario in senso lato, dobbiamo far vedere che valgono le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} E[Y(t)] = m_Y & \forall t \\ R_Y(t_1,t_2) = R_Y(t_2 - t_1) & \forall t_1, t_2 \end{cases}$$

Cominciamo dalla prima relazione: intanto, noi sappiamo che per i sistemi lineari tempo-invarianti, è possibile esprimere l'uscita in funzione dell'ingresso mediante la relazione $Y(t) = X(t) * h(t)$, dove abbiamo detto che h(t) è la risposta all'impulso del sistema. In base, poi, alla definizione di prodotto di convoluzione, possiamo anche scrivere che

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau$$

Andiamo adesso a calcolare la media di Y(t): sfruttando quest'ultima relazione, abbiamo che

$$E[Y(t)] = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau \right]$$

Noi sappiamo che calcolare la media di una variabile aleatoria significa calcolare un integrale in cui compaia, come funzione integranda, la distribuzione della variabile stessa. Nel nostro caso, essendo la variabile aleatoria data essa stessa da un integrale, possiamo scambiare i due integrali, ossia portare l'operatore media all'interno dell'integrale che definisce Y(t): quindi abbiamo che

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-\tau)h(\tau)]d\tau$$

Adesso, se facciamo l'ulteriore ipotesi che la funzione h(t) sia reale (il che significa che il sistema è almeno idealmente realizzabile), h(τ) è evidentemente una costante che non dipende dal tempo, per cui possiamo portarlo fuori dall'operatore media (sfruttando una sua nota proprietà) e scrivere che

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau$$

A questo punto, noi sappiamo che, per ipotesi, X(t) è stata estratta da un processo stocastico stazionario in senso lato: ciò significa che la sua media è indipendente dal tempo, ossia che vale la relazione $E[X(t)] = m_X \quad \forall t$. Possiamo dunque scrivere che

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)m_X d\tau = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau$$

Infine, l'integrale che ci è rimasto non è funzione del tempo del tempo t, per cui E[Y(t)] risulta effettivamente indipendente dal tempo e noi possiamo in particolare porre

$$\boxed{E[Y(t)] = m_Y = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau}$$

Fatto questo, dobbiamo dimostrare la seconda relazione, ossia che

$$R_Y(t_1,t_2) = R_Y(t_2-t_1) \qquad \forall t_1,t_2$$

o, in modo del tutto equivalente, che

$$R_Y(t,t+\tau) = R_Y(\tau) \qquad \forall t,\tau$$

Intanto, per definizione di correlazione, abbiamo che

$$R_Y(t,t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

Sapendo adesso che

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-s)h(s)ds$$

abbiamo che

$$R_Y(t,t+\tau) = E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-s)h(s)ds\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-r)h(r)dr\right)\right]$$

Facendo il prodotto di quei due integrali, abbiamo che

$$R_Y(t,t+\tau) = E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)h(r)X(t-s)X(t+\tau-r)dsdr\right)\right]$$

Per lo stesso motivo addotto nella dimostrazione precedente, possiamo portare l'operatore media dentro quell'integrale doppio:

$$R_Y(t,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[h(s)h(r)X(t-s)X(t+\tau-r)\right]dsdr$$

Inoltre, sempre nell'ipotesi di h(t) reale, possiamo portar fuori h(s) e h(r), per cui

$$R_Y(t,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)E\left[X(t-s)X(t+\tau-r)\right]dsdr$$

A questo punto, per definizione di correlazione, $E\left[X(t-s)X(t+\tau-r)\right]$ non è altro che $R_X(t-s,t+\tau-r)$, per cui possiamo scrivere che

$$R_Y(t,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)R_X(t-s,t+\tau-r)dsdr$$

Ma X(t) è estratta da un processo stocastico stazionario in senso lato, per cui

$$R_X(t-s,t+\tau-r) = R_X(t+\tau-r-(t-s)) = R_X(\tau-r+s)$$

e quindi abbiamo che

$$\boxed{R_Y(t,t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)R_X(\tau-r+s)dsdr}$$

In questa espressione è evidente che è scomparsa la dipendenza dal tempo e questo era proprio quello che ci proponevamo di dimostrare.

POTENZA STATISTICA

Quando abbiamo studiato il concetto di autocorrelazione per segnali di potenza, noi abbiamo fatto un discorso di questo tipo: dato x(t) generico segnale di potenza e indicata con P_X la sua potenza, abbiamo fatto vedere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df = P_X$$

ossia che tale potenza è pari all'area sottesa dalla funzione $S_X(f)$; questa funzione è stata chiamata **spettro di potenza** di x(t) ed è stata definita mediante la relazione

$$S_X(f) = \text{Fourier}\left[R_X(t)\right]$$

come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di x(t).

Successivamente, abbiamo fatto quest'altro discorso: applicando x(t) in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante e ottenendo la corrispondente uscita y(t), abbiamo dimostrato che il suo spettro di potenza è $S_Y(f) = S_X(f)\left|H(f)\right|^2$ (dove H(f) è la funzione di trasferimento del sistema) e quindi che

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\left|H(f)\right|^2 df$$

Una cosa del tutto analoga vogliamo fare adesso nel caso in cui in ingresso al sistema tempo-invariante venga posta la variabile aleatoria X(t) estratta da un processo stocastico.

Le ipotesi di partenza sono dunque le seguenti:

- X(t) è la variabile aleatoria estratta da un processo stocastico all'istante generico t;
- il processo in ingresso è stazionario in senso lato;
- il sistema è lineare tempo-invariante;
- la funzione h(t) di risposta all'impulso del sistema è reale;

Sotto queste ipotesi, noi abbiamo prima dimostrato, partendo dalla relazione $Y(t) = X(t) * h(t)$, che la funzione di correlazione di Y(t) è data da

$$R_Y(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) R_X(\tau - r + s) ds dr$$

In precedenza, abbiamo inoltre definito **potenza statistica** di una variabile aleatoria Y(t) la quantità $R_Y(0)$ e abbiamo trovato che, se Y(t) è estratta da un processo stazionario in senso lato, sussiste la relazione

$$R_Y(0) = R_Y(t, t+\tau)\big|_{\tau=0} = E\left[\left(Y(t)\right)^2\right]$$

Mettendo insieme queste ultime due relazioni si trova evidentemente che

$$R_Y(0) = R_Y(t,t+\tau)\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) R_X(s-r) ds dr$$

Allora, vogliamo far vedere adesso che la potenza statistica di Y(t) è legata allo **spettro di potenza** $S_Y(f)$ mediante la relazione

$$\boxed{R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df}$$

Vediamo come si arriva a questa relazione.

Intanto, noi sappiamo che la funzione di trasferimento H(f) del nostro sistema è definita come la trasformata della funzione h(t): ciò significa che h(t) è esprimibile come antitrasformata di H(f) secondo la formula

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df$$

Sostituendo, nella espressione di $R_Y(0)$, h(r) come antitrasformata di H(f), noi abbiamo che

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi fr} df\right) h(s) R_X(s-r) ds dr$$

Unendo dunque i tre integrali, abbiamo che

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi fr} h(s) R_X(s-r) df ds dr$$

Scambiando adesso l'ordine di integrazione, abbiamo quanto segue:

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(s-r) e^{j2\pi fr} dr\right) ds df$$

Adesso, nell'integrale posto tra parentesi, facciamo il cambio di variabile s-r=τ: otteniamo

$$R_Y(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \int_{+\infty}^{-\infty} R_X(\tau) e^{j2\pi f(s-\tau)} d\tau ds df$$

Quel segno - può essere eliminato scambiando gli estremi di integrazione dell'integrale più interno (estremi che sono cambiati a seguito del cambio di variabile appena effettuato): quindi

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{j2\pi f(s-\tau)} d\tau ds df$$

Adesso, scomponendo in due parti il termine esponenziale e portando fuori dall'integrale interno il termine indipendente da τ, abbiamo che

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{j2\pi fs} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) ds df$$

A questo punto, l'integrale posto tra parentesi tonde non è altro che la trasformata di Fourier di $R_X(t)$, ossia quella funzione che noi abbiamo definito **spettro di potenza di X(t)** e indicato con $S_X(f)$: quindi abbiamo che

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{j2\pi fs} ds \right) df$$

L'integrale posto adesso tra parentesi, usando l'operatore complesso coniugato e la sua linearità, si può riscrivere anche nel modo seguente:

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(s) e^{-j2\pi fs} ds \right)^* df$$

La funzione h(t) è per ipotesi una funzione reale, per cui l'operatore complesso coniugato non ha alcun effetto su di essa e si può eliminare:

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S_X(f) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-j2\pi fs} ds \right)^* df$$

L'integrale che si trova ora tra parentesi non è altro che la trasformata di Fourier della funzione H(f), per cui possiamo ancora scrivere che

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) H^*(f) S_X(f) df = -\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df$$

A questo punto, noi ci ricordiamo che, per i sistemi lineari tempo-invarianti, sussiste la relazione

$$S_Y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = S_X(f) |H(f)|^2$$

per cui possiamo infine concludere che

$$\boxed{R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df}$$

Questa relazione ci dice anche che continuano a valere le corrispondenze

$$R_X(t) \xleftrightarrow{\text{Fourier}} S_X(f)$$
$$R_Y(t) \xleftrightarrow{\text{Fourier}} S_Y(f)$$

Naturalmente, avendo detto che $R_Y(0) = E\left[\left(Y(t)\right)^2\right]$ è la potenza statistica di Y(t), si capisce adesso meglio per quale motivo abbiamo a suo tempo detto che $S_Y(t)$ è una **densità di potenza** di Y(t): infatti, quella relazione indica che la potenza di Y(t) si ottiene integrando $S_Y(t)$, la quale quindi non può essere che una densità di potenza.

PROPRIETÀ DELLO SPETTRO DI POTENZA $S_X(F)$

Ci interessano due proprietà dello spettro di potenza $S_X(f)$ della variabile aleatoria X(t).

Intanto, noi abbiamo detto che, se il processo da cui si estrae X(t) è un processo stazionario in senso lato, la funzione di correlazione $R_X(\tau)$ risulta essere una funzione pari, ossia tale che $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$. Sulla base di ciò, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier, si può verificare che anche $S_X(f)$, nell'ipotesi che X(t) sia a valori reali, è una funzione pari, ossia

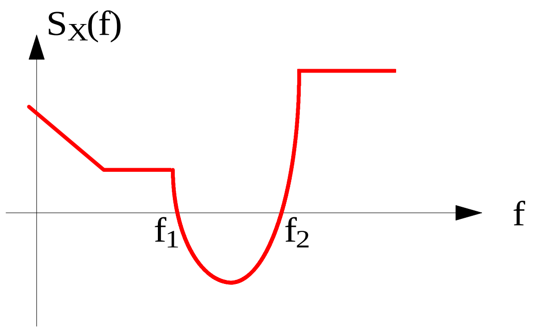
$$\boxed{S_X(f) = S_X(-f)}$$

La seconda proprietà è che lo spettro di potenza è una funzione non-negativa, ossia tale che

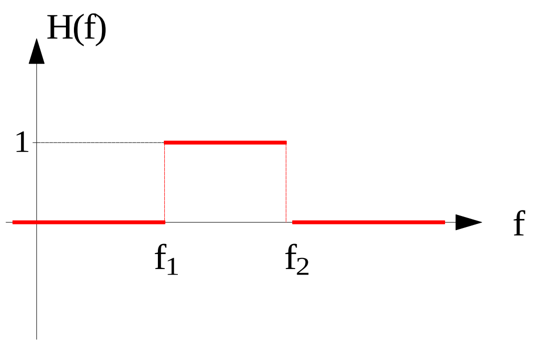
$$\boxed{S_X(f) \geq 0}$$

Vediamo di dimostrare questa seconda proprietà: facciamo una dimostrazione per assurdo, nel senso che supponiamo che esistano dei valori di f in corrispondenza dei quali $S_X(f)$ risulta negativa e facciamo vedere che ciò non è possibile in quanto porta ad una contraddizione.

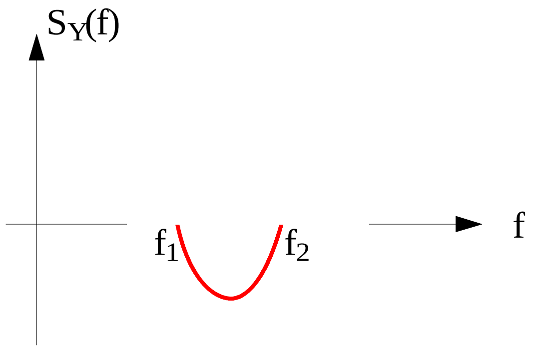
Supporre che ci siano dei valori di frequenza in corrispondenza dei quali lo spettro di potenza è negativo significa supporre che, per esempio, l'andamento qualitativo di $S_X(f)$ sia il seguente:



Supponiamo allora di porre X(t) in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante la cui funzione H(f) di trasferimento sia un rettangolo fatto nel modo seguente:



Ovviamente, quello sarà anche l'andamento di $|H(f)|^2$, il che implica che il prodotto $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$ sarà la seguente funzione:



Quindi, $S_Y(f)$ risulta essere negativa nell'intervallo $[f_1,f_2]$ e nulla altrove. Ma noi sappiamo che

$$R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df$$

ed anche che $R_Y(0) = E\left[Y^2(t)\right] \geq 0$, da cui si deduce che deve necessariamente essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df \geq 0$$

Tuttavia, l'ultimo grafico tracciato indica che quell'integrale risulta negativo, cosa che non può essere.

Non è dunque possibile che $S_X(f)$ sia negativa.

Esempio

Sia data una bobina di induttanza L e resistenza R. La tensione V(t) applicata ai suoi capi può essere schematizzata come un processo stazionario avente le seguenti caratteristiche:

- media $E\left[V(t)\right] = 0$;
- autocorrelazione $R_V(\tau) = B_2 e^{-A|\tau|}$

Vogliamo calcolare il valore medio della corrente I(t) e la densità spettrale di potenza di I(t).

La situazione è quella per cui noi abbiamo un sistema, costituito dalla bobina, al quale arriva in ingresso un processo stocastico V(t) avente le caratteristiche prima elencate. In uscita a tale sistema noi dobbiamo considerare il processo stocastico I(t), che rappresenta la corrente che fluisce nella bobina. Di tale processo dobbiamo calcolare la media. I dati che ci vengono forniti sono le caratteristiche statistiche del processo in ingresso.

Per poter trovare i risultati richiesti, dobbiamo in primo luogo determinare le caratteristiche del sistema, che è evidentemente lineare tempo-invariante: infatti, abbiamo in precedenza fatto vedere che il valor medio dell'uscita del sistema, quando l'ingresso è stazionario e il sistema stesso è lineare tempo-invariante, è dato da

$$\boxed{E[Y(t)] = E[X(t)]\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = E[X(t)]H(0)}$$

per cui abbiamo necessità di conoscere come è fatta la funzione di risposta all'impulso h(t) e/o la risposta in frequenza H(f). Tuttavia, il fatto che E[X(t)] sia nullo, ci consente subito di dire che, qualche sia h(t) e/o H(f), risulta comunque E[I(t)]=0.

La struttura di H(f) ci serve, invece, al fine di determinare la densità spettrale di potenza di I(t): infatti, abbiamo prima ricavato che tale densità è legata a quella del processo in ingresso dalla relazione $S_I(f) = S_V(f)|H(f)|^2$. Ricaviamo dunque H(f): ricordando che il sistema è caratterizzato dalla equazione differenziale

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{v(t)}{L}$$

passando al dominio della frequenza, abbiamo che

$$(j2\pi f)I(f) + \frac{R}{L}I(f) = \frac{1}{L}V(f)$$

da cui $(j2\pi Lf + R)I(f) = V(f)$.

L'ingresso è V(f), mentre l'uscita è I(f): quindi

$$H(f) = \frac{I(f)}{V(f)} = \frac{1}{j2\pi Lf + R}$$

Ci serve adesso calcolare la densità spettrale di potenza S_V(f) del processo in ingresso. La ricaviamo dall'autocorrelazione del processo in ingresso, ricordando che $S_V(f) = \text{Fourier}[R_V(t)]$. Facendo i calcoli, si trova immediatamente che

$$S_V(f) = \frac{2AB^2}{A^2 + (2\pi f)^2}$$

Al fine di applicare la relazione $S_I(f) = S_V(f)|H(f)|^2$, dobbiamo infine calcolare $|H(f)|^2$: facendo i calcoli, si trova facilmente che

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi Lf)^2 + R^2}$$

per cui possiamo concludere che

$$S_I(f) = \frac{2AB^2}{A^2 + (2\pi f)^2}\frac{1}{(2\pi Lf)^2 + R^2}$$

Adesso, supponiamo, datolo stesso sistema e lo stesso ingresso V(t), di voler calcolare il valor medio e la densità spettrale di potenza del processo Z(t)=RI^2(t), che rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule dalla bobina.

Per quanto riguarda il valor medio, possiamo intanto scrivere che

$$E[Z(t)] = E\left[RI^2(t)\right] = RE\left[I^2(t)\right]$$

Al fine di calcolare $E\left[I^2(t)\right]$, osserviamo che

$$E\left[I^2(t)\right] = E[I(t)I(t)] = R_I(0)$$

Quindi, dobbiamo calcolarci l'autocorrelazione del processo I(t) e poi valutarla in τ=0. Per effettuare questo calcolo, ci ricordiamo della relazione

$$R_I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(f)df$$

che è una evidente conseguenza del fatto che $R_I(t)$ è l'antitrasformata di Fourier di $S_I(f)$. Dato che conosciamo $S_I(f)$, dobbiamo risolvere l'integrale:

$$R_I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2AB^2}{A^2+(2\pi f)^2}\frac{1}{(2\pi Lf)^2+R^2}df = 2AB^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{A^2+(2\pi f)^2}\frac{1}{(2\pi f)^2L^2+R^2}df =$$

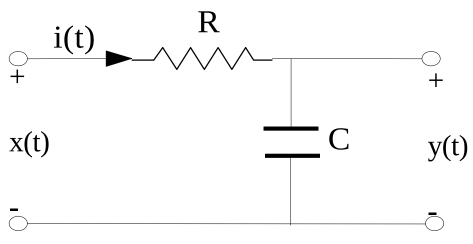
$$= \frac{2AB^2}{L^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{A^2+(2\pi f)^2}\frac{1}{(2\pi f)^2+\left(\frac{R}{L}\right)^2}df = \ldots = \frac{1}{R}\frac{2B^2}{R+AL}$$

Possiamo dunque concludere che

$$E[Z(t)] = RE\left[I^2(t)\right] = \frac{2B^2}{R+AL}$$

ESERCIZIO

Si consideri il sistema costituito dal seguente circuito:



Supponiamo che in ingresso al circuito entri una tensione X(t) che è un processo stocastico stazionario avente funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$.

Vogliamo la densità spettrale di potenza e la funzione di autocorrelazione del processo in ingresso.

Per determinare la densità spettrale di potenza del processo in uscita utilizziamo la relazione $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$. Dobbiamo dunque conoscere la densità spettrale di potenza del processo in ingresso e la funzione di trasferimento del sistema. Quest'ultima è stata calcolata in precedenza ed è

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

Per quanto riguarda $S_X(f)$, la calcoliamo semplicemente applicando la definizione, ossia considerando che essa è lo spettro di $R_X(\tau)$:

$$S_X(f) = \text{Fourier}\left[\lambda^2 + \lambda\delta(\tau)\right] = \lambda^2\delta(f) + \lambda\text{Fourier}\left[\delta(\tau)\right] = \lambda^2\delta(f) + \lambda$$

Possiamo dunque concludere che

$$S_Y(f) = S_X(f)\left|H(f)\right|^2 = \left(\lambda^2\delta(f) + \lambda\right)\left|\frac{1}{1 + j2\pi RCf}\right|^2 = \left(\lambda^2\delta(f) + \lambda\right)\frac{1}{1 + \left(2\pi RCf\right)^2}$$

Nota $S_Y(f)$, con una semplice operazione di antitrasformazione di Fourier, possiamo calcolare $R_Y(\tau)$: ciò che si trova è che

$$R_Y(\tau) = \frac{\lambda}{2RC} e^{\frac{|\tau|}{RC}} + \lambda^2$$

Ergodicità dei processi stocastici

INTRODUZIONE

Riprendiamo la definizione di processo stocastico: un processo stocastico consiste nell'associare, a ciascun campione di un certo spazio degli eventi, anziché un numero reale come accade per le variabili aleatorie, una certa funzione, che nei casi da noi considerati fino ad ora è una funzione continua del tempo (sia a valori continui sia a valori discreti). Abbiamo anche detto che, fissando un certo istante t e considerando i valori assunti in questo istante da tutte le funzioni scelte (dette realizzazioni), noi non facciamo altro che definire una variabile aleatoria X(t) (che si dice estratta dal processo all'istante t): per t generico, tale variabile aleatoria descrive in pratica le caratteristiche statistiche del processo stesso nell'istante t.

Supponiamo allora di avere un certo processo stocastico e supponiamo di considerarne una particolare realizzazione: il problema che ci poniamo è di verificare quando e, eventualmente, come è possibile risalire a tutte o parte delle caratteristiche statistiche del processo conoscendo solo tale realizzazione. Quando questo è possibile, noi diremo che il nostro processo è **ergodico**: quindi *un processo stocastico si dice **ergodico** quando è possibile risalire alle sue caratteristiche statistiche conoscendo solo una delle realizzazioni di cui il processo stesso si compone.*

Un primo risultato fondamentale, che citiamo senza dimostrare, è il seguente:

Teorema - *Condizione necessaria affinché un processo stocastico sia ergodico è che il processo sia stazionario almeno in senso lato*

Quindi, solo i processi stazionari possono essere processi ergodici. Ovviamente, trattandosi di una condizione solo necessaria, non è detto che un processo stazionario sia ergodico.

ERGODICITÀ IN MEDIA

Abbiamo prima detto che un processo è ergodico se è possibile risalire a TUTTE le sue caratteristiche statistiche (vale a dire media, varianza, correlazione e così via) a partire dalla conoscenza di 1 sola delle realizzazioni del processo stesso. E' possibile che un dato processo sia ergodico solo RELATIVAMENTE ad una sola caratteristica statistica: è possibile cioè che, a partire dall'unica realizzazione conosciuta, si possa risalire solo ad 1 caratteristica statistica del processo stesso.

Quelli di cui ci occupiamo ora sono i cosiddetti **processi ergodici in media**, ossia processi stocastici per i quali è possibile conoscere la media a partire dalla conoscenza di 1 sola realizzazione.

Consideriamo perciò una generica realizzazione del processo: trattandosi di una funzione continua del tempo, la indichiamo con $f(t,s_i)$, dove s_i indica il campione al quale la realizzazione è stata associata. Trattandosi di una funzione del tempo, è possibile calcolare il suo **valore medio temporale** o anche **media temporale**, che è così definito:

$$< f(t,s_i) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t,s_i)dt$$

Per non appesantire troppo le notazioni, possiamo anche eliminare s_i, con l'accortezza però di ricordare sempre che la realizzazione f(t) è quella associata ad un determinato campione dello spazio degli eventi di partenza. Possiamo perciò riscrivere la relazione di prima nella forma

$$< f(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)dt$$

Allora *diremo che un processo stocastico è **ergodico in media** se si verifica la seguente condizione:*

$$\boxed{P\left(< f(t) >= E[X(t)]\right) = P\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)dt = E[X(t)]\right) = 1}$$

ossia se la media temporale della realizzazione considerata coincide con la media del processo, detta **media di insieme**, con probabilità 1.

Possiamo anche perfezionare meglio quella relazione sulla base della seguente considerazione: avendo detto che un processo stocastico può essere ergodico solo a patto di essere stazionario e sapendo che, per definizione, la media di un processo stazionario è indipendente dal tempo, possiamo porre $E[X(t)] = m_X$, per cui la relazione di prima diventa

$$P\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)dt = m_X\right) = 1$$

Si tratta perciò di vedere sotto quali condizioni, oltre la stazionarietà, questa relazione risulta verificata.

Per far questo poniamo intanto

$$< f(t) >_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)dt$$

Con questa posizione, il nostro problema diventa far vedere quando si ha che

$$P\left(\lim_{T\to\infty} < f(t) >_T = m_X\right) = 1$$

E' ovvio che $< f(t) >_T$, fissato, T, non è altro che un numero reale che noi associamo alla realizzazione f(t) considerata. Dato che la realizzazione è stata associata ad un campione dello spazio degli eventi, è chiaro che noi abbiamo a che fare con una nuova variabile aleatoria: al variare della realizzazione scelta (cioè al variare dei campioni dello spazio degli eventi di partenza), quel numero assume un valore diverso, per cui noi non facciamo altro che associare numeri reali ai campioni di partenza.

Se $<f(t)>_T$ è una variabile aleatoria, noi possiamo studiarla come tale. Allora, perché sia verificata la condizione di ergodicità in media del nostro processo, devono risultare verificate le seguenti due condizioni:

$$\lim_{T\to\infty} E\left[<f(t)>_T\right] = m_X$$
$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\left[<f(t)>_T\right] = 0$$

Quindi, possiamo dire che un processo stocastico (stazionario) è ergodico in media se esiste una sua realizzazione f(t) tale da soddisfare a quelle due condizioni.

E' immediato far vedere che la stazionarietà del processo implica che la prima di quelle due relazioni sia sempre verificata, quale che sia la realizzazione: infatti, noi possiamo intanto scrivere che

$$E\left[<f(t)>_T\right] = E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt\right]$$

Per una nota proprietà della media, possiamo portar fuori il termine 1/2T, che non dipende dal tempo:

$$E\left[<f(t)>_T\right] = \frac{1}{2T} E\left[\int_{-T}^{+T} f(t)dt\right]$$

A questo punto, dato che il calcolo della media di una variabile aleatoria non è altro che il calcolo di un integrale, possiamo portarla dentro l'altro integrale, in modo da avere che

$$E\left[<f(t)>_T\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} E\left[f(t)\right]dt$$

Facciamo notare che la scrittura $E\left[f(t)\right]$ ha senso in quanto, all'interno di quell'integrale, f(t) è un numero che però è diverso a seconda della realizzazione scelta, per cui si tratta in realtà di una variabile aleatoria. Non solo. Essendo per ipotesi il processo stazionario, quella media non dipende in alcun modo dal tempo ed è pari a m_X, per cui possiamo scrivere che

$$E\left[<f(t)>_T\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} m_X dt = m_X$$

Abbiamo quindi fatto vedere che, sotto l'ipotesi di stazionarietà del processo, a prescindere dal limite per $T\to\infty$, la media temporale della realizzazione considerata, quale che essa sia, coincide con la media d'insieme del processo.

Si deduce che la condizione che noi dobbiamo verificare perché si abbia l'ergodicità in media è solo quella sulla varianza. Andiamo perciò a fare qualche ulteriore calcolo su tale condizione.

Intanto, per definizione di varianza, possiamo scrivere che

$$\mathrm{Var}\left[<f(t)>_T\right] = E\left[\left(<f(t)>_T - E\left(<f(t)>_T\right)\right)^2\right]$$

Avendo prima trovato che $E[< f(t) >_T] = m_X$, quella diventa chiaramente

$$Var[< f(t) >_T] = E\left[\left(< f(t) >_T - m_X\right)^2\right]$$

Sostituendo inoltre l'espressione di $< f(t) >_T$ abbiamo che

$$Var[< f(t) >_T] = E\left[\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt - m_X\right)^2\right]$$

La presenza del termine moltiplicativo 1/2T davanti all'integrale ci consente di portare dentro l'integrale stesso il fattore costante m_X: la relazione diventa

$$Var[< f(t) >_T] = E\left[\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(f(t) - m_X\right)dt\right)^2\right]$$

Adesso, sdoppiamo quel quadrato e, per comodità, cambiamo il nome delle variabili di integrazione:

$$Var[< f(t) >_T] = E\left[\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(f(t_1) - m_X\right)dt_1\right)\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(f(t_2) - m_X\right)dt_2\right)\right]$$

Abbiamo dunque il prodotto tra due integrali, per cui lo possiamo esprimere come un integrale doppio nel modo seguente:

$$Var[< f(t) >_T] = \frac{1}{4T^2} E\left[\int_{-T}^{+T}\int_{-T}^{+T}\left(f(t_1) - m_X\right)\left(f(t_2) - m_X\right)dt_2 dt_1\right]$$

Sempre in base al significato di media, possiamo portare l'operatore E dentro l'integrale e scrivere che

$$Var[< f(t) >_T] = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{+T}\int_{-T}^{+T} E\left[\left(f(t_1) - m_X\right)\left(f(t_2) - m_X\right)\right]dt_2 dt_1$$

A questo punto, posto $C_X(t_1, t_2) = E\left[\left(f(t_1) - m_X\right)\left(f(t_2) - m_X\right)\right]$, quella relazione diventa

$$Var[< f(t) >_T] = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{+T}\int_{-T}^{+T} C_X(t_1, t_2)dt_2 dt_1$$

Ma, essendo per ipotesi il processo stazionario, sappiamo che $C_X(t_1,t_2)=C_X(t_1-t_2)$, per cui abbiamo che

$$\mathrm{Var}\left[<f(t)>_T\right]=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{+T}\int_{-T}^{+T}C_X(t_1-t_2)dt_2dt_1$$

E' possibile far vedere, sia in modo rigoroso sia in modo più intuitivo (mediante considerazioni sugli integrali doppi), che quell'integrale doppio si riduce ad un integrale semplice nel modo seguente:

$$\mathrm{Var}\left[<f(t)>_T\right]=\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{+2T}C_X(u)\left(2T-|u|\right)du$$

Mettendo in evidenza il termine 2T all'interno dell'integrale e portandolo fuori, otteniamo la seguente relazione conclusiva:

$$\mathrm{Var}\left[<f(t)>_T\right]=\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T}C_X(u)\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du$$

Possiamo dunque concludere che *un processo stocastico stazionario risulta ergodico in media se è verificata la seguente relazione:*

$$\boxed{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T}C_X(u)\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=0}$$

Esempio: processo telegrafico casuale

Ricordiamo che un **processo telegrafico casuale** è un processo stocastico in cui ogni realizzazione è una funzione continua del tempo e può assumere solo due diversi valori (o stati), che sono +1 e -1. Il passaggio da un valore all'altro (o da uno stato all'altro) avviene, in qualsiasi realizzazione, solo al verificarsi di un evento di Poisson.

Sulla base di ciò, abbiamo trovato, per tale processo, le seguenti caratteristiche statistiche: intanto, abbiamo trovato che la variabile aleatoria estratta dal processo al generico istante t è definita come

$$X(t)=\begin{cases}+1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2}\\ -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2}\end{cases}$$

Successivamente abbiamo trovato anche che

$$E\left[X(t)\right]=+1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$

Queste due relazioni ci hanno permesso inoltre di dire che il processo è stazionario in senso lato e ci hanno anche permesso di dimostrare che è anche stazionario in senso stretto.

Il fatto che il processo sia stazionario ci dice che questo processo può essere ergodico in media. Vediamo allora se lo è effettivamente.

La condizione perché ci sia ergodicità in media è che

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} C_X(u)\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=0$$

Abbiamo prima detto che la correlazione di questo processo è $R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$. Al fine di calcolare quell'integrale, possiamo riscrivere questa relazione nel modo seguente:

$$R_X(\tau)=R_X(t,t+\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$$

Andando allora nell'integrale di prima, possiamo dire che il processo risulta ergodico in media se è verificata la relazione

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=0$$

Valutiamo quell'integrale: intanto, essendo la funzione integranda una funzione pari, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=\frac{1}{T}\int_{0}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du$$

Dato che stiamo integrando tra [0,2T], u è sicuramente positivo, per cui possiamo eliminare i valori assoluti:

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=\frac{1}{T}\int_{0}^{+2T} e^{-2\lambda u}\left(1-\frac{u}{2T}\right)du$$

Sdoppiamo quell'integrale in due parti:

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=\frac{1}{T}\int_{0}^{+2T} e^{-2\lambda u}du-\frac{1}{2T^2}\int_{0}^{+2T} ue^{-2\lambda u}du$$

Il primo integrale è immediato:

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du=\frac{1}{-2\lambda T}\left[e^{-2\lambda u}\right]_0^{2T}-\frac{1}{2T^2}\int_{0}^{+2T} ue^{-2\lambda u}du=\frac{1}{-2\lambda T}\left[e^{-4\lambda T}-1\right]-\frac{1}{2T^2}\int_{0}^{+2T} ue^{-2\lambda u}du=$$
$$=\frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T}-\frac{1}{2T^2}\int_{0}^{+2T} ue^{-2\lambda u}du$$

Il secondo integrale si può invece risolvere per parti:

$$\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du = \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} - \frac{1}{2T^2}\int_0^{+2T} ue^{-2\lambda u}du = \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} - \frac{1}{2T^2(-2\lambda)}\int_0^{+2T} uD\left(e^{-2\lambda u}\right)du =$$

$$= \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{1}{4\lambda T^2}\left[\left[ue^{-2\lambda u}\right]_0^{2T} - \int_0^{+2T} e^{-2\lambda u}du\right] = \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{1}{4\lambda T^2}\left[2Te^{-4\lambda T} - \int_0^{+2T} e^{-2\lambda u}du\right] =$$

$$= \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{1}{4\lambda T^2}\left[2Te^{-4\lambda T} - \int_0^{+2T} e^{-2\lambda u}du\right] = \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{1}{4\lambda T}\left[2e^{-4\lambda T} - \frac{1}{T}\int_0^{+2T} e^{-2\lambda u}du\right]$$

$$= \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{1}{4\lambda T}\left[2e^{-4\lambda T} - \frac{1}{T}\int_0^{+2T} e^{-2\lambda u}du\right] = \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{1}{4\lambda T}\left[2e^{-4\lambda T} - \frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T}\right] =$$

$$= \left(1-\frac{1}{4\lambda T}\right)\frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{e^{-4\lambda T}}{2\lambda T}$$

Andiamo adesso a calcolare il limite per $T\to\infty$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} e^{-2\lambda|u|}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)du = \lim_{T\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4\lambda T}\right)\frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T} + \frac{e^{-4\lambda T}}{2\lambda T}\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4\lambda T}\right)\frac{1-e^{-4\lambda T}}{2\lambda T}\right] + \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-4\lambda T}}{2\lambda T}\right] = 0$$

Abbiamo dunque trovato che il processo telegrafico casuale è un processo ergodico in media, ossia una processo tale che, presa una qualsiasi sua realizzazione $f(t,s_i)$, la sua media temporale

$$< f(t,s_i) >= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t,s_i)dt$$

coincide con la media d'insieme del processo con probabilità 1.

Ergodicità in correlazione

Così come è stata definita l'ergodicità in media, è possibile definire l'ergodicità in correlazione. Vediamo come.

Consideriamo ancora una volta una generica realizzazione $f(t,s_i)$ del processo stocastico considerato: si definisce **autocorrelazione temporale** di questa realizzazione la funzione

$$< f(t,s_i)f(t+\tau,s_i) >= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t,s_i)f(t+\tau,s_i)dt$$

Si tratta evidentemente di una funzione della variabile τ. Anche in questo caso, per non appesantire troppo le notazioni, possiamo eliminare s_i, per cui la definizione diventa

$$< f(t)f(t+\tau) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau)dt$$

Sappiamo invece che la correlazione del nostro processo stocastico, che possiamo chiamare autocorrelazione di insieme, è definita nel modo seguente:

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

(dove X(t) è la generica variabile aleatoria estratta dal processo).

Allora, un processo stocastico (stazionario) si dirà ergodico in correlazione quando è verificata la seguente relazione:

$$\boxed{P(< f(t)f(t+\tau) >= R_X(\tau)) = P\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau)dt = R_X(\tau)\right) = 1}$$

Poniamo adesso

$$< f(t)f(t+\tau) >_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau)dt$$

Sulla base di questa posizione, la condizione di ergodicità in media può essere riscritta sinteticamente nel modo seguente:

$$P(< f(t)f(t+\tau) >_T = R_X(\tau)) = 1$$

Anche in questo caso, così come abbiamo visto prima per $< f(t) >_T$, è facile accorgersi che $< f(t)f(t+\tau) >_T$, fissati T e τ, non è altro che una variabile aleatoria:

Se $< f(t)f(t+\tau) >_T$ è una variabile aleatoria, noi possiamo studiarla come tale. Allora, perché sia verificata la condizione di ergodicità in correlazione del nostro processo, devono risultare verificate le seguenti due condizioni:

$$\lim_{T\to\infty} E[< f(t)f(t+\tau) >_T] = R_X(\tau)$$
$$\lim_{T\to\infty} Var[< f(t)f(t+\tau) >_T] = 0$$

Possiamo perciò dire che un processo stocastico (stazionario) è ergodico in correlazione se esiste almeno una sua realizzazione f(t) tale da soddisfare a quelle due condizioni.

<u>In realtà, così come abbiamo visto per l'ergodicità in media, la prima condizione è sempre verificata grazie alla ipotesi di stazionarietà</u>: infatti, si ha che

$$E[< f(t)f(t+\tau) >_T] = E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau)dt\right] = \frac{1}{2T} E\left[\int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau)dt\right] =$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} E[f(t)f(t+\tau)]dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} R_X(\tau)dt = R_X(\tau)$$

Quindi, possiamo concludere che *un processo stocastico (stazionario) è ergodico in correlazione se è verificata la condizione*

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\left[< f(t)f(t+\tau) >_T\right] = 0}$$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione

$$g(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

Abbiamo già avuto modo di dire che, fissato l'istante t, questa funzione diventa una variabile aleatoria nel momento in cui è una variabile aleatoria il termine θ. Viceversa, una volta fissato il valore numerico di θ, quella è una normale funzione del tempo t.

Supponiamo comunque che θ sia una variabile aleatoria uniformemente distribuita sull'intervallo [0,2π]: questo, come sappiamo, significa che la sua funzione densità è

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\pi} \qquad x \in [0,2\pi]$$

Con θ variabile aleatoria, g(t) diventa anche funzione di θ; anzi, diventa una delle realizzazioni del processo stocastico che agli infiniti valori di θ contenuti nell'intervallo [0,2π] associa funzioni del tipo

$$g(t,\theta) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

Le caratteristiche statistiche di questo processo sono state già studiate in precedenza: abbiamo trovato che la media del processo, ossia la media d'insieme, è

$$E[X(t)] = E[\cos(2\pi f_0 t + \theta)] = 0$$

e che la correlazione di insieme è

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Queste due relazioni ci consentono subito di affermare che il processo considerato è stazionario in senso lato: infatti, perché ciò sia vero, la media deve risultare indipendente dal tempo e la correlazione deve risultare dipendente solo dalla differenza dei tempi e non dai tempi in assoluto.

Se il processo è stazionario, è possibile che sia ergodico. Andiamo allora a vedere se è ergodico in media e/o ergodico in correlazione. Per fare questa verifica, dobbiamo intanto prendere una generica realizzazione del processo, per cui prendiamo

$$g_1(t) = g(t,\theta_1) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)$$

Adesso, perché il processo sia ergodico in media, deve risultare

$$\lim_{T\to\infty} E\left[< g_1(t) >_T\right] = m_X$$

$$\lim_{T\to\infty} Var\left[< g_1(t) >_T\right] = 0$$

In verità, sappiamo già che la prima condizione è verificata in quanto si tratta di un processo stazionario; andiamo tuttavia a verificare: il valor medio temporale della realizzazione è

$$< g_1(t) >_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_1(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)dt = \frac{A}{T}\int_{0}^{T}\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)dt =$$

$$= \frac{A}{2\pi f_0 T}\int_0^T 2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1)dt = \frac{A}{2\pi f_0 T}\left[\sin(2\pi f_0 t + \theta_1)\right]_0^T = \frac{A}{2\pi f_0 T}\left[\sin(2\pi f_0 T + \theta_1) - \sin(\theta_1)\right]$$

Calcolandone il limite per $T\to\infty$, il termine tra parentesi rimane costante (in quanto il seno è una funzione limitata), mentre la frazione tende a zero, per cui

$$\lim_{T\to\infty} E\left[< g_1(t) >_T\right] = 0$$

Dato che la media di insieme del processo è =0, deduciamo che la prima condizione è verificata.

Per verificare la seconda condizione abbiamo tre modi distinti: il primo è quello di calcolare analiticamente la varianza di $g_1(t)$ e di andare a verificare se

$$\lim_{T\to\infty} Var\left[< g_1(t) >_T\right] = 0$$

Il secondo modo è quello applicare direttamente la relazione trovata a suo tempo riguardo questa condizione: dobbiamo cioè verificare che

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{+2T} C_X(u)\left(1 - \frac{|u|}{2T}\right)du = 0$$

Entrambi questi metodi comportano dei calcoli, ma esiste una terza via che comporta solo dei ragionamenti logici: infatti, abbiamo prima trovato, calcolando la media temporale della realizzazione, che essa è pari a 0; soprattutto, abbiamo trovato che essa NON dipende dal valore θ_1 scelto per θ: questo significa che il valor medio temporale della realizzazione è 0 a prescindere da θ, ossia anche che la variabile aleatoria

$$< g(t) >_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)dt$$

assume sempre lo stesso valore. Una variabile aleatoria che assume sempre lo stesso valore è certamente una variabile aleatoria a varianza nulla. Quindi è senz'altro verificata la condizione

$$\lim_{T\to\infty} Var\left[< g_1(t) >_T\right] = 0$$

Possiamo dunque concludere che il nostro processo è ergodico in media.

Andiamo adesso a verificare se è anche ergodico in correlazione: ciò che deve verificarsi sono le due condizioni

$$\lim_{T\to\infty} E\left[< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T\right] = R_X(\tau)$$

$$\lim_{T\to\infty} Var\left[< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T\right] = 0$$

Anche in questo caso, il fatto che il processo sia stazionario ci garantisce che la prima relazione sia verificata. Andiamo comunque a verificare.

Dobbiamo per prima cosa calcolarci la correlazione temporale della realizzazione

$$g_1(t) = g(t,\theta_1) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)$$

Usando la definizione abbiamo intanto che

$$< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} g_1(t)g_1(t+\tau)dt = \frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\theta_1)dt$$

Usando le formule di prostaferesi e in particolare

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

abbiamo che

$$< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T = \frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{+T}\frac{1}{2}\left[\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\theta_1)\cos(2\pi f_0\tau)\right]dt =$$

$$= \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{+T}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\theta_1)dt + \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{+T}\cos(2\pi f_0\tau)dt$$

Adesso, l'argomento del secondo integrale è una costante indipendente dal tempo, per cui possiamo risolvere subito l'integrale:

$$< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T = \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{+T}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\theta_1)dt + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

L'altro integrale è quello di un coseno sfasato: così come abbiamo fatto vedere nella dimostrazione di prima, quell'integrale assume un valore finito che rimane tale anche calcolando il limite per $T\to\infty$; dato però che c'è il fattore moltiplicativo con T al denominatore, il limite di quel primo termine tende a 0, per cui concludiamo che

$$\lim_{T\to\infty} < g_1(t)g_1(t+\tau) >_T = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

Abbiamo dunque trovato, come ci aspettavamo, che effettivamente la correlazione temporale della realizzazione coincide con la correlazione di insieme del processo.

Resta ora da far vedere che $\lim_{T\to\infty} Var\left[< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T\right] = 0$.

Anche questa volta, anziché applicare le formule analitiche, possiamo fare solo considerazioni logiche: abbiamo infatti appena trovato che la quantità $< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T$ non dipende in alcun modo dal valore scelto per θ; ma $< g_1(t)g_1(t+\tau) >_T$, per θ variabile aleatoria, è a sua volta una variabile aleatoria: il fatto che assume un valore costante ci dice che essa ha senz'altro varianza nulla, il che è proprio quello che noi vogliamo.

Possiamo perciò concludere che il nostro processo è ergodico anche in correlazione.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1