

Appunti di Teoria dei segnali

Capitolo 10

Quantizzazione e campionamento

Quantizzazione di un segnale aleatorio	1
Introduzione	1
Errore di quantizzazione.....	3
Rapporto segnale-rumore.....	3
<i>Caso particolare: $X(t)$ distribuita uniformemente</i>	5
Campionamento di un processo stocastico	8
Introduzione: campionamento della funzione di autocorrelazione.....	8
Campionamento di $X(t)$: uguaglianza in media quadratica.....	10

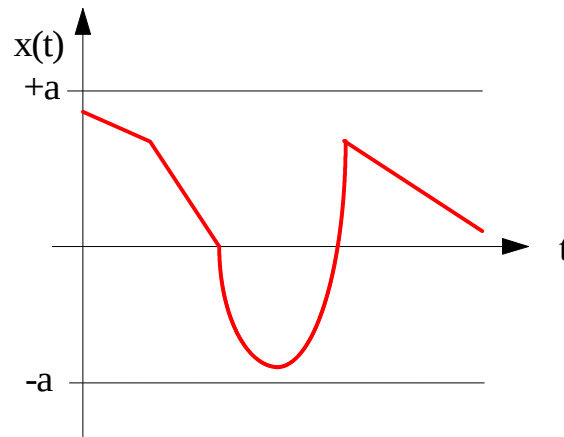
Quantizzazione di un segnale aleatorio

INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un generico **segnale $s(t)$ tempo-continuo** e di volerlo trasmettere da una sorgente ad un ricevitore, tramite un apposito mezzo trasmissivo. La prima cosa da fare è quella di effettuare il **campionamento** di tale segnale: questo significa, come sappiamo, prendere i valori che il segnale assume in istanti di tempo $t=nT$ multipli di una quantità fissa T (*periodo di campionamento*). Otteniamo così infiniti (a livello teorico) **campioni $s(nT)$** del segnale: ciascuno di questi campioni rappresenta, per l'istante in cui è stato misurato, il valore che $x(t)$ assume in quell'istante.

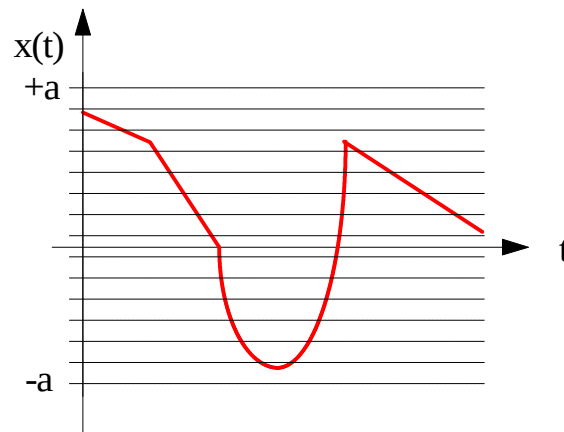
Il passo successivo consiste nell'inviare i campioni del nostro segnale dalla sorgente al ricevitore. Un metodo possibile, usato nei sistemi di **trasmissione digitale**, consiste nell'inviare, per ciascun campione, una corrispondente **sequenza di bit**. Approfondiamo questo concetto.

Facciamo intanto l'ipotesi che i valori assunti dal segnale siano compresi in un intervallo che chiamiamo **range** e facciamo anche l'ipotesi che tale intervallo sia simmetrico rispetto all'asse delle ascisse, per cui sia del tipo $[-a, +a]$:



Possiamo pensare di associare a ciascun valore numerico un certo numero di bit: ad ogni istante, il segnale assume un certo valore e a questo valore noi associamo, secondo un opportuno criterio, un certo numero di bit che vengono inviati dalla sorgente al ricevitore; quest'ultimo, in base alla sequenza di bit che riceve, deve dedurre il valore numerico assunto dal segnale e quindi ricostruire il segnale istante per istante. C'è allora da capire come realizzare la **corrispondenza biunivoca** tra i valori assunti dal segnale e le stringhe di bit da inviare.

Supponiamo per esempio di voler associare a ciascun valore del segnale una **stringa di n bit**; per realizzare la corrispondenza biunivoca di cui sopra, possiamo procedere nel modo seguente: dividiamo il range del segnale in 2^n intervallini di uguale ampiezza; dato che, con n bit, è possibile esprimere 2^n stringhe diverse, possiamo associare a ciascun intervallino una diversa sequenza di bit. Allora, ad ogni istante, invieremo al ricevitore la sequenza di bit corrispondente all'intervallino in cui cade il valore assunto dal segnale in quell'istante; il ricevitore riceve tale sequenza di bit, va a vedere a quale intervallino corrisponde e considera, come ricostruzione del valore del segnale, il valore medio dell'intervallino.



Questo metodo prende il nome di **metodo della quantizzazione**: in particolare, nell'ipotesi per cui l'ampiezza degli intervallini in cui è stato diviso il range sia la stessa, si parla di **quantizzazione uniforme**.

ERRORE DI QUANTIZZAZIONE

E' evidente che il metodo della quantizzazione comporta che, ad ogni istante, venga commesso un certo *errore di approssimazione*: infatti, il ricevitore non è in grado di conoscere il valore reale assunto dal segnale, ma considera il valor medio dell'intervallo in cui tale valore reale cade. E' subito ovvio che *questo errore sarà tanto minore quanto maggiore è il numero di intervallini in cui viene diviso il range, ossia quanto maggiore è il numero di bit utilizzati*. Allo stesso tempo, però, sappiamo che dal numero di bit dipende proporzionalmente il **tempo di trasmissione**, nel senso che all'aumentare del numero di bit aumenta il tempo necessario per la loro trasmissione.

Un caso particolarmente evidente per descrivere l'effetto dell'approssimazione di quantizzazione è il seguente: supponiamo che, in due istanti successivi, il segnale $s(t)$ originario assuma due valori diversi che però cadono nello stesso intervallo; è ovvio che il ricevitore riceverà, ad entrambi gli istanti, la stessa sequenza di bit e quindi assocerà due valori numerici uguali. Quindi, *il fatto di approssimare ciascun valore vero con il valor medio dell'intervallo in cui cade ha come estrema conseguenza quella di rendere uguali valori che invece non lo sono, pur essendo molto vicini*.

In generale, se noi indichiamo con $x(nT)$ il generico campione del segnale $x(t)$ e con $x_q(t)$ il valore che viene considerato dal ricevitore (cioè il valore medio dell'intervallo in cui cade $x(nT)$), l'errore che si commette su quel campione è

$$e(nT) = x(nT) - x_q(nT)$$

A questo errore si dà perciò il nome di **errore di quantizzazione**.

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

Si definisce **rumore** tutto ciò che si sovrappone al segnale utile ma non è segnale utile. Anche se il rumore sarà studiato più avanti, è intuitivo accorgersi che il rumore è un disturbo al segnale utile, che fornisce, di tale segnale, valori diversi rispetto a quelli reali.

Si definisce **rapporto segnale-rumore** il rapporto che c'è tra la potenza S_x associata al segnale originario $s(t)$ e la potenza N_q associata al rumore:

$$\text{rapporto segnale - rumore} : \frac{S_x}{N_q}$$

Si intuisce che *lo scopo da prefiggersi, per avere una efficiente trasmissione dei segnali, è quello di ottenere un rapporto segnale-rumore quanto più alto possibile*.

Per studiare a fondo questo rapporto, possiamo farlo solo da un punto di vista statistico, sia perché il rumore non è mai qualcosa di deterministico sia perché i nostri ragionamenti non possono essere fatti per un segnale $s(t)$ specifico (deterministico), ma per un segnale assolutamente generico.

Supponiamo perciò che il segnale $s(t)$ da trasmettere sia un processo stocastico. In particolare, supponiamo che tale processo sia stazionario in senso lato, il che, come sappiamo, ci dice che tutte le variabili estratte hanno le stesse identiche caratteristiche statistiche. Indichiamo la generica di esse con $X(t)$: allora, il rapporto segnale-rumore sarà in questo caso dato da

$$\frac{S_x}{N_q} = \frac{E[X^2(t)]}{E[(X - X_q)^2]}$$

dove ricordiamo che $E[X^2(t)]$ è la **potenza statistica** di $X(t)$. Ci proponiamo di studiare meglio quanto vale questo rapporto segnale-rumore.

Per prima cosa, indichiamo con Δ l'ampiezza (costante) degli intervallini in cui abbiamo diviso il range del segnale e con Q il numero di intervallini (che sappiamo essere pari a 2^n se n sono i bit usati per la trasmissione). E' chiaro che i parametri Q , a (= metà del range di ingresso) e D sono legati dalla relazione

$$\Delta = \frac{2a}{Q}$$

Adesso, consideriamo il generico intervallino; indichiamo con x_i il suo estremo inferiore e con m_i il suo valore medio: questi valori soddisfano perciò alle relazioni

$$\begin{aligned} x_i &= -a + i\Delta & i &= 0, 1, 2, \dots, a \\ m_i &= \frac{x_{i-1} + x_i}{2} & i &= 1, 2, \dots, a \end{aligned}$$

Considerando la definizione di **momento del 2° ordine** di una variabile aleatoria, possiamo scrivere il rapporto segnale-rumore nella forma seguente:

$$\frac{S_x}{N_q} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx}{E[(X - X_q)^2]}$$

Per quanto riguarda il denominatore, possiamo applicare il noto teorema per il *calcolo della media di una funzione di una variabile aleatoria*: in base a questo teorema, se X è una variabile aleatoria con densità $f_X(x)$ e se $Y=g(X)$ è un'altra variabile aleatoria, funzione di X , la media di Y si può calcolare mediante la relazione

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Nel nostro caso, la variabile aleatoria della quale conosciamo la densità è $X(t)$, mentre la funzione $g(X)$ è $(X - X_q)^2$: applicando dunque il teorema, possiamo scrivere che

$$E[(X - X_q)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_q)^2 f_X(x) dx$$

per cui il rapporto segnale-rumore assume l'espressione

$$\frac{S_x}{N_q} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_q)^2 f_x(x) dx}$$

Dato che si suppone che il range di $X(t)$ (e quindi anche dell'errore) sia $[-a, +a]$, possiamo anche limitare l'intervallo di integrazione, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{\frac{S_x}{N_q} = \frac{\int_{-a}^{+a} x^2 f_x(x) dx}{\int_{-a}^{+a} (x - x_q)^2 f_x(x) dx}}$$

Su questa relazione non possiamo più fare nessun calcolo, a meno di non conoscere l'espressione di $f_x(x)$.

Caso particolare: $X(t)$ distribuita uniformemente

Supponiamo che la nostra variabile aleatoria $X(t)$ sia uniformemente distribuita nell'intervallo $[-a, +a]$: dal punto di vista analitico, questo significa che la densità di probabilità di $X(t)$ è

$$f_x(x) = \frac{1}{2a} \quad x \in [-a, +a]$$

Da un punto di vista concreto, invece, questa ipotesi equivale a dire che tutti i valori compresi nel range considerato hanno la stessa probabilità di essere assunti dal segnale considerato. In altre parole, il segnale che stiamo considerando assume **valori equiprobabili**.

Andando a sostituire quella espressione di $f_x(x)$ nell'espressione generale del rapporto segnale-rumore, otteniamo evidentemente che

$$\frac{S_x}{N_q} = \frac{\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} x^2 dx}{\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} (x - x_q)^2 dx}$$

L'integrale al numeratore è immediato:

$$\frac{S_x}{N_q} = \frac{\frac{a^2}{3}}{\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} (x - x_q)^2 dx}$$

Vediamo perciò quanto vale l'integrale a denominatore: qualche problema viene dalla presenza del termine x_q , che è il valor medio associato a ciascun campione; in quella espressione x_q è del tutto

generico e non si può ritenere costante; viceversa, per semplificarci i calcoli, possiamo pensare di spezzare quell'integrale nel modo seguente:

$$N_q = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} (x - x_q)^2 dx = \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^a \int_{-x_{i-1}}^{+x_i} (x - m_i)^2 dx$$

E' ovvio che abbiamo sostituito ad x_q il generico m_i , in quanto per ogni intervallino abbiamo un preciso valore medio. I termini x_i ed m_i soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} x_i &= -a + i\Delta & i &= 0, 1, 2, \dots, a \\ m_i &= \frac{x_{i-1} + x_i}{2} & i &= 1, 2, \dots, a \end{aligned}$$

Da queste si ricava che

$$m_i = \frac{(-a + (i-1)\Delta) + (-a + i\Delta)}{2} = \frac{2a + 2i\Delta - \Delta}{2} = a + i\Delta - \frac{\Delta}{2}$$

per cui possiamo scrivere che

$$N_q = \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^a \int_{-a+(i-1)\Delta}^{-a+i\Delta} \left(x + a - i\Delta + \frac{\Delta}{2} \right)^2 dx$$

Quello ottenuto è un integrale immediato:

$$N_q = \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^a \frac{1}{3} \left[\left(x + a - i\Delta + \frac{\Delta}{2} \right)^3 \right]_{-a+(i-1)\Delta}^{-a+i\Delta} = \frac{1}{6a} \sum_{i=1}^a \left[\left(\frac{\Delta}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\Delta}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{6a} \sum_{i=1}^a \frac{\Delta^3}{4} = \frac{1}{6a} \frac{Q\Delta^3}{4}$$

A questo punto, ricordando che $\Delta = \frac{2a}{Q}$, possiamo concludere che

$$N_q = \frac{1}{3} \frac{Q\Delta^3}{4} \left(\frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{3} \frac{Q\Delta^3}{4} \left(\frac{1}{\Delta Q} \right) = \frac{\Delta^2}{12}$$

Tornando adesso nell'espressione del rapporto segnale-rumore, abbiamo che

$$\frac{S_x}{N_q} = \frac{\frac{a^2}{3}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{Q^2 \Delta^2}{\Delta^2} = Q^2$$

Quindi, abbiamo concluso che, *nel caso di $X(t)$ uniformemente distribuita nel suo range, il rapporto segnale/rumore aumenta all'aumentare di*

Q , ossia all'aumentare del numero di bit che noi utilizziamo per la trasmissione.

Infatti, essendo $Q=2^n$, il rapporto segnale-rumore risulta essere

$$\frac{S_x}{N_q} = 2^{2n}$$

Volendo esprimere questo rapporto in termini di dB, abbiamo quanto segue:

$$\left(\frac{S_x}{N_q} \right)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{S_x}{N_q} = 10 \log_{10} 2^{2n} = 20n \cdot \log_{10} 2$$

Dato che $20 \log_{10} 2 \cong 6.03$, possiamo concludere che il rapporto segnale rumore nel caso considerato è

$$\frac{S_x}{N_q} \cong 6.03n(\text{dB})$$

Questa formula dice in pratica che, per ogni aumento unitario di n , ossia per ogni bit in più che noi usiamo per la trasmissione, il rapporto segnale-rumore aumenta di 6 dB, che è un aumento abbastanza consistente.

Campionamento di un processo stocastico

INTRODUZIONE: CAMPIONAMENTO DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

Supponiamo di avere un **processo stocastico** che sia almeno **stazionario in senso lato**; supponiamo anche che $X(t)$ sia la variabile aleatoria estratta dal processo all'istante generico t e che $R_X(\tau)$ sia la sua **funzione di autocorrelazione**. L'ipotesi di *stazionarietà in senso lato* significa che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_X & \forall t \\ R_X(t, t + \tau) = R_X(\tau) & \forall t, t + \tau \end{cases}$$

Sappiamo che, trasformando secondo Fourier la funzione $R_X(\tau)$, si ottiene uno spettro $S_X(f)$ che abbiamo definito **spettro di potenza** o **densità spettrale di potenza** del processo: questo nome deriva dal fatto che la potenza statistica della variabile aleatoria $X(t)$ (che rappresenta il processo) è legata alla funzione $S_X(f)$ dalla relazione

$$P_X = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

Ora, una volta fissato il nostro processo, la funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$ è una funzione determinata e, come tale, può essere sottoposta a campionamento. Non solo. Se questa funzione, e in particolare il suo spettro, rispetta le condizioni del campionamento, possiamo senz'altro applicare il *teorema di campionamento*, ossia possiamo ricostruire $R_X(\tau)$ a partire semplicemente dai suoi campioni.

Quali sono le condizioni sotto le quali possiamo applicare il teorema di campionamento? Sappiamo che le condizioni sono fondamentalmente due: la prima è che $R_X(\tau)$ sia a spettro limitato, ossia che $S_X(f)$ sia nulla al di fuori di un certo intervallo $[-f_X, +f_X]$; la seconda è che la frequenza di campionamento f_s soddisfi alla **condizione di Nyquist** $f_s \geq 2f_X$.

Sotto queste condizioni, noti i campioni della funzione di autocorrelazione, possiamo ricostruire la funzione stessa mediante la nota formula di ricostruzione:

$$R_X(\tau) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s) \text{sinc}(2B(\tau - nT_s))$$

Ovviamente, in questa formula abbiamo indicato con T_s il periodo di campionamento (che è il reciproco della frequenza di campionamento), e con B la *frequenza di taglio* del filtro, ossia la banda del rettangolo che ci serve per isolare la replica di $S_X(f)$ centrata nell'origine.

Ripetiamo velocemente come si arriva alla **formula di ricostruzione**: innanzitutto, a partire dai campioni della funzione di autocorrelazione, si costruisce il *segnale campionato* di tale funzione, definito come

$$R_{X,C}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Fatto questo, si calcola la trasformata di Fourier di tale segnale, che risulta essere

$$S_{X,C}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Questa trasformata di Fourier è una successione di infinite repliche di $S_X(f)$, a meno del fattore $1/T_s$, traslate rispetto all'origine di una quantità pari ad un multiplo della frequenza di campionamento. Moltiplicandola allora per un rettangolo di altezza T_s e di base $2B$ tale che

$$B \in [f_X, f_s - f_X]$$

e andando ad antitrasformare, si ottiene il segnale ricostruito secondo la formula

$$R_X(\tau) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s) \text{sinc}(2B(\tau - nT_s))$$

Ai fini dei discorsi che intendiamo fare tra poco, è utile fare qualche manipolazione algebrica sulla formula di ricostruzione appena citata. La prima cosa che facciamo è la seguente: data la funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$, immaginiamo di traslarla verso destra (cioè in ritardo) di una quantità a , ottenendo la funzione $R_X(\tau - a)$; la trasformata di Fourier di questa funzione, applicando la *proprietà di traslazione del tempo*, sarà allora $S_X(f)e^{-j2\pi fa}$, dove l'esponentiale tiene appunto conto della traslazione (l'esponente è negativo perché la traslazione è in ritardo). Campioniamo adesso la funzione $R_X(\tau - a)$ e effettuiamo la ricostruzione mediante i suoi campioni: facendo i conti, si trova che

$$R_X(\tau - a) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s - a) \text{sinc}(2B(\tau - nT_s)) \quad (\mathbf{b})$$

ossia, in pratica, che per ricostruire $R_X(\tau)$ traslata di a , sono sufficienti i campioni di $R_X(\tau)$ anch'essi traslati di a .

La seconda manipolazione che facciamo consiste semplicemente nel porre, nella formula appena citata, $\tau_1 = \tau - a$: si ottiene che

$$R_X(\tau_1) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s - a) \text{sinc}(2B(\tau_1 + a - nT_s)) \quad (\mathbf{c})$$

Queste ultime due formule, contrassegnate con (b) e con (c), ci saranno utili tra poco.

CAMPIONAMENTO DI $X(t)$: UGUAGLIANZA IN MEDIA QUADRATICA

Nel paragrafo precedente, ci siamo occupati del campionamento della funzione di autocorrelazione del nostro processo stocastico. Vogliamo invece qui occuparci del **campionamento di un processo stocastico**, ossia, in definitiva, del campionamento e della ricostruzione della generica **realizzazione $X(t)$** di tale processo stocastico.

Supponiamo perciò di avere questa realizzazione e di effettuarne il campionamento. In base alla formula di ricostruzione, poniamo

$$X_r(t) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))$$

$X(t)$ è un segnale aleatorio e non un segnale determinato: questa differenza fondamentale implica che, per tale segnale, non valga l'uguaglianza $X(t) = X_r(t)$, ossia che il segnale ricostruito non coincida con quello trasmesso.

Al contrario, invece, noi intendiamo far vedere che tra $X(t)$ e $X_r(t)$ vale la cosiddetta **uguaglianza in media quadratica**: tale uguaglianza si indica con la simbologia

$$X(t) \stackrel{\text{MS}}{=} X_r(t)$$

e significa che vale la relazione

$$\boxed{E[(X(t) - X_r(t))^2] = 0}$$

Dimostriamo che sussiste questa relazione.

Intanto, possiamo scrivere il primo membro in modo per noi più comodo e precisamente il seguente:

$$\begin{aligned} E[(X(t) - X_r(t))^2] &= E[(X(t) - X_r(t))(X(t) - X_r(t))] = E[(X(t) - X_r(t))X(t) - (X(t) - X_r(t))X_r(t)] = \\ &= E[(X(t) - X_r(t))X(t)] - E[(X(t) - X_r(t))X_r(t)] \end{aligned}$$

Dimostrare che $E[(X(t) - X_r(t))^2] = 0$ equivale dunque a dimostrare che

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = E[(X(t) - X_r(t))X_r(t)]$$

Questa relazione risulta verificata quando entrambe quelle medie sono =0, per cui è questo che vogliamo far vedere.

Cominciamo in particolare a far vedere che $E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = 0$.

Possiamo intanto scrivere che

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = E[X^2(t) - X(t)X_r(t)]$$

Adesso sostituiamo l'espressione di $X_r(t)$:

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = E\left[X^2(t) - X(t)2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right]$$

La media è un operatore lineare rispetto alla somma e rispetto al prodotto per una costante, per cui possiamo scrivere quanto segue:

$$\begin{aligned} E[(X(t) - X_r(t))X(t)] &= E[X^2(t)] - E\left[X(t)2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right] = \\ &= E[X^2(t)] - 2BT_s E\left[X(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right] = E[X^2(t)] - 2BT_s E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(t)X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right] = \\ &= E[X^2(t)] - 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[X(t)X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))] \end{aligned}$$

A questo punto, ci ricordiamo che $E[X^2(t)] = R_X(0)$, per cui

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = R_X(0) - 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[X(t)X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))]$$

Consideriamo adesso l'argomento di quella media: $X(t)$ è una variabile aleatoria; $X(nT_s)$ è anch'essa una variabile aleatoria in quanto lo è $X(t)$; l'altro termine, invece, non è una variabile aleatoria, per cui si può portare fuori dalla media: così facendo, otteniamo

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = R_X(0) - 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - nT_s)) E[X(t)X(nT_s)]$$

Per definizione, sappiamo che $E[X(t)X(nT_s)] = R_X(t - nT_s)$, per cui possiamo riscrivere quella relazione nella forma

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = R_X(0) - 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - nT_s)) R_X(t - nT_s)$$

A questo punto, per dimostrare che il secondo membro vale 0, dobbiamo utilizzare la relazione (c) ricavata in precedenza, ossia

$$R_X(\tau_1) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s - a) \text{sinc}(2B(\tau_1 + a - nT_s))$$

Ponendo in tale relazione $\tau_1=0$ e $a=t$, otteniamo che

$$R_X(0) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(nT_s - t) \text{sinc}(2B(t - nT_s))$$

Ricordando ora che la funzione $R_X(\tau)$ è una funzione pari, abbiamo che $R_X(nT_s - t) = R_X(t - nT_s)$, per cui possiamo scrivere che

$$R_X(0) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_X(t - nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))$$

Da questa relazione si deduce immediatamente che

$$E[(X(t) - X_r(t))X(t)] = R_X(0) - 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - nT_s)) R_X(t - nT_s) = 0$$

Passiamo a dimostrare che $E[(X(t) - X_r(t))X_r(t)] = 0$.

Cominciamo col sostituire l'espressione di $X_r(t)$ e col fare passaggi analoghi a quelli visti nella dimostrazione precedente:

$$\begin{aligned} E[(X(t) - X_r(t))X_r(t)] &= E\left[(X(t) - X_r(t))2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right] = \\ &= E\left[2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X(t) - X_r(t))X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right] = 2BT_s E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (X(t) - X_r(t))X(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s))\right] = \\ &= 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - nT_s)) E[(X(t) - X_r(t))X(nT_s)] \end{aligned}$$

La condizione che vogliamo dimostrare, ossia che $E[(X(t) - X_r(t))X_r(t)] = 0$, risulterà certamente verificare se accade che

$$E[(X(t) - X_r(t))X(nT_s)] = 0$$

Facciamo perciò vedere che effettivamente ciò accade.

Sostituendo ancora una volta l'espressione di $X_r(t)$ abbiamo che

$$E[(X(t) - X_r(t))X(nT_s)] = E\left[\left(X(t) - 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kT_s) \text{sinc}(2B(t - kT_s))\right)X(nT_s)\right]$$

Facendo ancora i passaggi visti nei casi precedenti, abbiamo anche che

$$\begin{aligned} E[(X(t) - X_r(t))X(nT_s)] &= E[X(t)X(nT_s)] - E\left[\left(2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kT_s) \text{sinc}(2B(t - kT_s))\right)X(nT_s)\right] = \\ &= E[X(t)X(nT_s)] - 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - kT_s)) E[X(kT_s)X(nT_s)] \end{aligned}$$

Adesso, per definizione sappiamo che

$$\begin{aligned} E[X(kT_s)X(nT_s)] &= R_X(nT_s - kT_s) \\ E[X(t)X(nT_s)] &= R_X(nT_s - t) = R_X(t - nT_s) \end{aligned}$$

per cui quella relazione diventa

$$E[(X(t) - X_r(t))X(nT_s)] = R_X(t - nT_s) - 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - kT_s)) R_X(nT_s - kT_s)$$

A questo punto, per dimostrare che il secondo membro è nullo, ricorriamo alla relazione **(b)** ricavata in precedenza, ossia la relazione

$$R_X(\tau - a) = 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(kT_s - a) \text{sinc}(2B(\tau - kT_s))$$

In particolare, poniamo in essa $t=\tau$ e $a=nT_s$: otteniamo

$$R_X(t - nT_s) = 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(kT_s - nT_s) \text{sinc}(2B(t - kT_s))$$

e questa relazione, considerando la parità della funzione $R_X(\tau)$ indica come effettivamente

$$E[(X(t) - X_r(t))X(nT_s)] = R_X(t - nT_s) - 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(2B(t - kT_s)) R_X(nT_s - kT_s) = 0$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che *campionando $X(t)$ e ricostruendola mediante l'ormai nota formula di ricostruzione, otteniamo una realizzazione $X_r(t)$ che è uguale, in media quadratica, a $X(t)$.*

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>