

Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 14 - La modulazione (I)

Introduzione	1
Modulazione analogica AM	3
Introduzione	3
Modulazione di ampiezza DSB-SC	4
Introduzione	4
L'apparato modulatore.....	4
L'apparato demodulatore	6
DSB-SC in presenza di sfasamenti	7
Modulazione AM con 2 portanti in quadratura	9
Introduzione	9
Presenza di sfasamenti.....	13
Osservazione: banda del segnale modulato	14
Modulazione di ampiezza SSB.....	15
Introduzione	15
<i>Trasmissione analogica del segnale telefonico</i>	<i>18</i>
Modulazione di un singolo tono	18
Demodulazione di un singolo tono modulante	21
Modulazione e demodulazione per un segnale modulante generico	22
Modulazione di ampiezza VSB	27
Introduzione	27
Descrizione della modulazione/demodulazione	27
Modulazione AM-standard.....	31
Introduzione	31

INTRODUZIONE

Fino ad ora, studiando la trasmissione dei segnali, ci siamo occupati solo della trasmissione digitale dei segnali analogici:

- il termine “analogico” indica un segnale continuo nel tempo e a valori continui;
- l'espressione “trasmissione digitale” indica una trasmissione sotto forma di sequenza di bit.

Dovendo trasmettere un segnale analogico, è possibile però farlo, oltre che in modo digitale, in modo anche analogico, ossia inviando, tramite i mezzi trasmissivi a disposizione, i valori assunti dal segnale, istante per istante, così come sono, senza effettuarne alcuna codifica. Si parla in questo caso di **trasmissione analogica** del segnale ed è quello di cui intendiamo occuparci adesso.

Supponiamo dunque di avere un generico segnale analogico $s(t)$ da trasmettere in forma analogica. Supponiamo che questo segnale ammetta trasformata di Fourier, che indichiamo con $S(f)$. Questa trasformata di Fourier, ossia lo spettro di $s(t)$, è definita su un certo intervallo di frequenze, ossia, in altre parole, ha valori identicamente nulli al di fuori di tale intervallo. Trasmettere $s(t)$ in forma analogica significa, dunque, nel dominio della frequenza, trasmettere tutte queste *componenti spettrali*. Tuttavia, è possibile che il mezzo trasmissivo utilizzato per la trasmissione (sia esso l'etere, il cavo coassiale, la fibra ottica e così via) non sia in grado di trasmettere tutte queste frequenze, oppure, in corrispondenza di alcune di esse, non sia in grado di trasmettere ampiezze superiori ad un certo valore limite. Questo implica che, *prima della trasmissione, sia necessario manipolare il segnale in modo da adattarlo al mezzo trasmissivo, ossia in modo che esso arrivi al ricevitore così com'è*, senza tagli (salvo, ovviamente, i fenomeni di attenuazione e distorsione inevitabilmente introdotti dalla trasmissione stessa).

Questa manipolazione delle componenti spettrali del segnale da trasmettere prende il nome di **modulazione** del segnale stesso.

La modulazione è dunque una operazione da compiere sul segnale prima della sua trasmissione. A seconda del tipo di trasmissione, analogica o digitale, avremo una **modulazione analogica** oppure una **modulazione digitale**. A loro volta, la modulazione analogica e quella digitale possono essere suddivise in varie categorie, ma, per introdurle, è necessario accennare prima al seguente concetto: abbiamo detto che il nostro scopo è trasmettere il segnale $s(t)$, ossia far arrivare tale segnale dalla sorgente che lo emette ad un ricevitore; allora, anziché trasmettere "direttamente" $s(t)$, decidiamo di trasmettere un altro segnale $c(t)$, che prende il nome di **portante**; solitamente, questa "portante" non è altro che un segnale del tipo

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

e si parla infatti di **portante sinusoidale**. Questa portante presenta una propria ampiezza A_c , una propria fase φ e una propria frequenza f_c . Allora si parla di "*modulazione*" quando viene trasmessa questa portante $c(t)$ in cui, però, al fine di trasmettere $s(t)$, viene fatta variare o l'ampiezza o la frequenza o la fase della portante in modo proporzionale al valore di $s(t)$.

In questo senso, il segnale $s(t)$ prende il nome di **segnale modulante**, mentre il segnale trasmesso prende il nome di **segnale modulato**.

In particolare, la modulazione analogica si divide nelle seguenti categorie:

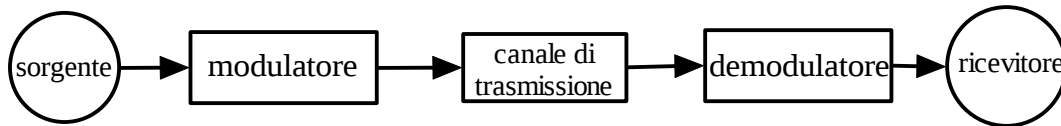
- si parla di "**modulazione AM**" (dove AM sta per Amplitude Modulation) quando viene fatta variare l'ampiezza di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$;
- si parla di "**modulazione PM**" (dove PM sta per Phase Modulation) quando viene fatta variare la fase di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$;
- si parla di "**modulazione FM**" (dove FM sta per Frequency Modulation) quando viene fatta variare la frequenza di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$.

Le stesse possibilità, ma nomi diversi, si hanno per la modulazione digitale:

- si parla di "**modulazione ASK**" (dove ASK sta per Amplitude Shift Keying) quando viene fatta variare l'ampiezza di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$;
- si parla di "**modulazione PSK**" (dove PSK sta per Phase Shift Keying) quando viene fatta variare la fase di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$;
- si parla di "**modulazione FSK**" (dove FSK sta per Frequency Shift Keying) quando viene fatta variare la frequenza di $c(t)$ in modo proporzionale a $s(t)$.

Naturalmente, appare ovvio un fatto: se manipoliamo in qualche modo il nostro segnale prima della trasmissione, perché poi il segnale arrivi al ricevitore così come è stato emesso dalla sorgente, è necessario che esso subisca delle manipolazioni inverse a quelle iniziali, ossia venga *ricostruito* nella sua forma originale. Di conseguenza, così come abbiamo una “modulazione” prima della trasmissione, dovremo avere una **demodulazione** dopo la trasmissione.

Possiamo dunque tracciare il seguente schema semplificato di un sistema di trasmissione che fa uso di una tecnica qualsiasi di modulazione:



Modulazione analogica AM

INTRODUZIONE

Si parla di “modulazione analogica AM” quando il segnale modulato (cioè il segnale effettivamente trasmesso sul canale) consiste nella portante $c(t) = A_C \cos(2\pi f_C t + \varphi)$ la cui ampiezza A_C viene fatta variare in modo proporzionale al segnale modulante $s(t)$.

Esistono varie metodologie di modulazione AM e le elenchiamo di seguito, riservando per dopo le singole descrizioni:

- DSB-SC : doppia banda laterale con portante soppressa
- SSB : singola banda laterale
- VSB : banda vestigiale laterale
- AM-Standard (oppure AM con portante trasmessa)
- 2 portati in quadratura

Modulazione di ampiezza DSB-SC

INTRODUZIONE

L'acronimo **DSB-SC** sta per *Doppia Banda Laterale con Portante Soppressa*: è un tipo di modulazione di ampiezza estremamente importante in quanto viene utilizzata (sia pure con accorgimenti ovviamente diversi) anche nelle altre tecniche che saranno esposte in seguito.

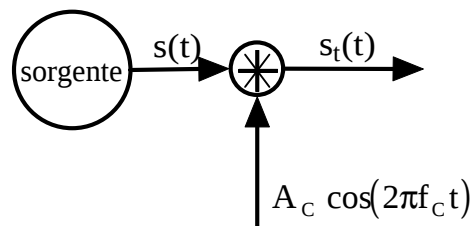
In questo tipo di modulazione di ampiezza, il segnale modulato è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

ed è subito evidente si tratti della portante in cui, però, l'ampiezza A_c risulta moltiplicata, ad ogni istante, per il valore che assume in quell'istante il segnale modulante $s(t)$.

L'APPARATO MODULATORE

Il funzionamento del cosiddetto **apparato modulatore** è dunque semplicemente quello di effettuare la moltiplicazione di $s(t)$ per la portante; possiamo allora schematizzare semplicemente tale apparato nel modo seguente:



Il segnale **$s_t(t)$** è dunque quello che inviamo al canale di trasmissione il quale, nell'ipotesi semplificativa di assenza di perdite, distorsioni e disturbi vari, lo porta in ingresso al demodulatore; il compito di quest'ultimo è quello di riuscire a tirare fuori da esso il segnale $s(t)$ da inviare al ricevitore. Per capire come si deve comportare il **demodulatore**, cominciamo il nostro ragionamento nel *dominio della frequenza*: lo spettro del segnale modulato è

$$S_t(f) = A_c S(f) * \text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t + \varphi)]$$

Per comodità di ragionamento, poniamo $\varphi=0$, per cui

$$S_t(f) = A_c S(f) * \text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t)]$$

La trasformata di Fourier di un Coseno è la somma di due impulsi traslati: in particolare, in questo caso abbiamo che

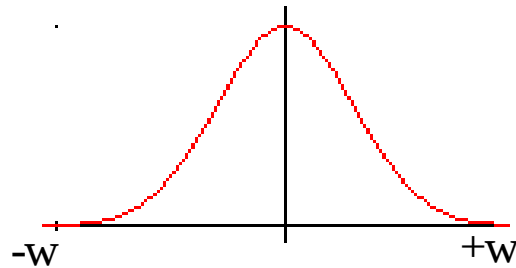
$$S_t(f) = A_c S(f) * \left[\frac{1}{2} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} \delta(f + f_c) \right]$$

La convoluzione di una funzione per un impulso è pari alla funzione stessa traslata nel punto di applicazione dell'impulso: abbiamo perciò che

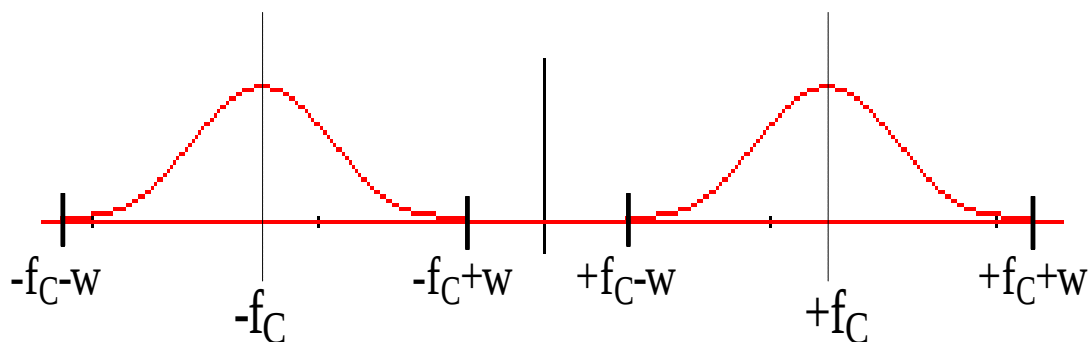
$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

Questa relazione dice dunque che lo spettro del segnale modulato è composto da due repliche traslate, a meno del fattore $A_c/2$, dello spettro del segnale $s(t)$.

Per esempio, se lo spettro del segnale $s(t)$ è del tipo



lo spettro del segnale modulato (a meno dei fattori di scala) è qualcosa del tipo seguente:



In definitiva, quindi, *la modulazione DSB-SC consiste nell'operare una "traslazione" in frequenza del segnale $s(t)$ da trasmettere: lo spettro di $s(t)$ viene infatti duplicato e le due repliche vengono poste a cavallo di $-f_c$ e $+f_c$.*

In altre parole ancora, le componenti spettrali del segnale di partenza $s(t)$ vengono collocate in posizione diversa da quella iniziale: infatti, mentre il segnale $s(t)$ era un segnale di tipo passa-basso (ossia con componenti non nulle solo in prossimità della frequenza nulla $f=0$), il segnale modulato è un segnale di tipo passa-banda, in quanto ha componenti spettrali non nulle in intervalli simmetrici rispetto ad $f=0$ ma che non comprendono la stessa $f=0$.

L'APPARATO DEMODULATORE

Il demodulatore, per ricostruire $s(t)$, non deve far altro che moltiplicare lo spettro del segnale modulato per $2/A_C$ e effettuare una nuova traslazione, in modo tale che le due repliche vengano *riposizionate* a cavallo di $f=0$, dove vanno a coincidere proprio con lo spettro del segnale di partenza.

Per analizzare, a livello analitico, il comportamento del demodulatore, facciamo il seguente discorso: abbiamo detto che il segnale in ingresso al demodulatore è il segnale

$$s_t(t) = s(t)A_C \cos(2\pi f_c t)$$

Per prima cosa, il demodulatore moltiplica questo segnale per un segnale identico alla portante, tranne per il fatto che la sua ampiezza vale $2/A_C$: l'effetto di questa moltiplicazione è dunque il segnale

$$x(t) = s_t(t) \frac{2}{A_C} \cos(2\pi f_c t) = 2s(t) \cos^2(2\pi f_c t)$$

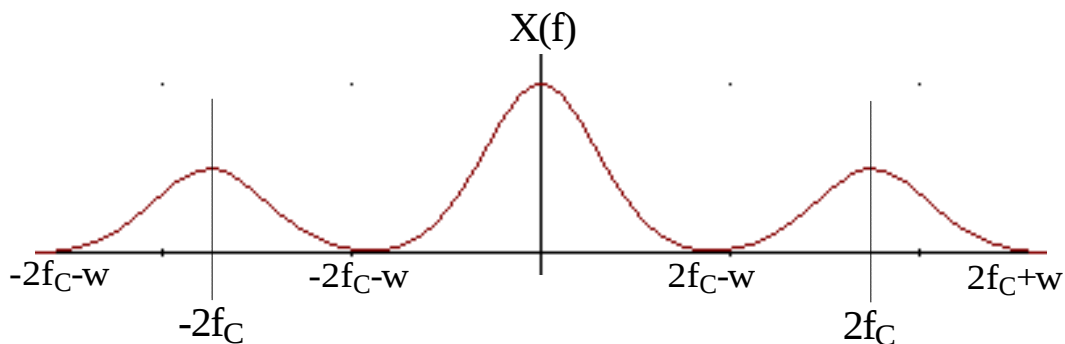
Adesso, questo $x(t)$, usando la nota formula trigonometrica $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$, può essere riscritto nella forma

$$x(t) = 2s(t) \left[\frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t) + \frac{1}{2} \right] = s(t) \cos(4\pi f_c t) + s(t) = s(t) \cos(4\pi f_c t) + s(t)$$

Lo spettro di questo segnale è il seguente:

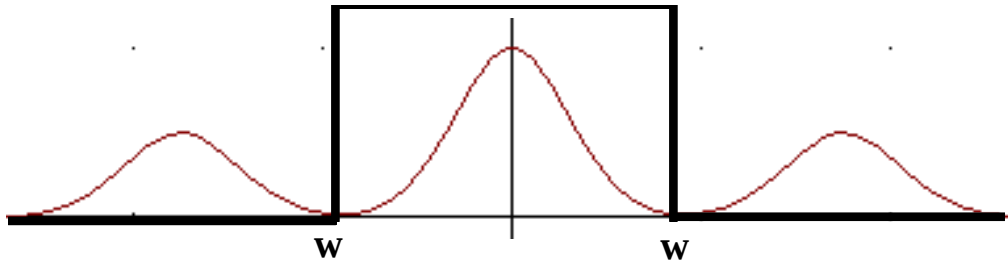
$$X(f) = S(f) * \text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t)] + S(f) = \frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} S(f + 2f_c) + S(f)$$

Si tratta cioè di 3 repliche di $S(f)$, di cui una coincidente proprio con $S(f)$, mentre le altre due traslate, una in $-2f_c$ e l'altra in $+2f_c$, e modulate del fattore $1/2$:



Allora, è evidentemente possibile isolare $S(f)$, a partire da $X(f)$, solo a patto che non ci sia sovrapposizione tra le tre repliche: questo accade se $w \leq f_c$ (nel grafico è stato preso il caso particolare in cui $w=f_c$).

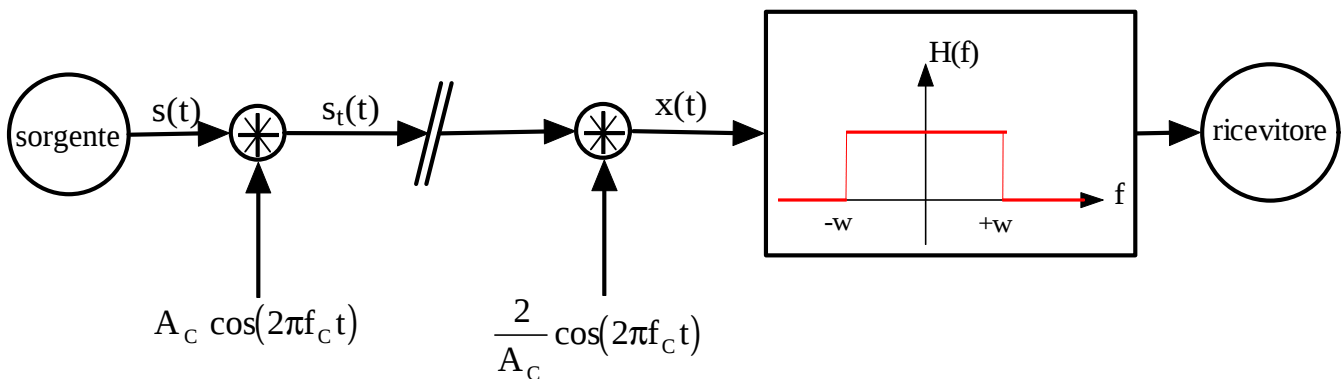
Sotto tale condizione, $S(f)$ viene isolato da $X(f)$ utilizzando un normale **filtro passa-basso**, con banda pari proprio alla banda w del segnale $s(t)$ (che prende perciò il nome di **banda base**). La figura seguente illustra l'azione del filtro, che lascia passare solo le componenti spettrali presenti all'interno della sua **banda passante**, ossia all'interno del "rettangolo" disegnato:



Il segnale in uscita dal filtro è dunque

$$S_u(f) = X(f) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

Possiamo quindi riassumere il metodo di modulazione AM con la tecnica DSB-SC con lo schema seguente:



L'apparato di ricezione utilizzato nella tecnica DSB-SC prende il nome di **demodulatore coerente**: l'aggettivo “coerente” deriva dal fatto che il segnale $\frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t)$ per il quale viene moltiplicato $s_t(t)$, ha la stessa fase e la stessa frequenza della portante¹.

DSB-SC IN PRESENZA DI SFASAMENTI

Vediamo adesso cosa succede quando la demodulazione non è più coerente: per esempio, supponiamo che l'oscillazione sinusoidale usata in ricezione abbia una fase diversa da quella portante. Supponiamo sempre che la portante sia $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$, per cui il segnale modulato è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

¹ Da notare che, nel discorso da noi fatto, si è preso per semplicità $\varphi=0$, ma l'aggettivo **coerente** è generale: esso indica semplicemente che la portante usata dal trasmettitore e l'oscillazione sinusoidale (detta **oscillazione locale**) usata dal ricevitore hanno la stessa frequenza e la stessa fase.

Supponiamo tuttavia di moltiplicare questo segnale modulato per il segnale $\frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi)$, il quale ha evidentemente una fase diversa da zero.

L'esito della moltiplicazione è il segnale

$$x(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Applicando questa volta la formula

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

possiamo riscrivere $x(t)$ nella forma

$$x(t) = s(t) \left[\frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(\varphi) \right]$$

Lo spettro di questo segnale è il seguente:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2} S_t(f) * \left[\text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)] + \cos(\varphi) \right] = \\ &= \frac{1}{2} S_t(f) * \text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)] + \frac{1}{2} \cos(\varphi) S_t(f) \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la quantità $\text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)]$, applicando la semplice definizione di trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \text{Fourier}[\cos(4\pi f_c t + \varphi)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4\pi f_c t + \varphi) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j(4\pi f_c t + \varphi)} + e^{-j(4\pi f_c t + \varphi)}) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j4\pi f_c t} e^{j\varphi} + e^{-j4\pi f_c t} e^{-j\varphi}) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j4\pi f_c t} e^{j\varphi} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j4\pi f_c t} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(2f_c - f)t} dt + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f_c + f)t} dt = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f - 2f_c)t} dt + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f_c + f)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2} S(f) * \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + \frac{1}{2} \cos(\varphi) S(f) = \\ &= \frac{1}{4} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{4} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) + \frac{1}{2} \cos(\varphi) S(f) \end{aligned}$$

Ancora una volta, troviamo lo spettro $X(f)$ composto tra 3 repliche, a meno di opportuni fattori, dello spettro del segnale di partenza:

- la prima replica $\frac{1}{4}e^{j\varphi}S(f-2f_c)$ è centrata ancora una volta in $+2f_c$, per cui essa può essere eliminata mediante il filtraggio passa-basso;
- la seconda replica $\frac{1}{4}e^{j\varphi}S(f+2f_c)$ è centrata in $-2f_c$, per cui anch'essa può essere eliminata mediante il filtraggio passa-basso;
- la replica centrale $\frac{1}{2}\cos(\varphi)S(f)$, che è quella di nostro interesse, risulta moltiplicata sia per un fattore $1/2$, che possiamo senz'altro eliminare (*compensare*) usando un filtro di "altezza" pari a 2, sia anche per un fattore $\cos(\varphi)$; il problema viene proprio da questo fattore, in quanto lo sfasamento φ non è sotto il nostro controllo e quindi, non potendolo conoscere, non siamo in grado di *compensarlo*². Di conseguenza, la ricostruzione del nostro segnale avrà successo solo se φ è piccolo, in quanto in questo caso si ha $\cos\varphi \approx 1$. Se invece lo sfasamento è grande, allora il termine $\cos\varphi$ influisce pesantemente sul segnale e la nostra ricostruzione risulta poco fedele.

N.B. Un discorso abbastanza simile si può fare nel caso in cui il segnale che usiamo per moltiplicare $s_i(t)$, anziché avere fase diversa da quella della portante, presenta una frequenza diversa. Anche in questo caso si trova che quanto maggiore è la differenza tra le due frequenze, tanto meno fedele è la ricostruzione del segnale di partenza

Modulazione AM con 2 portanti in quadratura

INTRODUZIONE

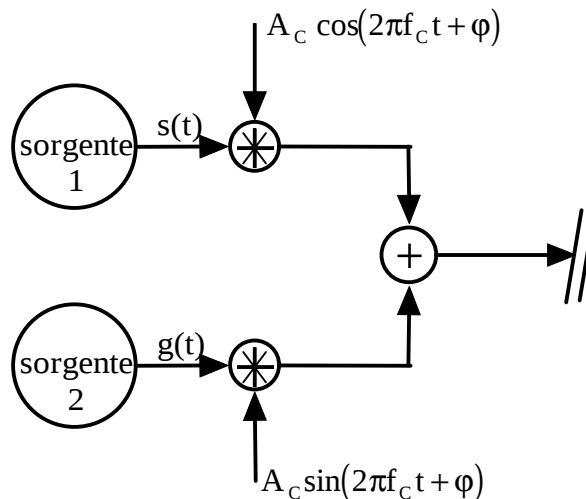
Abbiamo prima detto che la ricostruzione del segnale di partenza $s(t)$, in sede di demodulazione, è tanto più precisa quanto più è piccolo il valore dell'eventuale sfasamento φ . Un caso assolutamente particolare e dannoso è quello in cui lo sfasamento φ risulta essere pari ad un multiplo dispari di $\pi/2$: in questo caso, infatti, $\cos\varphi=0$ e quindi non esiste alcun metodo che ci consenta di ricostruire il segnale di partenza: esso risulta identicamente nullo.

Proprio questo fatto, cioè la possibilità di annullare il valore del segnale o di parte di esso, viene sfruttato in un'altra tecnica di modulazione di ampiezza, che prende il nome di **modulazione di ampiezza con 2 portanti in quadratura**: la caratteristica di questa tecnica è quella di

² In questo contesto, *compensare* significa sostanzialmente amplificare il segnale ricevuto, in modo appunto da compensare l'attenuazione da esso subita: di conseguenza, quando parliamo di "*filtro di altezza 2*" ci riferiamo ad un dispositivo che si comporti non solo da filtro (nel senso che deve eliminare componenti spettrali al di fuori di un certo intervallo, detto **banda passante**) ma anche da amplificatore (in quanto deve amplificare le componenti spettrali di nostro interesse). Il termine "altezza" è dunque nient'altro che il *guadagno* dell'amplificatore.

consentire la trasmissione, mediante lo stesso mezzo trasmissivo, di due diversi segnali analogici, che poi possono essere nuovamente separati, in fase di demodulazione, perché arrivino ai rispettivi ricevitori.

Per comprendere bene come funziona questa tecnica, è conveniente rifarsi ai soliti schemi grafici; in particolare, riportiamo qui lo schema dell'apparato di modulazione:



Vediamo di spiegare questo schema: il nostro scopo è quello di trasmettere, mediante lo stesso mezzo trasmissivo, i due segnali analogici $s(t)$ e $g(t)$; la prima cosa che facciamo è modulare in ampiezza ciascuno di questi segnali mediante la tecnica DSB-SC, per cui moltiplichiamo ciascuno di essi per una portante: qui subentra la particolarità di questa tecnica, in quanto le due portanti sono identiche tranne per il fatto di essere sfasate di 90° (da cui il termine "quadratura"). I due segnali modulati sono dunque

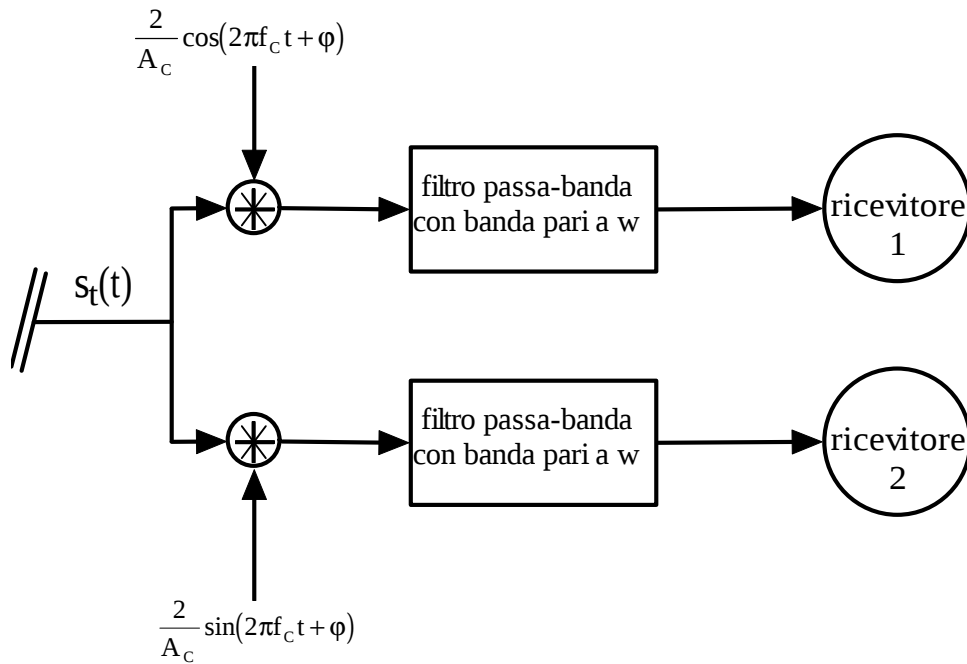
$$s(t)A_C \cos(2\pi f_C t + \varphi)$$

$$g(t)A_C \sin(2\pi f_C t + \varphi)$$

Questi due segnali vengono successivamente sommati (tramite un dispositivo elettronico detto appunto **sommatore**) per ottenere l'unico segnale modulato da trasmettere attraverso il canale: si tratta perciò del segnale

$$s_t(t) = s(t)A_C \cos(2\pi f_C t + \varphi) + g(t)A_C \sin(2\pi f_C t + \varphi)$$

Nell'ipotesi che il canale sia ideale, per cui esso non introduce sfasamenti o distorsioni su $s_t(t)$, possiamo dunque ritenere che $s_t(t)$ sia proprio il segnale che arriva in ingresso all'apparato di demodulazione, che possiamo schematizzare nel modo seguente:



Così come per l'apparato modulatore, anche l'apparato demodulatore consta di due **rami**, in ciascuno dei quali viene effettuata una demodulazione del segnale modulato $s_t(t)$ secondo sempre la tecnica DSB-SC; in particolare, tale demodulazione consiste nella moltiplicazione di $s_t(t)$ per il segnale $\frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi)$ nel caso di $s(t)$ e per il segnale $\frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi)$ nel caso di $g(t)$, e nel successivo filtraggio.

Verifichiamo allora che, effettivamente, il *ricevitore 1* riceva $s(t)$ e il *ricevitore 2* riceva $g(t)$. Abbiamo detto che il segnale che arriva in ingresso all'apparato demodulatore è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Questo segnale viene trasmesso ad entrambi i rami dell'apparato, nei quali viene moltiplicato nel modo appena descritto: quindi nel ramo superiore abbiamo

$$\begin{aligned} x_s(t) &= s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t + \varphi) = \\ &= 2s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \cos(2\pi f_c t + \varphi) + 2g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \end{aligned}$$

mentre in quello inferiore abbiamo

$$\begin{aligned} x_g(t) &= s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi) = \\ &= 2s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi) + 2g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \end{aligned}$$

Applichiamo adesso a queste espressioni le seguenti formule:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

Per il ramo 1 otteniamo

$$x_s(t) = 2s(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t + 2\varphi) \right] + 2g(t) \left[\frac{1}{2} \sin(4\pi f_c t + 2\varphi) + \frac{1}{2} \sin(0) \right]$$

mentre per il ramo 2 otteniamo

$$x_g(t) = 2s(t) \left[\frac{1}{2} \sin(2\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{2} \sin(0) \right] + 2g(t) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t + 2\varphi) \right]$$

Queste possono dunque essere riscritte nel modo seguente:

$$x_s(t) = s(t) + s(t) \cos(4\pi f_c t + 2\varphi) + g(t) \sin(4\pi f_c t + 2\varphi)$$

$$x_g(t) = s(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) + g(t) - g(t) \cos(4\pi f_c t + 2\varphi)$$

Gli spettri di questi due segnali sono i seguenti:

$$X_s(f) = S(f) + S(f) * \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + G(f) \left[\frac{1}{2j} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right]$$

$$X_g(f) = S(f) \left[\frac{1}{2j} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right] + G(f) - G(f) \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + 2f_c) \right]$$

ossia sono

$$X_s(f) = S(f) + \frac{1}{2} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) + \frac{1}{2j} e^{j\varphi} G(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} G(f + 2f_c)$$

$$X_g(f) = \frac{1}{2j} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c) + \frac{1}{2} e^{j\varphi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} S(f + 2f_c)$$

Il primo spettro consta di una replica centrale perfetta di $S(f)$ e di altre 4 componenti (due repliche di $S(f)$ e altrettante di $G(f)$), traslate nei punti $-2f_c$ e $+2f_c$: si capisce, quindi, come il filtraggio passa-basso di $X_s(f)$ dia esattamente $S(f)$, ossia consenta la ricostruzione di $s(t)$.

In modo del tutto analogo, il secondo spettro consta di una replica centrale perfetta di $G(f)$ e di altre 4 componenti (due repliche di $S(f)$ e altrettante di $G(f)$), traslate nei punti $-2f_c$ e $+2f_c$: si capisce, quindi, come anche in questo caso il filtraggio di $X_g(f)$ dia esattamente $G(f)$, ossia consenta la ricostruzione di $g(t)$.

PRESENZA DI SFASAMENTI

Nell'illustrare in precedenza la tecnica di modulazione AM in DSB-SC, abbiamo mostrato come la presenza di eventuali sfasamenti tra i segnali sinusoidali utilizzati possa compromettere la fedeltà del segnale finale ricostruito rispetto al segnale di partenza. Dato che la tecnica delle due portanti in quadratura si basa proprio sulla tecnica DSB-SC, è intuitivo comprendere come tali sfasamenti possano essere dannosi anche in questo caso. Vediamo allora anche qui di esaminare la questione da un punto di vista analitico.

Concentriamoci per comodità solo sul ramo inferiore del demodulatore, in quanto il discorso sull'altro ramo è identico.

Abbiamo detto che il segnale che arriva a tale ramo è il segnale modulato

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

Prima, abbiamo moltiplicato questo segnale per il segnale $\frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi)$ avente la stessa fase e la stessa frequenza delle due portanti (*demodulazione coerente*). Supponiamo invece adesso che questo segnale presenti uno sfasamento: ad esempio, supponiamo che esso sia $\frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_1)$. L'esito della moltiplicazione è dunque

$$\begin{aligned} x_g(t) &= s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \varphi) \frac{2}{A_c} \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) = \\ &= 2s(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) + 2g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) \sin(2\pi f_c t + \varphi_1) \end{aligned}$$

Applicando le solite formule trigonometriche

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \\ \sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

abbiamo che

$$x_g(t) = s(t) [\sin(4\pi f_c t + \varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi_1 - \varphi)] + g(t) [\cos(\varphi_1 - \varphi) - \cos(4\pi f_c t + \varphi + \varphi_1)]$$

Se adesso effettuiamo il filtraggio di questo segnale attraverso il filtro passa-basso considerato prima, è facile verificare che non otteniamo più il segnale $g(t)$ come nel caso precedente, bensì otteniamo il segnale

$$g_u(t) = s(t) \sin(\varphi_1 - \varphi) + g(t) \cos(\varphi_1 - \varphi)$$

Sono allora evidenti i problemi che sono nati:

- in primo luogo, il segnale $s(t)$ non è affatto scomparso, ma risulta ancora sovrapposto a $g(t)$, per cui è impossibile la ricostruzione perfetta di quest'ultimo;
- in secondo luogo, sono presenti i due fattori moltiplicativi $\sin(\varphi_1 - \varphi)$ e $\cos(\varphi_1 - \varphi)$ i quali compromettono senz'altro la fedeltà della ricostruzione quando il valore di $(\varphi_1 - \varphi)$ è notevole.

E' ovvio che ogni problema scompare quando $\phi_1 = \phi$: in questo caso, infatti, si ha che

$$g_u(t) = s(t)\sin(0) + g(t)\cos(0) = g(t)$$

La conclusione che possiamo trarre è la seguente: *sia la tecnica DSB-SC sia la tecnica delle due portanti in quadratura presentano una certa sensibilità agli eventuali sfasamenti (o alle eventuali variazioni di frequenza), introdotti dalla trasmissione e dai dispositivi, tra le oscillazioni sinusoidali; tuttavia, mentre la tecnica DSB-SC presenta una sensibilità tutto sommato piccola a tali sfasamenti, la tecnica delle due portanti in quadratura presenta senz'altro una sensibilità maggiore; allo stesso tempo, essa presenta però il vantaggio di consentire la trasmissione di due diversi segnali mediante un unico mezzo trasmissivo.*

OSSERVAZIONE: BANDA DEL SEGNALE MODULATO

Abbiamo appena detto e visto che il grosso vantaggio della tecnica delle due portanti in quadratura è quello di consentire la trasmissione di due diversi segnali mediante lo stesso mezzo trasmissivo. Ora, è chiaro che questo fatto costituisce un vantaggio solo nel caso in cui l'intervallo di frequenze che dobbiamo trasmettere è lo stesso sia che si trasmettano i due segnali separatamente sia che li si trasmetta contemporaneamente.

Per capirci meglio, siano $[-w_G, +w_G]$ e $[-w_S, +w_S]$ gli intervalli di banda entro i quali sono definiti i due segnali $g(t)$ e $s(t)$. Supponiamo anche che $w_G > w_S$, ossia che la banda di $g(t)$ sia più estesa della banda di $s(t)$. Allora, la convenienza di trasmettere "insieme" i due segnali subentra solo se la banda del segnale complessivo che trasmettiamo non è superiore a quella di cui avremmo bisogno per trasmettere separatamente i due segnali; viceversa, se la banda di tale segnale complessivo dovesse risultare più estesa, allora la convenienza potrebbe venire meno, in quanto sarebbe necessario "estendere" le prestazioni del mezzo trasmissivo.

Facciamo allora vedere che, effettivamente, nella tecnica delle due portanti in quadratura, la banda del segnale da trasmettere è proprio quella necessaria alla trasmissione del segnale a banda maggiore.

Abbiamo detto che il segnale modulato che deve essere trasmesso è

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \phi) + g(t)A_c \sin(2\pi f_c t + \phi)$$

Per trovare la sua banda, dobbiamo trasformare secondo Fourier:

$$\begin{aligned} S_t(f) &= A_c S(f) \text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t + \phi)] + A_c G(f) * \text{Fourier}[\sin(2\pi f_c t + \phi)] = \\ &= A_c S(f) * \left[\frac{1}{2} e^{j\phi} \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\phi} \delta(f + 2f_c) \right] + A_c G(f) * \left[\frac{1}{2j} e^{j\phi} \delta(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\phi} \delta(f + 2f_c) \right] = \\ &= A_c \left[\frac{1}{2} e^{j\phi} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\phi} S(f + 2f_c) \right] + A_c \left[\frac{1}{2j} e^{j\phi} G(f - 2f_c) - \frac{1}{2j} e^{-j\phi} G(f + 2f_c) \right] \end{aligned}$$

Da questa relazione si nota come lo spettro $S_t(f)$ sia formato da 4 componenti: ci sono due repliche non perfette di $G(f)$ e due repliche non perfette di $S(f)$; in particolare, per ciascuna coppia di repliche, una replica è centrata in $-2f_c$, l'altra in $+2f_c$. E' evidente perciò che l'intervallo di frequenza su cui è definito $s_t(t)$ è $[-2f_c - w_G, +2f_c + w_G]$.

Adesso, andando a riguardare quanto detto a proposito della tecnica DSB-SC, si nota come questa sia esattamente la banda da trasmettere quando il segnale interessato è $g(t)$, ossia appunto il segnale a banda maggiore.

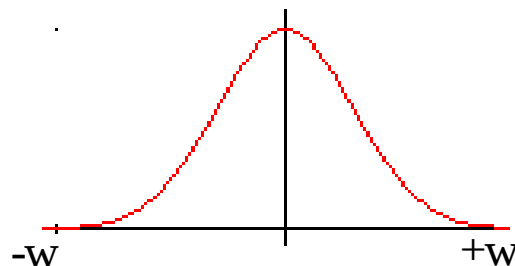
Modulazione di ampiezza SSB

INTRODUZIONE

L'acronimo **SSB** sta per **Single Side Band**, ossia "*Singola Banda Laterale*". Questa tecnica di modulazione di ampiezza sfrutta una importante proprietà della trasformata di Fourier, secondo la quale, se il segnale $s(t)$ è un segnale reale, il suo spettro $S(f)$ gode della simmetria hermitiana: questa simmetria hermitiana, scritta in formule, significa che

$$S(-f) = S^*(f)$$

Detta in termini concreti, questa relazione essa dice che la parte positiva dello spettro è simmetrica rispetto alla parte negativa. Un tipico esempio di spettro che gode della simmetria hermitiana è il seguente:



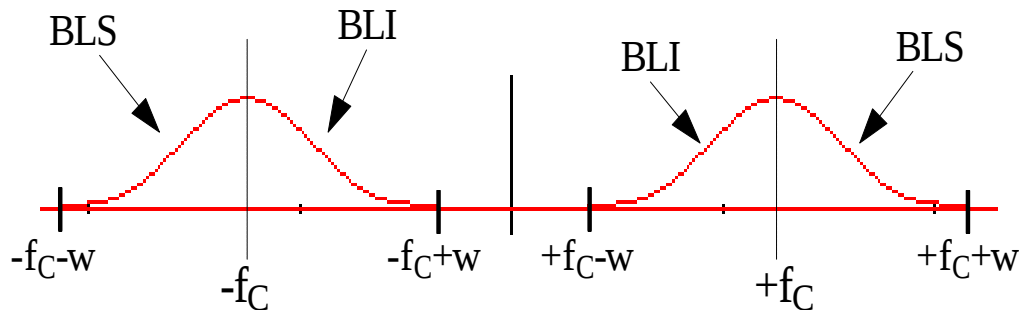
(ovviamente si tratta di un caso particolare di spettro REALE, dotato cioè solo di parte reale, o, ciò che è lo stesso, con fase nulla).

Prende il nome **banda laterale inferiore** (brevemente **BLI**) la parte dello spettro situata a frequenze negative, mentre quella situata a frequenze positive prende il nome di **banda laterale superiore** (brevemente **BLS**). E' evidente che, essendo simmetriche tali due bande, possiamo trasmetterne una sola, ricostruendo poi l'altra solo in fase di ricezione, ottenendo chiaramente un notevole risparmio in banda (dove per "risparmio in banda" intendiamo la trasmissione di un numero di componenti di frequenza inferiore a quelle effettivamente presentate dal segnale considerato, ossia sostanzialmente un risparmio di potenza da trasmettere).

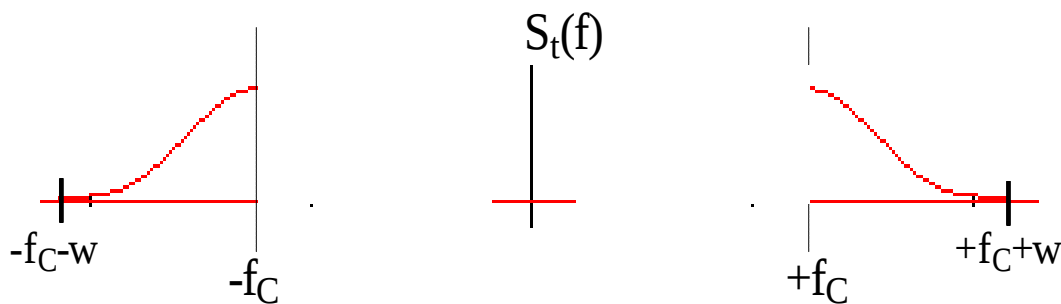
Proprio su questo concetto, ossia sulla trasmissione o della banda laterale superiore o della banda laterale inferiore, si basa la tecnica di modulazione SSB. In particolare, la modulazione SSB si basa su due passaggi fondamentali:

- il primo consiste nella modulazione secondo la tecnica DSB-SC descritta in precedenza;
- il secondo consiste in un opportuno filtraggio del segnale modulato.

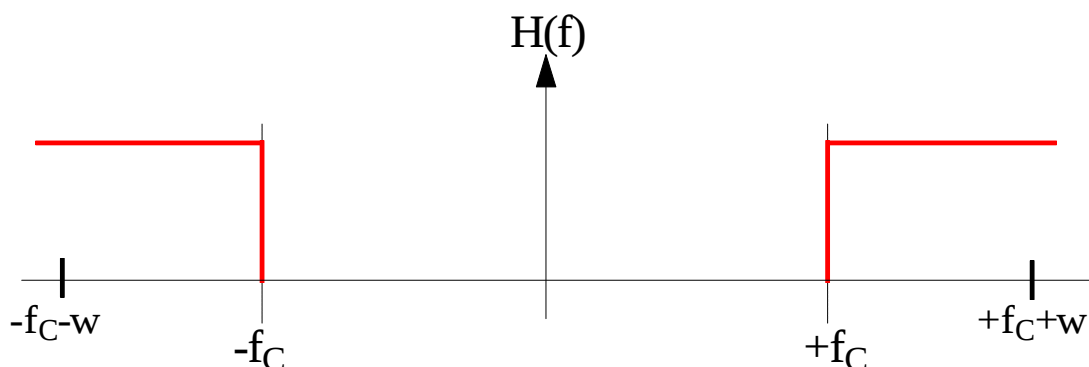
Supponiamo ad esempio di voler trasmettere il segnale avente lo spettro prima descritto. In accordo a quanto appena detto, la prima cosa da fare è effettuare la modulazione secondo la tecnica DSB-SC: come sappiamo, questo significa che il segnale modulato è $s(t)A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi)$ e tale segnale risulta avere uno spettro del tipo seguente (a meno del fattore φ , il quale, come sappiamo, comporta l'introduzione dei termini esponenziali $e^{i\varphi}$ ed $e^{-i\varphi}$):



A questo punto, è chiaro che possiamo trasmettere solo le due bande laterali superiori oppure solo quelle inferiori; ad esempio, supponiamo di voler trasmettere quelle superiori: per fare questo, come detto poco fa, dobbiamo filtrare, in modo opportuno, il segnale prima di trasmetterlo, ossia dobbiamo azzerare le componenti del suo spettro che non intendiamo inviare sul canale di trasmissione. Il filtraggio dovrà dunque fornire il seguente spettro:



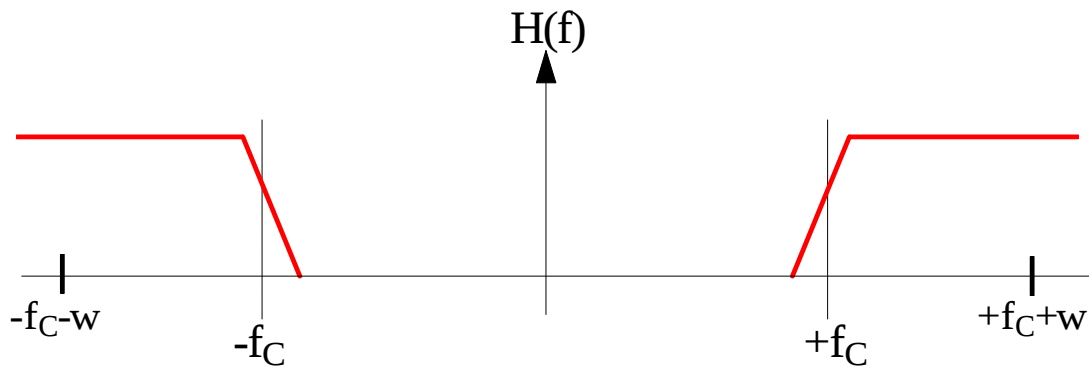
Il segnale $s_t(t)$ avente questo spettro è quello che effettivamente inviamo al canale di trasmissione. Per ottenere questo spettro, a partire da quello originale, avremmo bisogno dunque del seguente filtro:



Questo filtro lascia passare evidentemente solo le frequenze che si trovano al di sopra di f_c e al di sotto di $-f_c$. Si tratta perciò di un **filtro passa-alto**.

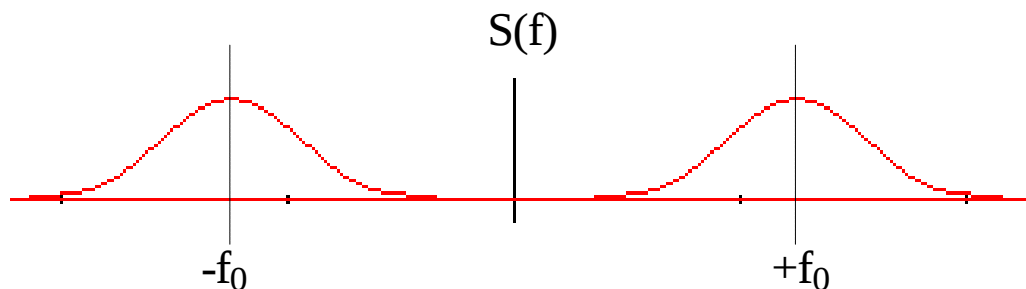
Sappiamo però bene che questo filtro è assolutamente ideale, nel senso che non potremo mai realizzarlo nella pratica. Al contrario, quello che possiamo ottenere è un filtro in cui il passaggio (**transizione**) dal valore nullo al valore non nullo avviene sì rapidamente, ma non certo

bruscamente, in un intorno più o meno esteso delle due frequenze $-f_C$ e $+f_C$. Ad esempio, *linearizzando* l'andamento del filtro, potremo ottenere qualcosa del tipo seguente:

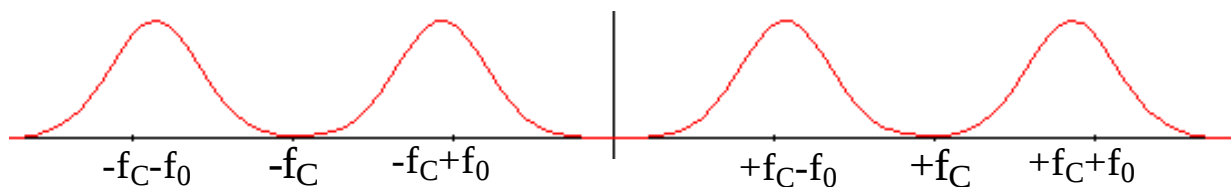


Questo limite fisico impone subito una considerazione: il segnale prodotto dal filtraggio non include solo le due BLS, bensì include una sia pure minima parte delle due BLI. In fase di demodulazione, quindi, avremo necessariamente una certa imprecisione. Questo è il motivo principale per il quale la tecnica SSB viene usata solo in alcuni casi particolari: la particolarità deriva dal fatto che *lo spettro del segnale da trasmettere deve presentare una minima quantità di energia in corrispondenza del valore 0 di frequenza*. E' cioè necessario che lo spettro di tale segnale valga zero o quasi zero in prossimità di $f=0$, in quanto, in questo caso, l'imperfezione del filtro non comporta alcuna imprecisione rilevante.

Per esempio, un segnale che sicuramente potrà essere trasmesso con questa tecnica di modulazione è quello avente uno spettro del tipo seguente:



In questo caso, infatti, lo spettro del segnale modulato in DSB-SC è del tipo seguente:



ed è evidente, quindi, che, nel filtrare le due BLI (oppure le due BLS), si riesce effettivamente ad eliminarle interamente.

Trasmissione analogica del segnale telefonico

Il metodo appena descritto è proprio quello utilizzato per la trasmissione analogica del segnale telefonico: infatti, sappiamo che il segnale telefonico è un segnale reale, per cui gode della proprietà di simmetria hermitiana, ed inoltre abbiamo anche detto che esso ha, come *range di frequenza*, l'intervallo $[300(\text{Hz}), 3400(\text{Hz})]$, per cui è nullo per $f=0(\text{Hz})$.

Ovviamente, così come abbiamo visto che, per la trasmissione digitale di tale segnale, è possibile trasmettere più conversazioni, quindi più segnali, mediante un unico mezzo trasmissivo, la stessa cosa si può fare anche per la trasmissione analogica: in questo caso, lo standard utilizzato prende il nome di **standard FDM** (mentre quello per la trasmissione digitale è il **TDM**). Detto in poche parole, la tecnica FDM funziona in questo modo: supponiamo di avere due diverse conversazioni telefoniche da trasmettere, ossia due diversi segnali che indichiamo con $s_1(t)$ e $s_2(t)$; ciascun segnale viene modulato secondo la tecnica SSB, per cui ciascun segnale viene moltiplicato per una portante sinusoidale e poi filtrato attraverso un opportuno filtro; affinché sia possibile, in fase di ricezione, la separazione dei due segnali, si prendono due portanti con frequenze diverse; la scelta di tali frequenze va chiaramente fatta in modo che i rispettivi spettri non risultino poi sovrapposti: a questo proposito, lo standard FDM prevede che tali frequenze sia distanziate di **4000(Hz)**.

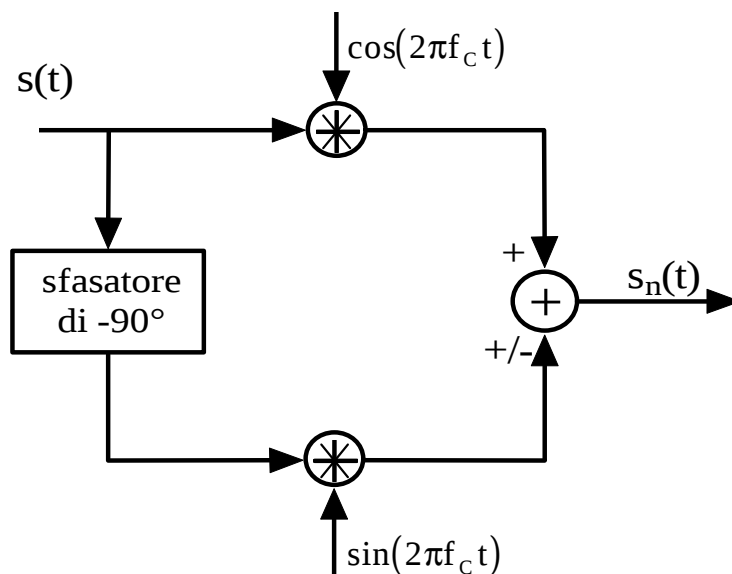
MODULAZIONE DI UN SINGOLO TONO

Fino ad ora, abbiamo dunque esposto, in linea solo teorica, quali sono i principi che stanno alla base della modulazione di ampiezza secondo la tecnica SSB. Vogliamo adesso vedere, almeno dal punto di vista analitico, come si effettua la modulazione SSB, ossia, in definitiva, come è possibile isolare, dato il segnale di partenza $s(t)$, la sua BLI o la sua BLS, e come è poi possibile effettuare la ricostruzione di $s(t)$.

Ci mettiamo, per comodità di ragionamento, nel caso particolare in cui il segnale da trasmettere, ossia il segnale modulante, sia sinusoidale (**singolo tono modulante**):

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

L'apparato di modulazione (a prescindere, ovviamente, dal tipo di segnale modulante) è fatto nel modo seguente:



Vediamo quali operazioni vengono dunque compiute sul segnale di partenza $s(t)$ al fine di produrre il segnale modulato $s_n(t)$ che viene inviato sul canale:

- una volta entrato nell'apparato di modulazione, il segnale $s(t)$ viene trasmesso su due distinti rami;
- nel primo ramo esso viene moltiplicato per il segnale portante $\cos(2\pi f_c t)$;
- nel secondo ramo, esso subisce prima uno sfasamento di $-\pi/2$ e poi viene moltiplicato per un altro segnale portante $\sin(2\pi f_c t)$;
- infine, ciò che viene fuori dai due rami viene sommato (oppure sottratto a seconda che si voglia trasmettere la BLS o la BLI) e quindi inviato al canale.

In definitiva, quindi, il segnale modulato ha la seguente espressione nel dominio del tempo:

$$s_n(t) = \underbrace{\cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo superiore}} \pm \underbrace{\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \sin(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo inferiore}}$$

Vogliamo far vedere che, effettivamente, lo spettro di questo segnale corrisponde allo spettro del segnale $s(t)$, modulato in DSB-SC, privato però o della BLS o della BLI; in altre parole, vogliamo dimostrare che quell'apparato effettua la modulazione SSB così come è stata descritta prima.

In primo luogo, l'espressione di $s_n(t)$ può anche essere modificata: sappiamo infatti che

$$\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi f_0 t)$$

per cui possiamo riscrivere il segnale modulato nella forma

$$s_n(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t) \pm \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_c t)$$

Adesso, ricordando la formula di duplicazione del coseno, possiamo anche scrivere che

$$s_n(t) = \cos(2\pi(f_0 \mp f_c)t)$$

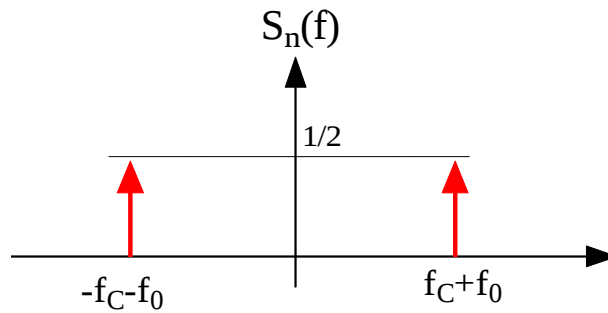
Per proseguire nei calcoli, supponiamo che il prodotto del ramo inferiore e quello del ramo superiore vengano sottratti, il che equivale a prendere, in quest'ultima formula, il segno "+": quindi il segnale modulato che consideriamo è

$$s_n(t) = \cos(2\pi(f_0 + f_c)t)$$

Lo spettro di questo segnale è evidentemente

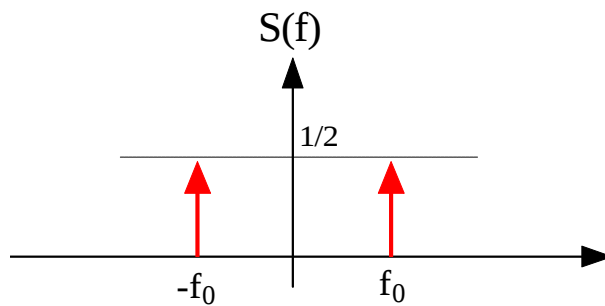
$$S_n(f) = \frac{1}{2} \delta(f - (f_0 + f_c)) + \frac{1}{2} \delta(f + (f_0 + f_c))$$

ed ha la seguente rappresentazione grafica:



Verifichiamo allora effettivamente che questo sia $s(t)$ modulato in SSB, ossia che quei due impulsi corrispondano alla BLI o alla BLS del segnale $s(t)$ modulato in DSB-SC.

Il segnale modulante era $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, per cui il suo spettro è



Di questo segnale effettuiamo una modulazione in DSB-SC, il che equivale a moltiplicarlo per la portante $\cos(2\pi f_c t)$; ciò che otteniamo è il segnale

$$s_t(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t)$$

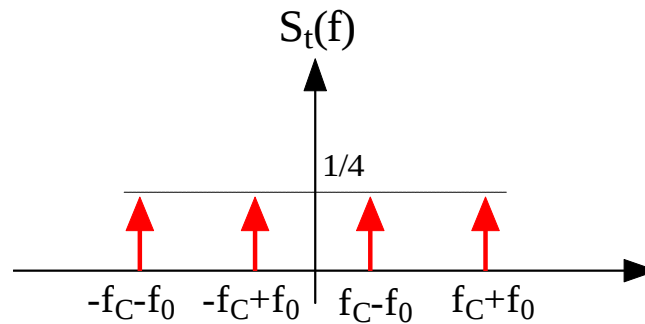
Questo segnale, usando le apposite formule trigonometriche, può essere riscritto nella forma

$$s_t(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_0 + f_c)t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_0 - f_c)t)$$

Il suo spettro è il seguente:

$$S_t(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(f - (f_0 + f_c)) + \frac{1}{2} \delta(f + (f_0 + f_c)) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(f - (f_0 - f_c)) + \frac{1}{2} \delta(f + (f_0 - f_c)) \right]$$

La sua rappresentazione grafica è la seguente:



Confrontiamo $S_t(t)$ con $S_n(f)$: effettivamente, $S_n(f)$ presenta solo le due BLS di $S_t(f)$, mentre non presenta le due BLI.

Abbiamo dunque trovato due conclusioni fondamentali:

- la prima è che, effettivamente, l'apparato modulatore prima disegnato effettua la modulazione SSB;
- la seconda è che, in quell'apparato, sottraendo i prodotti del ramo superiore e di quello superiore, noi otteniamo le due BLS di $s(t)$, mentre, sommando tali prodotti, otteniamo le due BLI.

DEMODULAZIONE DI UN SINGOLO TONO MODULANTE

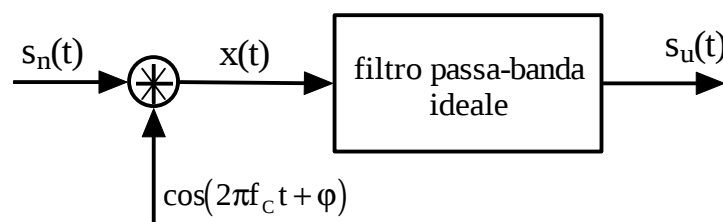
Abbiamo dunque appurato che il segnale modulato in SSB, ossia il segnale che viene inviato al canale per la trasmissione, ha la seguente espressione:

$$s_n(t) = \underbrace{\cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo superiore}} \pm \underbrace{\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \sin(2\pi f_c t)}_{\text{prodotto del ramo inferiore}} = \cos(2\pi(f_0 \mp f_c)t)$$

dove il segno “-” va preso quando si intende inviare le due BLS ed il segno “+” quando si intende inviare le due BLI.

Nell'ipotesi di idealità del canale, $s_n(t)$ è dunque il segnale che giunge all'apparato demodulatore. Quest'ultimo ha il compito di ricostruire $s(t)$. Vediamo allora, sempre dal punto di vista matematico, come si comporta.

Lo schema generale dell'apparato demodulatore in SSB è il seguente:



La prima operazione compiuta dal demodulatore è il prodotto del segnale modulato per il segnale $\cos(2\pi f_c t + \phi)$: l'esito del prodotto è il nuovo segnale

$$x(t) = s_n(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) = \cos(2\pi(f_0 \mp f_c)t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Consideriamo ancora una volta il segno "+": quindi

$$x(t) = \cos(2\pi(f_0 + f_c)t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Usando ancora una volta le opportune formule trigonometriche, $x(t)$ può essere riscritto nella forma

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_0 + 2f_c)t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t - \varphi)$$

Ricordando che

$$\text{Fourier}[\cos(2\pi f_c t + \varphi)] = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_c)$$

si deduce che questo segnale ha uno spettro composto da ben 4 impulsi, applicati nei punti

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + 2f_c \\ f_2 &= -f_0 - 2f_c \\ f_3 &= f_0 \\ f_4 &= -f_0 \end{aligned}$$

Questo spettro entra in ingresso ad un filtro passa-banda avente banda pari proprio a quella del segnale modulante, ossia f_0 . Ciò significa che i due impulsi centrati in $f_0 + 2f_c$ ed in $-f_0 - 2f_c$ vengono filtrati e gli altri due passano invece inalterati.

Nel dominio del tempo, quindi, abbiamo in uscita dal filtro il segnale

$$s_u(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t - \varphi)$$

Questo segnale, a meno del termine $\frac{1}{2}$ (che può essere eliminato usando un filtro di altezza 2) corrisponde esattamente al segnale $s(t)$ quando $\varphi=0$; quando invece $\varphi \neq 0$, esso corrisponde a $s(t)$ semplicemente sfasato.

MODULAZIONE E DEMODULAZIONE PER UN SEGNALE MODULANTE GENERICO

I ragionamenti che abbiamo fatto poco fa sono stati condotti nell'ipotesi semplificativa che il segnale modulante fosse puramente sinusoidale, ossia un segnale del tipo $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Questo ha semplificato molto le cose in quanto sappiamo che lo spettro di un segnale siffatto consta semplicemente di due impulsi. Vediamo invece cosa accade per un segnale $s(t)$ generico, dallo spettro quindi altrettanto generico (sempre, però, dotato della simmetria hermitiana).

Sia $s(t)$ il segnale modulante. Abbiamo detto che il primo passo della tecnica SSB consiste nell'effettuare una modulazione DSB-SC di $s(t)$, per cui otteniamo il nuovo segnale

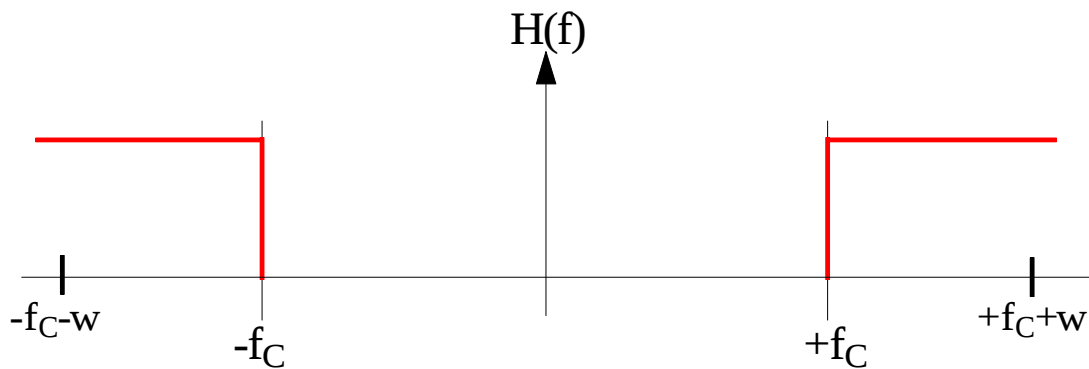
$$s_t(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$$

il cui spettro ha espressione analitica

$$S_t(f) = \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c)$$

Questo spettro consta evidentemente di due repliche (a meno del fattore 1/2) del segnale di partenza, posizionate sulle frequenze f_c e $-f_c$. Da questo spettro dobbiamo filtrare o le due BLS o le due BLI e lo possiamo fare utilizzando un opportuno filtro: sarà un filtro passa-alto se decidiamo di filtrare le due BLI e di trasmettere le due BLS oppure, viceversa, sarà un filtro passa-basso se trasmettiamo le due BLI e filtriemo le due BLS.

Ad esempio, se decidiamo di trasmettere le due BLS, il filtro avrà una funzione di trasferimento $H(f)$ (ideale) del tipo seguente:



Questa $H(f)$ sarà cioè semplicemente composta da due gradini, per cui la possiamo esprimere come

$$H(f) = u(f - f_c) + u(-f + f_c)$$

All'uscita dal filtro, quindi, avremo, nel dominio della frequenza, il segnale

$$\begin{aligned} S_n(f) &= S_t(f)H(f) = \left[\frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c) \right] [u(f - f_c) + u(-f + f_c)] = \\ &= \left[\frac{1}{2} S(f - f_c)u(f - f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c)u(f - f_c) \right] + \left[\frac{1}{2} S(f - f_c)u(-f + f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c)u(-f + f_c) \right] \end{aligned}$$

Questo spettro consta dunque di 4 componenti, ma è facile verificare che, in effetti, due di esse vengono azzerate:

- la prima componente (a meno del termine 1/2) è $S(f - f_c)u(f - f_c)$ e corrisponde ad $S(f)$ posizionata su f_c e moltiplicata per un gradino che azzerava tutto prima di f_c : si tratta dunque di $S(f - f_c)$ privata della BLI;
- la seconda componente è $S(f + f_c)u(f - f_c)$: essa corrisponde al prodotto di $S(f)$ posizionata su $-f_c$ per un gradino che azzerava tutto prima di f_c , per cui questa componente è nulla;

- la terza componente è $S(f - f_c)u(-f + f_c)$: essa corrisponde al prodotto di $S(f)$ posizionata in f_c per un gradino che azzerà tutto oltre $-f_c$, per cui anche questa componente è nulla;
- l'ultima componente è $S(f + f_c)u(-f + f_c)$ e corrisponde ad $S(f)$ posizionata su $-f_c$ e moltiplicata per un gradino che azzerà tutto oltre $-f_c$: si tratta dunque di $S(f+f_c)$ privata della BLI.

Il segnale che viene fuori dal filtro è dunque il seguente:

$$S_n(f) = \frac{1}{2} S(f - f_c) u(f - f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c) u(-f + f_c)$$

Usando la nota proprietà dell'impulso di Dirac secondo cui la convoluzione di una funzione per l'impulso è pari alla funzione stessa calcolata nel punto di applicazione dell'impulso, possiamo riscrivere $S_n(f)$ nel modo seguente:

$$S_n(f) = \frac{1}{2} [S(f)u(f)] * \delta(f - f_c) + \frac{1}{2} [S(f)u(-f)] * \delta(f + f_c)$$

Adesso passiamo dal dominio della frequenza al dominio del tempo: ricordando che il prodotto nel dominio della frequenza corrisponde alla convoluzione nel dominio del tempo ed anche che la convoluzione nel dominio della frequenza corrisponde al prodotto nel dominio del tempo, possiamo scrivere che

$$s_n(t) = \frac{1}{2} [s(t) * \text{Fourier}^{-1}[u(f)]] \text{Fourier}^{-1}[\delta(f - f_c)] + \frac{1}{2} [s(t) * \text{Fourier}^{-1}[u(-f)]] \text{Fourier}^{-1}[\delta(f + f_c)]$$

Adesso ci ricordiamo delle seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(t)}{2} - \frac{j}{2\pi t} &\longleftrightarrow u(f) \\ \frac{\delta(t)}{2} + \frac{j}{2\pi t} &\longleftrightarrow u(-f) \\ e^{j2\pi f_c t} &\longleftrightarrow \delta(f - f_c) \end{aligned}$$

Usando queste proprietà, possiamo riscrivere $s_n(t)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{2} \left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2} - \frac{j}{2\pi t} \right) \right] e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} \left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2} + \frac{j}{2\pi t} \right) \right] e^{-j2\pi f_c t} = \\ &= \frac{1}{2} \left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2} \right) - s(t) * \left(\frac{j}{2\pi t} \right) \right] e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} \left[s(t) * \left(\frac{\delta(t)}{2} \right) + s(t) * \left(\frac{j}{2\pi t} \right) \right] e^{-j2\pi f_c t} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) - \frac{j}{2\pi} \left(s(t) * \frac{1}{t} \right) \right] e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) + \frac{j}{2\pi} \left(s(t) * \frac{1}{t} \right) \right] e^{-j2\pi f_c t} \end{aligned}$$

Un'altra proprietà che possiamo sfruttare è la seguente:

$$s(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{s}(t)$$

dove $\hat{s}(t)$ è ciò che, a suo tempo, abbiamo individuato come prodotto del *filtro di Hilbert* (la cui funzione di risposta all'impulso è appunto $1/\pi t$).

Possiamo dunque scrivere che

$$s_n(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) - \frac{j}{2} \hat{s}(t) \right] e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} s(t) + \frac{j}{2} \hat{s}(t) \right] e^{-j2\pi f_c t}$$

Adesso, raggruppando i termini in cui compare $s(t)$ e quelli in cui compare $\hat{s}(t)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{4} s(t) e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{4} s(t) e^{-j2\pi f_c t} - \left(\frac{j}{4} \hat{s}(t) e^{j2\pi f_c t} - \frac{j}{4} \hat{s}(t) e^{-j2\pi f_c t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} s(t) \left(\frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \left(\frac{e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

In conclusione, quindi, il segnale che inviamo sul canale, dopo la modulazione DSB-SC ed il filtraggio (attraverso il filtro passa-alto) delle due BLI, è il seguente:

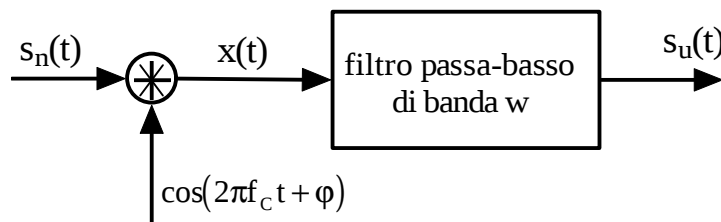
$$s_n(t) = \frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Se, al posto di filtrare le due BLI, avessimo filtrato le due BLS, avremmo ottenuto

$$s_n(t) = \frac{1}{2} s(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2} \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

In generale, il segnale $s_n(t)$ è proprio quello che si ottiene utilizzando l'apparato modulatore considerato in precedenza. La presenza, nella formula ricavata prima, della trasformata di Hilbert corrisponde allo sfasamento (di 90°) di $s(t)$ che avviene nel passaggio di questo segnale al ramo inferiore.

Passiamo alla demodulazione. Anche qui, l'apparato demodulatore è lo stesso disegnato prima e quindi lo riportiamo ancora una volta:



Il segnale in ingresso al demodulatore, nell'ipotesi di idealità del canale e nell'ipotesi di aver filtrato le due BLI, è dunque

$$s_n(t) = \frac{1}{2}s(t)\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

L'esito della prima moltiplicazione è il segnale

$$x(t) = \frac{1}{2}s(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

il quale può essere anche riscritto nella forma seguente (usando le solite formule trigonometriche):

$$x(t) = \frac{1}{2}s(t)\frac{1}{2}[\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \cos(-\varphi)] + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\frac{1}{2}[\sin(4\pi f_c t + \varphi) + \sin(-\varphi)]$$

Ricordando che il coseno è una funzione pari e che il seno è una funzione dispari, possiamo anche scrivere che

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}s(t)\frac{1}{2}[\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \cos(\varphi)] + \frac{1}{2}\hat{s}(t)\frac{1}{2}[\sin(4\pi f_c t + \varphi) - \sin(\varphi)] = \\ &= \frac{1}{4}s(t)\cos(4\pi f_c t + \varphi) + \frac{1}{4}s(t)\cos(\varphi) + \frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(4\pi f_c t + \varphi) - \frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Passando questo segnale al filtro passa-banda di banda pari proprio alla banda w del segnale $s(t)$, è evidente che vengono eliminate le componenti $\frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(4\pi f_c t + \varphi)$ e $\frac{1}{4}s(t)\cos(4\pi f_c t + \varphi)$, per cui rimane

$$s_u(t) = \frac{1}{4}s(t)\cos(\varphi) - \frac{1}{4}\hat{s}(t)\sin(\varphi)$$

Da qui si deduce che, in assenza di sfasamento, cioè per $\varphi=0$, il segnale in uscita al demodulatore, a parte un coefficiente $1/4$ che può essere eliminato dal filtro, è proprio $s(t)$.

Al contrario, in presenza di sfasamento φ , le cose non vanno così bene, per cui anche questo metodo è abbastanza "susceptibile" nei confronti degli sfasamenti.

Modulazione di ampiezza VSB

INTRODUZIONE

Nell'esaminare la tecnica di modulazione di ampiezza denominata SSB, la quale è applicabile solo a segnali con spettro che goda della simmetria hermitiana, abbiamo visto che essa presenta fondamentalmente un vantaggio e uno svantaggio:

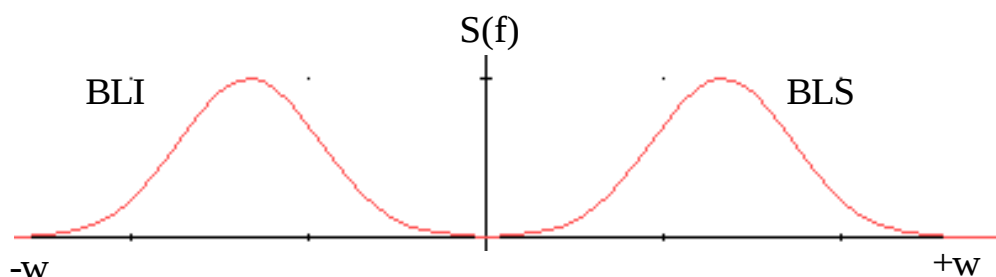
- il grosso vantaggio è quello di consentire un risparmio in banda, in quanto il requisito fondamentale di questa tecnica è quello di trasmettere solo la banda laterale inferiore del segnale oppure solo quella superiore;
- il grosso svantaggio è, invece, quello per cui è difficile realizzare concretamente dei filtri che eliminino la parte di spettro che non si vuole trasmettere.

Questo limite della tecnica SSB fa sì, come detto in precedenza, che essa venga utilizzata per la trasmissione solo di “segnali particolari”, come il **segnale telefonico**: la caratteristica di questi segnali è di presentare un contenuto energetico approssimativamente nullo in corrispondenza delle bassissime frequenze, il che consente di ovviare alle imperfezioni dei filtri.

Questa imperfezione dei filtri viene invece tollerata in un'altra tecnica di modulazione, che prende il nome di **tecnica VSB** (dove l'acronimo sta per **Vestigial Side Band**): si tratta in pratica della SSB, con la differenza fondamentale che viene volontariamente effettuata la trasmissione sia della banda laterale prescelta (superiore o inferiore) sia anche di parte dell'altra. Evidentemente, questa tecnica, proprio per il fatto di ammettere che venga trasmessa parte dell'altra banda laterale, ha il pregio di poter essere applicata a segnali di spettro qualsiasi, ossia a segnali che non necessariamente presentino contenuto energetico nullo alle basse frequenze.

DESCRIZIONE DELLA MODULAZIONE/DEMODULAZIONE

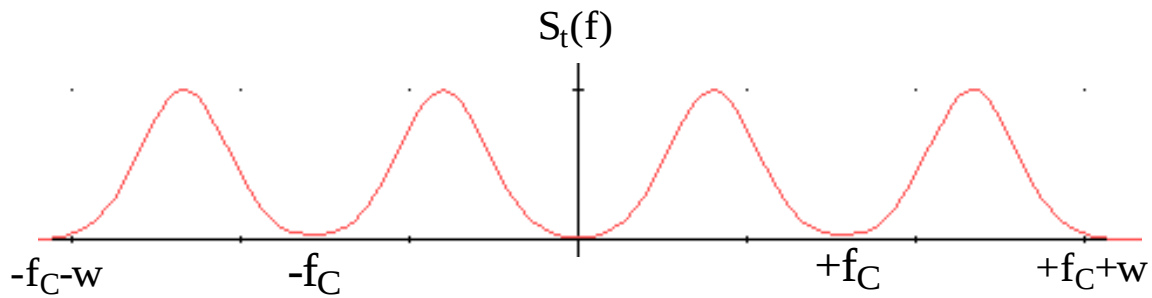
Supponiamo ancora una volta che il segnale analogico $s(t)$ che intendiamo trasmettere abbia il seguente spettro:



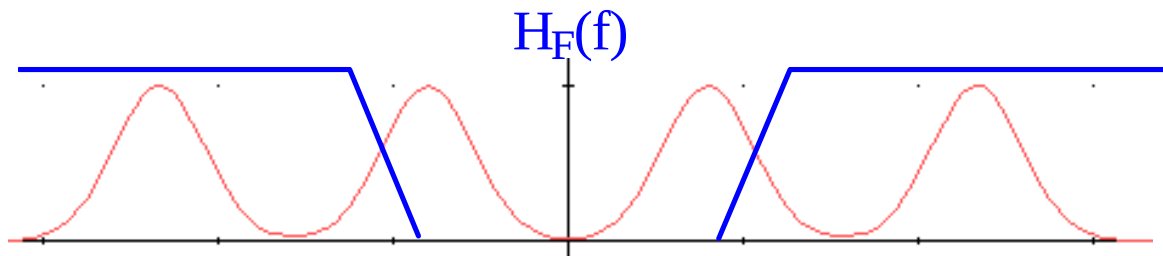
Per prima cosa, effettuiamo ancora una volta una modulazione di ampiezza secondo la tecnica DSB-SC: sappiamo ormai bene che questo consiste nell'ottenere il segnale $s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$, il cui spettro è

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

Da un punto di vista grafico, $S_t(f)$ sarà del tipo seguente:



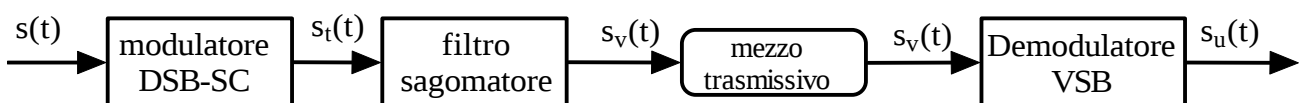
A questo punto, dobbiamo scegliere quale banda laterale, superiore o inferiore, trasmettere: supponiamo di voler trasmettere la banda laterale superiore. Abbiamo detto che, con la tecnica VSB, viene trasmessa tale banda più parte dell'altra; il filtro che utilizzeremo sarà allora del tipo seguente:



(il disegno del filtro è stato anche in questo caso linearizzato).

E' chiara subito una cosa: il filtro deve essere progettato in modo tale che, in fase di demodulazione, sia possibile ricostruire lo spettro del segnale di partenza. Vedremo tra un attimo sulla base di quali parametri va effettuata la progettazione del filtro. Limitiamoci per il momento a dire che il filtro prende il nome di **filtro sagomatore**.

Come sempre, tracciamo uno schema semplificato degli apparati di modulazione e demodulazione:



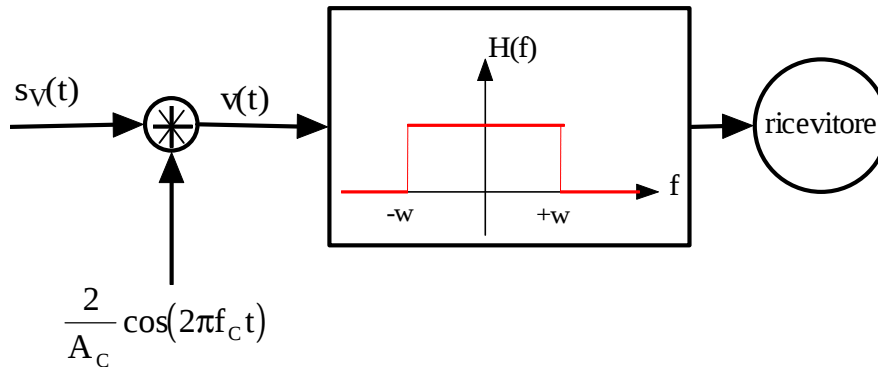
Quindi, il segnale analogico $s(t)$ da trasmettere arriva in ingresso al primo organo, che è il modulatore DSB-SC, il quale non fa altro che generare il segnale

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

ossia moltiplicare $s(t)$ per la portante. Il segnale $s_t(t)$ così ottenuto va poi in ingresso al filtro sagomatore, progettato in modo da effettuare il filtraggio di una parte della banda laterale che si vuole escludere. Indicata con $H_F(f)$ la funzione di trasferimento del filtro, il segnale in uscita, nel dominio della frequenza, è

$$S_v(f) = H_F(f)S_t(f)$$

Questo segnale viene trasmesso mediante il mezzo trasmissivo e, nella ipotesi di idealità di quest'ultimo, è lo stesso segnale che arriva al demodulatore VSB: compito di questo organo è evidentemente la ricostruzione del segnale di partenza. Esso è identico al demodulatore visto per la tecnica DSB-SC, per cui è schematizzabile nel modo seguente:



Vediamo dunque quale è il comportamento di questo demodulatore.

Il primo passo è la moltiplicazione del segnale in ingresso $s_v(t)$ per un segnale sinusoidale avente fase e frequenza identiche a quelle della portante (*demodulazione coerente*): l'esito della moltiplicazione è il segnale

$$v(t) = s_v(t) \frac{2}{A_c} \cos(2\pi f_c t)$$

Nel dominio della frequenza, abbiamo

$$V(f) = \frac{1}{A_c} S_v(f - f_c) + \frac{1}{A_c} S_v(f + f_c)$$

Poiché $S_v(f) = H_F(f)S_t(f)$, possiamo anche scrivere che

$$V(f) = \frac{1}{A_c} H_F(f - f_c)S_t(f - f_c) + \frac{1}{A_c} H_F(f + f_c)S_t(f + f_c)$$

Sappiamo inoltre che

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

per cui

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{A_c} H_F(f - f_c) \left[A_c \frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f) \right] + \frac{1}{A_c} H_F(f + f_c) \left[A_c \frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2} A_c S(f + 2f_c) \right] = \\ &= H_F(f - f_c) \left[\frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} S(f) \right] + H_F(f + f_c) \left[\frac{1}{2} S(f) + \frac{1}{2} S(f + 2f_c) \right] \end{aligned}$$

Evidenziando adesso $S(f)$ in questa relazione, abbiamo quanto segue:

$$V(f) = \frac{1}{2} [H_F(f - f_c) + H_F(f + f_c)] S(f) + \frac{1}{2} H_F(f - f_c) S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} H_F(f + f_c) S(f + 2f_c)$$

Da questa relazione si osserva come $V(f)$ consti di tre repliche, a meno del termine $\frac{1}{2}$ (che può essere eliminato modificando il moltiplicatore), dello spettro del segnale di partenza: la posizione di queste repliche è tale che noi, facendo passare $V(f)$ per un filtro passa-basso di banda pari a w , possiamo filtrare sia $\frac{1}{2} H_F(f + f_c) S(f + 2f_c)$ sia $\frac{1}{2} H_F(f - f_c) S(f - 2f_c)$. Di conseguenza, il segnale che viene fuori dal filtro ha il seguente spettro:

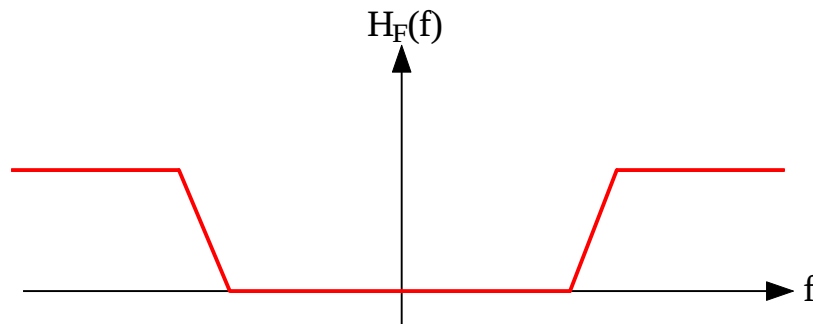
$$S_u(f) = \frac{1}{2} [H_F(f - f_c) + H_F(f + f_c)] S(f)$$

Affinché da questo spettro si riesca a recuperare esattamente $S(f)$ è evidentemente necessario che il termine tra parentesi quadro sia una costante. Questo è dunque il vincolo di cui dobbiamo tenere conto nel progettare il filtro sagomatore: la sua funzione di trasferimento deve essere tale da soddisfare la condizione

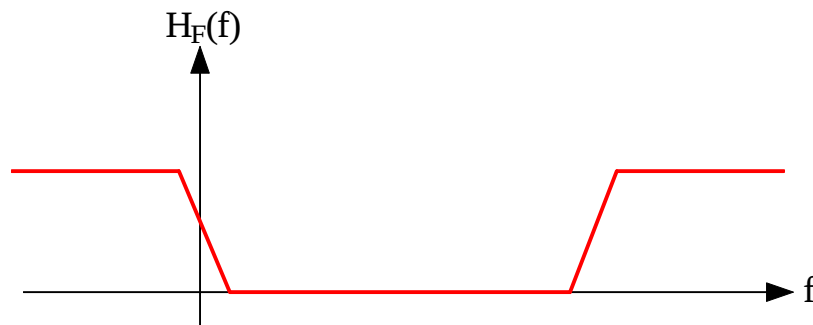
$$H_F(f - f_c) + H_F(f + f_c) = \text{cost}$$

Come si fa allora ad ottenere questa condizione? In primo luogo, a noi interessa che la suddetta condizione sia verificata solo nell'intervallo di frequenza nel quale è definito il nostro segnale. Se essa non è verificata al di fuori di tale intervallo, a noi poco importa. Inoltre, in linea generale, la funzione $H_F(f)$ verificherà quella proprietà se godrà di particolari simmetrie. Vediamo a livello intuitivo cosa deve accadere.

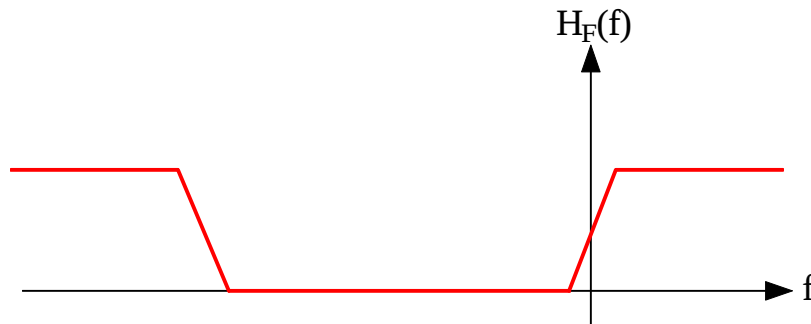
Abbiamo prima detto che la funzione $H_F(f)$ deve essere del tipo seguente:



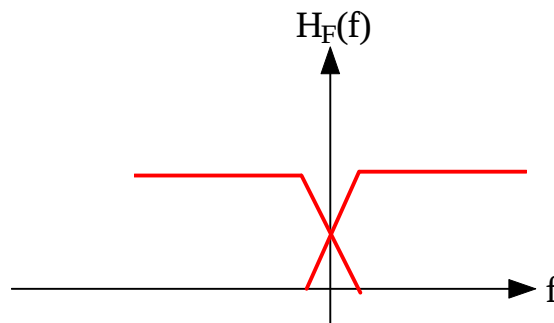
La funzione $H_F(f - f_c)$ non è altro che quella funzione traslata verso destra di f_c :



In modo analogo, $H_F(f+f_C)$ è $H_F(f)$ traslata verso sinistra di f_C :



Sovrapponendo le due funzioni nell'intervallo $[-w, w]$, abbiamo approssimativamente qualcosa del genere:



Appare ovvio, allora, che sommando quelle due curve si ottiene una curva praticamente costante nell'intervallo desiderato.

Modulazione AM-standard

INTRODUZIONE

*Una caratteristica comune alle tecniche di modulazione di ampiezza finora esaminate è il fatto per cui lo spettro del segnale modulato non contiene affatto lo spettro della portante, che è composto da due impulsi posizionati in $+f_C$ e in $-f_C$. Tali due impulsi compaiono invece nello spettro del segnale modulato utilizzato nella tecnica denominata **AM-standard** o anche **modulazione di ampiezza con portante trasmessa**.*

Il motivo per cui compaiono questi due impulsi sta nel fatto che il segnale modulato con questa tecnica corrisponde alla somma della portante e del segnale modulato secondo la tecnica DSB-SC. Per dirla in formule, il segnale modulato nella tecnica AM-standard è

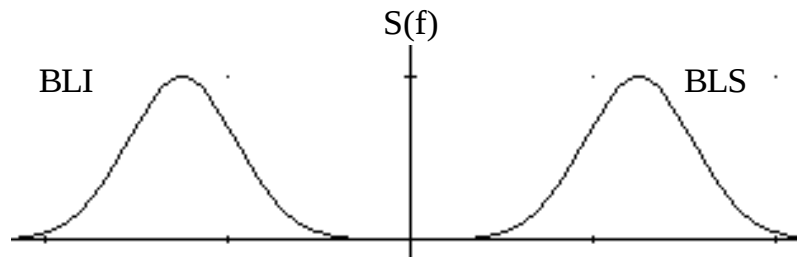
$$s_t(t) = \underbrace{A_C \cos(2\pi f_C t)}_{\text{portante}} + \underbrace{A_C K_a s(t) \cos(2\pi f_C t)}_{\text{segnale modulato DSB-SC}}$$

e può anche essere scritto in forma più compatta nella forma

$$s_t(t) = A_c(1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

Questa espressione mostra molto chiaramente quale sia l'effetto dell'aggiunta della portante rispetto al semplice segnale modulato in DSB-SC: infatti, il segnale $s_t(t)$ può essere visto come una portante $A_c \cos(2\pi f_c t)$ modulata in DSB-SC dal segnale $(1 + K_a s(t))$. Quindi, in altre parole, la modulazione AM standard coincide con una modulazione DSB-SC dove però il segnale modulante non è più $s(t)$ ma $(1 + K_a s(t))$.

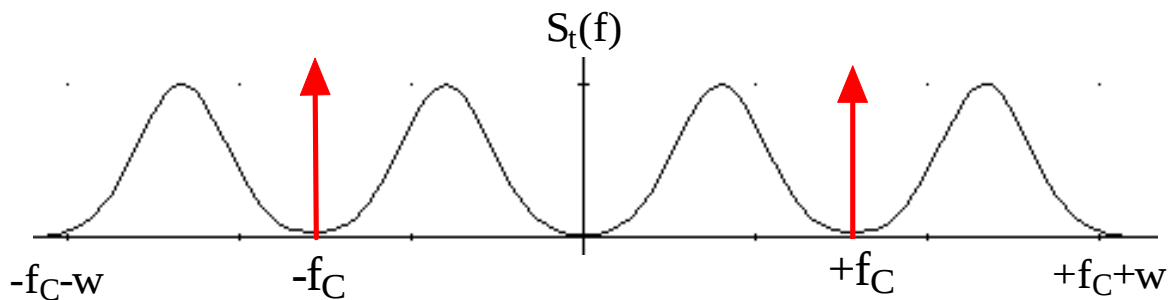
Per avere una idea di come è fatto lo spettro del segnale modulato $s_t(t)$, supponiamo come al solito che il segnale $s(t)$ abbia uno spettro del tipo seguente:



Lo spettro del segnale modulato è

$$S_t(f) = \underbrace{\frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)}_{\text{spettro della portante}} + \underbrace{A_c \frac{1}{2}S(f - f_c) + \frac{1}{2}A_c S(f + f_c)}_{\text{spettro del segnale modulato DSB-SC}}$$

e, graficamente, è del tipo seguente:



(si è usata ovviamente una scala, per l'asse delle frequenze, più compatta rispetto alla figura precedente, per motivi di disegno).

Facciamo notare sin da ora, come si vede chiaramente nella figura, che il livello della portante è sempre maggiore del livello del segnale.

Ovviamente, dato che in tutte le tecniche precedenti non è stato mai trasmesso lo spettro della portante, viene da chiedersi per quale motivo questo invece viene fatto nella tecnica AM-standard. Tra l'altro è chiaro che, dovendo trasmettere anche questo spettro, è necessario trasmettere maggiore potenza di quella che invece basterebbe per trasmettere le nostre informazioni, ossia la potenza necessaria a trasmettere solo il segnale $s_t(t) = A_c s(t) \cos(2\pi f_c t)$. Il motivo sarà chiaro quando avremo esaminato la tecnica di demodulazione, ma possiamo comunque anticiparlo: la portante

viene trasmessa ad un livello di potenza tale da consentire, in ricezione, di effettuare la demodulazione direttamente, senza cioè richiedere la generazione locale di una oscillazione locale coerente³ con la portante. Questa possibilità è chiaramente di particolare interesse quando sia importante semplificare al massimo i ricevitori; d'altra parte, il prezzo che essa richiede non è indifferente, essenzialmente in termini di maggiorazione della potenza trasmessa.

Una osservazione importante riguarda il valore che viene impostato per la costante K_a : esso viene scelto in modo che sia rispettato il seguente vincolo:

$$1 + K_a s(t) > 0 \quad \forall t$$

Questo vincolo viene imposto in modo che la portante modulata conservi, istante per istante, un "involuppo" sempre positivo: infatti, questa è la condizione necessaria per ottenere la demodulazione del segnale senza problemi.

Il caso più critico, ai fini di ottenere un involuppo sempre positivo della portante modulata, è chiaramente quello in cui il segnale modulante $s(t)$ raggiunge il suo massimo valore negativo $s(t)_{pn}$ (che possiamo anche indicare con $-|s(t)|_{pn}$), nel quale caso deve risultare

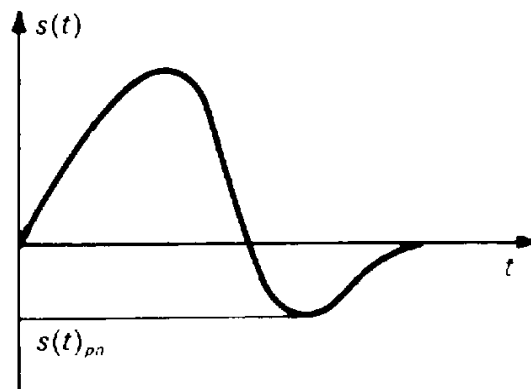
$$1 - K_a |s(t)|_{pn} > 0$$

da cui quindi si ricava che $K_a < \frac{1}{|s(t)|_{pn}}$.

E' possibile ragionare anche in termini di ampiezza della portante. Infatti, se noi prendiamo $K_a = 1/A_C$, dove A_C è l'ampiezza della portante, il segnale modulato assume l'espressione

$$s_t(t) = (A_C + s(t)) \cos(2\pi f_C t) = A_C \left(1 + \frac{s(t)}{A_C} \right) \cos(2\pi f_C t)$$

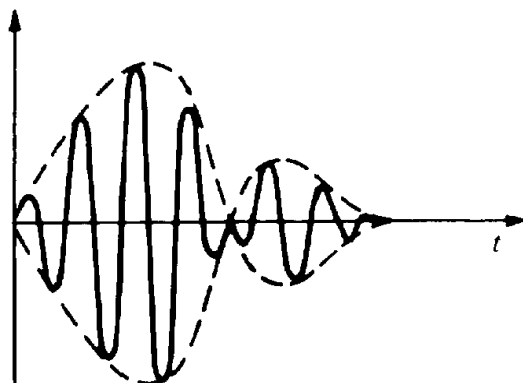
Vediamo allora di capire come è fatto il segnale modulato al variare proprio di A_C . Consideriamo, ad esempio, un segnale modulante $s(t)$ avente la seguente forma d'onda:



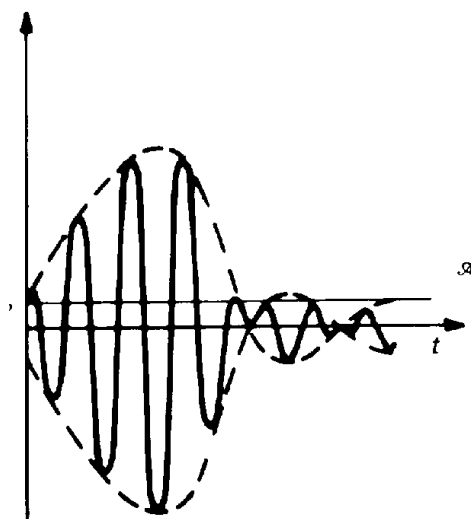
³ avente cioè la stessa frequenza e la stessa fase

Abbiamo indicato con $s(t)_{pn}$ il massimo valore negativo di $s(t)$, il cui modulo è ovviamente $|s(t)|_{pn}$.

Il caso più semplice è quello in cui $A_C=0$, nel quale caso abbiamo evidentemente la semplice modulazione di ampiezza con la tecnica DSB-SC. Il segnale modulato è in questo caso fatto nel modo seguente:

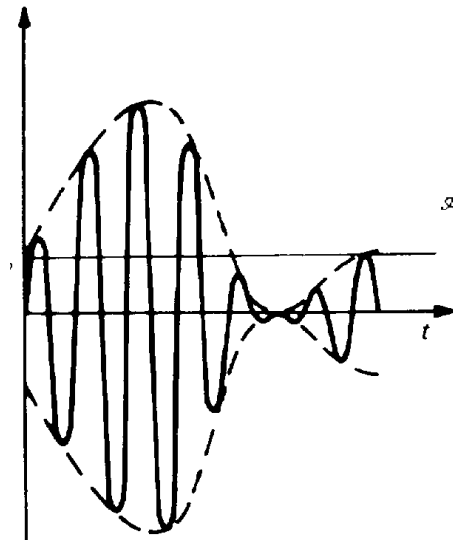


Se supponiamo che A_C venga preso inferiore a $|s(t)|_{pn}$, il segnale modulato è il seguente:

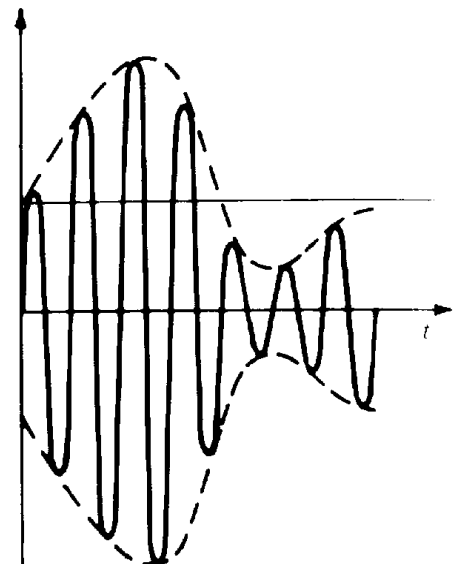


Come si nota, nelle ultime due figure l'involuppo del segnale modulato non corrisponde al segnale modulante $s(t)$, bensì al segnale modulante raddrizzato e non è quello che a noi interessa.

Se invece A_C viene preso esattamente uguale a $|s(t)|_{pn}$, il segnale modulato è il seguente:



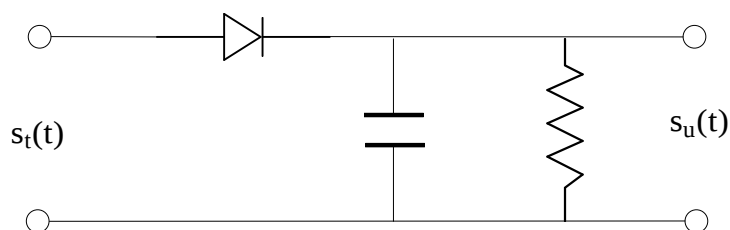
Infine, se A_C viene preso superiore a $|s(t)|_{pn}$, il segnale modulato è il seguente:



Questa è la soluzione migliore possibile ed è infatti quella adottata nella pratica: si nota infatti che l'involuppo del segnale non è mai negativo, per cui consente di risalire al segnale modulante tramite quello che tra poco definiremo come *demodulatore ad involuppo*.

Si nota dunque che l'involuppo del segnale modulato riproduce esattamente la forma d'onda del segnale di partenza, a meno di una traslazione del livello medio verso l'alto (la cosa è ancora più evidente se si pensa che, aumentando la frequenza, aumentano le oscillazioni nell'unità di tempo). Il fatto che accada una cosa del genere è dovuto proprio alla condizione per cui $1 + K_a s(t) > 0$. Se questa condizione non fosse verificata in qualche intervallo di tempo, noi avremmo, in tale intervallo, un coseno tutto al di sotto dell'asse delle ascisse, il che impedirebbe la ricostruzione, in quanto l'involuppo non corrisponderebbe più alla forma d'onda del segnale $s(t)$.

L'apparato demodulatore prende il nome di **demodulatore ad inviluppo** proprio in accordo a quanto detto poco fa circa l'inviluppo di $s_t(t)$; a livello solo qualitativo, il circuito elettrico usato come demodulatore è del tipo seguente:



Si tratta evidentemente di un circuito estremamente semplice da realizzare e questo è il motivo per cui la modulazione AM-standard è quella più utilizzata nella realtà, per esempio nella trasmissione del segnale radiofonico.

Il funzionamento, sinteticamente, è quello per cui il circuito mantiene il condensatore carico sempre alla tensione di picco del segnale modulato.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>