

# Appunti di Teoria dei Segnali

## Capitolo 16 - Il rumore (parte I)

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Introduzione .....                                                               | 1  |
| Strumenti statistici per l'analisi del rumore .....                              | 2  |
| Il rapporto segnale rumore .....                                                 | 4  |
| Il rumore termico.....                                                           | 5  |
| <i>Modello circuitale di un resistore fisico</i> .....                           | 6  |
| <i>Il rumore bianco additivo gaussiano</i> .....                                 | 7  |
| <i>Esempio sul rumore termico</i> .....                                          | 7  |
| Potenza disponibile e potenza di rumore disponibile .....                        | 7  |
| <i>Applicazione: filtro RC passa-basso</i> .....                                 | 9  |
| Potenza di rumore e banda equivalente di rumore.....                             | 11 |
| Fattore di rumore.....                                                           | 14 |
| Temperatura equivalente di rumore .....                                          | 15 |
| Attenuatore resistivo.....                                                       | 17 |
| Fattore di rumore e temperatura equivalente di rumore nei sistemi a cascata..... | 19 |
| <i>Esempio</i> .....                                                             | 22 |

### INTRODUZIONE

In questo capitolo affrontiamo lo studio del cosiddetto **rumore elettronico**, concentrando in particolare la nostra attenzione sul **rumore nei sistemi di telecomunicazione**.

Diamo per prima cosa una definizione del “rumore elettronico”: *si definisce “**rumore elettronico**” la fluttuazione casuale di correnti e/o di tensioni ai morsetti di un dispositivo o di un circuito*.

In pratica, se supponiamo di avere un circuito o un dispositivo che riceve in ingresso un certo segnale e ne fornisce un altro in uscita, il “rumore” rappresenta le variazioni sia sul segnale di ingresso sia sul segnale in uscita rispetto ai valori che tali segnali avrebbero teoricamente. Anche se scenderemo nei dettagli più avanti, se supponiamo di voler generare un segnale di tensione costante pari a 6 volt, in linea di massima non avremo mai un valore esattamente pari a 6 volt, ma avremo un valore che oscilla attorno a questo valore medio. Le oscillazioni rispetto a tale valore medio nominale costituiscono appunto il rumore.

Nella definizione data prima, abbiamo parlato di fluttuazione “casuale” della tensione o della corrente. Che cosa si intende per “casuale”? Si intende il fatto per cui le cause fisiche che generano questo rumore, pur essendo presenti, sfuggono in parte al nostro controllo, ossia non sono da noi ben determinabili.

Perché esiste il rumore elettronico? Anche se lo vedremo meglio più avanti, possiamo già accennare al seguente concetto: l'esistenza del rumore elettronico è legata essenzialmente al fatto che la corrente elettrica non è una grandezza continua, ma è trasportata in quantità discrete uguali alla carica dell'elettrone; il rumore è allora associato proprio ai processi fondamentali di trasporto che avvengono all'interno dei dispositivi che vengono utilizzati per produrre e trattare i segnali.

## STRUMENTI STATISTICI PER L'ANALISI DEL RUMORE

Abbiamo prima posto l'accento sul fatto che non siamo sempre in grado di individuare le cause fisiche del rumore, il quale non risulta perciò sempre qualcosa di deterministico. Questa "casualità" del rumore comporta che esso venga analizzato con metodi statistici anziché deterministici: detto in altre parole, il rumore va considerato e studiato come un **processo stocastico**.

Una prima caratteristica importante di questo processo stocastico è la "stazionarietà": *un processo stocastico si dice "stazionario" quando le sue caratteristiche statistiche si mantengono costanti nel tempo*.

Possiamo ritenere che il **processo di rumore** sia un processo stocastico stazionario: questa ipotesi è evidentemente una approssimazione, che è per noi molto comoda ma che non sempre è verificata nella realtà.

Cominciamo allora a vedere di quali strumenti noi ci serviamo per l'analisi statistica del processo di rumore.

La prima cosa da dire è la seguente: solitamente, per indicare un processo stocastico, si usa la notazione  $X(t)$ , la quale rappresenta in pratica una variabile aleatoria estratta dal processo al generico istante  $t$ . Il fatto che si ritenga il processo di rumore stazionario ci dice che quella variabile aleatoria ha le stesse caratteristiche statistiche (vale a dire densità di probabilità, media, varianza e così via) quale che sia l'istante  $t$  considerato.

Inoltre, abbiamo detto che il rumore consiste nelle fluttuazioni casuali della tensione o della corrente: di conseguenza, con  $X(t)$  possiamo indicare sia la **corrente di rumore**, nel caso in cui analizziamo le correnti, sia la **tensione di rumore**, nel caso in cui analizziamo le tensioni.

Uno dei parametri maggiormente utilizzati per lo studio di un processo stocastico è il **valore medio**, generalmente indicato con  $E[X(t)]$  oppure anche con  $\bar{X}(t)$ : tuttavia, nel caso del processo di rumore, questo parametro non ci è di molto aiuto in quanto si verifica che il valore medio del processo di rumore è nullo.

Per ovviare a questo "inconveniente" si fa allora riferimento al cosiddetto **valore quadratico medio**, che noi indicheremo con  $\bar{X}^2(t)$  oppure con  $E[X^2(t)]$

Legato al valore quadratico medio c'è un altro parametro, chiamato **valore efficace** del processo: esso è definito dalla relazione

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{X}^2(t)}$$

e bisogna stare attenti a non confonderlo con il valore medio.

Sia il valore quadratico medio sia il valore efficace del processo di rumore risultano diversi da zero (ovviamente, sono entrambe quantità positive).

Circa il valore quadratico medio, citiamo subito un importante risultato del quale faremo uso in seguito: supponiamo di avere due diversi processi stocastici  $X(t)$  e  $Y(t)$  e consideriamo la loro sovrapposizione, ossia il nuovo processo stocastico

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

Si può dimostrare che il valore quadratico medio di  $Z(t)$  è dato dalla seguente relazione:

$$\bar{Z}^2(t) = \bar{X}^2(t) + \bar{Y}^2(t) + 2\rho\bar{X}(t)\bar{Y}(t)$$

Questa relazione dice in pratica che il valore quadratico medio di  $Z(t)$  è dato dalla somma dei valori quadratici medi di  $X$  ed  $Y$ , più un terzo termine, il quale tiene conto della “correlazione” esistente tra  $X(t)$  e  $Y(t)$ : si definisce infatti “**coefficiente di correlazione  $\rho$** ” di  $X(t)$  e  $Y(t)$  la quantità

$$\rho = \frac{\overline{XY} - \bar{X} * \bar{Y}}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Se i due processi sono tra loro incorrelati, ossia se  $\rho=0$ , abbiamo evidentemente che

$$\overline{Z^2}(t) = \overline{X^2}(t) + \overline{Y^2}(t)$$

e si dice che i due processi **si sommano in potenza**.

Viceversa, se esiste una correlazione, ossia se  $\rho$  non è nullo, allora vale la relazione generale scritta prima. Se, per esempio, si considerano due tensioni di rumore, in presenza di correlazione si dice che i due contributi di rumore **si sommano in tensione**.

Quanto detto adesso ci serve per il motivo seguente: le cause fisiche del rumore elettronico sono diverse e non è detto che si presentino singolarmente; è possibile cioè che due o più di esse siano presenti contemporaneamente e si sovrappongano. Allora, per analizzare il processo di rumore totale, per esempio nel caso di due sorgenti di rumore, noi dobbiamo utilizzare proprio la formula

$$\overline{Z^2}(t) = \overline{X^2}(t) + \overline{Y^2}(t) + 2\rho\overline{X}(t)\overline{Y}(t)$$

Questa formula ci obbliga a valutare il valore di  $\rho$ : questa valutazione, purtroppo, non è sempre agevole e questo è il motivo per cui spesso si suppone che le sorgenti di rumore siano solo parzialmente correlate, anche nel caso in cui esse dipendano dallo stesso fenomeno fisico. Quando, invece, si riesce a dimostrare che esse sono “indipendenti” tra loro, ossia che non si influenzano a vicenda, allora si può senz’altro ritenere  $\rho=0$ .

I parametri fino ad ora introdotti sono tutti relativi al dominio del tempo. Tuttavia, spesso è utile effettuare la propria analisi anche nel **dominio della frequenza**, al fine di aggirare le difficoltà di calcolo presentate, ad esempio, dagli integrali di convoluzione: si pensi, ad esempio, alla relazione che intercorre tra l’ingresso e l’uscita di un sistema lineare tempo-invariante, ossia

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

dove  $x(t)$  è l’ingresso,  $y(t)$  la corrispondente uscita e  $h(t)$  la risposta impulsiva del sistema. Quella relazione implica evidentemente il calcolo di un *integrale di convoluzione*, che spesso risulta complicato. Viceversa, spostandoci nel dominio della frequenza, quella relazione diventa semplicemente

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

ossia si passa da un prodotto di convoluzione ad un prodotto normale.

Il parametro più utile, nel dominio della frequenza, è senz'altro la cosiddetta **densità spettrale di potenza**: questa funzione, solitamente indicata con  $S(f)$ , è una funzione della frequenza  $f$  definita in modo tale che sia soddisfatta la relazione

$$\overline{X^2}(t) = \int_0^{\infty} S(f) df$$

ossia in modo tale che l'area da essa sottesa, nell'ambito delle frequenze positive, sia proprio pari al valore quadratico medio del processo stocastico considerato. Detto anche in altre parole, quella relazione dice che  $\overline{X^2}(t)$  è pari alla somma, esteso a tutto quanto lo spettro delle frequenze positive, dei contributi della densità spettrale alle diverse frequenze.

N.B. Ricordiamo che la funzione  $S(f)$  è definita anche come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione della variabile  $X(t)$

La funzione  $S(f)$  risulta particolarmente importante in funzione del discorso seguente: supponiamo che il nostro processo stocastico  $X(t)$  entri in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante, il quale produce una certa uscita  $Y(t)$  che sarà anch'essa un processo stocastico; se  $\overline{X^2}(t)$  è il valore quadratico medio del processo in ingresso, è facile verificare che il valore quadratico medio del processo in uscita è

$$\overline{Y^2}(t) = \int_0^{\infty} |H(f)|^2 S(f) df$$

dove  $H(f)$  è la funzione di trasferimento del sistema stesso.

## IL RAPPORTO SEGNALE RUMORE

Una cosa importante circa il rumore è la seguente: *il rumore ha una sua importanza non in senso assoluto, ma in rapporto al segnale cui si sovrappone*. E' chiaro, infatti, che il rumore diventa importante quando la sua ampiezza è confrontabile con quella del segnale, mentre è più o meno trascurabile quando l'ampiezza del segnale è più o meno maggiore di quella del rumore.

In questo senso, quindi, noi siamo prevalentemente interessati non al rumore in se stesso, bensì al cosiddetto **rapporto segnale-rumore**: in termini statistici, questo rapporto, solitamente indicato con la notazione  $S/N$  (dove "S" sta per "signal" e "N" per "noise" ossia appunto "rumore"), corrisponde al rapporto tra la potenza statistica del segnale e la potenza statistica del rumore.

N.B. Ricordiamo che per "potenza statistica" di un segnale aleatorio  $X(t)$ , indicata generalmente con  $E[\overline{X^2}(t)]$ , si intende proprio il suo valore quadratico medio

## IL RUMORE TERMICO

L'unico tipo di rumore che considereremo da qui in avanti è il cosiddetto **rumore termico**: se prendiamo un resistore fisico generico, mantenuto isolato da qualsiasi circuito (posto cioè in condizioni di circuito aperto), e colleghiamo i suoi morsetti a quelli di un oscilloscopio molto sensibile, osserviamo delle leggere fluttuazioni di tensione, che costituiscono appunto il rumore termico.

Da un punto di vista fisico, la causa del rumore termico è il continuo e disordinato moto di agitazione termica degli elettroni nel resistore.

Lo studio di questo rumore ha portato alle seguenti conclusioni matematiche:

- in primo luogo, indicata con  $R$  la resistenza del resistore, con  $T$  la temperatura alla quale esso si trova, con  $h$  la costante di Planck e con  $k$  la costante di Boltzmann, la funzione densità spettrale di potenza di tensione di rumore risulta avere espressione

$$G_V(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1} \quad \forall f$$

- in secondo luogo, mentre quella espressione è valida quale che sia la frequenza di funzionamento del dispositivo, è possibile fare qualche semplificazione nel caso in cui tale frequenza sia relativamente "bassa": infatti, si verifica che, per frequenze inferiori a  $10^{12}$ (Hz), il termine esponenziale che compare al denominatore risulta molto elevato, per cui è prevalente rispetto al valore -1; inoltre, sviluppandolo in serie e facendo le opportune semplificazioni, si trova che la funzione  $G_V(f)$  assume l'espressione

$$G_V(f) = 2kTR$$

Dato che frequenze inferiori a  $10^{12}$ (Hz) sono le frequenze tipicamente utilizzate nell'elettronica, noi utilizzeremo nel seguito sempre quest'ultima relazione.

N.B. Quella espressione di  $G_V(f)$  è ottenuta considerando sia le frequenze negative sia le frequenze positive. Tuttavia, dato che le frequenze di interesse sono solo quelle positive, spesso si usa la relazione  $G_V(f) = 4kTR$  che è relativa solo a tali frequenze.

Per risalire, dalla densità spettrale di potenza di tensione di rumore, al valore quadratico medio della tensione di rumore, dobbiamo applicare la già citata relazione

$$\overline{X^2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df$$

Anziché, però, effettuare l'integrazione tra 0 ed  $\infty$ , ci limitiamo ad un generico intervallo di frequenza  $[-B, +B]$  che supponiamo sia quello nel quale il resistore deve lavorare: il risultato della integrazione è allora

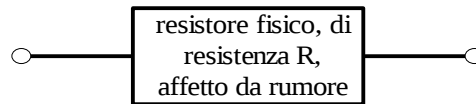
$$\overline{V^2}(t) = 4kTRB$$

Questa relazione indica, come è abbastanza ragionevole aspettarsi, che *il rumore termico è direttamente proporzionale alla temperatura*.

Esso quindi tende a 0(volt) per T che tende a 0(°K).

## Modello circuitale di un resistore fisico

Detto questo, vediamo allora come è possibile tenere conto della presenza del rumore termico nel modello circuitale di un resistore: sia perciò



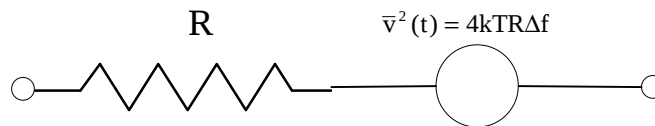
il **resistore fisico** del quale noi vogliamo trovare il modello circuitale.

Se non consideriamo il rumore (per cui consideriamo un **resistore non rumoroso**), sappiamo bene che il modello circuitale è semplicemente



ossia un elemento caratterizzato dalla equazione di funzione  $V=RI$ .

Viceversa, al fine di tenere conto del rumore, dobbiamo aggiungere una tensione di valore quadratico medio pari a  $\bar{v}^2(t) = 4kTR\Delta f$ : il modello circuitale diventa perciò il seguente:



Facciamo osservare che, nel generatore di tensione che abbiamo inserito, non sono stati indicati né il valore istantaneo né le polarità: ciò deriva proprio dal fatto che non possiamo prevedere né l'una né l'altra cosa, per cui possiamo solo considerare il valore quadratico medio di quella tensione. Nel fare i calcoli, dobbiamo ovviamente considerare, come tensione di rumore, la quantità  $v_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{v}^2(t)}$ .

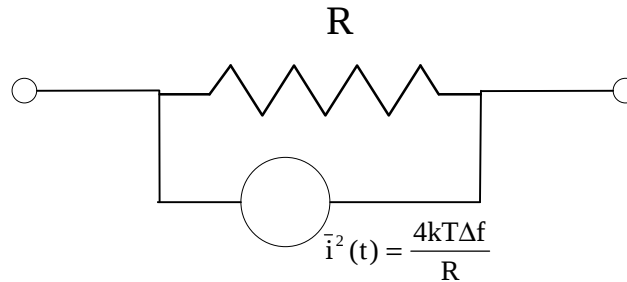
Quello è dunque il modello di un resistore reale ed è evidentemente il “modello di Thevenin”. Ne esiste anche un altro, detto “modello di Norton”, il quale tiene conto, anziché della tensione di rumore, della corrente di rumore, il cui valore quadratico medio risulta essere

$$\bar{i}^2(t) = \frac{4kTB}{R}$$

e deriva dalla funzione densità spettrale di potenza della corrente di rumore

$$G_i(f) = \frac{2kT}{R}$$

Il modello è il seguente:



## Il rumore bianco additivo gaussiano

Abbiamo prima trovato che la densità spettrale di potenza del rumore termico è  $G_V(f) = 2kTR$  e abbiamo sottolineato come si tratti di una funzione costante al variare della frequenza  $f$ . In termini di armoniche, ciò significa che tutte le armoniche alle diverse frequenze hanno la stessa ampiezza. Un rumore così fatto prende il nome di **rumore bianco**, in contrapposizione al “*rumore colorato*”, per il quale la  $S(f)$  è variabile con  $f$ .

Un'altra cosa che è stata verificata è che questo rumore termico ha una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano ed è questo il motivo per cui si parla di “**rumore bianco additivo gaussiano**” o, più brevemente, **AWGN**. Il termine “additivo” indica che questo tipo di rumore si somma semplicemente al segnale utile, come vedremo meglio in seguito.

## Esempio sul rumore termico

Al fine di avere una idea di quanto possa valere la tensione di rumore termico, consideriamo il seguente esempio numerico: supponiamo di avere un resistore fisico di resistenza  $R=1\ \Omega$ , che lavora alla temperatura di  $300^\circ\text{K}$  entro una banda di frequenza di  $10\ \text{kHz}$ : il valore efficace della tensione di rumore risulta essere

$$v_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{v}^2(t)} = \sqrt{4kTRB} = 2\sqrt{kTRB} = 13(\mu\text{V})$$

## POTENZA DISPONIBILE E POTENZA DI RUMORE DISPONIBILE

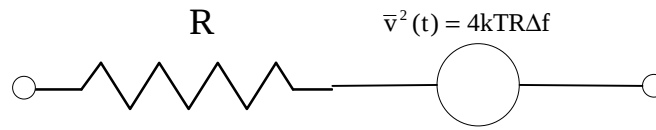
Supponiamo di avere un certo **sistema elettronico** (sia esso un dispositivo o un semplice circuito) in grado di trasferire potenza al carico collegato ai suoi morsetti: *si definisce **potenza disponibile** la massima potenza che il sistema può trasferire al carico*. Dall'elettrotecnica, ci ricordiamo un fondamentale teorema circa la potenza trasferibile da un sistema ad un carico: si tratta del cosiddetto “*teorema del massimo trasferimento di potenza*”, secondo il quale *un sistema è in grado di trasferire su un carico, rappresentato da una certa impedenza  $\dot{z}_L$ , la massima potenza possibile solo quando*

$$\dot{z}_L = (\dot{z})^*$$

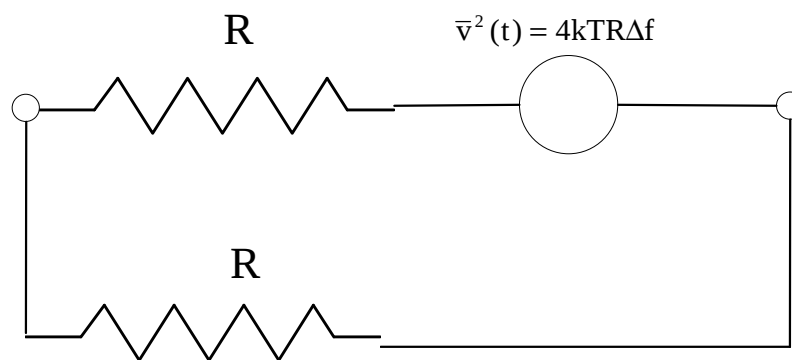
dove  $\dot{z}$  è l'impedenza di uscita del sistema stesso, ossia l'impedenza vista dal carico.

Vediamo come ci può essere di aiuto questo nei discorsi che stiamo facendo.

Come **circuito monoporta** consideriamo il modello circuitale prima ricavato per un resistore di resistenza  $R$  affetto da rumore termico:



E' chiaro che la presenza di quel generatore di tensione (che poi è la tensione di rumore) conferisce a questo circuito la capacità di trasferire una certa potenza all'eventuale carico connesso ai morsetti. Se questo carico consiste in una certa impedenza  $\hat{z}_L$ , il teorema prima enunciato ci dice che il massimo trasferimento di potenza si ha quando tale carico è pari al complesso coniugato dell'impedenza del circuito di alimentazione: tale impedenza è reale e pari ad  $R$ , per cui il massimo trasferimento di potenza si avrà su un carico pari a sua volta ad  $R$ .



Quindi, in questo circuito, la potenza trasferita sul carico è pari esattamente a quella che abbiamo definito *potenza disponibile* (che, ovviamente, in questo caso è una **potenza disponibile di rumore**). Vogliamo allora valutare quest'ultima: ovviamente, dato che non conosciamo il valore preciso della tensione del generatore, ma solo il suo valore quadratico medio, ciò che possiamo calcolare è il **valore medio della potenza disponibile**, definito, in questo caso, da

$$\overline{P_L(t)} = \overline{Ri^2(t)}$$

Dobbiamo dunque calcolare  $\overline{i^2(t)}$ . Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni a l'equazione di funzionamento del resistore, troviamo che  $i(t) = \frac{v(t)}{2R}$ , da cui si ricava che

$$\overline{i^2(t)} = \frac{\overline{v^2(t)}}{4R^2}$$

e quindi anche che

$$\overline{P_L(t)} = \frac{\overline{v^2(t)}}{4R}$$

Sapendo adesso che  $\bar{v}^2(t) = 4kTRB$ , dove ricordiamo che  $2B$  è l'intervallo di frequenza nel quale lavora il circuito, possiamo concludere che

$$\overline{P_L(t)} = kTB$$

Abbiamo dunque trovato, con questo discorso, che *il valor medio della potenza di rumore disponibile generata da un resistore è  $\overline{P_L(t)} = kTB$ .*

La cosa interessante che si nota è che questo valore medio non dipende dalla resistenza  $R$ , ma dipende SOLO dalla temperatura e dalla banda di lavoro.

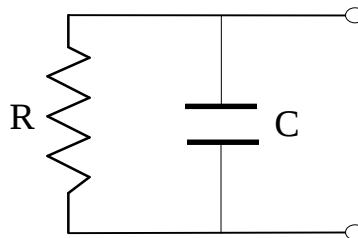
Da questo valore medio possiamo ricavare la cosiddetta **densità spettrale di potenza disponibile**, che nel seguito indicheremo con  **$G_a(f)$** : si trova evidentemente che

$$G_a(f) = \frac{kT}{2}$$

Questo è un risultato molto importante che sarà ripreso in tutti i discorsi che faremo nel seguito.

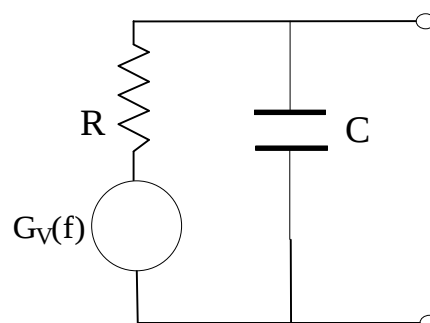
### Applicazione: filtro RC passa-basso

Consideriamo il seguente circuito RC:



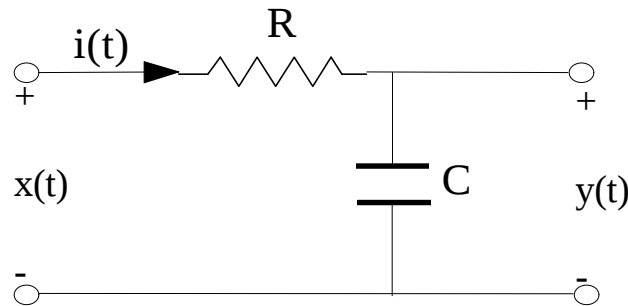
Facciamo l'ipotesi che il resistore  $R$  sia un **resistore reale**, perciò affetto da rumore, mentre il condensatore sia ideale, ossia non affetto da rumore. Vogliamo conoscere l'uscita del sistema, che indichiamo con  $y(t)$ , in termini di potenza di rumore.

La prima cosa che risulta evidente è che l'uscita  $y(t)$ , in questo circuito, è presente proprio perché è presente un ingresso: tale ingresso è appunto il rumore termico generato dal resistore reale. Al fine di visualizzare questo ingresso, possiamo sostituire il resistore mediante il suo modello circuitale contenente il generatore di rumore:



dove naturalmente  $G_V(f) = 2kTR$ .

Al fine di visualizzare ancora meglio l'ingresso e l'uscita del circuito, possiamo ridisegnare quest'ultimo nel modo seguente:



L'ingresso è dunque costituito da una **tensione di rumore**  $x(t)$  avente, come detto in precedenza, valore medio nullo, valore quadratico medio pari a  $\overline{x^2(t)} = 4kTRB$  e densità spettrale di potenza  $G_V(f) = 2kTR$ . Vogliamo ricavare la densità spettrale di potenza  $G_Y(f)$  della tensione in uscita ed quindi il valore quadratico di tale tensione.

La prima cosa che ci viene in mente è che quel sistema, che è un normale **filtro passa-basso** (ossia un dispositivo che lascia passare solo le componenti di bassa frequenza del segnale in ingresso), è un sistema lineare tempo-invariante: per sistemi lineari tempo-invarianti, sappiamo che la densità spettrale di potenza del segnale in uscita è legata a quella del segnale in ingresso dalla relazione

$$G_Y(f) = G_V(f)|H(f)|^2$$

dove  $H(f)$  è chiaramente la **funzione di trasferimento** del sistema stesso. Il nostro obiettivo è dunque quello di conoscere tale funzione di trasferimento: il calcolo è stato già fatto in precedenza ed ha fornito come risultato la funzione

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

Calcolando il modulo quadro di questa funzione, si ottiene

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi RCf)^2}$$

per cui la densità spettrale di potenza della tensione in uscita è

$$G_Y(f) = \frac{2kTR}{1 + (2\pi RCf)^2}$$

Infine, a partire da  $G_Y(f)$ , siamo in grado di calcolarci quanto vale il valore quadratico medio della tensione in uscita; basta ricordarsi di due importanti risultati:

- in primo luogo, la funzione  $G_Y(f)$  è per definizione la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di  $y(t)$ , definita dalla relazione  $R_Y(\tau) = [y(t)y(t+\tau)]$ ;

- in secondo luogo, è evidente che

$$E[y^2(t)] = E[y(t)y(t)] = R_Y(\tau = 0)$$

Di conseguenza, dobbiamo determinare l'antitrasformata di  $G_Y(f)$  e poi calcolarla per  $\tau=0$ .

Si trova allora che la funzione di autocorrelazione di  $y(t)$ , ossia appunto l'antitrasformata della funzione  $G_Y(f)$ , è

$$R_Y(\tau) = \frac{kT}{C} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

Calcolandola per  $\tau=0$ , otteniamo che

$$E[y^2(t)] = R_Y(\tau = 0) = \frac{kT}{C}$$

Abbiamo dunque trovato il seguente risultato: *dato un filtro RC passa-basso, la tensione di rumore da esso introdotta a causa della presenza del resistore reale (e in presenza di un condensatore supposto reale) ha valore quadratico medio pari a  $kT/C$ .*

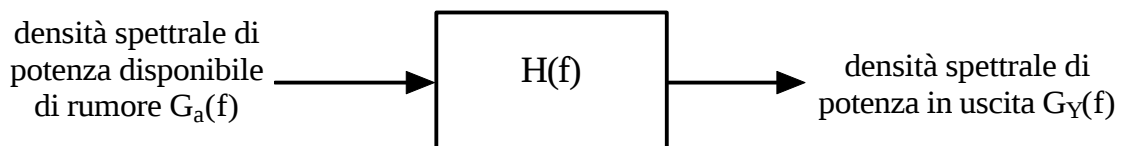
E' interessante notare come questa tensione di rumore non dipenda da R, mentre dipende da C e ancora una volta, in modo direttamente proporzionale, dalla temperatura di lavoro.

Tanto per avere una idea quantitativa, supponiamo che il filtro lavori alla temperatura  $T=290^\circ\text{K}$  e utilizzando una capacità  $C=0.1\mu\text{F}$ : in tal modo, il valore quadratico medio della tensione di rumore risulta essere di  $E[y^2(t)] = 4 \cdot 10^{-14}$  e ad esso corrisponde un valore efficace  $y_{\text{eff}} = 2 \cdot 10^{-7}$  (volt).

Questi valori ci aiutano a ribadire un concetto importante già espresso in precedenza: il valore efficace della tensione di rumore risulta evidentemente piuttosto basso, per cui si è portati a ritenerlo trascurabile; questo è lecito solo quando il valore della tensione del segnale effettivamente applicato al filtro (o al generico dispositivo) è molto maggiore (almeno due ordini di grandezza) rispetto ad esso; al contrario, ci sono delle applicazioni in cui il segnale applicato e il rumore risultano del tutto confrontabili ed è in questi casi che il rumore diventa importante e va perciò studiato.

## POTENZA DI RUMORE E BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE

Consideriamo un generico sistema avente funzione di trasferimento  $H(f)$ . In accordo a quanto abbiamo visto nell'esempio precedente, in assenza di un segnale applicato in ingresso al sistema, possiamo considerare come ingresso proprio la tensione di rumore termico introdotta dagli elementi resistivi presenti nel sistema.



Supponiamo anche che il sistema sia tale che la potenza di rumore trasferita sia quella massima possibile: si tratta perciò di quella che abbiamo definito "potenza disponibile di rumore". Indicata

sempre con  $G_a(f)$  la densità spettrale di potenza disponibile di rumore, possiamo dunque scrivere, detta  $G_Y(f)$  la densità spettrale di potenza della tensione in uscita al sistema, che

$$G_Y(f) = G_a(f) |H(f)|^2$$

Si definisce allora **potenza di rumore in uscita**, indicata generalmente con **N**, la seguente quantità:

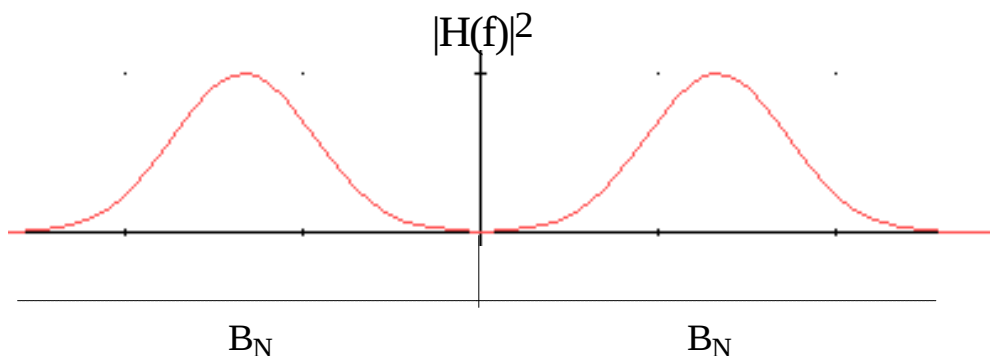
$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} G_Y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(f) |H(f)|^2 df$$

Nel caso in cui la tensione di rumore termico, considerata come ingresso al circuito, sia quella generata da un unico resistore, abbiamo in precedenza trovato che  $G_a(f) = \frac{kT}{2}$ : sostituendo nell'espressione di N, abbiamo perciò che

$$N = \frac{kT}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

In base a questa formula, il calcolo della potenza di rumore (nell'ipotesi che tale rumore provenga da un solo resistore) si può fare solo a patto di conoscere come è fatta la funzione di trasferimento del sistema e a patto di poter calcolare quell'integrale. Spesso, la funzione di trasferimento ha una espressione complessa, per cui il calcolo di quell'integrale non è tanto agevole. Si preferisce allora utilizzare, come risultato di quell'integrale, un valore approssimato. Come si ricava questo valore approssimato?

La funzione  $|H(f)|^2$  gode evidentemente di due proprietà: la prima è che è a valori non negativi; la seconda è che è una funzione pari, il che significa che presenta, per così dire, due "parti" perfettamente simmetriche rispetto all'origine delle frequenze. Un esempio potrebbe essere la seguente funzione:



Come indicato anche in questa figura, è chiaro che la funzione  $|H(f)|^2$ , sia nel campo delle frequenze negative sia in quello delle frequenze positive, sarà non nulla entro un certo intervallo di frequenza di ampiezza **B<sub>N</sub>** mentre sarà nulla al di fuori di tale intervallo.

Allora, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

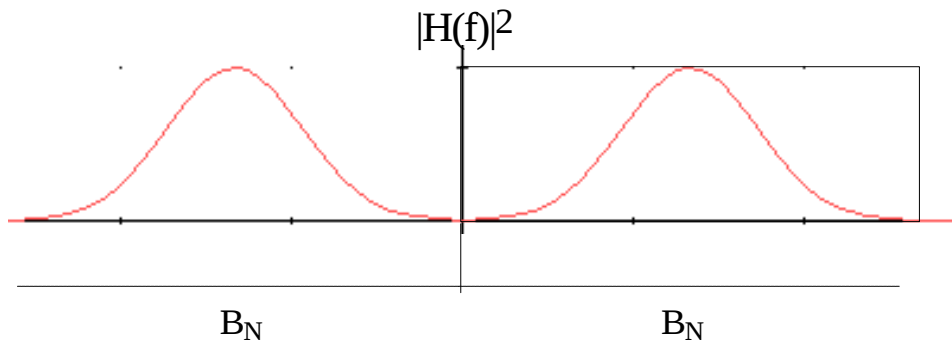
equivale a calcolare l'area sottesa dalle due "parti" della funzione  $|H(f)|^2$ : essendo tali parti uguali, ossia essendo la funzione pari, possiamo subito scrivere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

per cui la potenza di rumore risulta essere

$$N = kT \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

L'integrale che rimane è dunque l'area sottesa da una delle due "parti" della funzione  $|H(f)|^2$ ; sicuramente, quest'area non sarà superiore al rettangolo nel quale la curva è contenuta:



L'area di questo rettangolo è il prodotto del valore massimo della funzione  $|H(f)|^2$  per l'ampiezza  $B_N$  dell'intervallo: posto allora  $g = \left(|H(f)|^2\right)_{\text{MAX}}$  (detto **guadagno di potenza** del sistema), l'approssimazione che si fa consiste nel porre

$$\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df = B_N g$$

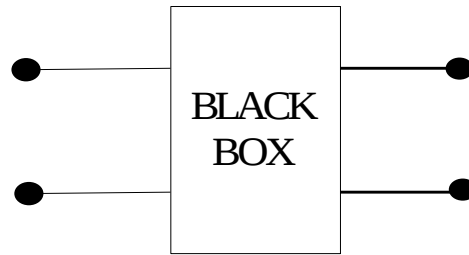
per cui l'espressione utilizzata per la potenza di rumore risulta essere

$$N = kTgB_N$$

All'ampiezza  $B_N$  si dà il nome di **banda equivalente di rumore** ed è il valore usato sempre nei calcoli della potenza di rumore.

## FATTORE DI RUMORE

Consideriamo un circuito biporta generico:



Supponiamo che questo circuito sia “**rumoroso**”, ossia che esso introduca, quando riceve un segnale in ingresso da trattare in modo opportuno, un “rumore” (che può essere tensione di rumore termico o corrente di rumore termico) dovuto alla natura fisica degli elementi da cui è costituito. Supponiamo inoltre che questo circuito sia inserito in una “rete adattata”, ossia dimensionata in modo tale che si abbia in ogni caso il massimo trasferimento di potenza tra i vari dispositivi connessi: ciò significa che in ingresso il circuito riceve la massima potenza possibile e in uscita eroga la massima potenza possibile.

Supponiamo ancora che il circuito venga alimentato da un generatore che applica una certa tensione ai morsetti di ingresso: questo generatore presenta una propria resistenza e questo implica che esso generi, oltre al segnale utile, anche un certo rumore termico, ossia una tensione di rumore che si sovrappone a quella costituita dal segnale utile. Dato che noi vogliamo studiare il comportamento del circuito dal punto di vista del rumore, supponiamo che l'ingresso al circuito non sia il segnale utile sommato al rumore, ma sia solo il rumore. In uscita avremo dunque una certa tensione che sarà evidentemente tensione di rumore: tuttavia, *avendo supposto il circuito rumoroso, ci aspettiamo in uscita un contributo dovuto al rumore in ingresso e poi un contributo dovuto al rumore introdotto dal circuito stesso*.

Vediamo allora di quantificare, a livello analitico, tutte queste considerazioni.

Indichiamo con  $N_{dU}$  la **potenza disponibile in uscita**: si tratta evidentemente della potenza totale di rumore in uscita al circuito, dove usiamo anche l'aggettivo “disponibile” in quanto abbiamo supposto verificata la condizione di adattamento. Questa potenza di uscita, come detto, sarà la somma del contributo dovuto al rumore in ingresso, che indichiamo genericamente con  $N_{dI}$ , e del contributo dovuto alle caratteristiche del sistema, che indichiamo con  $N_d$ : quindi

$$N_{dU} = N_{dI} + N_d$$

Si definisce allora **fattore di rumore** il termine

$$F = \frac{N_{dU}}{N_{dI}} = 1 + \frac{N_d}{N_{dI}}$$

ossia il rapporto tra la potenza disponibile totale di rumore in uscita e la potenza di rumore in uscita dovuta solo all'ingresso (indipendente quindi dal rumore introdotto dal sistema).

Possiamo quantificare meglio il termine  $N_{dI}$ : infatti, avendo detto che esso corrisponde al contributo proveniente dalla potenza di rumore generata dalla resistenza del generatore che alimenta il circuito, possiamo scrivere che

$$N_{dI} = kTg_d B_N$$

Vediamo come si giustifica questa relazione: intanto, il prodotto  $kT$  è la densità spettrale di potenza disponibile di rumore erogata dal generatore;  $B_N$  è la banda equivalente di rumore definita nel paragrafo precedente;  $g_d$  è il guadagno di potenza del circuito. Allora, se in ingresso abbiamo una potenza di rumore  $kTB_N$ , questa potenza, entrando nel circuito, viene da esso amplificata secondo un guadagno  $g_d$ , per cui in uscita essa diventa  $N_{dI} = kTg_d B_N$ .

Sulla base di ciò, possiamo scrivere che

$$N_{dU} = kTg_d B_N + N_d$$

e quindi anche che

$$F = 1 + \frac{N_d}{kTg_d B_N}$$

Da questa relazione risulta evidente che

$$N_{dU} = FN_{dI}$$

ossia che la potenza disponibile di rumore in uscita è pari alla potenza disponibile di rumore in ingresso moltiplicata per il guadagno  $g_d$  del sistema e per il fattore di rumore: *a parità di guadagno, sarà migliore, perciò, tra due sistemi, quello che presenta il fattore di rumore più piccolo (ovviamente non inferiore ad 1).*

Sempre dalla relazione

$$F = 1 + \frac{N_d}{kTg_d B_N}$$

si deduce che il fattore di rumore è funzione della temperatura, per cui assume in teoria un valore diverso per ogni valore di  $T$ . Nella pratica, allora, si prende come valore di  $F$  per un dispositivo (o circuito) il valore misurato alla temperatura  $T=290^\circ\text{K}$ .

## TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE

Consideriamo nuovamente il nostro doppio bipolo: supporre REALE tale bipolo equivale a ritenere che esso generi del rumore che si sovrappone all'eventuale rumore che arriva in ingresso; supporlo invece IDEALE equivale a ritenere che esso non introduca alcun rumore. Supponiamo che il doppio bipolo REALE sia alimentato da un generatore reale, il quale quindi produce un certo rumore termico in conseguenza della sua resistenza interna: fissata la temperatura  $T_0$  di funzionamento del generatore e quella di funzionamento del bipolo, otteniamo dunque un certo rumore in uscita al bipolo, dovuto sia al rumore in ingresso sia al rumore introdotto dal bipolo stesso.

Se aumentiamo la temperatura di funzionamento del generatore, aumentiamo anche il rumore in ingresso e quindi quello in uscita. Ci chiediamo allora di quanto dobbiamo aumentare la temperatura  $T_0$  di funzionamento del generatore per ottenere in uscita al bipolo, supposto questa volta IDEALE, per avere lo stesso rumore che, a temperatura  $T_0$ , si ha col bipolo REALE.

Questo aumento di temperatura prende il nome di **temperatura equivalente di rumore** e può essere facilmente determinata: infatti, noi abbiamo trovato nel paragrafo precedente che la potenza disponibile di rumore in uscita è data da

$$N_{dU} = kT_0 g_d B_N + N_d$$

dove il primo termine rappresenta il contributo dovuto al generatore in ingresso, che funziona alla temperatura  $T_0$ , mentre il secondo termine rappresenta il contributo del rumore interno al doppio bipolo. Nell'ipotesi che il bipolo sia ideale, per cui  $N_d=0$ , e che il generatore in ingresso venga portato alla temperatura di lavoro  $T_0+T_E$ , il contributo dovuto al rumore in ingresso diventa  $k(T_0 + T_E)g_d B_N$  e quindi la potenza disponibile di rumore in uscita risulta essere proprio

$$N_{dU} = k(T_0 + T_E)g_d B_N$$

Uguagliando allora le due espressioni ottenute, si ottiene facilmente che

$$T_E = \frac{N_d}{k g_d B_N}$$

Quindi, la temperatura equivalente di rumore è un parametro che ci consente di simulare il comportamento del circuito, dal punto di vista del rumore, assumendo il circuito stesso ideale e facendo risalire il rumore interamente a quello che arriva in ingresso.

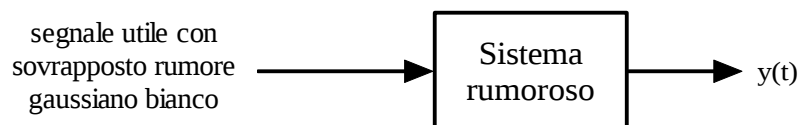
E' facile trovare il legame esistente tra la temperatura di rumore appena definita ed il fattore di rumore, che ricordiamo avere, per una temperatura di funzionamento  $T=T_0$ , l'espressione

$$F = 1 + \frac{N_d}{kT_0 g_d B_N}$$

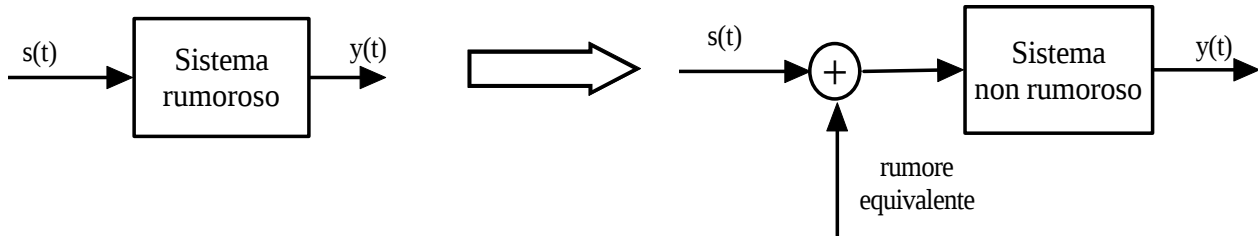
Confrontando questa relazione con l'espressione di  $T_E$ , si deduce che

$$F = 1 + \frac{T_E}{T_0}$$

Temperatura di rumore e fattore di rumore sono dunque due "modi" diversi di interpretare lo stesso fenomeno, ossia il fatto che *ogni dispositivo reale introduce internamente un certo quantitativo di rumore, il quale si va ad aggiungere a quello proveniente dall'ingresso:*



Sia il fattore di rumore sia la temperatura di rumore consentono di adottare un **modello** in cui il dispositivo è visto come ideale (non rumoroso) e tutto il rumore che troviamo in uscita proviene solo dal rumore presente in ingresso:



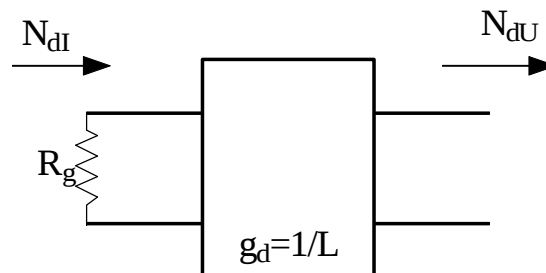
Questo **rumore equivalente in ingresso**, quantificato in termini di densità spettrale di potenza, è così valutato:

- usando il fattore di rumore, si pone  **$FkT_0$** , dove  $kT_0$  è la densità spettrale di potenza del rumore realmente presente in ingresso al dispositivo;
- usando la temperatura equivalente di rumore, si pone invece  **$k(T_0+T_E)$** , dove  $kT_0$  è sempre la densità spettrale di potenza del rumore realmente presente in ingresso al dispositivo.

Detto ancora in altre parole, l'uso del fattore di rumore prevede di modificare la densità spettrale di potenza del rumore in ingresso dicendo che essa vale  $FkT_0$ , mentre invece l'uso della temperatura di rumore prevede di modificare la densità spettrale di potenza del rumore in ingresso dicendo che essa vale  $kT_0+kT_E$ . In entrambi i casi, quindi, il sistema viene ritenuto non rumoroso, ma il rumore realmente presente in ingresso viene incrementato, usando un fattore moltiplicativo ( $F$ ) oppure un fattore additivo ( $kT_E$ ). Questo incremento ci fa parlare non più di rumore realmente presente in ingresso, ma di *rumore equivalente in ingresso* (o anche di *rumore riportato all'ingresso*).

## ATTENUATORE RESISTIVO

Consideriamo un circuito biporta generico: senza preoccuparci di quale sia la reale disposizione degli elementi di questo circuito, facciamo come unica ipotesi quella per cui si tratta solamente di resistori:



Il fatto che il circuito presenti solo componenti passivi (quali appunto i resistori) implica necessariamente che esso non possa comportarsi da amplificatore, ma solo da **attenuatore**, nel senso che introduce sul segnale in ingresso una **attenuazione** secondo un coefficiente che indichiamo con  **$L$**  (=attenuazione in potenza). Possiamo allora esprimerci analiticamente dicendo che il guadagno di potenza del sistema è  $g_d = \frac{1}{L}$ , con  $L > 1$  (per cui  $g_d < 1$ )

Un circuito con queste caratteristiche prende il nome di **attenuatore resistivo**. Noi vogliamo studiare questo circuito dal punto di vista del rumore, per cui immaginiamo di chiudere i morsetti di ingresso su un resistore fisico di resistenza  $R_g$ : ciò significa che l'ingresso al circuito è costituito da una tensione di rumore termico di valore quadratico medio  $\overline{v^2(t)} = 4kT_g B$ .

In uscita al circuito, in modo analogo a quanto fatto in precedenza, avremo una potenza di rumore  $N_{dU}$  data da

$$N_{dU} = N_{dI} + N_d$$

dove  $N_{dI}$  è il contributo derivante dalla potenza di rumore in ingresso, mentre  $N_d$  è il contributo di rumore prodotto dal circuito a causa dei dispositivi fisici che lo compongono.

Per quanto riguarda  $N_{dI}$  possiamo scrivere, sempre in analogia a quanto fatto in precedenza, che

$$N_{dI} = kTB_N g_d = \frac{kTB_N}{L}$$

La potenza di rumore in uscita è dunque

$$N_{dU} = \frac{kTB_N}{L} + N_d$$

A questo punto, dato che abbiamo supposto valida la condizione di adattamento, è chiaro che il circuito fornisce in uscita la massima potenza di rumore, ossia quella che abbiamo chiamato "potenza di rumore disponibile": supponiamo allora che sia  $N_{dU} = kTB$ , per cui

$$N_d = kTB - \frac{kTB_N}{L}$$

Nell'ipotesi che sia anche  $B=B_N$ , possiamo dunque scrivere che

$$N_d = kTB - \frac{kTB}{L} = kTB \frac{L-1}{L}$$

Andiamo adesso a calcolarci la temperatura equivalente di rumore del circuito e il fattore di rumore.

Per la temperatura di rumore, l'abbiamo definita come

$$T_E = \frac{N_d}{k g_d B_N}$$

per cui si trova facilmente che

$$\boxed{T_E = T(L-1)}$$

Nota la temperatura di rumore, da essa ci ricaviamo il fattore di rumore utilizzando la relazione

$$F = 1 + \frac{T_E}{T_0}$$

dove ricordiamo che  $T_0$  è la temperatura ambiente (da distinguere dalla temperatura di lavoro  $T$ ).

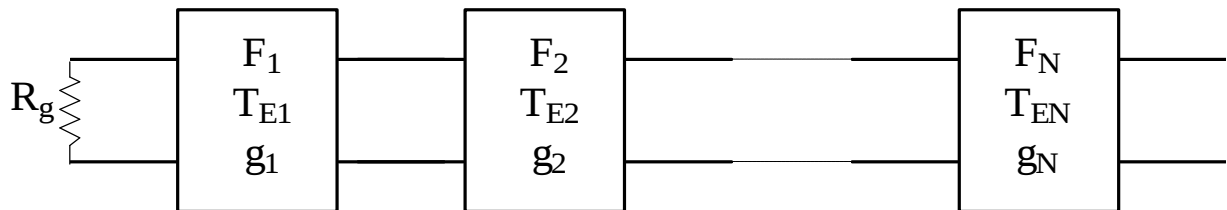
Abbiamo dunque che

$$F = 1 + \frac{T(L-1)}{T_0}$$

Appare ovvio, dunque, che *nell'ipotesi per cui la temperatura di lavoro sia proprio quella ambiente, ossia  $T=T_0$ , il fattore di rumore risulta uguale al coefficiente di attenuazione (in potenza).*

## FATTORE DI RUMORE E TEMPERATURA EQUIVALENTE DI RUMORE NEI SISTEMI A CASCATA

Supponiamo di avere un certo numero  $N$  di circuiti biporta (o dispositivi elettronici), ciascuno caratterizzato da un proprio fattore di rumore, da una propria temperatura di rumore e da un proprio guadagno di potenza, collegati in cascata come nella figura seguente:



Supponiamo che questi sistemi siano tutti in **condizione di adattamento**, per cui ricevono ed erogano la massima potenza possibile: sotto questa ipotesi, si può dimostrare che *il guadagno di potenza del sistema complessivo è dato semplicemente dal prodotto dei singoli guadagni*, ossia

$$g_{TOT} = \prod_{k=1}^N g_k$$

Supponiamo adesso di chiudere i morsetti di ingresso del primo dispositivo su un resistore fisico, il quale quindi produce, come ingresso al sistema complessivo, una tensione di rumore di valore quadratico medio  $\overline{v^2(t)} = 4kTR_gB$ . Vogliamo conoscere il fattore di rumore e la temperatura equivalente di rumore del sistema complessivo.

Così come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti, possiamo intanto scrivere che la potenza di rumore in uscita al sistema complessivo è

$$N_{dU} = N_{dI} + \underbrace{(N_{d1} + N_{d2} + \dots + N_{dN})}_{N_d}$$

dove il primo termine è dovuto al rumore in ingresso, mentre il secondo è dovuto al rumore introdotto dai singoli dispositivi.

Sempre in analogia a quanto fatto in precedenza, poiché il termine  $N_{d1}$  è legato solo al rumore che entra in ingresso al sistema complessivo ed al guadagno  $g_{TOT}$  del sistema stesso, possiamo scrivere che

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + \underbrace{(N_{d1} + N_{d2} + \dots + N_{dN})}_{N_d}$$

dove abbiamo supposto di lavorare a temperatura ambiente  $T=T_0$  e che la banda di interesse sia pari alla banda equivalente di rumore ( $B=B_N$ ).

Consideriamo adesso il termine  $N_{d1}$ , che rappresenta il contributo di potenza di rumore introdotto dal dispositivo numero 1: quando abbiamo definito la temperatura equivalente di rumore per il generico dispositivo o circuito, abbiamo trovato la relazione

$$T_E = \frac{N_d}{k g_d B_N}$$

dalla quale si ricava che

$$N_d = T_E k g_d B_N$$

Aggiungendo un pedice 1, abbiamo dunque che

$$N_{d1} = T_{E1} k g_{d1} B_N$$

e questo è il contributo di potenza fornito dal primo dispositivo. Tuttavia, questa potenza entra in ingresso ai dispositivi successivi e viene quindi amplificata (o attenuata) secondo i rispettivi guadagni: dobbiamo perciò scrivere più correttamente che il contributo del primo dispositivo alla potenza complessiva di uscita vale

$$N_{d1} = T_{E1} k g_{d1} B_N (g_1 g_2 \dots g_N)$$

ossia vale

$$N_{d1} = T_{E1} k g_{TOT} B_N$$

Quindi

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + (T_{E1} k g_{TOT} B_N + N_{d2} + \dots + N_{dN})$$

Il discorso è analogo per il secondo dispositivo: la potenza di rumore in uscita a tale dispositivo, dovuta al rumore introdotto dal dispositivo stesso, è  $T_{E2} k g_{d2} B_N$ ; questa potenza viene amplificata dai dispositivi successivi, per cui il contributo alla potenza complessiva è

$$N_{d2} = T_{E2} k g_{d2} B_N (g_3 g_4 \dots g_N)$$

ossia è

$$N_{d2} = T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N$$

Quindi possiamo ulteriormente scrivere che

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + \left( T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \dots + N_{dN} \right)$$

Il discorso prosegue identico per gli altri dispositivi: arrivati all'ultimo, avremo evidentemente un contributo

$$N_{dN} = T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1 g_2 \dots g_{N-1}} B_N$$

per cui possiamo concludere che

$$N_{dU} = kT_0 B_N g_{TOT} + \left( T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \dots + T_{EN} k g_N B_N \right)$$

A partire da questa relazione, andiamo a calcolarci il fattore di rumore, il quale, per definizione, è dato da  $F = \frac{N_{dU}}{N_{di}}$ . Sostituendo le rispettive espressioni dei termini che compaiono a secondo membro, abbiamo quanto segue:

$$\begin{aligned} F &= \frac{kT_0 B_N g_{TOT} + \left( T_{E1} k g_{TOT} B_N + T_{E2} k \frac{g_{TOT}}{g_1} B_N + \dots + T_{EN} k g_N B_N \right)}{kT_0 B_N g_{TOT}} = \\ &= 1 + \frac{T_{E1} g_{TOT} + T_{E2} \frac{g_{TOT}}{g_1} + \dots + T_{EN} g_N}{T_0 g_{TOT}} = 1 + \frac{T_{E1}}{T_0} + \frac{T_{E2}}{T_0 g_1} + \frac{T_{E3}}{T_0 g_1 g_2} + \dots + \frac{T_{EN}}{T_0 g_1 g_2 \dots g_{N-1}} \end{aligned}$$

Adesso, ricordando che la temperatura equivalente di rumore del generico dispositivo è legata al fattore di rumore dalla relazione  $F = 1 + \frac{T_E}{T_0}$ , che può anche essere scritta nella forma

$$T_E = T_0 (F - 1)$$

abbiamo che

$$F = 1 + \frac{T_0 (F_1 - 1)}{T_0} + \frac{T_0 (F_2 - 1)}{T_0 g_1} + \frac{T_0 (F_3 - 1)}{T_0 g_1 g_2} + \dots + \frac{T_0 (F_N - 1)}{T_0 g_1 g_2 \dots g_{N-1}}$$

e quindi possiamo concludere che il fattore di rumore del sistema complessivo è il seguente:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} + \frac{F_3 - 1}{g_1 g_2} + \dots + \frac{F_N - 1}{g_1 g_2 \dots g_{N-1}}$$

La cosa che emerge evidente da questa formula è che  $F$  è particolarmente condizionato dal primo dispositivo e molto meno da tutti gli altri, per cui, *dovendo progettare un sistema in cui più dispositivi sono collegati in cascata, è consigliabile porre come primo dispositivo uno con caratteristiche particolarmente buone, ponendo invece dopo dispositivi con caratteristiche anche meno pregiate.*

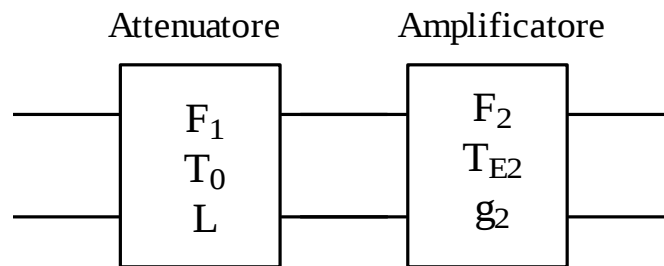
Ovviamente, questo discorso è valido quando tutti i dispositivi presentano un guadagno maggiore di 1, ossia sono degli amplificatori: in questo caso, infatti, i denominatori delle varie frazioni vanno sempre crescendo e quindi la rilevanza degli ultimi dispositivi diventa sempre minore. Al contrario, invece, se ci sono degli attenuatori, ossia dispositivi con guadagno minore di 1, quel discorso può anche non risultare più valido.

A partire dal fattore di rumore, usando ancora una volta la relazione  $T_E = T_0(F-1)$ , è immediato calcolarsi la temperatura equivalente di rumore del sistema complessivo:

$$T = T_{E1} + \frac{T_{E2}}{g_1} + \frac{T_{E3}}{g_1 g_2} + \dots + \frac{T_{EN}}{g_1 g_2 \dots g_{N-1}}$$

## Esempio

Supponiamo di avere un sistema costituito da un attenuatore e da un amplificatore collegati in cascata. I rispettivi parametri (fattore di rumore, temperatura di lavoro, temperatura equivalente di rumore, guadagno di potenza e attenuazione) sono indicati nella figura seguente:



Calcoliamo il fattore di rumore complessivo: applicando la formula trovata prima, ci basta porre  $N=2$ , per cui

$$F_{TOT} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} = F_1 + L(F_2 - 1)$$

Se supponiamo, come indicato in figura, che l'attenuatore lavori a temperatura ambiente  $T_0$ , abbiamo in precedenza verificato che il suo fattore di rumore diventa pari al coefficiente di attenuazione  $L$ , per cui possiamo concludere che

$$F_{TOT} = F_2 L$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>