

Appunti di Teoria dei Segnali

Capitolo 16 - Il rumore (parte II)

Il rumore nelle tecniche di modulazione	1
Proprietà dei processi stocastici.....	1
Rumore nella tecnica di modulazione DSB-SC	2
Riepilogo sulla modulazione DSB-SC	2
La presenza del rumore.....	3
Il rapporto segnale-rumore.....	9
Rapporto segnale-rumore in ingresso al demodulatore.....	12
Esempio: modulazione DSB-SC di un singolo tono modulante.....	13
Rumore nella tecnica di modulazione SSB.....	14
Riepilogo sulla modulazione SSB.....	14
Presenza del rumore	16
Rapporto segnale-rumore.....	17
Rumore nella tecnica AM-standard	19
Presenza del rumore	19
Rapporto segnale-rumore.....	21
Rumore nella tecnica di modulazione FM	22
Presenza del rumore	22
Rapporto segnale-rumore.....	25
La condizione di soglia.....	27

Il rumore nelle tecniche di modulazione

PROPRIETÀ DEI PROCESSI STOCASTICI

Prima di studiare la presenza di “rumore” nelle tecniche di modulazione, dobbiamo enunciare e dimostrare una importante proprietà dei processi stocastici: sia $x(t)$ un generico processo stocastico e sia θ una variabile aleatoria continua uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, 2\pi)$; consideriamo inoltre i due processi stocastici

$$x_1(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$x_2(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

che si dicono **in quadratura** in quanto le due funzioni sinusoidali considerate sono sfasate di 90° una rispetto all'altra.

Si dimostra che la **funzione di crosscorrelazione** di questi due processi è

$$R_{12}(\tau) = E[x_1(t)x_2(t-\tau)] = \frac{1}{2} R_x(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau)$$

e, da qui, si dimostra inoltre che la potenza statistica $E[(x_1(t) + x_2(t))^2]$ del processo dato dalla loro somma è semplicemente pari alla somma delle rispettive potenze statistiche, ossia

$$E[(x_1(t) + x_2(t))^2] = E[x_1^2(t)] + E[x_2^2(t)]$$

Questo risultato sarà molto utile nei discorsi che faremo.

Rumore nella tecnica di modulazione DSB-SC

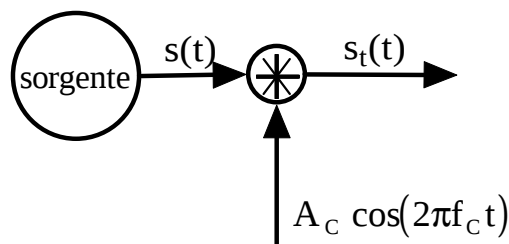
RIEPILOGO SULLA MODULAZIONE DSB-SC

Ripetiamo velocemente come si effettua la modulazione in ampiezza di un segnale analogico usando la tecnica DSB-SC (Doppia Banda Laterale con Portante Soppressa): in questo tipo di modulazione di ampiezza, il **segnale modulato**, ossia il segnale che viene effettivamente trasmesso sul canale, ha espressione

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

(dove, per comodità, abbiamo preso nulla la fase ϕ della portante).

L' **apparato modulatore** in questa tecnica ha dunque il compito di generare il segnale $s_t(t)$, ossia quindi di moltiplicare il segnale analogico $s(t)$ da trasmettere con la portante:

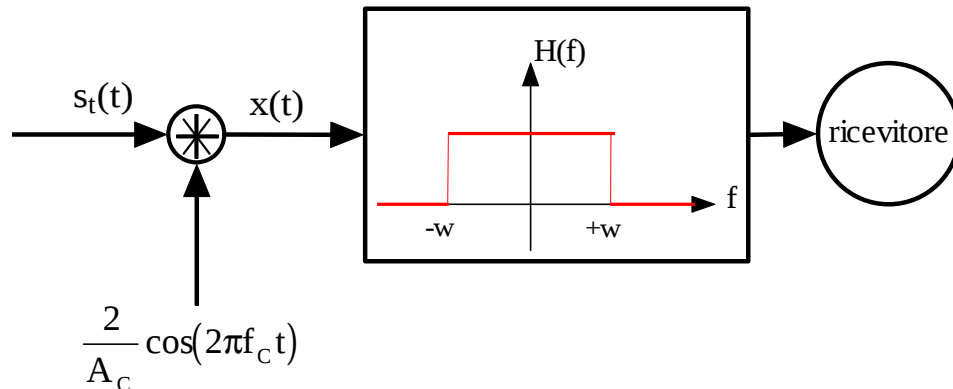


Lo spettro del segnale modulato è

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

ossia è composto da due repliche, a meno del fattore $A_c/2$, dello spettro del segnale $s(t)$, una traslata in $-f_c$ e l'altra traslata in $+f_c$. Di conseguenza, l' **apparato demodulatore** (che ricordiamo è un demodulatore "coerente"), per ricostruire $s(t)$, non deve far altro che moltiplicare questo spettro per $2/A_c$ (al fine di compensare la costante introdotta in fase di modulazione) e effettuare una

traslazione, in modo tale che una delle due repliche risulti posizionata sull'origine delle frequenze, dove va a coincidere proprio con lo spettro del segnale di partenza. Lo schema di tale apparato è il seguente:



La prima cosa che fa il demodulatore è moltiplicare questo segnale per un segnale identico alla portante, tranne per il fatto che la sua ampiezza vale $2/A_C$ ⁽¹⁾: l'effetto di questa moltiplicazione è il segnale

$$x(t) = s(t) \cos(4\pi f_c t) + s(t)$$

il cui spettro è

$$X(f) = \frac{1}{2} S(f - 2f_c) + \frac{1}{2} S(f + 2f_c) + S(f)$$

Si tratta cioè di 3 repliche di $S(f)$, di cui una coincidente proprio con $S(f)$, mentre le altre due traslate, una in $-2f_c$ e l'altra in $+2f_c$, e modulate per il fattore $1/2$.

Sotto la condizione che risulti $w \leq f_c$ (la quale garantisce che non ci sia sovrapposizione tra le repliche), $S(f)$ viene isolato da $X(f)$ utilizzando un normale filtro passa-banda, con banda pari proprio alla banda w del segnale $s(t)$ (che prende perciò il nome di **banda base**): il segnale in uscita dal filtro è dunque

$$S_u(f) = X(f) \text{rect}\left(\frac{f}{2w}\right) = S(f)$$

LA PRESENZA DEL RUMORE

Nel fare una descrizione di questo tipo, noi tralasciamo due cose importanti:

- in primo luogo, tralasciamo il ritardo e l'attenuazione dovuti al mezzo trasmissivo, che è stato sempre ritenuto ideale e invece tale non è;
- in secondo luogo, tralasciamo il rumore introdotto sul segnale utile sia dagli apparati di trasmissione sia anche da quelli di ricezione.

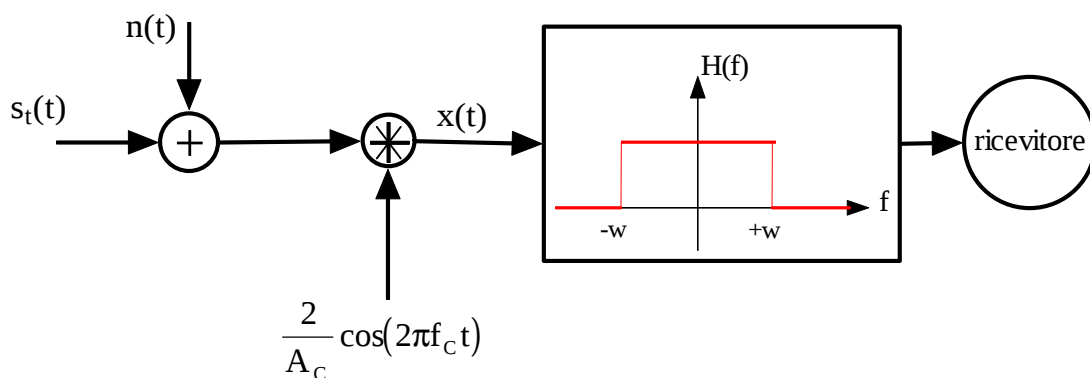
¹ L'aggettivo **coerente**, attribuito a questo tipo di demodulazione, deriva proprio il fatto di usare, nella suddetta moltiplicazione, una oscillazione sinusoidale avente la stessa frequenza della portante

Ha poca importanza, invece, il rumore introdotto dagli apparati di "emissione", ossia in definitiva dal modulatore, in quanto, in fase di trasmissione, la potenza del segnale utile è talmente alta da non risultare assolutamente influenzata dalla potenza di rumore.

La potenza del segnale utile, invece, si abbassa notevolmente durante la trasmissione e in fase di ricezione ed è perciò in quelle fasi che è opportuno studiare il rumore.

Ad ogni modo, noi continuiamo a ritenere il mezzo trasmissivo ideale, mentre ci concentriamo sul rumore introdotto in fase di demodulazione.

Dato che consideriamo solo il rumore termico additivo (che conosciamo con la sigla **AGWN**), possiamo fare il nostro studio continuando a supporre tutti gli apparati ideali, ossia non affetti da rumore, ma, contemporaneamente, supponendo che il segnale modulato $s_t(t)$ in uscita dal canale di trasmissione, ancora non affetto da rumore, venga sommato, prima di passare all'apparato di demodulazione, ad un rumore AGWN che indichiamo con $n(t)$. In tal modo, lo schema del demodulatore diviene il seguente:



Per caratterizzare questo rumore, sapendo che è un rumore additivo bianco gaussiano, possiamo utilizzare la sua densità spettrale di potenza disponibile, che sappiamo valere

$$G_a(f) = \frac{kT}{2}$$

Nel considerare una densità spettrale di potenza così fatta, stiamo ovviamente ritenendo ideali i dispositivi di ricezione, ossia stiamo trascurando il fatto che essi generano rumore al loro interno. Se volessimo tenerne conto, dovremo semplicemente considerare un rumore equivalente in ingresso con densità spettrale di potenza che, anziché valere $kT/2$, dovrebbe valere $FkT/2$, dove F è il fattore di rumore dell'apparato ricevente. Per semplicità, supponiamo il ricevitore ideale (ossia $F=1$) e quindi consideriamo semplicemente **$G_a(f)=kT/2$** .

Analizziamo quale influenza abbia questo rumore e come si può fare per ridurla.

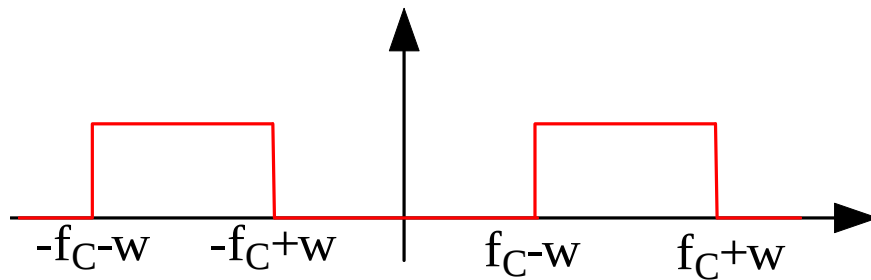
Sia $s(t)$ il segnale che dobbiamo trasmettere con la modulazione: indichiamo con $S(f)$ la sua trasformata e con w la sua banda, il che significa che $S(f)$ si estende nell'intervallo $[-w, +w]$. Se $s_t(t)$ è il segnale modulato, abbiamo prima visto che esso si estende nell'intervallo $[-w - f_c, +f_c + w]$: anzi, in particolare, abbiamo visto che $S_t(f)$ ha espressione

$$S_t(f) = A_c \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} A_c S(f + f_c)$$

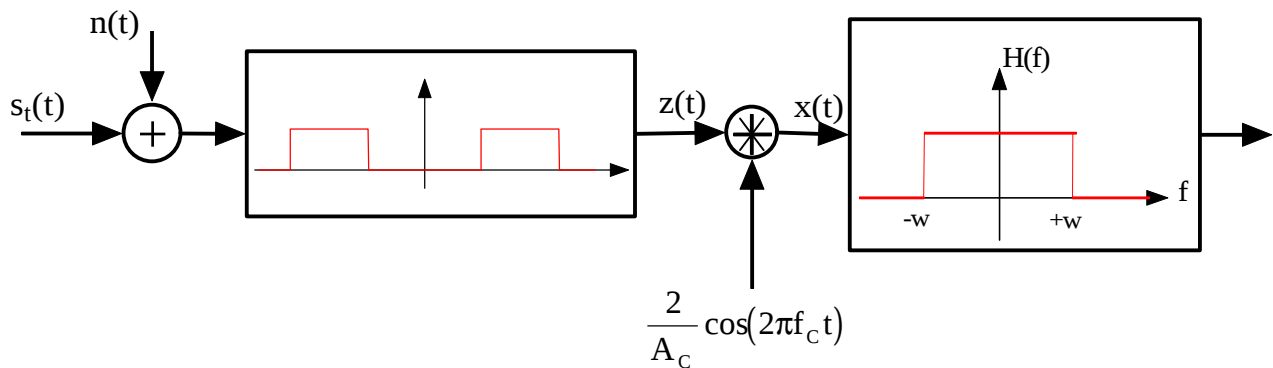
ossia, a meno delle costanti, consta di due repliche di $S(f)$: una replica è posizionata in f_c ed è quindi estesa nell'intervallo $[f_c - w, f_c + w]$; l'altra replica è posizionata in $-f_c$ ed estesa perciò nell'intervallo $[-w - f_c, -f_c + w]$.

A questo segnale $s_t(t)$ abbiamo detto che, in fase di ricezione, si somma un rumore $n(t)$ avente un certo spettro. La prima cosa che possiamo fare è eliminare tutta quella parte di rumore che si estende al di fuori dei due intervalli $[f_c - w, f_c + w]$ e $[-w - f_c, -f_c + w]$: questa eliminazione si effettua evidentemente con un opportuno filtro e siamo certi che non ha alcun effetto sul nostro segnale utile in quanto conserva invariata la struttura del segnale negli intervalli di frequenza in cui esso è presente.

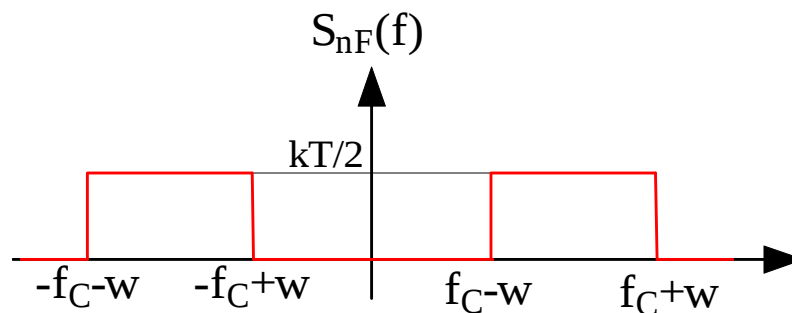
Il filtro avrà dunque una funzione di trasferimento del tipo seguente:



Inserendolo nell'apparato di demodulazione, abbiamo dunque qualcosa del genere:



La situazione che troviamo all'uscita da questo filtro è dunque il segnale modulato, che è rimasto inalterato, cui è sommato un rumore che ovviamente non è più bianco, ossia non ha più spettro di potenza costante in tutte le frequenze. Al contrario, lo spettro di potenza risulta adesso nullo al di fuori degli intervalli $[f_c - w, f_c + w]$ e $[-w - f_c, -f_c + w]$, mentre entro questi intervalli risulta essere costante e ancora pari a $kT/2$. E' dunque qualcosa del tipo seguente:



Si dimostra che è possibile dare, di questo rumore filtrato $n_F(t)$, la seguente rappresentazione analitica nel dominio del tempo:

$$n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

In questa espressione, compaiono le due funzioni $n_I(t)$ ed $n_Q(t)$ che sono le cosiddette **componenti in bassa frequenza** di $n(t)$: si tratta cioè della parte reale e della parte immaginaria dell'*inviluppo complesso* del segnale $n(t)$.

Richiamiamo qualche concetto a proposito dell'inviluppo complesso di un segnale tempo-continuo.

Sia $s(t)$ un segnale che ammette trasformata di Fourier. Si definisce "segnale analitico" di $s(t)$ quel segnale $\mathbf{s}^+(t)$ che corrisponde a $s(t)$ privato però di tutte le componenti negative di frequenza; si definisce, invece, "inviluppo complesso" di $s(t)$ quel segnale $\tilde{s}(t)$ che corrisponde al segnale analitico traslato, in frequenza, nell'origine.

Il segnale $s(t)$ e il suo inviluppo complesso sono legati dalla relazione

$$s(t) = \operatorname{Re}\left\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\}$$

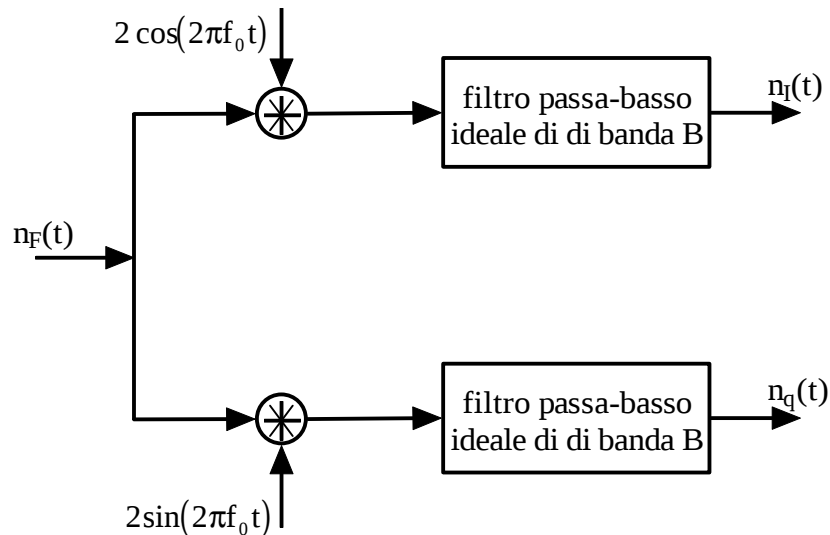
e questa relazione, ponendo $\tilde{s}(t) = s_I(t) + js_Q(t)$, conduce a sua volta alla relazione

$$s(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_c t) - s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Altri risultati importanti che si dimostrano a proposito delle componenti in bassa frequenza sono i seguenti:

- se $s(t)$ è un processo a media nulla, anche $s_I(t)$ e $s_Q(t)$ sono a media nulla;
- se $s(t)$ è un processo gaussiano, anche $s_I(t)$ e $s_Q(t)$ sono gaussiani;
- la varianza di $s(t)$ è pari a quella di $s_I(t)$ ed a quella di $s_Q(t)$.

E' facile dimostrare che le componenti $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ si possono ottenere, a partire da $n_F(t)$, mediante il seguente schema:



Verifichiamo la correttezza di questo schema, cominciando a verificare, ad esempio, che dal ramo superiore venga effettivamente fuori la componente $n_I(t)$.

La prima operazione che viene compiuta in tale ramo è la moltiplicazione del rumore filtrato $n_F(t)$ con la quantità $2 \cos(2\pi f_c t)$: considerando che

$$n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

l'uscita del moltiplicatore è costituita dal segnale

$$2n_I(t) \cos^2(2\pi f_c t) - 2n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t)$$

Questo segnale, usando le opportune formule trigonometriche, può anche essere scritto nella forma

$$n_I(t) + n_I(t) \cos(2\pi(2f_c)t) - n_Q(t) \sin(2\pi(2f_c)t)$$

Questo segnale consta dunque di 3 diversi segnali; in frequenza, la situazione è la seguente:

- il segnale $n_I(t)$ è posizionato nell'origine delle frequenze;
- il segnale $n_I(t) \cos(2\pi(2f_c)t)$ non è altro che $n_I(t)$ posizionato sulle frequenze $2f_c$ e $-2f_c$;
- infine, il segnale $n_Q(t) \sin(2\pi(2f_c)t)$ non è altro che $n_Q(t)$ posizionato sulle frequenze $2f_c$ e $-2f_c$.

Considerando che sia $n_I(t)$ sia $n_Q(t)$ sono a banda limitata (pari a w), è chiaro che, facendo passare il segnale attraverso un filtro passa-basso di banda w , otteniamo in uscita solo $n_I(t)$.

Con un discorso assolutamente analogo, possiamo far vedere che il prodotto del ramo inferiore dello schema di prima è proprio $n_Q(t)$.

In primo luogo, l'uscita del moltiplicatore è costituita dal segnale

$$2n_I(t)\sin(2\pi f_C t) \cos(2\pi f_C t) - 2n_Q(t)\sin^2(2\pi f_C t)$$

Questo segnale, usando le opportune formule trigonometriche e poi riarrangiando, può anche essere scritto nella forma

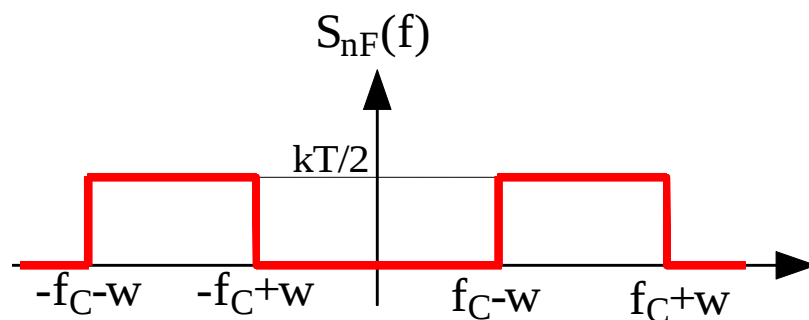
$$n_I(t)\sin(4\pi f_C t) - n_Q(t) + n_Q(t)\cos(4\pi f_C t)$$

Abbiamo dunque ancora una volta un segnale costituito dalla somma 3 diversi segnali; in frequenza, la situazione è la seguente:

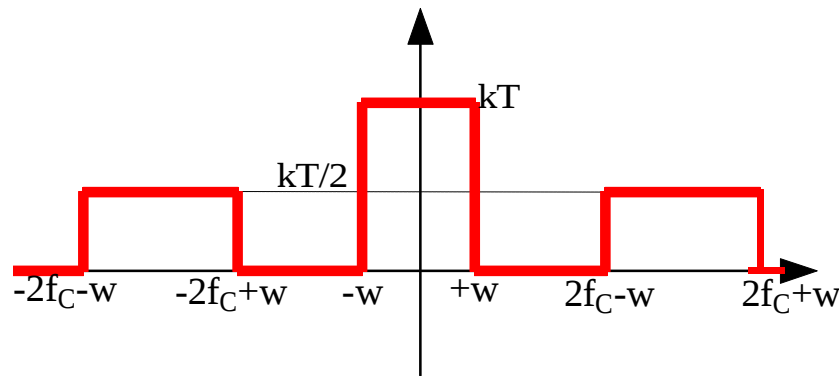
- il segnale $n_Q(t)$ è posizionato nell'origine delle frequenze;
- il segnale $n_I(t)\sin(2\pi(2f_C)t)$ non è altro che $n_I(t)$ posizionato sulle frequenze $2f_C$ e $-2f_C$;
- infine, il segnale $n_Q(t)\cos(2\pi(2f_C)t)$ non è altro che $n_Q(t)$ posizionato sulle frequenze $2f_C$ e $-2f_C$.

Considerando che sia $n_I(t)$ sia $n_Q(t)$ sono a banda limitata (pari a w), è chiaro che facendo passare il segnale attraverso un filtro passa-basso di banda w noi otteniamo in uscita solo $n_Q(t)$.

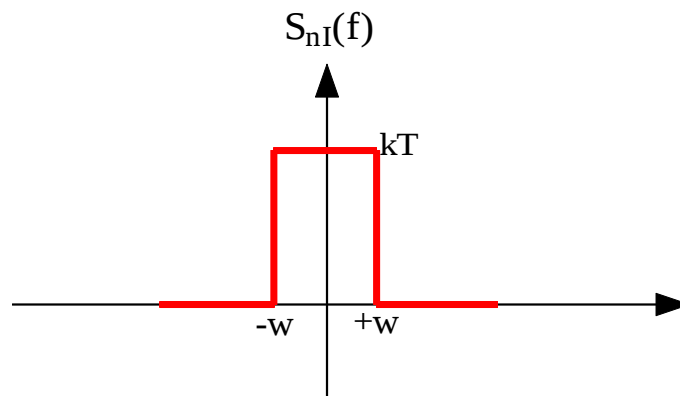
Ciò che a noi interessa dei segnali $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ sono i rispettivi spettri di potenza. Tali spettri possono essere dedotti a partire dallo schema disegnato prima e sapendo che se lo spettro di potenza di $n_F(t)$ è



Consideriamo per esempio lo spettro di potenza di $n_I(t)$: abbiamo prima dimostrato che $n_I(t)$ si ottiene moltiplicando $n_F(t)$ per un coseno e poi filtrando tra $[-w, +w]$; l'esito della moltiplicazione, nel dominio della frequenza, comporta che lo spettro di $n_F(t)$ (e anche lo spettro di potenza) venga "duplicato", ossia ne vengano effettuate due traslazioni, una di $+f_C$ e l'altra di $-f_C$: considerando che $S_{nF}(f)$ consta di due rettangoli, posizionati in $+f_C$ e $-f_C$, lo spettro di potenza in uscita dal moltiplicatore sarà composto da 4 rettangoli, tutti di ampiezza di $2w$, di cui uno posizionato in $-2f_C$, uno posizionato in $+2f_C$, e due posizionati in $f=0$; questi due si sommano, dando origine, quindi, ad uno spettro fatto nel modo seguente:



Il passaggio successivo per ottenere $n_I(t)$ (e quindi il suo spettro di potenza) consiste nel filtraggio tra $[-w, w]$, per cui possiamo concludere che lo spettro di $n_I(t)$ è fatto nel modo seguente:



Lo spettro di $n_q(t)$ risulta assolutamente identico a questo.

IL RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

Premesso tutto questo, andiamo a vedere come è fatto il segnale in uscita dal demodulatore, al fine di valutare il rapporto segnale-rumore.

Il segnale che, una volta superato il primo filtro, entra di fatto nell'apparato demodulatore è dunque il segnale $z(t) = s_t(t) + n(t)$, del quale conosciamo ormai tutte le caratteristiche.

Ricordando che

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

$$n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

esso corrisponde dunque a

$$z(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Questo $z(t)$ è il segnale che viene moltiplicato per $\cos(2\pi f_c t)$ (tralasciamo la costante moltiplicativa $2/A_c$): quindi, il segnale che viene fuori dal moltiplicatore è

$$x(t) = s(t)A_c \cos^2(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos^2(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t)$$

Questo segnale va in ingresso al filtro passa-basso, il quale elimina quelle parti di segnale esterne all'intervallo $[-w, w]$: senza scomodare il dominio della frequenza, al fine di valutare quali componenti vengono filtrate, il segnale in uscita dal filtro è semplicemente

$$s_u(t) = \frac{1}{2} A_c s(t) + \frac{1}{2} n_I(t)$$

Quindi, a meno delle costanti, il segnale che noi otteniamo in uscita dal demodulatore è $s(t)$, ossia quello che riceveremmo se non ci fosse rumore, cui si somma $n_I(t)$, che è invece il contributo dovuto proprio al rumore.

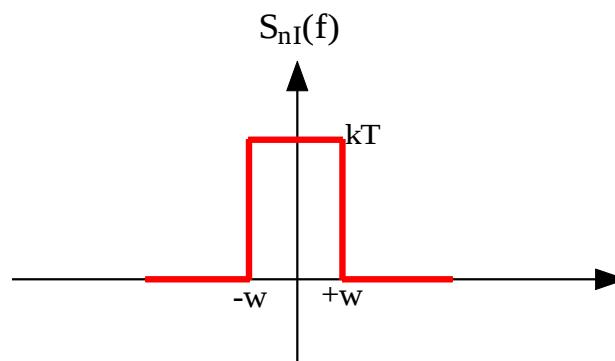
Andiamo allora a calcolarci il solito rapporto segnale-rumore. Per il segnale dobbiamo considerare la potenza media del segnale utile, ossia la potenza media del termine $\frac{1}{2} A_c s(t)$; per il rumore, dobbiamo invece considerare la potenza media di ciò che si sovrappone al segnale utile, ossia la potenza media del segnale $\frac{1}{2} n_I(t)$: quindi

$$\frac{S}{N} = \frac{E\left[\left(\frac{1}{2} A_c s(t)\right)^2\right]}{E\left[\left(\frac{1}{2} n_I(t)\right)^2\right]} = \frac{\frac{1}{4} A_c^2 E[s^2(t)]}{\frac{1}{4} E[n_I^2(t)]} = \frac{A_c^2 E[s^2(t)]}{E[n_I^2(t)]}$$

Indicata in generale con $P_s = E[s^2(t)]$ la potenza media del segnale modulante $s(t)$, abbiamo dunque che

$$\frac{S}{N} = \frac{A_c^2 P_s}{E[n_I^2(t)]}$$

Per quanto riguarda, invece, il termine $E[n_I^2(t)]$, sappiamo che si tratta della funzione di autocorrelazione di $n_I(t)$, calcolata in 0, ossia anche dell'area sottesa da $S_{nI}(f)$: ricordando che la funzione $S_{nI}(f)$ è del tipo



è chiaro che $E[n_I^2(t)] = kT2w$, per cui possiamo concludere che il rapporto segnale-rumore nella tecnica di modulazione DSB-SC vale

$$\boxed{\frac{S}{N} = \frac{A_c^2 P_s}{2kT_w}}$$

Questa formula indica che è possibile migliorare (ossia aumentare) il rapporto segnale-rumore o aumentando la potenza P_s trasmessa dalla sorgente (come è logico che sia) oppure anche aumentando l'ampiezza A_c della portante.

L'altro parametro importante che dobbiamo valutare al fine di giudicare questa tecnica di modulazione dal punto di vista del rumore è il seguente:

$$R = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}}$$

In questa relazione compaiono le seguenti due quantità:

- $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$ è il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore, ossia quello che abbiamo
- $\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}$ è invece il rapporto tra la potenza media del segnale trasmesso (che è $s_t(t)$) e la potenza media del rumore nella banda del segnale modulante (segnale modulante che è $s(t)$); in altre parole, considerando lo schema dell'apparato di ricezione così come è stato disegnato l'ultima volta, è il rapporto segnale-rumore subito dopo il sommatore che introduce il termine $n(t)$.

Cominciamo dunque col porre

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{A_c^2 P_s}{2kT_w}$$

Per quanto riguarda $\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}$, il numeratore è la potenza media del segnale trasmesso, ossia è

$$\begin{aligned} E[s_t^2(t)] &= E[(s(t)A_c \cos(2\pi f_c t))^2] = E[s^2(t)A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t)] = A_c^2 E[s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t)] = \\ &= \frac{1}{2} A_c^2 E[s^2(t)] = \frac{1}{2} A_c^2 P_s \end{aligned}$$

Il denominatore è invece la potenza media del rumore nella banda del segnale modulante: ricordando allora che lo spettro di potenza di $n(t)$ è costante e pari $kT/2$, si deduce che la potenza racchiusa nell'intervallo $[-w, +w]$ vale kT_w , per cui abbiamo che

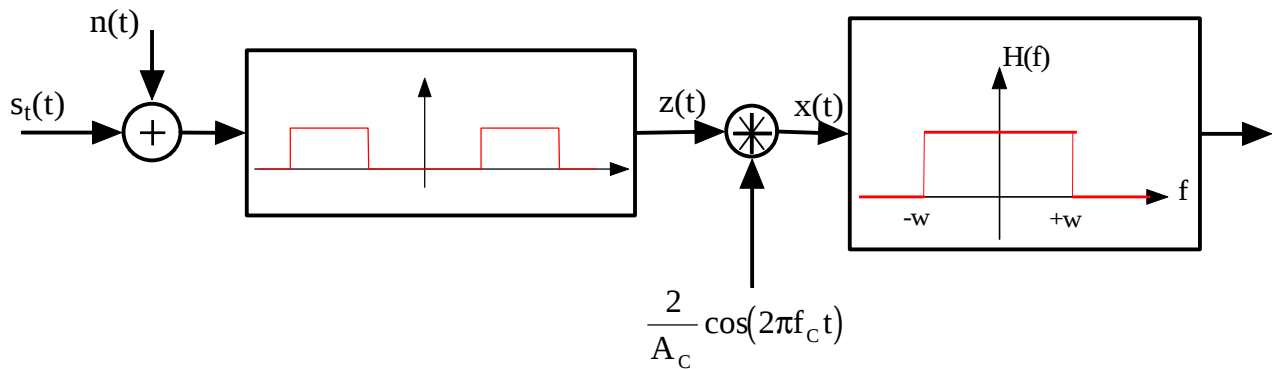
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{CANALE}} = \frac{\frac{A_c^2 P_s}{2}}{kT_w} = \frac{A_c^2 P_s}{2kT_w}$$

Questo rapporto risulta dunque identico a quello trovato in uscita dal demodulatore, dal che deduciamo che

$$\boxed{R = 1}$$

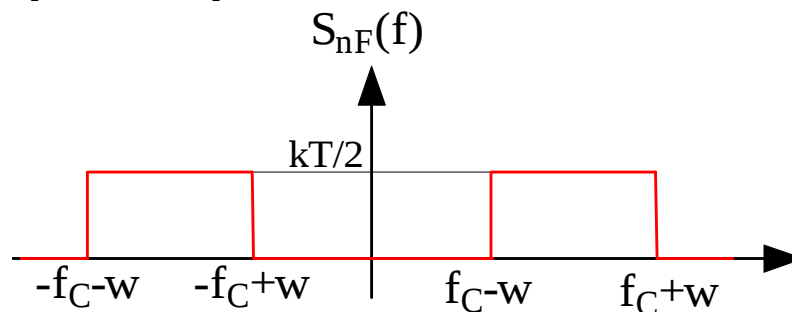
RAPPORTO SEGNALE-RUMORE IN INGRESSO AL DEMODULATORE

Riprendiamo lo schema dell'apparato di demodulazione:



In questo schema, la demodulazione vera e propria è quella che avviene dopo il primo filtro, per cui può essere interessante calcolare il rapporto segnale/rumore in ingresso al demodulatore, ossia subito dopo il primo filtro.

Come numeratore usiamo ancora una volta la potenza del segnale modulato, che vale $E[s_t^2(t)] = \frac{1}{2} A_c^2 P_s$; come denominatore, abbiamo ancora la potenza del rumore, ma non è più quella contenuta nell'intervallo $[-w, +w]$, bensì quella complessiva: ricordando allora che il rumore filtrato $n_F(t)$ ha uno spettro di potenza del tipo



è evidente che questa potenza vale stavolta

$$\frac{kT}{2} 2w + \frac{kT}{2} 2w = 2kT_w$$

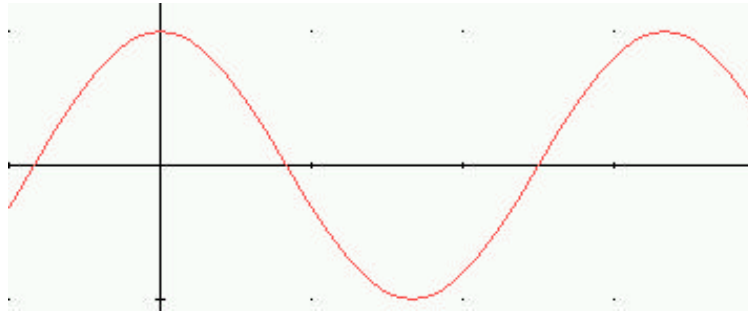
per cui il rapporto segnale-rumore in ingresso al demodulatore vero e proprio vale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} = \frac{\frac{A_c^2 P_s}{2}}{2kT_w} = \frac{A_c^2 P_s}{4kT_w}$$

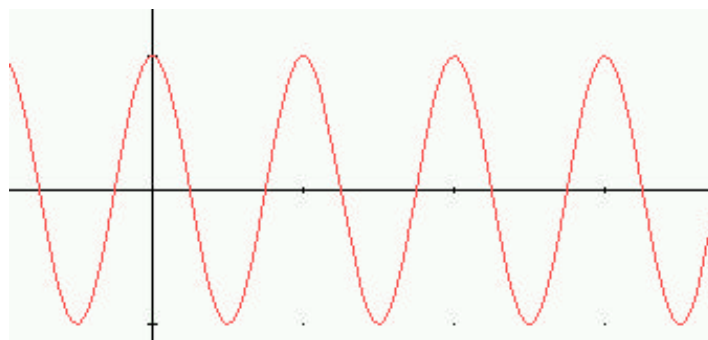
ossia è pari a metà di quello in uscita dal demodulatore.

ESEMPIO: MODULAZIONE DSB-SC DI UN SINGOLO TONO MODULANTE

Supponiamo che il segnale modulante sia $s(t) = \cos(2\pi f_s t)$, per cui il suo andamento temporale è il seguente:



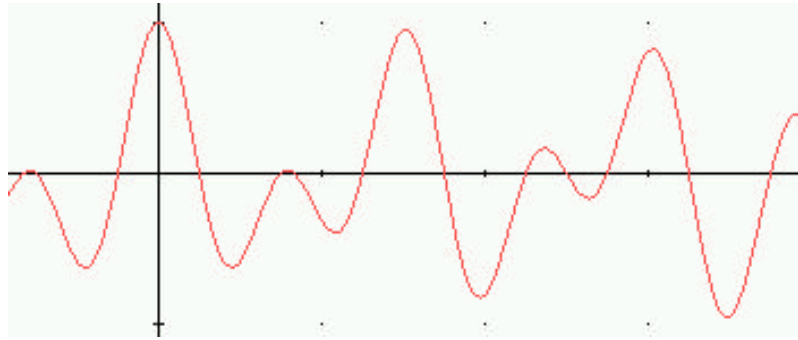
La portante è la normale portante sinusoidale $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$, che supponiamo avere ampiezza unitaria. Nell'ipotesi che la frequenza di tale portante sia maggiore di quella del segnale modulante, l'andamento della funzione è del tipo seguente:



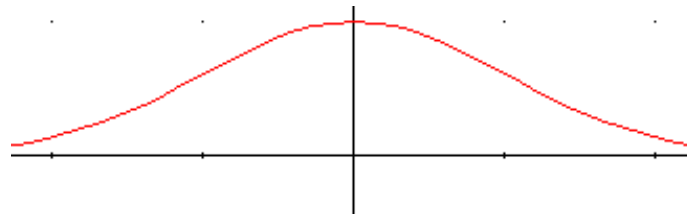
Il segnale modulato risulta quindi essere

$$s_t(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$$

ed è facile verificare che il suo andamento temporale è il seguente:



Questo segnale, nell'ipotesi di canale ideale, è quello che arriva in ingresso al demodulatore. Prima della demodulazione, supponiamo che a questo segnale si sommi un rumore $n(t)$ gaussiano bianco a media nulla; si tratta cioè di un rumore con spettro di potenza costante (pari a $N_0/2$) e con funzione densità di probabilità delle ampiezze fatta nel modo seguente:



Dire che la densità di probabilità del segnale (aleatorio) $n(t)$ è fatta in questo modo significa dire che le ampiezze più probabili di questo segnale sono le più piccole, mentre, man mano che tali ampiezze crescono, la probabilità è sempre minore, fino a diventare zero a partire da certi valori in poi.

Rumore nella tecnica di modulazione SSB

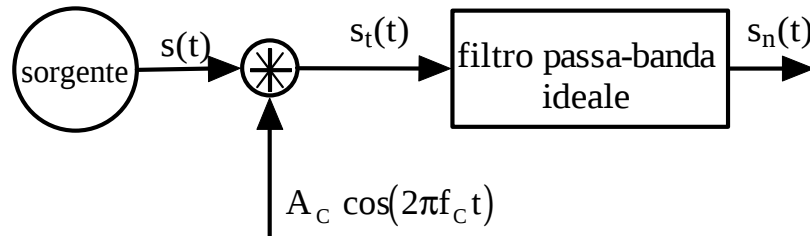
RIEPILOGO SULLA MODULAZIONE SSB

Ripetiamo anche qui velocemente quello che viene fatto al fine di modulare in ampiezza un segnale analogico con la tecnica SSB (*Single Side Band*): in primo luogo, questa tecnica è valida solo per i segnali che godano della simmetria hermitiana, ossia tali che la parte positiva dello spettro sia simmetrica rispetto alla parte negativa. Questa proprietà fa sì che si possa trasmettere 1 sola parte (la cosiddetta **banda laterale**) dello spettro, in quanto l'altra, essendo simmetrica, può essere facilmente dedotta dalla prima.

Il primo passo consiste nella modulazione del segnale $s(t)$ secondo la tecnica DSB-SC: questo significa che il segnale modulato è ancora una volta

$$s_t(t) = s(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Da questo segnale modulato vanno prese o le due bande laterali superiori o quelle laterali inferiori. La selezione delle une o delle altre avviene ovviamente mediante un opportuno filtro passa-banda, per cui possiamo concludere che l'apparato di modulazione è fatto nel modo seguente:



L'espressione del segnale che noi effettivamente trasmettiamo sul canale risulta essere la seguente:

$$s_n(t) = \frac{1}{2} A_c s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} A_c \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Calcoliamo subito la potenza di questo segnale: si nota che $s_n(t)$ è la somma di due processi stocastici in quadratura, per cui possiamo sfruttare la proprietà enunciata all'inizio del capitolo per scrivere che la potenza complessiva è pari alla somma delle potenze dei singoli processi, ossia

$$P_t = E[s_n^2(t)] = E\left[\frac{1}{4} A_c^2 s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t)\right] + E\left[\frac{1}{4} A_c^2 \hat{s}^2(t) \sin^2(2\pi f_c t)\right]$$

Sfruttando adesso la linearità della media, abbiamo che

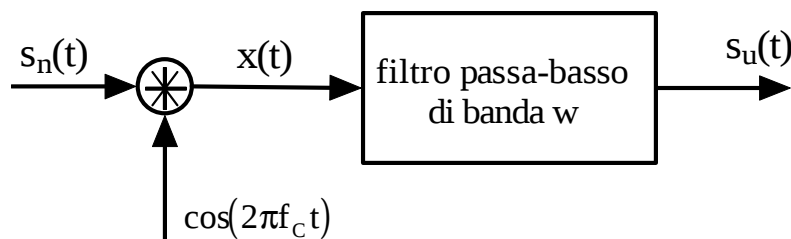
$$\begin{aligned} P_t &= E[s_n^2(t)] = \frac{1}{4} A_c^2 E[s^2(t) \cos^2(2\pi f_c t)] + \frac{1}{4} A_c^2 E[\hat{s}^2(t) \sin^2(2\pi f_c t)] = \\ &= \frac{1}{8} A_c^2 E[s^2(t)] + \frac{1}{8} A_c^2 E[\hat{s}^2(t)] = \frac{1}{8} A_c^2 P_s + \frac{1}{8} A_c^2 E[\hat{s}^2(t)] \end{aligned}$$

Si trova poi che $E[\hat{s}^2(t)] = P_s$, per cui possiamo concludere che

$$P_t = \frac{1}{4} A_c^2 P_s$$

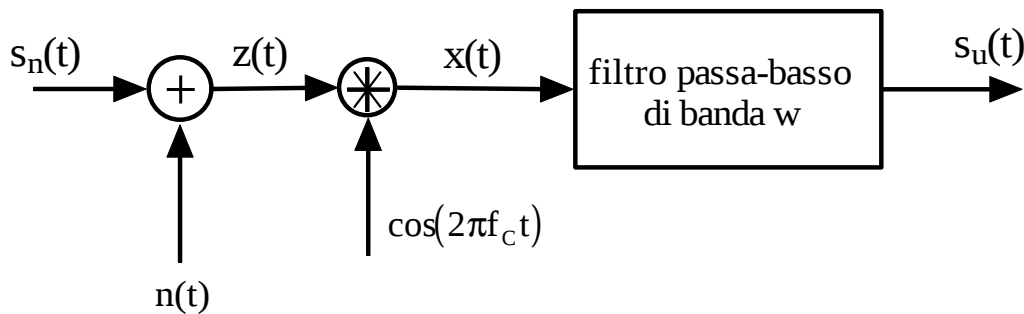
Facendo un confronto con la potenza trasmessa nella tecnica DSB-SC, che vale $E[s_t^2(t)] = \frac{1}{2} A_c^2 P_s$, si trova che questa è esattamente la metà ed era effettivamente logico che fosse così, in quanto nella SSB noi trasmettiamo la metà del segnale che invece trasmettiamo con la DSB-SC.

Passando adesso all'apparato di demodulazione, non è molto diverso da quello di modulazione:



PRESENZA DEL RUMORE

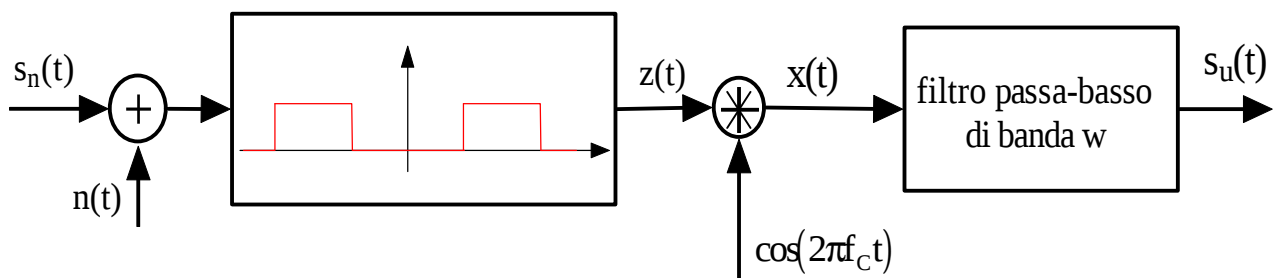
Al fine di tenere conto del rumore additivo, modifichiamo questo schema nel modo seguente:



Inoltre, facendo un discorso del tutto analogo a quello fatto per la DSB-SC, possiamo inserire, dopo il sommatore che introduce il rumore, un filtro che elimini quella parte di rumore esterna all'intervallo di frequenza in cui è definito $s_n(t)$. La differenza con la DSB-SC sta nella posizione dei due rettangoli che costituiscono la funzione di trasferimento del filtro: infatti, mentre nella DSB-SC tali rettangoli erano posizionati in corrispondenza degli intervalli $[-w - f_c, -f_c + w]$ e $[-w + f_c, +f_c + w]$, in questo caso, avendo trasmesso o solo le due BLS o solo le due BLI, possiamo restringerli:

- se abbiamo trasmesso le due BLS, i due rettangoli saranno posizionati negli intervalli $[-w - f_c, -f_c]$ e $[f_c, +f_c + w]$;
- se abbiamo trasmesso le due BLI, invece, saranno posizionati sui $[-f_c, -f_c + w]$ e $[-w + f_c, +f_c]$.

Ad ogni modo, fatta salva questa precisazione, lo schema dell'apparato di ricezione è il seguente:



Analizziamo dunque quello che succede: all'uscita dal primo filtro, abbiamo il segnale $z(t)$ composto dal segnale modulato $s_n(t)$ inalterato e da $n(t)$ filtrato; indicando questo $n(t)$ filtrato ancora una volta con $\mathbf{n_F(t)}$, abbiamo dunque che

$$z(t) = s_n(t) + n_F(t)$$

Questo segnale viene successivamente moltiplicato per $\cos(2\pi f_c t)$, per cui abbiamo il segnale

$$x(t) = s_n(t) \cos(2\pi f_c t) + n_F(t) \cos(2\pi f_c t)$$

L'espressione analitica, nel dominio del tempo, del rumore è filtrato è questa volta

$$n_F(t) = n_I(t) \cos\left(2\pi\left(f_c - \frac{w}{2}\right)t\right) - n_q(t) \sin\left(2\pi\left(f_c - \frac{w}{2}\right)t\right)$$

dove la differenza con la formula ricavata nella DSB-SC, ossia $n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$ sta nel fatto, sottolineato prima, che la posizione dei rettangoli è diversa rispetto alla DSB-SC.

Usando dunque quella espressione di $n_F(t)$, possiamo scrivere $x(t)$ nella forma

$$x(t) = s_n(t) \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos\left(2\pi\left(f_c - \frac{w}{2}\right)t\right) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin\left(2\pi\left(f_c - \frac{w}{2}\right)t\right) \cos(2\pi f_c t)$$

Questo $x(t)$ va in ingresso al secondo filtro: ricordando che

$$s_n(t) = \frac{1}{2} A_c s(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} A_c \hat{s}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

e applicando le opportune formule trigonometriche, ciò che si trova è il segnale finale

$$s_u(t) = \frac{A_c}{4} s(t) + \frac{1}{2} n_I(t) \cos(\pi w t) + \frac{1}{2} n_q(t) \sin(\pi w t)$$

Questo segnale è dunque quello che viene fuori dal demodulatore: evidentemente, esso è composto dal segnale utile $\frac{A_c}{4} s(t)$, che, a meno della costante moltiplicativa, è il segnale che a noi interessa, più due componenti, dovute al rumore, che hanno la particolarità di essere in quadratura.

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

Il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore sarà dunque il rapporto tra la potenza del segnale utile, che possiamo valutare come

$$S = E\left[\left(\frac{A_c}{4} s(t)\right)^2\right] = \frac{A_c^2}{16} P_s$$

e la potenza delle componenti di rumore: queste componenti sono in quadratura tra loro, per cui possiamo applicare la proprietà dimostrata all'inizio per cominciare a scrivere che

$$\begin{aligned} N &= E\left[\left(\frac{1}{2} n_I(t) \cos(\pi w t) + \frac{1}{2} n_q(t) \sin(\pi w t)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{2} n_I(t) \cos(\pi w t)\right)^2\right] + E\left[\left(\frac{1}{2} n_q(t) \sin(\pi w t)\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{4} E\left[\left(n_I(t) \cos(\pi w t)\right)^2\right] + \frac{1}{4} E\left[\left(n_q(t) \sin(\pi w t)\right)^2\right] = \frac{1}{8} E\left[\left(n_I(t)\right)^2\right] + \frac{1}{8} E\left[\left(n_q(t)\right)^2\right] \end{aligned}$$

Adesso, ricordando come sono fatti gli spettri di potenza dei segnali $n_I(t)$ e $n_q(t)$ (sono dei rettangoli centrati in $f=0$, di altezza pari a kT e di base pari questa volta a w), si deduce facilmente che

$$E[n_I(t)^2] = kTw$$

$$E[n_q(t)^2] = kTw$$

per cui possiamo dunque concludere che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{A_C^2}{4kTw} P_s$$

Andiamo adesso a calcolare $\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}$, ossia il rapporto segnale-rumore dopo il sommatore che introduce il rumore $n(t)$: si può dimostrare che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE} = \frac{A_C^2}{4kTw} P_s$$

Essendo questa quantità perfettamente uguale a $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$, si deduce che ancora una volta

$$R = 1$$

Abbiamo dunque trovato che *sia la tecnica DSB-SC sia la tecnica SSB presentano unitario il fattore R*. Ciò significa che esse si comportano allo stesso modo nei confronti del rumore.

Ovviamente, mentre la tecnica DSB-SC è più semplice da realizzare concretamente e quindi più vantaggiosa economicamente, la tecnica SSB ha il vantaggio di consentire un maggiore risparmio in banda e un maggiore risparmio di potenza da trasmettere.

L'ultima cosa che calcoliamo è il rapporto segnale-rumore in ingresso al demodulatore vero e proprio, ossia all'uscita dal filtro passa-banda usato per eliminare le componenti di rumore esterne alla banda del segnale modulato: ciò che si trova è che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} = \frac{A_C^2}{4kTw} P_s$$

ed è ancora una volta pari a $\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT}$.

Rumore nella tecnica AM-standard

PRESENZA DEL RUMORE

L'ultima tecnica di modulazione di ampiezza per la quale studiamo il rumore è quella più classica, ossia la tecnica **AM standard**: il segnale modulato nella tecnica AM-standard è

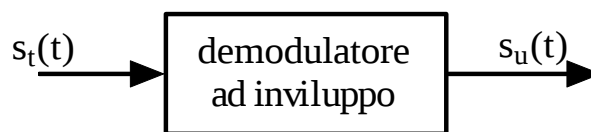
$$s_t(t) = \underbrace{A_C \cos(2\pi f_C t)}_{\text{portante}} + \underbrace{A_C K_a s(t) \cos(2\pi f_C t)}_{\text{segnale modulato DSB-SC}}$$

e può anche essere scritto in forma più compatta come

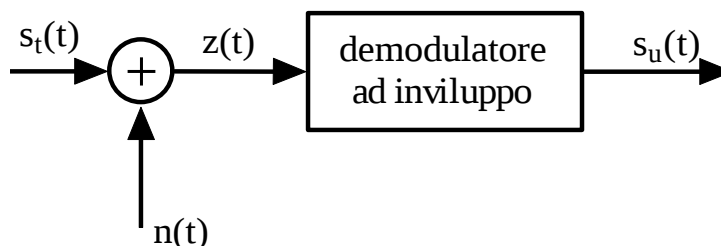
$$s_t(t) = A_C (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_C t)$$

Nell'ipotesi che il canale di trasmissione sia ideale, questo è il segnale che giunge in ingresso agli apparati di demodulazione, basati essenzialmente su quello che abbiamo chiamato **demodulatore ad inviluppo**.

Possiamo dunque schematizzare l'apparato demodulatore, supposto ancora ideale, ossia non affetto da rumore, nel modo seguente:



Adesso, al fine di tener conto della presenza di rumore introdotto dagli apparati di modulazione, poniamo ancora una volta "in testa" al demodulatore un sommatore che aggiunge ad $s_t(t)$ il solito rumore $n(t)$ additivo gaussiano bianco:

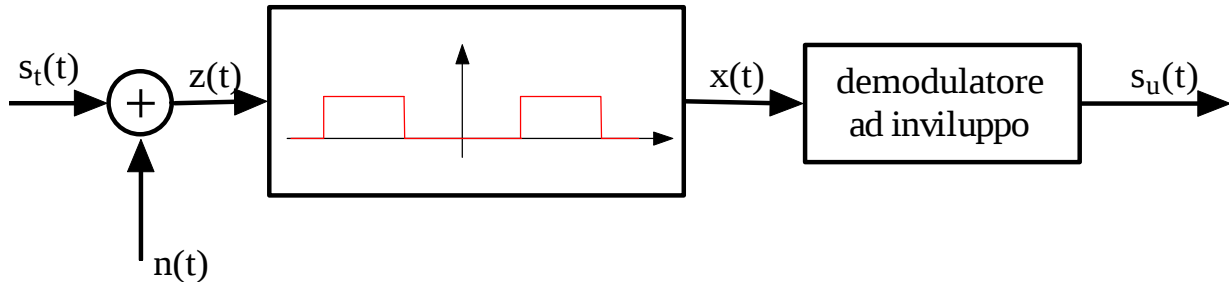


L'uscita dal sommatore è dunque il segnale $z(t) = s_t(t) + n(t)$, somma del segnale utile e del rumore che ad esso si è sovrapposto.

Ora, sempre in accordo a quanto fatto nei casi precedenti di modulazione, poniamo un filtro passa-banda subito dopo il sommatore: questo filtro è fatto in modo da lasciar passare inalterato il segnale utile $s_t(t)$ e di filtrare invece le componenti di rumore eterne all'intervallo di frequenza in cui il segnale utile è definito.

N.B. Ricordiamo che la modulazione AM-standard è identica a quella DSB-SC, salvo la presenza della portante; dato che lo spettro della portante consiste di due impulsi posizionati su $-f_c$ e $+f_c$, è chiaro che la banda del segnale modulato nella AM-standard è la stessa di quello modulato nella DSB-SC, per cui le considerazioni per l'utilizzo del filtro sono le stesse.

Lo schema di modifica allora nel modo seguente:



All'uscita da questo filtro, abbiamo dunque il segnale $x(t) = s_t(t) + n_F(t)$, somma del segnale utile inalterato e del rumore filtrato. Questo rumore filtrato ha la solita espressione

$$n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

per cui possiamo scrivere che l'uscita del filtro è

$$x(t) = s_t(t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Ricordando inoltre che il segnale modulato ha espressione

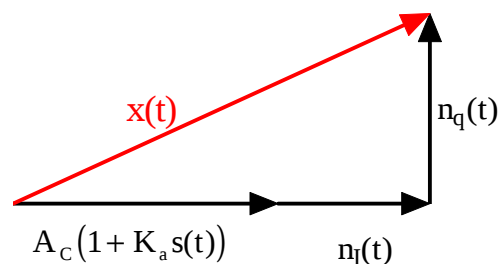
$$s_t(t) = A_c (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

possiamo infine scrivere che il segnale in uscita dal filtro passa-banda, ossia il segnale che va in ingresso al demodulatore ad inviluppo, ha la seguente espressione:

$$x(t) = A_c (1 + K_a s(t)) \cos(2\pi f_c t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Come si nota, $x(t)$ è dunque dato dalla somma di tre segnali distinti, di cui uno è il segnale utile e gli altri due, che risultano in quadratura, sono dovuti al rumore.

Possiamo comodamente rappresentare i tre segnali con la **rappresentazione fasoriale** (detta anche rappresentazione tramite **vettori rotanti**):



Il compito del demodulatore ad inviluppo è quello di prendere, ad ogni istante, il modulo del vettore $x(t)$: tale modulo, come si nota dalla figura, è dato evidentemente da

$$|x(t)| = \sqrt{\left(A_c(1 + K_a s(t)) + n_I(t)\right)^2 + n_Q^2(t)}$$

Adesso, dato che il nostro scopo è quello di calcolare il rapporto segnale-rumore e dato che $|x(t)|$ costituisce l'uscita del demodulatore, dobbiamo trovare il modo di separare, in quella espressione, il segnale utile dal rumore, al fine di calcolare le rispettive potenze.

Allora, per fare questo, facciamo una ipotesi semplificativa: supponiamo in particolare che il termine $n_Q^2(t)$ sia trascurabile rispetto all'altro termine. Sotto questa ipotesi, abbiamo evidentemente che

$$|x(t)| = A_c(1 + K_a s(t)) + n_I(t)$$

Questo segnale, prima di costituire l'uscita $s_u(t)$ del demodulatore, viene ulteriormente filtrato, in modo tale che il segnale finale sia

$$s_u(t) = A_c K_a s(t) + n_I(t)$$

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

Nella espressione del segnale in uscita dal demodulatore ad inviluppo, si distingue dunque il segnale utile $A_c K_a s(t)$ dal rumore $n_I(t)$, per cui è immediato calcolare le rispettive potenze: la potenza del segnale utile è evidentemente

$$S = E\left[(A_c K_a s(t))^2\right] = A_c^2 k_a^2 P_s$$

mentre la potenza del rumore è la solita quantità

$$N = E[n_I^2(t)] = 2kT\omega$$

per cui possiamo concludere che il rapporto segnale-rumore in uscita dal demodulatore è

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = \frac{A_c^2 k_a^2 P_s}{2kT\omega}}$$

Facciamo osservare che si tratta comunque di un risultato approssimato, vista l'ipotesi di partenza di poter trascurare il termine $n_Q(t)$.

Calcoliamo inoltre $\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE}$: è possibile dimostrare che

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{CANALE} = \frac{\frac{A_c^2}{2}(1 + k_a^2 P_s)}{kT\omega}$$

dal che si deduce che

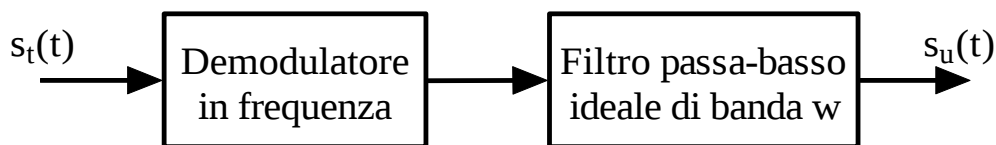
$$R = \frac{k_a^2 P_S}{1 + k_a^2 P_S}$$

Questa espressione ci dice che il fattore R è minore di 1: ciò significa che *questa tecnica ha, nei confronti del rumore, un comportamento peggiore rispetto alle tecniche DSB-SC e SSB*. D'altro canto, sappiamo che i pregi di questa tecnica sono altri e, particolarmente, la semplicità dei circuiti di demodulazione.

Rumore nella tecnica di modulazione FM

PRESENZA DEL RUMORE

Quando abbiamo studiato la modulazione di frequenza (FM), non ci siamo preoccupati troppo dei *dettagli realizzativi*, ma abbiamo analizzato il problema essenzialmente dal punto di vista matematico. Possiamo perciò rappresentare lo schema del demodulatore, supposto sempre non rumoroso, nel modo seguente:

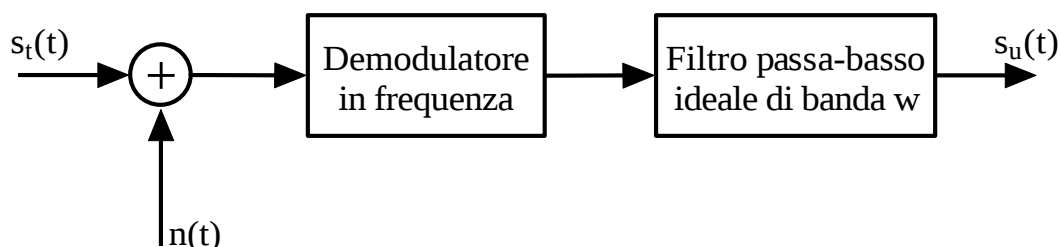


Il segnale modulato, ossia il segnale trasmesso sul canale (supposto sempre ideale) e che arriva in ingresso al demodulatore, ha espressione analitica

$$s_t(t) = A_C \cos \left(2\pi f_C t + 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right)$$

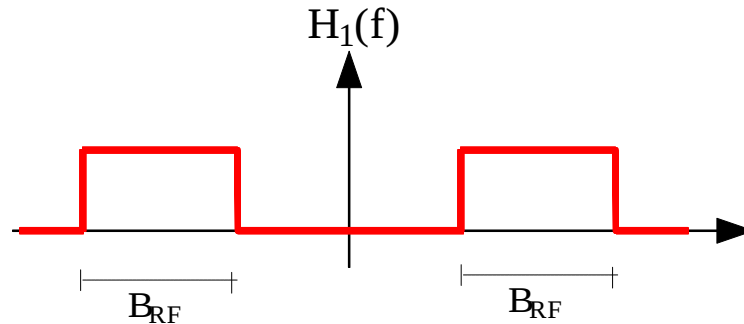
dove ovviamente $s(t)$ è il segnale analogico oggetto della trasmissione.

Al fine di tener conto della presenza di rumore introdotto dagli apparati di modulazione, poniamo "in testa" al demodulatore un sommatore che aggiunge ad $s_t(t)$ il solito rumore $n(t)$ additivo gaussiano bianco:



Ancora una volta, in accordo a quanto fatto nei casi precedenti di modulazione, possiamo subito porre un filtro passa-banda subito dopo il sommatore: questo filtro è fatto in modo da lasciar passare inalterato il segnale utile $s_t(t)$ e di filtrare invece le componenti di rumore eterne all'intervallo di frequenza in cui il segnale utile è definito.

Il filtro avrà perciò una funzione di trasferimento del tipo seguente:

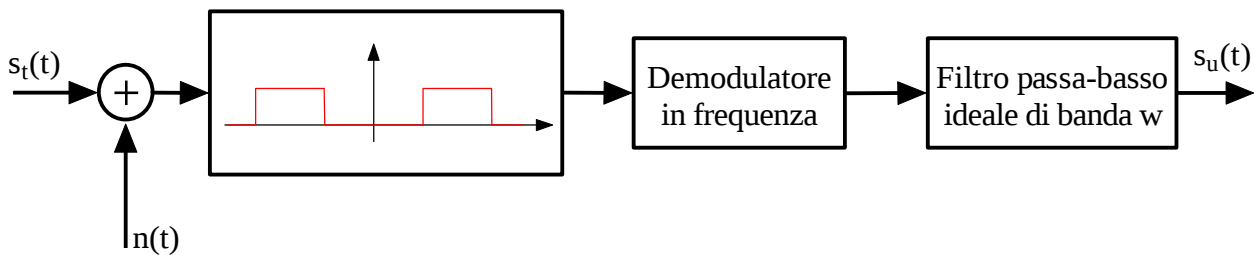


Chiaramente, B_{RF} è la cosiddetta **banda di radiofrequenza** (cioè la banda occupata dal segnale modulato), che, nella *approssimazione di Carson*, vale

$$B_{RF} = 2(\Delta f + w)$$

dove w è la banda del segnale modulante $s(t)$ mentre Δf è la **deviazione di frequenza**.

Lo schema di demodulazione diventa dunque il seguente:



All'uscita da questo primo filtro abbiamo il segnale $x(t) = s_t(t) + n_F(t)$. Sostituendo l'espressione del segnale modulato, abbiamo

$$x(t) = A_C \cos\left(2\pi f_C t + 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) + n_F(t)$$

Per quanto riguarda il rumore filtrato, esso ha espressione

$$n_F(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_C t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_C t)$$

Se, però, poniamo

$$r(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \arctg\left(\frac{n_I(t)}{n_Q(t)}\right)$$

possiamo riscrivere il rumore filtrato nella forma

$$n_F(t) = r(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

per cui il segnale in uscita dal filtro passa-banda assume l'espressione

$$x(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right) + r(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

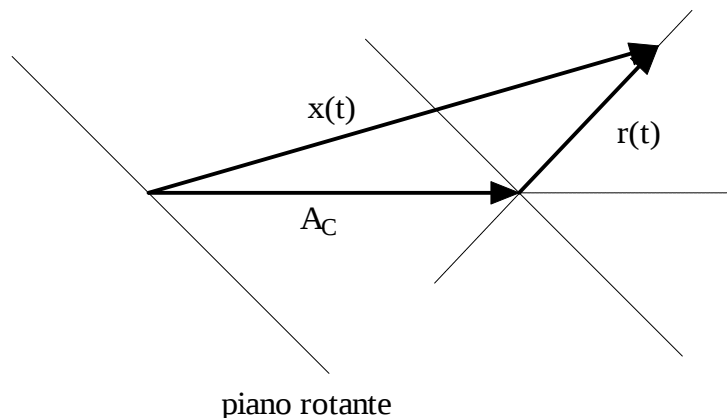
Se inoltre poniamo

$$\Phi(t) = 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$

possiamo ancora una volta riscrivere $x(t)$ nella forma

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \Phi(t)) + r(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

Questa espressione ci è utile in quanto ci consente di rappresentare le due componenti di $x(t)$ in termini ancora una volta di *vettori rotanti*:



L'angolo formato tra il piano rotante (con velocità angolare $2\pi f_c$) e $x(t)$ risulta essere

$$\theta(t) = \Phi(t) + \arctg \frac{r(t) \sin(\varphi(t) - \Phi(t))}{A_c + r(t) \cos(\varphi(t) - \Phi(t))}$$

Si tratta in pratica dell'angolo del segnale $x(t)$ che va in ingresso al demodulatore vero e proprio.

Il demodulatore si occupa semplicemente di eseguire la derivata di $\theta(t)$: essendo un po' complessa la derivata dell'espressione appena trovata per $\theta(t)$, facciamo qualche ipotesi semplificativa:

- in primo luogo, supponiamo che la potenza di rumore sia molto minore della potenza del segnale utile: questa ipotesi corrisponde a dire che, al denominatore dell'argomento della "arctg", possiamo trascurare il secondo termine rispetto ad A_c , per cui

$$\theta(t) = \Phi(t) + \arctg \frac{r(t) \sin(\varphi(t) - \Phi(t))}{A_c}$$

- in secondo luogo, supponiamo anche di poter trascurare il termine $\Phi(t)$ rispetto al termine $\varphi(t)$ nell'argomento del "seno", per cui l'espressione di $\theta(t)$ diventa

$$\theta(t) = \Phi(t) + \arctg \frac{r(t)\sin(\varphi(t))}{A_c}$$

Andando a calcolare la derivata, divisa per 2π , si trova quanto segue:

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\Phi(t) + \arctg \frac{r(t)\sin(\varphi(t))}{A_c} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{dn_q(t)}{dt}$$

Il segnale $x_1(t)$ è dunque quello che viene fuori da quello che nello schema abbiamo indicato come "demodulatore di frequenza". Ricordando che

$$\Phi(t) = 2\pi k_F \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$

è evidente che tale segnale ha anche quest'altra espressione:

$$x_1(t) = k_F s(t) + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{dn_q(t)}{dt}$$

Abbiamo dunque ancora una volta la somma del segnale utile $k_F s(t)$ e di una componente di rumore.

L'ultimo passo è il filtraggio di questo segnale: l'effetto è il segnale $s_u(t)$ corrispondente ad $x_1(t)$ privato delle componenti in frequenza esterne all'intervallo $[-w, +w]$.

RAPPORTO SEGNALE-RUMORE

Possiamo allora andarci a calcolare il rapporto segnale rumore.

Per quanto riguarda la potenza del segnale, essa vale

$$S = E[(k_F s(t))^2] = k_F^2 P_s$$

Per quanto riguarda la potenza del rumore, abbiamo che

$$N = E\left[\left(\frac{1}{2\pi A_c} \frac{dn_q(t)}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{A_c^2} E\left[\left(\frac{1}{2\pi} \frac{dn_q(t)}{dt}\right)^2\right]$$

Per calcolare questa potenza, dobbiamo fare qualche osservazione preliminare.

Intanto, possiamo considerare il segnale $\frac{1}{2\pi} \frac{dn_q(t)}{dt}$ come l'uscita di un particolare "derivatore" al quale arriva in ingresso il segnale $n_q(t)$:



La funzione di trasferimento del sistema è

$$H_{\text{deriv}}(f) = \frac{1}{2\pi} j2\pi f = jf$$

Sulla base di ciò, possiamo determinare lo spettro di potenza del segnale $\frac{dn_q(t)}{dt}$ sapendo che lo spettro di potenza del segnale $n_q(t)$ è $S_x(f) = \frac{kT}{2}$: abbiamo infatti che

$$S_Y(f) = S_X(f) |H_{\text{deriv}}(f)|^2 = \frac{kT}{2} f^2 = \frac{kT}{2} f^2$$

Noto dunque lo spettro di potenza del segnale $\frac{1}{2\pi} \frac{dn_q(t)}{dt}$, possiamo calcolarci la potenza statistica del rumore in uscita dal demodulatore: abbiamo infatti che

$$N = \frac{1}{A_C^2} E \left[\left(\frac{1}{2\pi} \frac{dn_q(t)}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{A_C^2} \int_{-w}^{+w} S_Y(f) df = \frac{1}{A_C^2} \int_{-w}^{+w} \frac{kT}{2} f^2 df = \dots = \frac{kTw^3}{3A_C^2}$$

Possiamo dunque concludere che il rapporto S/N in uscita dal demodulatore è

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{OUT}} = \frac{3A_C^2 k_F^2}{kTw^3} P_s$$

Per quanto riguarda, invece, il fattore R, dato che risulta

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{CANALE}} = \frac{\frac{1}{2} A_C^2}{\frac{kT}{2} w} = \frac{A_C^2}{kTw}$$

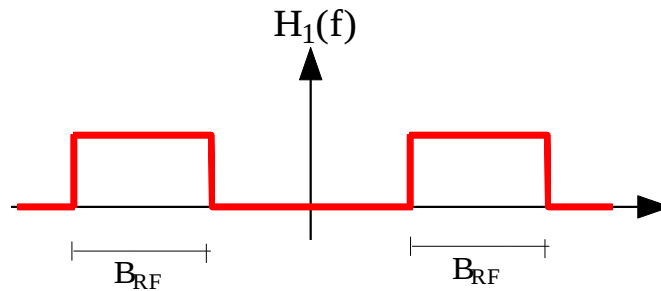
possiamo concludere che

$$R = \frac{3k_F^2}{w^2} P_s$$

Quello che si nota da questa espressione è che il valore di R , a parità di potenza e di banda del segnale modulante $s(t)$, dipende da k_F : evidentemente, allora, si sceglie k_F in modo da avere $R > 1$.

LA CONDIZIONE DI SOGLIA

Tuttavia, proprio sulla scelta di k_F bisogna stare molto attenti: infatti, una grandezza che è legata al valore di k_F è la banda di radiofrequenza B_{RF} ; anzi, aumentando k_F , si ottiene un aumento anche di B_{RF} ; ma, se aumenta B_{RF} , è necessario anche aumentare la banda del filtro passa-banda, che ricordiamo ha una funzione di trasferimento del tipo



Aumentare la banda di questo filtro significa far passare una maggiore quantità di rumore e ciò può invalidare l'ipotesi, fatta in precedenza, per cui la potenza del rumore stesso è molto minore di quella del segnale.

Questo, quindi, per dire che l'aumento di k_F va fatto in modo estremamente oculato: d'altra parte, si tratta di un aumento necessario, proprio perché, in base alla relazione $R = \frac{3k_F^2}{w^2} P_s$, aumentando k_F si ottiene un aumento quadratico di R e quindi un grosso miglioramento nei confronti del rumore.

Esiste una relazione matematica che, quando verificata, garantisce la correttezza dell'ipotesi per cui la potenza del rumore è molto minore di quella del segnale: si tratta della cosiddetta **condizione di soglia**, secondo la quale deve risultare

$$\frac{P_R}{N_0 B_{RF}} > 10(\text{dB})$$

dove P_R è la **potenza ricevuta**, ossia la potenza che arriva in ingresso all'apparato di demodulazione (ossia, anche, la potenza in uscita dal canale: tale potenza, nell'ipotesi di canale ideale, coincide con la **potenza trasmessa**, ossia la potenza del segnale modulato in uscita dal modulatore).

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>