Appunti di "Teoria dei sistemi"
Capitolo 4 - Parte I
Sistemi regolari a dimensioni finite lineari tempo-continui

INTRODUZIONE

Sappiamo ormai bene che, per caratterizzare in modo completo e univoco un sistema, è necessario specificare quali sono le caratteristiche dei seguenti 8 oggetti:

$$\boxed{\langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \Omega, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \Gamma, j, h \rangle}$$

Riepiloghiamo velocemente a cosa corrispondono questi oggetti:

- l'insieme T è il cosiddetto "*insieme dei tempi*" e serve a indicare come è definito il concetto appunto di "tempo" per il sistema in esame; questo insieme può essere fatto di numeri reali (quando il tempo è una grandezza continua) oppure di numeri interi positivi (quando il tempo è una grandezza quantizzata) e su di esso è inoltre definita una "relazione d'ordine" che consenta sempre di stabilire, dati due istanti, quale venga prima e quale dopo;
- l'insieme U è l'insieme dei *valori ammissibili per l'ingresso*, ossia l'insieme dei valori che l'ingresso può assumere;
- l'insieme Ω è l'insieme delle *funzioni ammissibili per l'ingresso*: esso serve a specificare come può evolvere nel tempo la forma d'onda dell'ingresso;
- stesso discorso per l'uscita: abbiamo l'insieme Y dei *valori possibili per l'uscita* e l'insieme Γ delle *funzioni ammissibili per l'uscita*;
- poi abbiamo l'insieme X degli *stati ammissibili* del sistema: esso racchiude tutti i possibili valori assumibili da parte delle variabili che forniscono lo stato del sistema in ogni istante;

- infine, abbiamo le due funzioni che forniscono il legame tra l'ingresso, lo stato e l'uscita: la <u>*funzione di transizione di stato*</u> φ fornisce l'evolversi dello stato del sistema, noti che siano lo stato iniziale e l'andamento temporale dell'ingresso; la <u>*funzione di uscita*</u> η fornisce invece il valore dell'uscita del sistema in un istante prefissato t a partire dallo stato del sistema in tale istante, dal valore dell'ingresso in tale istante e, eventualmente, dall'istante stesso tempo.

Fatto questo riepilogo, vogliamo adesso caratterizzare i sistemi di cui intendiamo occuparci in questo capitolo: vogliamo cioè specificare come sono fatti gli 8 oggetti appena richiamati.

In precedenza, abbiamo esaminato, come primo tipo di sistemi, i cosiddetti "<u>*automi*</u>": tra le caratteristiche di questi sistemi, spicca senz'altro quella per cui gli insiemi U, Y e X sono finiti, ossia contengono un numero finito di valori. Molto spesso, questa particolare caratteristica viene meno, nel senso che questi tre insiemi sono solitamente formati da un <u>numero infinito di elementi</u>. Di particolare interesse sono quei casi in cui, sugli elementi di questi tre insiemi, sono definite delle semplici operazioni quali la somma di elementi ed il prodotto per uno scalare. Tra le molte strutture algebriche di cui è possibile dotare gli insiemi U,Y e X, è di particolare importanza quella che corrisponde ad affermare che tali insiemi sono "<u>*spazi vettoriali*</u>" o opportuni sottoinsiemi di spazi vettoriali. Questo per dire, dunque, che *ci occuperemo di sistemi per i quali gli insiemi U (insieme dei valori di ingresso), Y (insieme dei valori di uscita) e X (insieme di stato) sono degli spazi vettoriali o, comunque, opportuni sottoinsiemi di spazi vettoriali.*

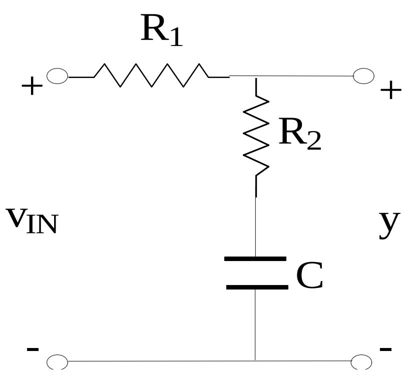
Dato un generico spazio vettoriale, sappiamo anche che esso è caratterizzato, tra le altre cose, da una propria "<u>*dimensione*</u>", la quale rappresenta il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare in tale spazio. Questa dimensione può essere finita (= numero intero positivo) oppure anche infinita: nel primo caso, si parla di "<u>*spazio vettoriale a dimensione finita*</u>", mentre nel secondo si parla di "<u>*spazio vettoriale a dimensione infinita*</u>". Nella "Teoria dei sistemi", sono di particolare interesse quei sistemi in cui gli insiemi U,Y e X sono degli spazi vettoriali a dimensione finita ed è per questo che ci occuperemo nel seguito di questa classe di sistemi.

SISTEMI (DINAMICI) A DIMENSIONI FINITE

L'oggetto dei prossimi paragrafi sono dunque dei sistemi, detti "**sistemi (dinamici) a dimensioni finite**", aventi la seguente caratteristica fondamentale: *gli insiemi U, Y ed X sono spazi vettoriali a dimensione finita o sottoinsiemi di spazi vettoriali a dimensione finita.*

Sulla base di ciò, chiameremo U col nome di "**spazio di ingresso**", Y col nome di "**spazio di uscita**" e X col nome di "**spazio di stato**". Non abbiamo invece, per il momento, altri vincoli sugli altri "oggetti" che caratterizzano il sistema, ossia sugli insiemi Ω e Γ e sulle funzioni φ e η.

Tanto per avere un esempio concreto di sistema a dimensioni finite, consideriamo la solita rete elettrica esaminata in precedenza:



Autore: Sandro Petrizzelli

L'ingresso al sistema è rappresentato dalla tensione di alimentazione $V_{IN}(t)$: questa tensione può assumere un qualsiasi valore reale, dal che deduciamo che l'insieme di ingresso U coincide con l'insieme dei numeri reali $\Re$.

L' uscita del sistema è rappresentata dalla tensione y(t) ai capi della serie tra R_2 e C: anche qui, trattandosi di una tensione, essa può variare nell'insieme dei numeri reali, per cui Y coincide con $\Re$.

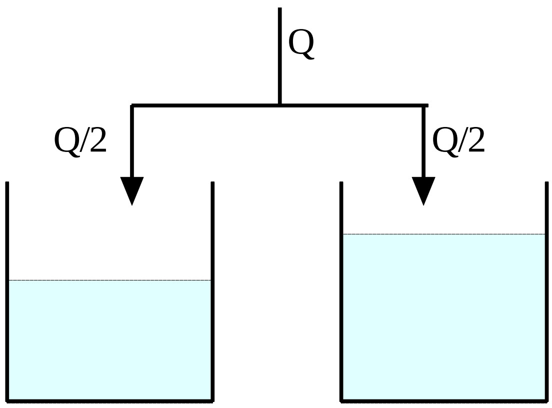
Infine, come variabile di stato si considera evidentemente la tensione ai capi del condensatore, il che significa, ancora una volta, che X coincide con $\Re$.

Quindi, gli insiemi U,Y ed X sono degli spazi vettoriali di dimensione finita (in questo caso pari ad 1), per cui questo sistema rientra nella classe che stiamo esaminando.

Ovviamente, non è detto che U,Y ed X debbano essere costituiti dallo stesso spazio vettoriale: ad esempio, nel caso del sistema meccanico esaminato in precedenza (nel quale l'ingresso è la forza, l'uscita è la velocità e lo stato è la coppia posizione-velocità), mentre gli insiemi U ed Y coincidono ancora una volta con $\Re$, l'insieme di stato X coincide con $\Re^2$.

Esempio: sistema idraulico

Supponiamo di avere 2 serbatoi, aventi sezione uguale e costante pari ad A, alimentati da una portata di liquido Q (intesa come quantità di liquido che fluisce nell'unità di tempo) che si divide esattamente a metà tra di essi:



Facciamo l'ipotesi che questa portata Q possa essere sia positiva (il che significa che il liquido viene immesso nei serbatoi) sia negativa (nel qual caso il liquido viene aspirato, sempre in parti uguali, dai due serbatoi).

Il nostro scopo è trovare un modello di questo sistema, prendendo come ingresso la portante Q, come uscita il volume complessivo V di liquido contenuto nei due serbatoi e come stato il livello di liquido in ciascuno dei due serbatoi.

Avendo già effettuato l'orientazione del sistema (ossia avendo già individuato ingresso, uscita e stato), tutto sta ad individuare il modello matematico, ossia una relazione che leghi ingresso, uscita e stato. Per fare questo, possiamo servirci dell'equazione di continuità del liquido: considerato il serbatoio 1, per definizione di portata possiamo affermare che il liquido che entra (o esce) nel serbatoio, in un tempo dt, è pari a $\frac{Q}{2}dt$; inoltre, indicata con dz_1 la variazione (positiva o negativa) di livello del liquido che si ha nel tempo dt, è chiaro che la variazione di volume di liquido, sempre nel serbatoio 1, è data da $dV_1 = Adz_1$. Possiamo dunque scrivere che

$$\frac{Q}{2}dt = Adz_1$$

da cui $\frac{dz_1}{dt} = \frac{Q}{2A}$.

Ragionando in modo analogo per il serbatoio 2, abbiamo l'altra equazione

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{Q}{2A}$$

Queste due equazioni regolano evidentemente l'andamento dello stato del sistema all'ingresso del sistema stesso. C'è però da osservare che esse non sono del tutto generali, in quanto ciascuna di esse NON vale in due casi particolari:

- con riferimento, ad esempio, al serbatoio 1, il primo caso è quello in cui la portata Q è positiva e, allo stesso tempo, il livello di liquido z_1 è esattamente pari all'altezza h_1 del serbatoio stesso: si tratta cioè del caso in cui si cerca di immettere altro liquido quando il serbatoio è già pieno, per cui non ci sono ulteriori variazioni di z_1, ossia risulta $\frac{dz_1}{dt} = 0$;
- il secondo caso è quello inverso, ossia quello in cui la portata Q è negativa e, allo stesso tempo, il livello di liquido z_1 è pari a 0: in questo caso, si cerca di aspirare del liquido quando il serbatoio è vuoto, per cui ancora una volta risulta $\frac{dz_1}{dt} = 0$.

In conclusione, il modello matematico di questo sistema può essere espresso nel modo seguente:

$$\text{serbatoio n°1} \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = 0 & \text{se } z_1 = 0 \text{ e } Q < 0 \\ \frac{dz_1}{dt} = 0 & \text{se } z_1 = h_1 \text{ e } Q > 0 \\ \frac{dz_1}{dt} = \frac{Q}{2A} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

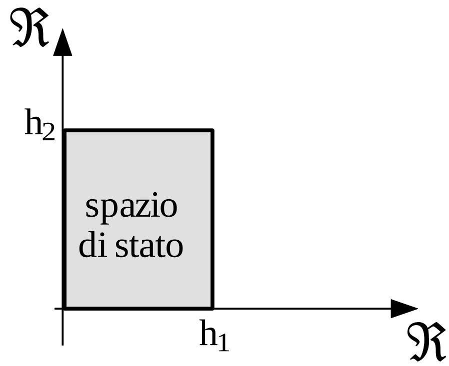
$$\text{serbatoio n°2} \begin{cases} \frac{dz_2}{dt} = 0 & \text{se } z_2 = 0 \text{ e } Q < 0 \\ \frac{dz_2}{dt} = 0 & \text{se } z_2 = h_2 \text{ e } Q > 0 \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{Q}{2A} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A questo punto, vediamo come sono fatti gli insiemi U,Y ed X al fine di verificare se questo sistema è o meno a dimensioni finite.

Cominciamo dall'insieme di ingresso U: come ingresso è stata scelta la portata Q, la quale può assumere un qualsiasi valore reale, positivo o negativo; deduciamo che $U=\Re$, per cui si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione 1.

Come uscita abbiamo invece preso il volume complessivo V di liquido: tale volume può assumere, evidentemente tutti i valori reali compresi nell'intervallo $[0, A(h_1 + h_2)]$, dato che il valore minimo è quello corrispondente a entrambi i serbatoi vuoti, mentre il valore massimo è quello corrispondente a entrambi i serbatoi pieni. L'insieme rappresentato dai valori reali compresi nell'intervallo $\left[0, A\left(h_1+h_2\right)\right]$ è un sottoinsieme di $\Re$.

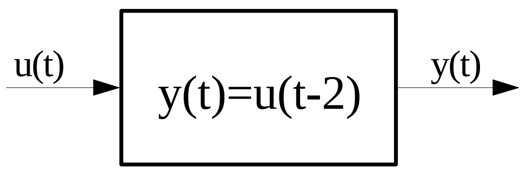
Infine, come stato del sistema abbiamo preso la coppia $\left(z_1, z_2\right)$ che fornisce il livello di liquido nei due serbatoi: in questo caso, considerando che $z_1 \in [0, h_1]$ e $z_2 \in [0, h_2]$, abbiamo un sottoinsieme di $\Re^2$:



Possiamo dunque concludere che <u>il sistema considerato è a dimensioni finite</u>, visto che U è uno spazio vettoriale di dimensione 1, Y è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale di dimensione 1 ed X è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Esempio: Ritardo puro

Consideriamo un sistema fatto nel modo seguente:



Come si nota dalla figura, la relazione tra l'ingresso e l'uscita è $y(t)=u(t-2)$, ossia l'ingresso viene semplicemente ritardato dal sistema di 2 unità di tempo.

Intanto, si tratta chiaramente di un <u>sistema dinamico</u>: se noi fissiamo un istante qualsiasi τ e conosciamo solo il valore $u(\tau)$ dell'ingresso in tale istante, non siamo in grado di conoscere il valore $y(\tau)$ dell'uscita nello stesso istante; al contrario, per conoscere $y(\tau)$, ci serve conoscere il valore $y(\tau-2)$ dell'uscita relativo a 2 istanti precedenti.

Vediamo di definire le altre caratteristiche di questo sistema. Se supponiamo che l'ingresso $u(\bullet)$ può assumere un qualsiasi valore reale, è chiaro che risulta U=$\Re$ ed anche Y=$\Re$, per cui, per il momento, rientriamo nelle ipotesi di sistema a dimensioni finite.

Inoltre, se non poniamo vincoli sull'insieme Ω delle funzioni di ingresso ammissibili, non ci saranno vincoli anche sull'insieme Γ delle funzioni ammissibili per l'uscita.

Resta ora da definire lo stato del sistema: *è chiaro, dalla relazione* $y(t)=u(t-2)$*, che lo stato del sistema, in un generico istante t, è rappresentato da tutti i valori che l'ingresso assume a partire dall'istante t-2 per finire all'istante t.*

In questo senso, lo stato del sistema è rappresentato da una funzione del tempo definita su un intervallo di ampiezza 2 (funzione che corrisponde alla restrizione dell’ingresso al suddetto intervallo); di conseguenza, l’insieme di stato X corrisponde all’insieme di tutte le funzioni, reali di variabile reale, definite su un intervallo di ampiezza 2. E’ chiaro che questo insieme X è uno spazio vettoriale di dimensione ∞, dal che deduciamo che il sistema NON è a dimensioni finite.

CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO PER LO STATO: COORDINATIZZAZIONE DI UN SISTEMA

Tra le varie proprietà degli spazi vettoriali, abbiamo in precedenza esaminato la seguente: dato uno spazio vettoriale V qualsiasi, di dimensione n (finita), è possibile esprimere un qualsiasi vettore $v \in V$ mediante una opportuna (e unica) combinazione lineare dei vettori che costituiscono una qualsiasi base di V. Per esempio, fissata se la generica base $B_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di V, esiste ed è unica la n-pla $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ di coefficienti reali che soddisfano la relazione

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n$$

I coefficienti $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, in base a questa proprietà, prendono il nome di “*coordinate*” del vettore v rispetto alla base B_X. Il fatto che, fissata la base, la corrispondente n-pla di coefficienti sia unica, consente di affermare che esiste una corrispondenza biunivoca tra il vettore v e la n-pla stessa, una volta fissata la base. Oltre a questo, abbiamo visto che è possibile passare dalla rappresentazione di v rispetto alla base B_X alla rappresentazione di v rispetto ad una qualsiasi altra base B_Y: il passaggio di effettua risolvendo il sistema

$$[v]_{B_Y} = T^{-1}[v]_{B_X}$$

dove $[v]_{B_X}$ corrisponde al vettore colonna $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, dove $[v]_{B_Y}$ corrisponde al vettore colonna $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ dei coefficienti che “esprimono” v in funzione di B_Y e dove, infine, la matrice dei coefficienti T^{-1} (di dimensione, ovviamente, n*n) presenta, come colonne, le n-ple dei coefficienti che definiscono i vettori di B_Y rispetto alla base B_X.

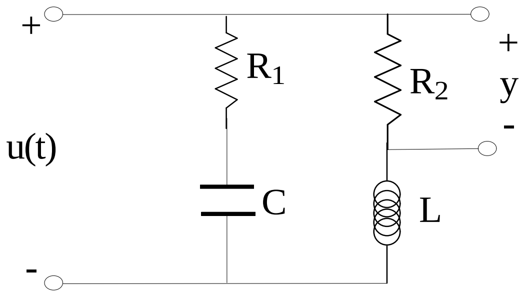
Questa proprietà è molto importante per i sistemi a dimensioni finite, per il motivo seguente: supponiamo di conoscere un generico stato $x \in X$ del sistema e di conoscere anche una base B_X di X; in queste condizioni, esisterà un’unica n-pla di coefficienti $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ che definisce x rispetto a tale base; può capitare che questa n-pla di coefficienti fornisca una rappresentazione di x che non è comoda per i nostri scopi: allora, in base alla proprietà richiamata prima, noi siamo liberi di scegliere, a nostro piacimento, un’altra base B_Y rispetto alla quale esprimere x; potremo trovare la rappresentazione di x, rispetto a questa nuova base B_Y per noi più comoda, semplicemente risolvendo il sistema

$$[x]_{B_Y} = T^{-1}[x]_{B_X}$$

In altre parole, nell’analizzare un sistema a dimensioni finite, abbiamo la possibilità, ogni volta, di scegliere la base che più si addice ai nostri scopi, ossia la base che fornisce la migliore rappresentazione possibile, in vista degli obbiettivi che ci siamo posti, degli stati del sistema. In ogni momento, siamo liberi di cambiare base a nostro piacimento. Queste considerazioni costituiscono il cosiddetto problema della “**coordinatizzazione di un sistema**”.

Esempio: rete elettrica RLC

Consideriamo la seguente rete elettrica:



Come ingresso al sistema consideriamo la tensione di ingresso u(t); come uscita del sistema, consideriamo la tensione y(t) ai capi della resistenza R_2; come stato del sistema, infine, consideriamo la coppia $\left(v_C(t), i_L(t)\right)$.

Per prima cosa, ci chiediamo se il sistema in questione è a dimensioni finite: considerando che $U=\Re$, $Y=\Re$ e $X=\Re^2$, è chiaro che la risposta è affermativa.

Soffermiamoci in particolare sullo spazio di stato X: il generico vettore appartenente ad X è nella forma $\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$; questo vettore, fissati i valori delle due sue componenti, avrà una corrispondente rappresentazione rispetto a ciascuna delle ∞ basi che possiamo prendere in X. Ad esempio, un esempio di base di X è il seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si tratta, evidentemente, della <u>*base canonica*</u> di $\Re^2$. Supponiamo allora di fissare un certo stato del sistema e precisamente $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{v}_C \\ \bar{i}_L \end{bmatrix}$: è evidente che la rappresentazione di questo stato, rispetto alla base canonica, è

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{v}_C \\ \bar{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{v}_C + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{i}_L$$

il che significa che la coppia di coefficienti che definiscono questo stato $\bar{x}$ rispetto alla base canonica è $\left(\bar{v}_C, \bar{i}_L\right)$. Nessuno ci impedisce, però, di cambiare la base scelta per X: rispetto alla nuova base, questo stesso stato $\bar{x}$ avrà un'altra rappresentazione, ossia un'altra coppia di coefficienti che lo individua in modo univoco, ma si tratterà sempre e comunque dello stesso stato.

Adesso, supponiamo di considerare, come stato del sistema, non più la coppia $(v_C(t), i_L(t))$, ma la coppia

$$\begin{cases} x_1 = v_C + i_L \\ x_2 = v_C - i_L \end{cases}$$

Stiamo cioè considerando, come stato del sistema, non più la coppia di valori $(v_C(t), i_L(t))$, ma la loro somma e la loro differenza. Quindi, le variabili di stato diventano adesso x_1 ed x_2, ossia il generico vettore di stato è nella forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Allora, fissati ancora una volta i valori $(\overline{v}_C, \overline{i}_L)$, lo stato del sistema sarà

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \overline{v}_C + \overline{i}_L \\ \overline{x}_2 = \overline{v}_C - \overline{i}_L \end{cases}$$

e, cioè, in forma matriciale

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{v}_C \\ \overline{i}_L \end{bmatrix}$$

In altre parole, possiamo descrivere lo stato del sistema sia rispetto alla coppia (v_C, i_L) sia rispetto alla coppia (x_1, x_2): ciò che cambia è il riferimento che noi scegliamo, ma lo stato (cioè le proprietà del sistema) sono comunque le stesse.

SISTEMI REGOLARI

Quando abbiamo parlato di spazi vettoriali, abbiamo detto che, sul generico spazio vettoriale, è possibile definire una o più "norme", ossia una o più funzioni che godono di una serie di importanti caratteristiche. Vediamo allora come si applica il concetto di norma, definita su uno spazio vettoriale, ai sistemi.

Si definisce "**sistema regolare**" un sistema avente le seguenti fondamentali caratteristiche:

1) in primo luogo, si tratta di un <u>sistema tempo-continuo</u>, il che significa che l'insieme dei tempi T coincide con l'insieme dei numeri reali $\Re$ ed è perciò uno spazio vettoriale di dimensione finita (=1)
2) in secondo luogo, gli insiemi U,Y ed X sono degli spazi vettoriali;
3) anche gli insiemi Ω (funzioni ammissibili di ingresso) e Γ (funzioni ammissibili di uscita) sono degli spazi vettoriali, con Ω, in particolare, che è a dimensione infinita;
4) su ciascuno degli spazi vettoriali U, Ω, Y, Γ e X è definita almeno una norma;
5) ancora, la funzione di transizione di stato φ (che, ricordiamo, è definita in $T \times T \times X \times \Omega$ ed ha valori in X) è una funzione continua in tutti i suoi argomenti;
6) infine, una volta fissati l'istante iniziale τ, lo stato iniziale $x(\tau)$ e l'andamento dell'ingresso $u(\bullet)$, la funzione $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ è continua in tutti gli istanti in cui anche la funzione $u(\bullet)$ è continua.

Una prima osservazione importante, riguardo questa definizione, è la seguente: si è detto che la funzione di transizione di stato φ è continua in tutti i suoi argomenti; questa funzione è definita nell'insieme $T \times T \times X \times \Omega$, che è il prodotto cartesiano, in base alle altre ipotesi, di 4 spazi vettoriali, ed ha valori in X, che è uno spazio vettoriale; si tratta, cioè, di una funzione che trasforma vettori di uno spazio vettoriale in vettori di un altro spazio vettoriale; se poniamo $V = T \times T \times X \times \Omega$, la definizione di "**continuità**", per una funzione fatta in questo modo, è la seguente:

Def. *Dato* $v_0 \in V$*, si dice che j è "**continua in v₀**" se e solo se è verificata la condizione*

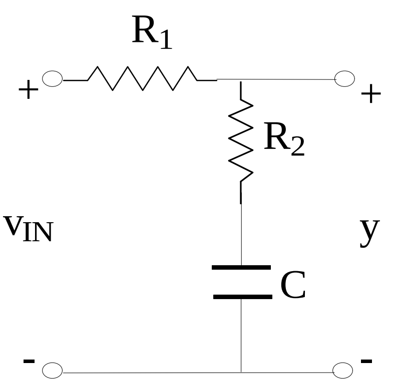
$$\lim_{\|v - v_0\|_V} \|\varphi(v) - \varphi(v_0)\|_X = 0$$

E' chiaro che, in questa definizione, subentrano le norme definite sugli spazi vettoriali V ed X. Un risultato importante, a questo proposito, è quello secondo cui <u>quella definizione non dipende dal tipo di norme che vengono scelte solo nel caso in cui sia V sia W sono spazi vettoriali a dimensioni finite</u>; al contrario, se almeno uno dei due è a dimensioni infinite, è indispensabile specificare a quali norme si fa riferimento, visto che la definizione potrebbe valere per alcune norme e per altre no. Vediamo allora cosa comporta questo risultato nel caso dei sistemi regolari.

Le ipotesi enunciate prima dicono che, mentre T è uno spazio vettoriale a dimensione certamente finita, gli spazi X e Ω sono, in generale, spazi vettoriali di dimensione ignota: questo comporta, dunque, che le ipotesi di continuità sulle funzioni φ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ siano indipendenti dal tipo di norma scelto per T, mentre possano dipendere dal tipo di norma scelto per X e Ω (nel caso siano spazi vettoriali di dimensione infinita). Detto in altri termini, quando si dice che è stata definita una norma su X e una su Ω e si dice anche che φ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ sono continue , <u>l'ipotesi implicita è che la scelta delle norme sia stata fatta in modo da soddisfare le condizioni di continuità</u>.

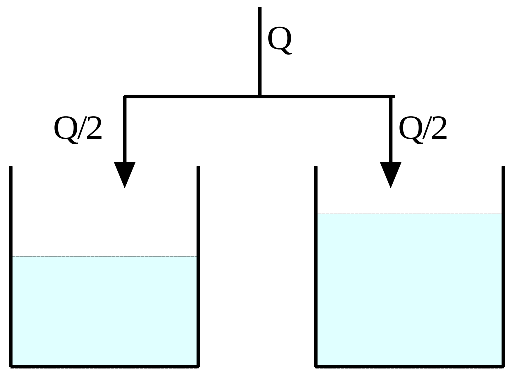
Fatta questa importante premessa, vediamo un esempio di sistema regolare ed un esempio di sistema non regolare.

Consideriamo ancora una volta la rete elettrica:



Abbiamo fatto vedere in precedenza che questo è un sistema a dimensioni finite, per cui è soddisfatta la seconda ipotesi di "regolarità"; inoltre, l'insieme dei tempi coincide con $\Re$, per cui anche la prima ipotesi è verificata. Deduciamo, quindi, che la rete elettrica è un esempio di sistema regolare.

Vediamo se lo stesso si può dire del sistema, esaminato prima, costituito dai due serbatoi alimentati da una portata Q:



Possiamo subito affermare che non si tratta di un sistema regolare, per il semplice fatto che non è certamente verificata la seconda ipotesi: infatti, l'insieme di stato X e l'insieme di uscita Y sono sottoinsiemi, rispettivamente, di $\Re$ ed $\Re^2$, per cui NON sono spazi vettoriali.

SISTEMI REGOLARI A DIMENSIONI FINITE

Le caratteristiche dei sistemi regolari e di quelli a dimensioni finite possono essere messe insieme per formare una ulteriore importante classe di sistemi, detti "**sistemi regolari a dimensioni finite**"; le caratteristiche di un sistema appartenente a questa classe sono le seguenti:

- il sistema è a dimensioni finite, con X spazio vettoriale di dimensione n, U spazio vettoriale di dimensione m e Y spazio vettoriale di dimensione p;
- il sistema è regolare;
- la funzione di uscita η (che, ricordiamo, è una funzione definita in $X \times U \times T$ ed ha valori in Y) è continua in tutti i suoi argomenti.

Una conseguenza fondamentale di queste caratteristiche è la seguente: fissato un istante iniziale τ, uno stato iniziale $x(\tau)$ e l'andamento $u(\bullet)$ dell'ingresso, il movimento del sistema (cioè l'evoluzione temporale dello stato del sistema) risulta essere soluzione di una equazione differenziale del tipo

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t), t]}$$

Questa equazione prende il nome di "**equazione (differenziale) di stato**" e va ovviamente risolta con l'aggiunta della condizione iniziale $x=x(\tau)$. La soluzione x(t) di questa equazione è dunque quella che già in precedenza abbiamo chiamato "**equazione di movimento**" del sistema. E' opportuno sottolineare fin da ora che non sempre questa soluzione è ottenibile per via analitica, per cui, quando sia necessario, è necessario adoperare metodi di tipo numerico. Conseguenza di ciò è che *lo studio dei sistemi va sempre impostato sulla base dell'equazione (differenziale) di stato, dato che essa può essere sempre ricavata per via analitica.*

Ove sia possibile risolvere questa equazione differenziale per via analitica, è possibile ottenere ulteriori informazioni sul sistema.

Sempre riguardo l'equazione differenziale, considerando che il sistema è a dimensioni finite, per cui lo stato avrà un numero n di componenti (pari all'ordine dello spazio di stato X), è chiaro che si tratta di una equazione differenziale vettoriale, ossia rappresentativa di n equazioni differenziali scalari: scritte nella forma più estesa possibile, tali equazioni sono

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1\left[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t\right] \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2\left[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t\right] \\ \dots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n\left[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t\right] \end{cases}$$

Una cosa evidente che emerge dall'espressione dell'equazione differenziale di stato è che il valore di $\frac{dx(t)}{dt}$ dipende, tra le altre cose, dal valore istantaneo u(t) dell'ingresso. Al fine di renderci conto meglio di questo fatto, proviamo a calcolarci proprio $\frac{dx(t)}{dt}$ come limite del rapporto incrementale di x(t).

Per definizione, questo rapporto incrementale è

$$\frac{x(t+dt)-x(t)}{dt}$$

D'altra parte, fissato l'istante t e lo stato del sistema x(t) in tale istante, lo stato del sistema all'istante successivo t+dt si può calcolare, per definizione, mediante la funzione di transizione di stato: quel rapporto incrementale è dunque uguale a

$$\frac{\varphi\left(t+dt, t, x(t), u(\bullet)\right)-x(t)}{dt}$$

Inoltre, il valore della quantità $\varphi\left(t+dt, t, x(t), u(\bullet)\right)$, in base alla proprietà di causalità di cui gode qualsiasi funzione di transizione di stato, non dipende dall'andamento temporale completo dell'ingresso, ma solo dall'andamento nell'intervallo in esame, ossia $u(\bullet)\big|_{[t,t+dt]}$. Di conseguenza, il rapporto incrementale diventa

$$\frac{\varphi\left(t+dt, t, x(t), u(\bullet)\big|_{[t,t+dt]}\right)-x(t)}{dt}$$

A questo punto, se facciamo il limite per dt→0, al fine di ottenere appunto $\frac{dx(t)}{dt}$, è chiaro che questa quantità viene a dipendere, tra le altre cose, solo da u(t).

Un'altra osservazione riguarda la dipendenza dal tempo della quantità $\frac{dx(t)}{dt}$, ossia, in definitiva, la presenza della grandezza tempo nel sistema scritto prima in forma estesa: è chiaro che questa dipendenza compare nel caso di sistema tempo-variante, mentre scompare nel caso di sistema tempo-invariante. Ciò significa che, *per un sistema tempo-invariante, il* ***"sistema di stato"*** *è del tipo seguente:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)] \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)] \\ \dots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)] \end{cases}$$

SISTEMI LINEARI

Sia dato un sistema con spazio di stato X e con insieme delle funzioni di ingresso ammissibili Ω; si dice che questo sistema presenta un "**movimento lineare in** $X \times \Omega$" se gode delle seguenti 3 proprietà fondamentali:

- in primo luogo, la funzione di transizione di stato $\varphi(t, \tau, x, u(\bullet))$ è fatta nel modo seguente:

$$\boxed{\varphi(t, \tau, x, \ (\bullet)) = \varphi_l(t, \tau, x) + \varphi_f(\ , \tau, u(\bullet))}$$

In base a questa relazione, *la funzione j è cioè ottenibile come somma di due diversi contributi: il primo contributo, detto "**contributo libero**" e indicato con j_l, indipendente dall'ingresso, ed un secondo contributo, detto "**contributo forzato**" e indicato con j_f, indipendente dallo stato iniziale x;*

- in secondo luogo, *il contributo libero j_l rappresenta una funzione che è "lineare" rispetto allo stato, ossia gode delle note proprietà di additività e omogeneità:* in formule, se x_A e x_B sono due diversi stati appartenenti all'insieme di stato X del sistema e c_A e c_B sono due generici scalari, dire che φ_l è lineare rispetto allo stato significa dire che sussiste la relazione

$$\varphi_l(t, \ , \ _A x_A + c_B \ _B) = c_A \varphi_l(t \ \tau, \ _A) + c_B \ _l(t, \tau \ _B)$$

in terzo luogo, *il contributo forzato $_f$ rappresenta una funzione che è*

additività e omogeneità: in formule, se u e u_B
il sistema (appartenenti cioè all'insieme Ω $_A$ e c sono due generici scalari, dire che φ è lineare rispetto all'ingresso significa dire che sussiste la relazione

$$\varphi_f(t, \tau, c_A u_A(\bullet) + c_B u_B(\bullet)) = c_A \varphi_f(t, \tau, u_A(\bullet)) + c_B \varphi_f(t, \tau, u_B(\bullet))$$

Un sistema che gode di queste tre proprietà è dunque un sistema che presenta un movimento lineare nell'insieme X*Ω. E' opportuno osservare che le proprietà di linearità, rispettivamente nello stato e nell'ingresso, del contributo libero e di quello forzato possono essere espresse, in maniera sempre formale, nel modo seguente:

- per dire che il contributo libero φ_l è lineare nello stato, ossia è lineare rispetto all'insieme di stato X, si può scrivere che

$$\boxed{\varphi_l(t,\tau,x)=\Phi_l(t,\tau)x}$$

  dove il simbolo $\Phi_l(t,\tau)$ indica una "*trasformazione lineare operante su x*": chiaramente, questa trasformazione rappresenta una matrice nel caso in cui x sia un vettore di un numero finito di componenti (ossia nel caso in cui il sistema sia a dimensioni finite), mentre, per gli altri casi, si tratta di un qualche oggetto matematico comunque complesso;

- in modo del tutto analogo, per dire che il contributo forzato φ_f è lineare nello stato, ossia è lineare rispetto all'insieme Ω, si può scrivere che

$$\boxed{\varphi_f(t,\tau,u(\bullet))=\Phi_f(t,\tau)u(\bullet)}$$

  dove il simbolo $\Phi_f(t,\tau)$ indica una "*trasformazione lineare operante su u*": chiaramente, essendo $u(\bullet)$ una funzione (appartenente perciò ad uno spazio vettoriale di dimensione ∞), questa trasformazione non rappresenta mai una matrice.

A questo punto, possiamo dare una ulteriore importante definizione, in quanto possiamo definire cosa si intende per "sistema lineare". Un sistema si dice "**lineare**" se presenta le seguenti caratteristiche:

- in primo luogo, gli insiemi U (valori ammissibili di ingresso), Ω (funzioni ammissibili di ingresso), X (insieme di stato), Y (valori ammissibili di uscita) e Γ (funzioni ammissibili di uscita) sono tutti degli spazi vettoriali;
- la funzione di transizione di stato $\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))$ è lineare in $X\times\Omega$;
- la funzione di uscita $\eta(x(t),u(t),t)$ è lineare in $X\times U$.

I **sistemi lineari** sono particolarmente importanti per una serie di motivi: sono pieni di proprietà, sono particolarmente facili da realizzare nella pratica e, cosa non trascurabile, sono semplici da studiare. Per questo motivo, ogni volta che sia possibile, si cerca di avere a che fare solo con sistemi di tipo lineare.

E' bene soffermarsi un momento sulla seconda e terza proprietà tra quelle appena elencate: in base a quanto detto in precedenza a proposito dei sistemi dotati di movimento libero, dire che la funzione di transizione di stato è lineare in $X\times\Omega$ e che la funzione di uscita è lineare in $X\times U$ significa dire che valgono le relazioni

$$\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))=\Phi_l(t,\tau)x+\Phi_f(t,\tau)u(\bullet)$$
$$\eta(x(t),u(t),t)=\eta_l x(t)+\eta_f u(t)$$

SISTEMI (DINAMICI) REGOLARI A DIMENSIONI FINITE LINEARI

Abbiamo in precedenza visto che, dato un sistema (dinamico) regolare a dimensioni finite, fissato un istante iniziale τ, uno stato iniziale $x(\tau)$ e l’andamento $u(\bullet)$ dell’ingresso, il movimento del sistema (cioè l’evoluzione temporale dello stato del sistema) è soluzione di una equazione differenziale del tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t), t]$$

Se il sistema è anche lineare, è ovvio che questa equazione risulta essere lineare rispetto allo stato x(t) ed all’ingresso u(t); di conseguenza, potremo senz’altro scriverla nella forma seguente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{trasformazione lineare}\\ \text{operante su x(t)}}} x(t) + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{trasformazione lineare}\\ \text{operante su u(t)}}} u(t)$$

Abbiamo cioè che il termine $\frac{dx(t)}{dt}$ (che, per comodità, indicheremo nel seguito con il simbolo $\dot{x}(t)$) è dato dalla somma di un termine dipendente solo da x(t) e di un termine dipendente solo da u(t). Si tratta, ovviamente, di capire come sono fatte le due “*trasformazioni lineari*” operanti, rispettivamente, su x(t) e u(t).

Tra le varie ipotesi sotto cui stiamo lavorando, c’è quella per cui il sistema è a dimensioni finite, il che significa che l’insieme di stato X e l’insieme di ingresso U sono spazi vettoriali di dimensione finita: indicate, allora, con n e con m le rispettive dimensioni, è chiaro che x(t) e $\dot{x}(t)$ sono entrambi vettori ad n componenti, mentre u(t) è un vettore ad m componenti; di conseguenza, perché sia verificata quella relazione, le due trasformazioni lineari dovranno necessariamente essere due matrici (i cui elementi sono, in generale, delle funzioni) di dimensioni, rispettivamente, n*n ed n*m:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{F(t)}_{n*n} x(t) + \underbrace{G(t)}_{n*m} u(t)$$

La matrice F(t), che “pesa” il contributo dello stato del sistema, prende il nome di “**matrice di stato**”, mentre la matrice G(t), che “pesa” il contributo dell’ingresso, prende il nome di “**matrice di ingresso**”. Queste due matrici devono godere di una importante ulteriore proprietà: infatti, stiamo supponendo che il sistema sia, tra le altre cose, anche regolare, il che significa che la quantità $\dot{x}(t)$ deve essere continua in tutti gli istanti in cui è continua la funzione di ingresso; allora, perché questo accada *è necessario che le matrici F(t) e G(t) contengano funzioni continue del tempo.*

Tutto questo discorso non vale solo per l’equazione di stato, ma vale anche per l’equazione di uscita del sistema: infatti, l’ipotesi che il sistema sia lineare prevede che non solo la funzione di transizione di stato φ sia continua, ma che lo sia anche la funzione di uscita η; questo significa che l’equazione di uscita dovrà necessariamente essere nella forma

$$y(t) = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{trasformazione lineare}\\ \text{operante su x(t)}}} x(t) + \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{trasformazione lineare}\\ \text{operante su u(t)}}} u(t)$$

E’ facile ancora una volta ricavare come devono essere fatte queste due nuove trasformazioni lineari operanti su x(t) e u(t): infatti, essendo il sistema a dimensioni finite, l’insieme di uscita Y è uno spazio vettoriale di dimensione finita; indicata con p questa dimensione, deduciamo che y(t) è un vettore a p componenti, per cui le due trasformazioni saranno due matrici, di dimensioni, rispettivamente, p*n e p*m:

$$y(t) = \underbrace{H(t)}_{p*n}x(t) + \underbrace{L(t)}_{p*m}u(t)$$

Da questa descrizione si deduce ovviamente che *per definire un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare, in termini di equazione differenziale di stato e di equazione di uscita, è necessario e sufficiente conoscere come sono fatte le 4 matrici F(t), G(t), H(t) e L(t).*

Un caso particolare è quello che si verifica quando il sistema è anche "**proprio**": sappiamo, infatti, che un sistema generico si dice "proprio" quando il valore istantaneo dell'uscita NON dipende dal valore istantaneo dell'ingresso; è chiaro, allora, che, perché un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare, sia anche proprio, è necessario che la matrice L(t) sia ad elementi nulli e si possa perciò eliminare.

Possiamo dunque riepilogare quanto segue: un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare, improprio è descrivibile mediante le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + L(t)u(t) \end{cases}$$

un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare, proprio è descrivibile mediante le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) \end{cases}$$

La formula di Lagrange

A questo punto possiamo porci il seguente problema: supponiamo di avere a disposizione l'equazione (differenziale vettoriale) di stato del tipo $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$ e l'equazione di uscita del tipo $y(t) = H(t)x(t) + L(t)u(t)$; ci chiediamo se, a partire da queste equazioni, possiamo individuare, in modo univoco, il corrispondente sistema (dinamico) regolare, a dimensioni finite, lineare.

Per rispondere a questa domanda dobbiamo semplicemente far vedere che, una volta fissata una condizione iniziale $(\tau, x(\tau))$, la soluzione dell'equazione differenziale di stato rappresenta una funzione di transizione di stato, ossia una funzione $\varphi(t, \tau, x, u(\bullet))$ che goda delle note proprietà di consistenza, irreversibilità, composizione e causalità.

Per prima cosa, data l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$ e data la condizione iniziale $(\tau, x(\tau))$ fissata, siamo certi che l'equazione ammette 1 ed 1 sola soluzione che indichiamo evidentemente con x(t). Dobbiamo verificare che questa soluzione soddisfa le 4 proprietà citate prima. A questo scopo, abbiamo necessità di trovare per x(t) una espressione quanto più comoda è possibile.

La prima cosa che facciamo è trovare n diverse soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale di stato, ossia n diversi integrali generali dell'equazione

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t)$$

Per ottenere queste n soluzioni distinte non possiamo far altro che fissare n diverse condizioni iniziali e ricavare le corrispondenti soluzioni:

- fissata la condizione iniziale $x(\tau)=e_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T$, otteniamo una soluzione che indichiamo con $\varphi_1(t,\tau)$;
- fissata la condizione iniziale $x(\tau)=e_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T$, otteniamo una seconda soluzione che indichiamo con $\varphi_2(t,\tau)$;
- fissata l'ultima condizione iniziale $x(\tau)=e_n=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}^T$, otteniamo l'ultima soluzione che indichiamo con $\varphi_n(t,\tau)$;

Le n funzioni che abbiamo così ricavato soddisfano dunque le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t,\tau)}{dt}=F(t)\varphi_1(t,\tau) & x(\tau)=e_1 \\ \dfrac{d\varphi_2(t,\tau)}{dt}=F(t)\varphi_2(t,\tau) & x(\tau)=e_2 \\ \dots \\ \dfrac{d\varphi_n(t,\tau)}{dt}=F(t)\varphi_n(t,\tau) & x(\tau)=e_n \end{cases}$$

A questo punto, costruiamo una matrice, che indichiamo con $\varphi(t,\tau)$, usando come colonne proprio le n soluzioni appena descritte:

$$\varphi(t,\tau)=\left[\varphi_1(t,\tau) \mid \varphi_2(t,\tau) \mid \dots \mid \varphi_n(t,\tau)\right]$$

Questa matrice (che è evidentemente quadrata di ordine n), per come è stata costruita, presenta alcune caratteristiche particolari. Ad esempio, se noi, anziché lasciare t generico, prendiamo t=τ, è chiaro che otteniamo la matrice identità, in base alle condizioni iniziali usate prima:

$$\varphi(\tau,\tau)=\left[\varphi_1(\tau,\tau) \mid \varphi_2(\tau,\tau) \mid \dots \mid \varphi_n(\tau,\tau)\right]=\left[e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_n\right]=I_n$$

In secondo luogo, lasciando t generico, se deriviamo rispetto al tempo, otteniamo quanto segue:

$$\frac{d\varphi(t,\tau)}{dt}=\left[\frac{d\varphi_1(t,\tau)}{dt} \;\middle|\; \frac{d\varphi_2(t,\tau)}{dt} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \frac{d\varphi_n(t,\tau)}{dt}\right]=\left[F(t)\varphi_1(t,\tau) \mid F(t)\varphi_2(t,\tau) \mid \dots \mid F(t)\varphi_n(t,\tau)\right]=$$
$$=F(t)\left[\varphi_1(t,\tau) \mid \varphi_2(t,\tau) \mid \dots \mid \varphi_n(t,\tau)\right]=F(t)\varphi(t,\tau)$$

Dire che vale la relazione $\dot{\varphi}(t,\tau)=F(t)\varphi(t,\tau)$ significa dire che la matrice j(t,t) soddisfa l'equazione differenziale omogenea $\dot{x}(t)=F(t)x(t)$ con condizione iniziale j(t,t)=I_n.

Infine, l'ultima proprietà che ci interessa è che la matrice $\varphi(t,\tau)$ è definita in qualsiasi istante di tempo t, in quanto comprende, come elementi, delle funzioni che sono a loro volta definite in $\forall t$.

Allora, l'insieme di queste 3 proprietà appena descritte ci consente di affermare che sussiste la seguente relazione, che prende il nome di "**formula di Lagrange**":

$$\boxed{x(t)=\varphi(t,\tau)x(\tau)+\int_{\tau}^{t}\varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi}$$

In pratica, quindi *questa formula ci consente di individuare l'equazione del movimento (di stato) del sistema, a partire dalla conoscenza dell'equazione differenziale di stato, della condizione iniziale x(t) e della matrice j(t,t).*

Andiamo allora a verificare che, effettivamente, la funzione x(t) avente quella espressione rappresenta l'unica soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}(t)=F(t)x(t)+G(t)u(t)$ in corrispondenza della fissata condizione iniziale x(τ). Per prima cosa, verifichiamo che essa soddisfi la condizione iniziale: ponendo t=τ in entrambi i membri, abbiamo che

$$x(\tau)=\varphi(\tau,\tau)x(\tau)+\int_{\tau}^{\tau}\varphi(\tau,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Al secondo membro, l'integrale vale 0 in quanto gli estremi di integrazione sono uguali e, inoltre, abbiamo appurato prima che $\varphi(\tau,\tau)=I_n$, per cui troviamo effettivamente l'identità x(τ)=x(τ).

Più complicato è invece far vedere che quella espressione di x(t) soddisfa l'equazione differenziale di stato.

Andando, intanto, a derivare rispetto al tempo, abbiamo che

$$\dot{x}(t)=x(\tau)\frac{d\varphi(t,\tau)}{dt}+\frac{d}{dt}\int_{\tau}^{t}\varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Sappiamo che la matrice φ(t,τ) gode della proprietà per cui $\dot{\varphi}(t,\tau)=F(t)\varphi(t,\tau)$ e possiamo perciò scrivere che

$$\dot{x}(t)=x(\tau)F(t)\varphi(t,\tau)+\frac{d}{dt}\int_{\tau}^{t}\varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Usando inoltre il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, abbiamo che

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=x(\tau)F(t)\varphi(t,\tau)+\left[\varphi(t,t)G(t)u(t)+\int_{\tau}^{t}\frac{d\varphi(t,\xi)}{dt}G(\xi)u(\xi)d\xi\right]=\\&=x(\tau)F(t)\varphi(t,\tau)+\left[G(t)u(t)+\int_{\tau}^{t}F(t)\varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi\right]=\\&=x(\tau)F(t)\varphi(t,\tau)+G(t)u(t)+F(t)\int_{\tau}^{t}\varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi\end{aligned}$$

Mettendo in evidenza a sinistra, tra il primo ed il terzo termine, la matrice F(t), abbiamo dunque che

$$\dot{x}(t) = F(t)\left[x(\tau)\varphi(t,\tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi \right] + G(t)u(t)$$

Tra parentesi quadre compare proprio l'espressione di x(t) fornita dalla formula di Lagrange, per cui possiamo concludere che

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

ossia che *l'espressione di x(t) fornita dalla formula di Lagrange costituisce l'unica soluzione dell'equazione differenziale di stato per la assegnata condizione iniziale.*

L'ultima cosa che dobbiamo verificare, come anticipato in precedenza, è che quella espressione di x(t) soddisfi le 4 proprietà di cui deve necessariamente gode la funzione di transizione di stato di un sistema.

La prima proprietà da verificare è quella di "*consistenza*": fissato l'istante iniziale τ, fissato lo stato iniziale $x(\tau)$e noto l'andamento temporale dell'ingresso $u(\bullet)$ applicato al sistema, la proprietà di consistenza afferma che

$$\text{fissato } t = \tau: \quad \varphi\left(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)\right) = x(\tau) \qquad \forall\tau \in T \quad \forall x(\tau) \in X \qquad \forall u(\bullet) \in \Omega$$

ossia che, se l'istante finale coincide con quello iniziale (quale che esso sia), la funzione di transizione di stato fornisce uno stato finale coincidente con quello iniziale, a prescindere da quale sia questo stato iniziale e a prescindere anche dall'andamento dell'ingresso. E' chiaro che questa proprietà è verificata dall'espressione di x(t) fornita dalla formula di Lagrange: infatti, abbiamo già visto prima che, se calcoliamo x(t) in $t=\tau$, troviamo proprio $x(\tau)$.

La seconda proprietà è quella di "*irreversibilità*": noti sempre l'istante τ, lo stato iniziale $x(\tau)$ e l'andamento temporale dell'ingresso applicato al sistema, la proprietà di irreversibilità dice che, se fissiamo un qualsiasi istante finale $t>\tau$, la funzione di transizione di stato deve necessariamente essere in grado di fornirci lo stato x(t) del sistema in tale istante. In termini formali, questa proprietà dice che

$$\text{la funzione } \varphi\left(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)\right) \text{ è definita} \quad \forall t \geq \tau \qquad \forall\overline{x} \in X \qquad \forall u(\bullet) \in \Omega$$

Anche in questo caso, è evidente che la proprietà è verificata: infatti, la formula di Lagrange fornisce il valore di x(t) quale che sia l'istante $t\geq\tau$ fissato. Tra l'altro, è facile capire che è verificata anche la proprietà di "*reversibilità*" (o "irreversibilità all'indietro"), visto che la formula di Lagrange è definita anche per $t\leq\tau$ (dato che la matrice $\varphi(t,\tau)$ è definita per $t\leq\tau$).

La terza proprietà è la proprietà di "*composizione*": dati 3 istanti diversi e successivi $t_1<t_2<t_3$, dato lo stato $\overline{x} = x(t_1)$ del sistema all'istante t_1 e dato l'andamento temporale dell'ingresso $u(\bullet)$, la proprietà di composizione dice che

$$x(t_3) = \varphi\left(t_3,t_1,\overline{x},u(\bullet)\right) = x(t_2) + \varphi\left(t_3,t_2,x(t_2),u(\bullet)\right)$$

ossia, in altre parole, che lo stato del sistema nell'istante finale t_3 può essere calcolato direttamente come "passaggio" dall'istante iniziale t_1 oppure "passando" per l'istante intermedio t_2, cioè sommando il "passaggio" da t_1 a t_2 e quello da t_2 a t_3. Vediamo cosa accade con la formula di Lagrange: per verificare che la x(t) fornita dalla formula di Lagrange soddisfi la proprietà di composizione, abbiamo prima bisogno di introdurre una particolare proprietà della matrice $\varphi(t,\tau)$, che prende il nome di "proprietà di composizione" o, meglio, di "**proprietà di semigruppo di $\varphi(t,\tau)$**". Vediamo perciò di che si tratta.

Consideriamo l'equazione differenziale di stato del sistema, ossia

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

Nell'ipotesi che l'ingresso al sistema sia identicamente pari a 0, questa equazione si riduce semplicemente a $\dot{x}(t) = F(t)x(t)$.

La soluzione x(t) di questa equazione, in base alla formula di Lagrange, è

$$x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau)$$

e corrisponde a quello che, per i sistemi lineari, abbiamo chiamato "**movimento libero del sistema**": si tratta, cioè, del contributo all'evoluzione temporale dello stato del sistema, dovuto solo allo stato iniziale.

Fissiamo allora 3 istanti diversi $t_1<t_2<t_3$ e indichiamo con $x(t_1)$, $x(t_2)$ e $x(t_3)$ gli stati che il sistema assume in tali istanti: in assenza di ingresso, possiamo applicare la relazione $x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau)$ per scrivere che

$$x(t_2) = \varphi(t_2,t_1)x(t_1)$$
$$x(t_3) = \varphi(t_3,t_2)x(t_2)$$

La prima relazione è relativa al passaggio dallo stato $x(t_1)$ allo stato $x(t_2)$, mentre la seconda è relativa al passaggio da $x(t_2)$ a $x(t_3)$: sostituendo allora la prima nella seconda, otteniamo

$$x(t_3) = \varphi(t_3,t_2)\varphi(t_2,t_1)x(t_1)$$

D'altra parte, vale anche la relazione $x(t_3) = \varphi(t_3,t_1)x(t_1)$ relativa al passaggio diretto da $x(t_1)$ a $x(t_3)$: uguagliando allora queste due espressioni di $x(t_3)$, che deve ovviamente essere lo stesso nei due casi, possiamo concludere che

$$\boxed{\varphi(t_3,t_1) = \varphi(t_3,t_2)\varphi(t_2,t_1)}$$

Sulla base di questa proprietà possiamo far vedere che la formula di Lagrange soddisfa la proprietà di composizione.

Per prima cosa, usando la suddetta formula, calcoliamo lo stato $x(t_3)$ prendendo come stato iniziale lo stato $x(t_1)$: abbiamo che

$$x(t_3) = \varphi(t_3,t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_3} \varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

In modo analogo, calcoliamo lo stato $x(t_3)$ prendendo come stato iniziale lo stato $x(t_2)$:

$$x(t_3) = \varphi(t_3,t_2)x(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Infine, calcoliamo lo stato $x(t_2)$ prendendo come stato iniziale lo stato $x(t_1)$:

$$x(t_2) = \varphi(t_2,t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t_2,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Sostituendo quest'ultima espressione in quella precedente, abbiamo che

$$x(t_3)=\varphi(t_3,t_2)\varphi(t_2,t_1)x(t_1)+\varphi(t_3,t_2)\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t_2,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi+\int_{t_2}^{t_3}\varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

In base alla proprietà di semigruppo dimostrata prima, questa equivale anche a

$$x(t_3)=\varphi(t_3,t_1)x(t_1)+\varphi(t_3,t_2)\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t_2,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi+\int_{t_2}^{t_3}\varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Inoltre, se portiamo, dentro il primo integrale, il termine $\varphi(t_3,t_2)$ e applichiamo nuovamente la proprietà di semigruppo, troviamo che

$$x(t_3)=\varphi(t_3,t_1)x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi+\int_{t_2}^{t_3}\varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

A questo punto, i due integrali hanno la stessa funzione integranda e gli intervalli di integrazione adiacenti, per cui possiamo applicare la proprietà di additività:

$$x(t_3)=\varphi(t_3,t_1)x(t_1)+\int_{t_1}^{t_3}\varphi(t_3,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Questa è esattamente l'espressione di $x(t_3)$ ottenuta prendendo come stato iniziale $x(t_1)$, per cui possiamo concludere che anche la proprietà di composizione è verificata.

Infine, l'ultima proprietà da verificare è quella di "*causalità*": questa proprietà afferma che, noto l'ingresso al sistema, ai fini della valutazione dello stato finale del sistema, interessa solo la restrizione di tale ingresso all'intervallo $[t,t[$ di osservazione, mentre non interessa affatto l'andamento della funzione al di fuori di questo intervallo. Anche questa proprietà è evidentemente verificata dalla formula di Lagrange: infatti, l'andamento dell'ingresso compare solo all'interno di un integrale definito tra t e τ, per cui gli unici valori importanti dell'ingresso sono effettivamente quelli compresi in tale intervallo.

La conclusione che possiamo trarre è dunque che *l'espressione della x(t) fornita dalla formula di Lagrange rappresenta effettivamente una funzione di transizione di stato.*

Tra l'altro, si osserva facilmente che questa funzione gode anche della proprietà di essere "lineare", ossia è esprimibile come somma di un contributo libero (indipendente dall'ingresso e dipendente solo dallo stato iniziale) e di un contributo libero (indipendente dallo stato iniziale e dipendente solo dall'ingresso).

L'ulteriore conclusione da sottolineare è che, date 2 equazioni nella forma

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=F(t)x(t)+G(t)u(t)\\ y(t)=H(t)x(t)+L(t)u(t)\end{cases}$$

con le matrici F(t), G(t), H(t) e L(t) note, siamo in grado di interpretare queste equazioni come, rispettivamente, l'equazione differenziale di stato e l'equazione di uscita di un preciso sistema regolare, a dimensioni finite, lineare. In altre parole, *esiste una corrispondenza* *biunivoca tra il sistema e le due equazioni che ne descrivono le caratteristiche.*

Problema del calcolo della matrice di transizione di stato j(t,t)

In base a quanto appena detto, è immediato capire che, dato un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare, è possibile trovarne l' "**equazione del movimento**" (cioè la soluzione dell'equazione differenziale di stato), tramite l'applicazione della formula di Lagrange, solo nell'ipotesi di conoscere la matrice $\varphi(t,\tau)$, la quale prende il nome di "**matrice di transizione di stato**". Viene dunque da chiedersi come si fa a calcolare questa matrice e qui subentra un primo grande problema: *non sempre è possibile ricavare la matrice di transizione di stato per via analitica.*

Quando la matrice $\varphi(t,\tau)$ non può essere ricavata per via analitica, è necessario ricorrere a metodi numerici appropriati. Noi siamo perciò interessati a capire quali sono i casi in cui la matrice $\varphi(t,\tau)$ può essere calcolata con metodi analitici e, ovviamente, quali sono questi metodi.

Proprietà: non-singolarità della matrice di transizione di stato

Prima di proseguire con i nostri discorsi, vogliamo dimostrare velocemente una importante proprietà della matrice di transizione di stato $\varphi(t,\tau)$ e, precisamente, il fatto che essa sia sempre una matrice non-singolare.

Data ancora una volta la formula di Lagrange, se supponiamo che l'ingresso sia identicamente nullo, essa fornisce, per x(t), l'espressione

$$x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau)$$

Se consideriamo τ con istante finale e t come istante iniziale, è ovvio che questa diventa

$$x(\tau) = \varphi(\tau,t)x(t)$$

Allora, mettendo insieme queste due, troviamo che

$$x(t) = \varphi(t,\tau)\varphi(\tau,t)x(t)$$

Perché questa relazione sia verificata, deve necessariamente essere

$$\varphi(t,\tau)\varphi(\tau,t) = I_n$$

da cui deduciamo che la matrice $\varphi(t,\tau)$ ammette una inversa e questa inversa è la matrice $\varphi(\tau,t)$.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1