Appunti di "Teoria dei sistemi"- Capitolo 5
Stabilità dell'equilibrio (parte II)

CENNI SUI CRITERI DI INSTABILITÀ

Consideriamo sempre un sistema regolare, a dimensioni finite e tempo-invariante, descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato del tipo $\dot{x} = f(x, y)$. Indichiamo con $\overline{U}$ l'insieme degli "ingressi di equilibrio", ossia l'insieme degli ingressi (costanti) ai quali corrispondono tutti e soli gli stati di equilibrio del sistema; supponiamo inoltre di conoscere un ingresso di equilibrio $\bar{u} \in \overline{U}$ e di aver individuato l'insieme $\overline{X}_{\bar{u}}$ degli eventuali stati di equilibrio corrispondenti a questo ingresso. Supponiamo infine di considerare un generico stato di equilibrio $\bar{x} \in \overline{X}_{\bar{u}}$ corrispondente all'ingresso $\bar{u}$.

Sotto queste premesse, abbiamo in precedenza enunciato 3 distinti criteri che consentano di stabilire se lo stato di equilibrio in esame sia semplicemente stabile o asintoticamente stabile: abbiamo, però, sottolineato, come questi criteri siano solo delle condizioni sufficienti per la stabilità (semplice o asintotica che sia), il che significa che, anche se non fossero verificati, non è comunque detto che la stabilità manchi. Quello che vogliamo fare adesso è, allora, enunciare i più importanti criteri che consentano di dedurre, dato lo stato di equilibrio in esame, che si tratta di uno stato di equilibrio instabile.

Il primo criterio che prendiamo in esame è il cosiddetto "**criterio di instabilità di Liapunov**" e si tratta di un criterio evidentemente opposto rispetto a quello di stabilità enunciati in precedenza:

Teorema - *Sia dato un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-invariante descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato* $\dot{x} = f(x, u)$; *sia* $u(\bullet) = \bar{u} \in \overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x} \in \overline{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Condizione sufficiente affinché lo stato* $\bar{x}$ *sia di* ***equilibrio instabile*** *è che esista una funzione* $V(\bullet)$ *che goda delle seguenti proprietà*

1) $V(\bullet)$ *continua, insieme alle sue derivate prime, in un intorno di* $\bar{x}$;

2) $V(\bar{x}) = 0$ *;*

3) $V(\bullet)$ *assume valori positivi in punti arbitrariamente vicini ad* $\bar{x}$*;*

4) $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV}{dx} f(x)$ *definita positiva in* $\bar{x}$

Una osservazione molto importante, riguardo il criterio di instabilità di Liapunov, è la seguente: l'ipotesi numero 4 del criterio richiede che la funzione $\dot{V}$ sia definita positiva in $\bar{x}$, ossia richiede che tale funzione si annulli $\bar{x}$ e che ci sia almeno un intorno di $\bar{x}$ in cui essa assume valori strettamente positivi; si possono allora presentare due situazioni:

- se $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio isolato per $\overline{X}_{\bar{u}}$ (cioè NON è un punto di accumulazione per $\overline{X}_{\bar{u}}$), allora è possibile che l'ipotesi 4 sia verificata;

- viceversa, se $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio NON isolato per $\overline{X}_{\bar{u}}$, sicuramente ci saranno dei punti, arbitrariamente vicini ad $\bar{x}$, nei quali risulta $f(x,u) = 0$ e quindi $\dot{V}(x) = 0$; ma, se la funzione $\dot{V}$ si annulla nei pressi di $\bar{x}$, essa potrà essere al più semi-definita positiva, per cui l'ipotesi 4 non è senz'altro verificata.

Questo per dire, dunque, che *il criterio di instabilità di Liapunov non può mai dimostrare l'instabilità di uno stato di equilibrio che non sia isolato.*

Tale criterio può essere applicato solo a stati di equilibrio isolati, mentre, per quelli isolati, non fornisce alcuna indicazione.

A questo punto, possiamo mettere insieme i criteri di stabilità e di instabilità di Liapunov, individuando un criterio del tutto generale:

Teorema - *Sia dato un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-invariante descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato* $\dot{x} = f(x,u)$ *; sia* $u(\bullet) = \bar{u} \in \overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x} \in \overline{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Sia* $V(\bullet)$ *una funzione che gode delle seguenti proprietà:*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*

2) $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$*;*

Sia inoltre $\dot{V}(\bullet) = \frac{dV(\bullet)}{dx} f(\bullet, \bar{u})$*. Allora:*

- *se* $\dot{V}(\bullet)$ *è semi-definita negativa in* $\bar{x}$*, allora* $\bar{x}$ *è stabile;*
- *se* $\dot{V}(\bullet)$ *è definita negativa in* $\bar{x}$*, allora* $\bar{x}$ *è asintoticamente stabile;*
- *se* $\dot{V}(\bullet)$ *è definita positiva in* $\bar{x}$*, allora* $\bar{x}$ *è instabile.*

L'ultimo criterio di instabilità che enunciamo è il cosiddetto "**criterio di instabilità di Cetaev**":

Teorema - *Sia dato un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-invariante descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato* $\dot{x} = f(x,u)$*; sia* $u(\bullet) = \bar{u} \in \overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x} \in \overline{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Sia infine A un intorno di* $\bar{x}$*. Condizione sufficiente affinché* $\bar{x}$ *sia uno stato di equilibrio instabile è che esistano una funzione* $V(\bullet)$ *e una sottoregione* A_1 *con le seguenti proprietà:*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*
2) $V(\bullet)$ *e* $\dot{V}(\bullet)$ *positive nei punti interni di* A_1*;*
3) $V(\bullet) = 0$ *sulla frontiera di* A_1 *all'interno di A;*
4) *lo stato* $\bar{x}$ *è sulla frontiera di* A_1*.*

CENNI SULLA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO NEI SISTEMI DISCRETI

Tutti i criteri di stabilità e instabilità finora esaminati sono validi, come spesso sottolineato, per sistemi regolari, a dimensioni finite, tempo-invarianti, ma, soprattutto, tempo-continui. Criteri assolutamente analoghi valgono anche, con le dovute modifiche, per "**sistemi tempo-discreti, regolari, a dimensioni finite, tempo-invarianti**". Vogliamo allora vedere velocemente gli enunciati di questi teoremi.

Intanto, sappiamo che un sistema tempo-discreto, regolare, a dimensioni finite è descrivibile, in forma di stato, mediante quella che abbiamo definito "*equazione di stato alle differenze*":

$$x(t+1) = f[x(t), u(t), t] \qquad t = \text{intero}$$

Se il sistema è anche tempo-invariante, questa equazione si riduce ovviamente a

$$x(t+1) = f[x(t), u(t)] \qquad t = \text{intero}$$

Una volta fissato un ingresso $\bar{u}$, è chiaro che uno stato di equilibrio $\bar{x}$, corrispondente a tale ingresso, sarà uno stato tale che

$$x(t+1) = \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$$

Solo in questo caso, infatti, il movimento (di stato) del sistema è costante, ossia il sistema permane invariabilmente nello stesso stato.

Possiamo perciò dire subito che *fissato un ingresso* $\bar{u}$*, l'insieme di tutti e soli gli stati di equilibrio ad esso corrispondenti si trova risolvendo l'equazione* $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$*.*

Premesso questo, l'impostazione dello studio di stabilità per sistemi di questo tipo è del tutto simile a quella usata nel caso dei sistemi continui. La sola differenza, con il caso tempo-continuo, è di carattere tecnico: mentre nel caso continuo si doveva determinare la derivata dV/dt della funzione

$V(\bullet)$ lungo la generica traiettoria perturbata, nel caso discreto è necessario determinare l’incremento $\Delta V(\bullet)$ che la funzione $V(\bullet)$ subisce in una generica transizione dall’istante t all’istante t+1. In altre parole, si tratta di determinare la funzione $\Delta V = V\left(x(t+1)\right) - V\left(x(t)\right)$ lungo ogni traiettoria perturbata. A questo proposito, possiamo fare un veloce ragionamento analitico per trovare una comoda espressione della funzione $\Delta V(\bullet)$: una volta fissato l’ingresso, sappiamo che l’equazione che regola il movimento perturbato è $x(t+1) = f[x(t), \bar{u}]$, per cui possiamo scrivere che

$$\Delta V(x) = V\left(x(t+1)\right) - V\left(x(t)\right) = V\left(f[x(t), \bar{u}]\right) - V\left(x(t)\right)$$

Possiamo sottintendere la dipendenza di x dal tempo e possiamo inoltre sottintendere la presenza dell’ingresso, che ormai è stato fissato: quella relazione diventa perciò

$$\Delta V = V\left(f(x, \bar{u})\right) - V(x)$$

Detto questo, basta ora prendere gli stessi criteri precedentemente enunciati per i sistemi tempo-continui, avendo cura di sostituire la funzione $\dot{V}(\bullet)$ con la funzione $\Delta V(\bullet)$.

Così facendo, il “**criterio di stabilità e instabilità di Liapunov**” assume il seguente enunciato:

Teorema - *Sia dato un sistema tempo-discreto che sia regolare, a dimensioni finite e tempo-invariante. Sia* $x(t+1) = f\left(x(t), u(t)\right)$ *l’equazione di stato che descrive il sistema; sia* $u(\bullet) = \bar{u} \in \bar{U}$ *un ingresso di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x} \in \bar{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Sia* $V(\bullet)$ *una funzione che gode delle seguenti proprietà:*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*
2) $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$*;*

Sia inoltre $\Delta V(\bullet) = V\left(f(\bullet, \bar{u})\right) - V(\bullet)$*. Allora:*

- *se* $\Delta V(\bullet)$ *è semi-definita negativa in* $\bar{x}$*, allora* $\bar{x}$ *è stabile;*
- *se* $\Delta V(\bullet)$ *è definita negativa in* $\bar{x}$*, allora* $\bar{x}$ *è asintoticamente stabile;*
- *se* $\Delta V(\bullet)$ *è definita positiva in* $\bar{x}$*, allora* $\bar{x}$ *è instabile.*

In modo del tutto analogo, il “**criterio di asintotica stabilità di Krasowskii**” risulta essere il seguente:

Teorema - *Sia dato un sistema tempo-discreto che sia regolare, a dimensioni finite e tempo-invariante. Sia* $x(t+1)=f\left(x(t),u(t)\right)$ *l'equazione di stato che descrive il sistema; sia* $u(\bullet)=\bar{u}\in\overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x}\in\overline{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Sia* $V(\bullet)$ *una funzione che goda delle seguenti proprietà:*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*
2) $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$*;*
3) $\Delta V(\bullet)=V\left(f(\bullet,\bar{u})\right)-V(\bullet)$ *semi-definita negativa in* $\bar{x}$

Considerato l'insieme $S=\left\{x\in X \middle| \dot{V}(x)=0\right\}$*, condizione sufficiente affinché* $\bar{x}$ *sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile è che l'insieme S non contenga traiettorie perturbate.*

Per concludere, il "**criterio di instabilità di Cetaev**" dice quanto segue:

Teorema - *Sia dato un sistema tempo-discreto che sia regolare, a dimensioni finite e tempo-invariante. Sia* $x(t+1)=f\left(x(t),u(t)\right)$ *l'equazione di stato che descrive il sistema; sia* $u(\bullet)=\bar{u}\in\overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x}\in\overline{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Sia infine A un intorno di* $\bar{x}$*. Condizione sufficiente affinché* $\bar{x}$ *sia uno stato di equilibrio instabile è che esistano una funzione* $V(\bullet)$ *e un sottoinsieme* A_1 *, contenuto in A, con le seguenti proprietà:*

1) $V(\bullet)$ *definita in A e continua, insieme alle sue derivate prime, in* A_1*;*
2) $V(\bullet)$ *e* $\Delta V(\bullet)$ *positive nei punti interni di* A_1*;*
3) $V(\bullet)=0$ *sulla frontiera di* A_1 *all'interno di A;*
4) *lo stato* $\bar{x}$ *è sulla frontiera di* A_1*.*

Criteri di stabilità del movimento

INTRODUZIONE

I criteri di stabilità esposti fino ad ora hanno riguardato solo gli stati di equilibrio di un sistema, ossia quei particolari movimenti di stato del sistema in cui lo stato rimane costante nel tempo. Quello che vogliamo fare adesso è generalizzare i concetti ed i criteri di stabilità anche ai movimenti di stato generici.

Facciamo sempre riferimento ad un sistema tempo-continuo, regolare, a dimensioni finite, descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato del tipo

$$\dot{x} = f[x(t), u(t), t]$$

Fissiamo un istante iniziale τ, un corrispondente stato iniziale $\overline{x} = x(\tau)$ ed un ingresso nominale $\overline{u}(\bullet)$; in corrispondenza di questi "dati" di partenza, sappiamo che si produce un "*movimento nominale*" del sistema regolato dalla "*funzione di transizione di stato*" del sistema: in un generico istante $t \geq \tau$, lo stato (nominale) del sistema sarà

$$\overline{x}(t) = \varphi(t, \tau, \overline{x}, \overline{u})$$

Adesso supponiamo che, in corrispondenza dello stesso istante iniziale τ e dello stesso ingresso nominale $\overline{u}(\bullet)$, il sistema subisca una perturbazione tale che lo stato iniziale diventi un generico x: in questo caso, si produce un "*movimento perturbato*" del sistema e lo stato (perturbato) all'istante generico $t \geq \tau$ sarà quindi

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x, \overline{u})$$

Abbiamo dunque due movimenti $\overline{x}(\bullet)$ e $x(\bullet)$ che procedono nel tempo in un certo modo. Supponiamo allora di riferire, istante per istante, il movimento perturbato $x(t)$ al movimento nominale $\overline{x}(t)$: questo significa che ci interessiamo alla differenza $z(t) = x(t) - \overline{x}(t)$, ossia anche che il riferimento rispetto al quale consideriamo il movimento perturbato ha una origine che si sposta nel tempo lungo il movimento nominale.

Chiaramente, dato che $\overline{x}(t)$ e $x(t)$ sono vettori ad n componenti (dove n è l'ordine del sistema, ossia la dimensione dello spazio di stato X), anche $z(t)$ sarà un vettore ad n componenti. Possiamo chiederci come variano nel tempo le componenti di questo vettore: abbiamo evidentemente che

$$\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t) - \overline{x}(t)] = \dot{x}(t) - \dot{\overline{x}}(t)$$

D'altra parte, sapendo che l'equazione di stato del sistema è $\dot{x} = f[x(t), u(t), t]$, possiamo anche scrivere che

$$\dot{z}(t) = f[x(t), \overline{u}(t), t] - f[\overline{x}(t), \overline{u}(t), t]$$

In quest'ultima relazione, dato che l'ingresso nominale $\overline{u}(\bullet)$ e lo stato nominale $\overline{x}(t)$ sono comunque fissati, l'unica incognita è lo stato perturbato x(t). D'altra parte, se $z(t)=x(t)-\overline{x}(t)$, possiamo anche scrivere che $x(t)=z(t)+\overline{x}(t)$, per cui, andando a sostituire, quella relazione diventa

$$\dot{z}(t)=f[z(t)+\overline{x}(t),\overline{u}(t),t]-f[\overline{x}(t),\overline{u}(t),t]$$

In questo modo, il secondo membro di questa relazione non è altro che una funzione g i cui argomenti sono il vettore z(t) ed il tempo t, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{\dot{z}(t)=g[z(t),t]}$$

Questa è dunque l'equazione differenziale (vettoriale) che regola l'evoluzione temporale di z. A ben vedere, <u>questa equazione può essere vista come l'equazione (differenziale vettoriale) di stato di un sistema la cui variabile di stato sia appunto z</u>. Anzi, possiamo anche osservare qualcosa in più: la funzione g, come detto, dipende dal tempo mentre non dipende dall'ingresso (che ormai è fissato); allora, se mancasse anche la dipendenza del tempo, avremmo $\dot{z}(t)=g[z(t)]$ e cioè avremmo un "*<u>sistema autonomo</u>*" (ossia un sistema nel quale l'ingresso non ha alcuna influenza sullo stato); al contrario, il fatto che ci sia <u>indipendenza solo dall'ingresso</u> fa' si che ad un sistema descritto da una equazione di stato di questo tipo si dia il nome di "**sistema libero**". Questo sistema libero è dunque un nuovo "ente" che rappresenta la dinamica di tutti i movimenti perturbati del sistema $\dot{x}=f[x(t),u(t),t]$, relativi all'ingresso nominale $\overline{u}(\bullet)$ fissato.

Una particolarità di questo sistema libero è la seguente: *lo stato nullo z(t)=0 è uno stato di equilibrio per il sistema libero* $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$.

La verifica è immediata: dato che il sistema libero è descritto dalla equazione $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$, se z(t)=0, questa equazione diventa

$$\dot{z}(t)=g[0,t]$$

D'altra parte, dire che z(t)=0 equivale a dire che $x(t)=\overline{x}(t)$ e quindi anche che

$$g\left[\underbrace{z(t)}_{=0},t\right]=f[z(t)+\overline{x}(t),\overline{u}(t),t]-f[\overline{x}(t),\overline{u}(t),t]=0$$

Allora, se g[0,t]=0, risulta anche $\dot{z}(t)=0$ e questa è proprio la condizione richiesta affinché lo stato in esame, cioè appunto z(t)=0, sia uno stato di equilibrio per il sistema.

Premesso questo, vogliamo dimostrare il seguente risultato:

<u>Teorema</u> - *Lo studio della stabilità di un generico movimento* $\overline{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},\overline{u})$ *è del tutto <u>equivalente</u> allo studio della stabilità dell'origine del sistema libero rappresentato dall'equazione* $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$

A questo scopo, cominciamo col richiamare la definizione già data in precedenza di "**movimento (nominale) stabile**" per un sistema:

Def. *Un generico movimento $\bar{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},\bar{u})$ si dice "**stabile**" se, per ogni e>0, esiste almeno un d>0 tale che, per tutti gli stati x che soddisfano la condizione $\|x-\bar{x}\|\le\delta$, risulta $\|x(t)-\bar{x}(t)\|\le\varepsilon$*

Come detto, vogliamo mostrare che questa definizione equivale alla definizione di stabilità per lo stato z(t)=0 del sistema libero.

In primo luogo, considerando che x e $\bar{x}$ sono, rispettivamente, stato iniziale perturbato e stato iniziale nominale del sistema di partenza $\dot{x}=f[x(t),u(t),t]$, è ovvio che $x-\bar{x}=z(\tau)$ non è altro che lo stato iniziale del sistema libero $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$. Di conseguenza, tenendo conto anche che $z(t)=x(t)-\bar{x}(t)$, la definizione di stabilità appena data si modifica nel modo seguente: *un generico movimento $\bar{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},\bar{u})$ si dice "stabile" se, per ogni e>0, esiste almeno un d>0 tale che, per tutti gli stati z(t) che soddisfano la condizione $\|z(\tau)\|\le\delta$, risulta $\|z(t)\|\le\varepsilon$.*

D'altra parte, questa definizione è a sua volta equivalente alla seguente: *un generico movimento $\bar{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},\bar{u})$ si dice "stabile" se, per ogni e>0, esiste almeno un d>0 tale che, per tutti gli stati z(t) che soddisfano la condizione $\|z(\tau)-0\|\le\delta$, risulta $\|z(t)-0\|\le\varepsilon$*. A ben vedere, questa è proprio la definizione di stabilità dell'origine per il sistema libero $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$.

Quindi, per trarre conclusioni sulla stabilità di un generico movimento $\bar{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},\bar{u})$ del sistema di partenza $\dot{x}=f[x(t),u(t),t]$ basta indagare sulla stabilità dell'origine per il corrispondente sistema libero $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$. Naturalmente, questo vale sia per la semplice stabilità sia anche per la asintotica stabilità, che, ricordiamo, richiede sia la semplice stabilità sia la convergenza: questo significa che *la convergenza del movimento perturbato a quello nominale, per il sistema $\dot{x}=f[x(t),u(t),t]$, equivale alla convergenza dello stato perturbato allo stato nullo per il sistema $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$.*

Appurato tutto questo, è necessario fare una importante osservazione: dovendo studiare la stabilità dell'origine per il sistema libero $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$, <u>non possiamo applicare gli stessi criteri visti in precedenza per gli stati di equilibrio</u>, per il semplice motivo che tali criteri erano relativi a sistemi tempo-invarianti. Al contrario, avendo a che fare con sistemi tempo-varianti, abbiamo necessità di introdurre nuovi criteri e questo è appunto lo scopo dei prossimi paragrafi.

Come ultima considerazione, prima di esaminare i suddetti criteri, sottolineiamo che *in generale, ad un unico sistema $\dot{x}=f[x(t),u(t),t]$ (cioè ad un'unica funzione generatrice) corrispondono molti sistemi liberi, uno per ogni movimento.*

Si tratta di un risultato abbastanza intuitivo, se si considera che ogni movimento dipende dalle condizioni iniziali fissate e dall'ingresso nominale fissato. Vedremo, in seguito, che questa proprietà non vale per i sistemi lineari.

STABILITÀ DELL'ORIGINE DI UN SISTEMA LIBERO

Riprendendo quanto visto nel paragrafo precedente, consideriamo il sistema libero rappresentato, in forma di stato, dall'equazione $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$: questa è una equazione differenziale vettoriale di ordine n, per cui equivale al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t)=g_1[z(t),t] \\ \dot{z}_2(t)=g_2[z(t),t] \\ \dots \\ \dot{z}_n(t)=g_n[z(t),t] \end{cases}$$

dove le z_k e le g_k, con k=1,...,n , sono le componenti, rispettivamente, di z(t) e $g[z(t),t]$.

Abbiamo prima visto che lo stato $\bar{x}=(0,0)$ è uno stato di equilibrio per questo sistema. Vogliamo allora trovare il modo di studiare questa stabilità, cosa che, come è stato detto, equivale a studiare la stabilità del movimento del sistema $\dot{x}=f[x(t),u(t),t]$ di partenza.

I risultati fondamentali relativi a questo caso sono ancora essenzialmente appoggiati alla teoria delle funzioni di Liapunov, cioè a funzioni definite positive che godono di opportune proprietà che saranno tra poco precisate.

Consideriamo una funzione $V(\bullet,t)$ avente come argomenti lo stato z ed il tempo; se calcoliamo la derivata temporale di questa funzione, abbiamo che

$$\dot{V}(z,t)=\frac{\partial V(z,t)}{dz}=\frac{\partial V(z,t)}{dz_1}g_1(z,t)+\frac{\partial V(z,t)}{dz_2}g_2(z,t)+\dots+\frac{\partial V(z,t)}{dz_n}g_n(z,t)$$

Ciò che si osserva è che la funzione $\dot{V}(z,t)$ dipende esplicitamente dal tempo, cosa che accade anche nell'ipotesi di prendere una funzione $V(z)$ di partenza che sia indipendente dal tempo. Volendo riscrivere la relazione appena trovata in forma più compatta, possiamo scrivere che

$$\boxed{\dot{V}(z,t)=\frac{\partial V(z,t)}{dz}=\frac{\partial V}{dz}g+\frac{\partial V}{dt}}$$

Proprio la dipendenza dal tempo fa' si che, per funzioni di questo tipo, sia necessario fornire una definizione più generale di "funzione definita positiva" e "funzione definita negativa". La definizione che si adopera è la seguente:

Def. *Una funzione $V(z,t)$ si dice "**definita positiva in z=0**" se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:*

1) $V(0,t)=0 \quad \forall t\ge\tau$

2) esiste una funzione $\alpha:\ \Re^+ \longrightarrow \Re^+$, continua e non decrescente, tale da soddisfare 2 proprietà:

- $0<\alpha(\|z\|)\le V(z,t)$
- $\alpha(0)=0$

Si nota subito che le condizioni richieste sono in numero (e complessità) maggiore rispetto a quelle richieste per funzioni V(x) indipendenti dal tempo e corrispondenti a funzioni generatrici f a loro volta indipendenti dal tempo. In questo caso, infatti, è richiesto che la funzione V(z,t) sia annulli in z=0 per ogni t≥τ (dove τ è l'istante iniziale prefissato) ed inoltre che sia possibile trovare una funzione scalare $\alpha(\bullet)$, continua e non decrescente, che si annulli a sua volta in 0 e tale che $0 < \alpha(\|z\|) \leq V(z,t)$.

Leggermente più semplice, invece, è la definizione di "funzione semi-definita positiva" nell'origine:

Def. *Una funzione $V(z,t)$ si dice "**semi-definita positiva in z=0**" se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:*

1) $V(0,t) = 0 \quad \forall t \geq \tau$
2) $\exists I(0,\varepsilon)$ tale che $\forall z \in (0,\varepsilon) - \{0\}$: $V(z,t) \geq 0 \quad \forall t \geq \tau$

In pratica, la definizione è molto simile a quella del caso tempo-invariante: perché la $V(z,t)$ sia semi-definita positiva in z=0 è necessario che, per ∀t≥τ, essa si annulli in z=0 e assuma valori non-negativi in un intorno di z=0.

A questo punto, è immediato fornire le definizioni di "funzione definita negativa" e di "funzione semi-definita negativa":

- *una funzione $V(z,t)$ si dice "**definita negativa in z=0**" se e solo se la funzione $-V(z,t)$ è definita positiva in z=0*
- *una funzione $V(z,t)$ si dice "**semi-definita negativa in z=0**" se e solo se la funzione $-V(z,t)$ è semi-definita positiva in z=0*

L'ultima definizione che dobbiamo dare, prima di passare allo studio dei criteri di stabilità, è quella di funzione V(z,t) decrescente:

Def. *Una funzione $V(z,t)$ si dice "**decrescente**" se e solo se esiste una funzione $\beta : \Re^+ \longrightarrow \Re^+$, continua e non decrescente, tale che* $V(z,t) \leq \beta\|z\| \quad \forall t$

Fatte tutte queste premesse, possiamo adesso estendere il criterio di stabilità Liapunov anche ai sistemi liberi del tipo $\dot{z}(t) = g[z(t)]$. L'enunciato del teorema è il seguente:

Teorema - *Sia dato il sistema libero descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato $\dot{z}(t)=g[z(t),t]$; indicato con $\bar{z}=0$ lo stato nullo di questo sistema, condizione sufficiente affinché tale stato sia di equilibrio stabile è che esista una funzione $V(z,t)$ che goda delle seguenti proprietà*

1) $V(z,t)$ *continua insieme alle sue derivate parziali prime (fatte sia rispetto a z sia rispetto a t);*
2) $V(z,t)$ *definita positiva in* $\bar{z}=0$*;*
3) $\dot{V}(z,t)=\frac{\partial V}{dz}g+\frac{\partial V}{dt}$ *semi-definita negativa in* $\bar{z}=0$.

Se la funzione $V(z,t)$ *è anche decrescente, allora lo stato di equilibrio* $\bar{z}=0$ *è uniformemente stabile. Infine, se* $\dot{V}(z,t)$ *è definita negativa in* $\bar{z}=0$*, allora* $\dot{V}(z,t)$ *è uno stato di equilibrio uniformemente e asintoticamente stabile.*

Esempio: sistema libero del 2° ordine

Supponiamo di avere a che fare con un sistema libero $\dot{z}(t)=g[z(t)]$ del 2° ordine descritto, in forma di stato, dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases}\dot{z}_1=-z_1-e^{-2t}z_2\\ \dot{z}_1=z_1-z_2\end{cases}$$

Sappiamo che, per ogni sistema libero, lo stato nullo $\bar{z}=0$ è uno stato di equilibrio (cosa che si vede subito in base alle due equazioni, dato che, per $z_1=0$ e $z_2=0$, si ottiene $\dot{z}_1=0$ e $\dot{z}_2=0$). Vogliamo allora verificare, mediante il criterio di Liapunov, che tipo di stabilità si abbia.

Per applicare il suddetto criterio, dobbiamo determinare una opportuna funzione $V(z,t)$: vediamo allora se fa al caso nostro la funzione

$$V(z,t)=z_1^2+\left(1+e^{-2t}\right)z_2^2$$

Si osserva immediatamente che questa funzione si annulla nell'origine, per cui essa può essere definita positiva in tale punto. Per esserlo, dobbiamo trovare una funzione $\alpha:\ \Re^+\longrightarrow\Re^+$, continua e non decrescente, tale da soddisfare le proprietà $0<\alpha(\|z\|)\le V(z,t)$ e $\alpha(0)=0$. Consideriamo allora la funzione

$$\alpha(\|z\|)=\|z\|_{\text{euclidea}}=z_1^2+z_2^2$$

Questa funzione è certamente continua e non decrescente; essa si annulla evidentemente nell'origine e, in un qualsiasi intorno dell'origine, assume solo valori positivi. Inoltre, si osserva evidentemente che

$$V(z,t)=z_1^2+\left(1+e^{-2t}\right)z_2^2\ge\alpha(\|z\|)=z_1^2+z_2^2\qquad\forall t$$

dato che il termine e^{-2t} è sempre maggiore di 0.

Possiamo dunque concludere che la funzione $V(z,t)$ è definita positiva in $\bar{z}=0$. Verifichiamo se si tratta anche di una funzione decrescente: perché questo accada, dobbiamo trovare una funzione $\beta:\ \Re^+ \longrightarrow \Re^+$, continua e non decrescente, tale da soddisfare la condizione $V(z,t)\le\beta\|z\| \quad \forall t$: se consideriamo la funzione

$$\beta(\|z\|) = 2\|z\|_{euclidea} = 2z_1^2 + 2z_2^2$$

si osserva che

$$V(z,t) = z_1^2 + \left(1+e^{-2t}\right)z_2^2 \le \beta(\|z\|) = 2z_1^2 + 2z_2^2 \qquad \forall t$$

dal che deduciamo che $V(z,t)$ è anche decrescente.

A questo punto, non ci resta che verificare eventuali proprietà di segno della funzione $\dot{V}(z,t)$, che andiamo perciò a calcolare:

$$\dot{V}(z,t) = \frac{\partial V}{dz}g + \frac{\partial V}{dt} = \left(\frac{\partial V}{dz_1}g_1 + \frac{\partial V}{dz_2}g_2\right) + \frac{\partial V}{dt} = \left((2z_1)g_1 + \left(2\left(1+e^{-2t}\right)z_2\right)g_2\right) + \left(-2e^{-2t}z_2^2\right) =$$
$$= \left((2z_1)\left(-z_1 - e^{-2t}z_2\right) + \left(2\left(1+e^{-2t}\right)z_2\right)(z_1 - z_2)\right) + \left(-2e^{-2t}z_2^2\right) = \ldots$$
$$= -2z_1^2 - 2e^{-2t}z_1z_2 + 2\left(1+e^{-2t}\right)z_1z_2 - 2\left(1+e^{-2t}\right)z_2^2 - 2e^{-2t}z_2^2 =$$
$$= -2\left[z_1^2 + z_1z_2 + \left(1+2e^{-2t}\right)z_2^2\right]$$

Abbiamo dunque trovato che $\dot{V}(z,t) = -2\left[z_1^2 + z_1z_2 + \left(1+2e^{-2t}\right)z_2^2\right]$. Questa funzione si annulla sicuramente in $\bar{z}=0$. Inoltre, è facile verificare che essa può anche essere scritta nella forma

$$\dot{V}(z,t) = -\left[z_1^2 + z_2^2 + 4e^{-2t}z_2^2 + \left(z_1+z_2\right)^2\right]$$

Questa nuova espressione è utile per capire che questa funzione non assume mai valori positivi: ciò significa, in base alla definizione data in precedenza, che essa è sicuramente semi-definita negativa. Dato che avevamo trovato prima che $V(z,t)$ è una funzione decrescente (oltre che definita positiva in $\bar{z}=0$), possiamo concludere che $\bar{z}=0$ è uno stato di equilibrio uniformemente stabile.

L'ultima cosa che possiamo verificare è se la stabilità sia anche asintotica: sempre in base al criterio di Liapunov, questo accade se la funzione $\dot{V}(z,t)$ è definita negativa.

Usando la definizione fornita in precedenza, la funzione $\dot{V}(z,t)$ è definita negativa se e solo la funzione $-\dot{V}(z,t)$ è definita positiva. Consideriamo allora la funzione

$$-\dot{V}(z,t) = \left[z_1^2 + z_2^2 + 4e^{-2t}z_2^2 + \left(z_1+z_2\right)^2\right]$$

Questa funzione si annulla nell'origine e, inoltre, se consideriamo ancora una volta la funzione $\alpha(\|z\|) = z_1^2 + z_2^2$, osserviamo facilmente che

$$-\dot{V}(z,t) = \left[z_1^2 + z_2^2 + 4e^{-2t}z_2^2 + \left(z_1+z_2\right)^2\right] \ge \alpha(\|z\|) = z_1^2 + z_2^2$$

In conclusione, effettivamente $-\dot{V}(z,t)$ è definita positiva, il che comporta che $\dot{V}(z,t)$ sia definita negativa e quindi che $\bar{z}=0$ sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile oltre che uniformemente stabile.

Esempio: sistema libero del 1° ordine

Consideriamo adesso un sistema libero, del 1° ordine, la cui equazione di stato è

$$\dot{z} = -e^{-t}z$$

Lo stato nullo $\bar{z}=0$ è sempre uno stato di equilibrio e ci chiediamo ancora una volta che tipo di stabilità si abbia in tale stato.

Al fine di applicare il criterio di Liapunov, consideriamo la funzione $V(z,t)=\frac{1}{2}z^2$: si tratta di una funzione costante nel tempo e chiaramente definita positiva in $\bar{z}=0$. Verifichiamo allora eventuali proprietà di segno della funzione $\dot{V}(z,t)$, che andiamo subito a calcolare:

$$\dot{V}(z,t) = \frac{\partial V}{dz}g + \frac{\partial V}{dt} = zg + 0 = z\left(-e^{-t}z\right) = -e^{-t}z^2$$

La funzione $\dot{V}(z,t) = -e^{-t}z^2$ si annulla in $\bar{z}=0$ e assume solo valori negativi, per cui essa è certamente semi-definita negativa, ossia l'equilibrio è stabile. Ci chiediamo se $\dot{V}(z,t)$ è anche definita negativa, cosa che accade se $-\dot{V}(z,t) = e^{-t}z^2$ è definita positiva: dobbiamo trovare una funzione $\alpha:\ \Re^+ \longrightarrow \Re^+$, continua e non decrescente, tale da soddisfare le proprietà $0<\alpha(\|z\|)\le -\dot{V}(z,t)$ e $\alpha(0)=0$. La presenza del termine esponenziale decrescente e^{-t} fa' si che non sia possibile trovare una funzione α che soddisfi la condizione $\alpha(\|z\|)\le -\dot{V}(z,t)$ per $\forall t$, dal che deduciamo che $\dot{V}(z,t)$ non è definita negativa: questo ci impedisce, quindi, di trarre conclusioni circa l'asintotica stabilità dello stato $\bar{z}=0$, per cui possiamo solo affermare che $\bar{z}=0$ è uno stato di equilibrio stabile.

Proviamo allora a seguire un'altra strada: sappiamo, per definizione generale, che l'asintotica stabilità richiede, oltre alla stabilità, anche la condizione di convergenza, per $t\to\infty$, del generico movimento perturbato al movimento nominale. Allora, proviamo a determinare l'espressione del generico movimento perturbato e verifichiamo se tale espressione soddisfa o meno la condizione di convergenza.

Per fare questo, cominciamo intanto a vedere quali caratteristiche ha il sistema che stiamo considerando: dato per scontato che si tratti di un sistema regolare a dimensioni finite, si osserva che il sistema è anche lineare; questo ci consente di dire che l'espressione del generico movimento del sistema è ottenibile mediante la formula di Lagrange:

$$z(t) = \varphi(t,\tau)z(\tau) + \int_\tau^t \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

In particolare, dato che il sistema in esame è un sistema libero, cioè tale che il movimento (di stato) non dipenda dall'ingresso, questa formula si riduce a $z(t)=\varphi(t,\tau)z(\tau)$, dove $\varphi(\tau,t)$ è la matrice di transizione di stato (che in questo caso risulta essere semplicemente una funzione), mentre $z(\tau)$ è lo stato iniziale. Allora, l'ultima equazione scritta rappresenta proprio il generico movimento perturbato nel momento in cui supponiamo che z(τ) sia il generico stato iniziale perturbato. Di conseguenza, il nostro obbiettivo è verificare che sia soddisfatta la condizione di convergenza

$$\lim_{t\to\infty}\left|z_{nom}(t)-z_{pert}(t)\right|=0$$

Nel nostro caso, il movimento nominale $z_{nom}(t)$ è un movimento costante pari a 0, per cui la condizione si riduce evidentemente a $\lim_{t\to\infty} z_{pert}(t)=0$, ossia a

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t,\tau)z(\tau)=0$$

Per controllare se questa condizione è verificata o meno, dobbiamo necessariamente calcolare la funzione di transizione di stato φ(τ,t).

Essendo il sistema lineare, possiamo porlo nella forma $\dot{z}=F(t)z$, dove, ovviamente, abbiamo posto $F(t)=-e^{-t}$. Il fatto che il sistema sia del 1° ordine ci consente di applicare una formula vista in precedenza per il calcolo della funzione di transizione di stato:

$$\varphi(t,\tau)=e^{\int_\tau^t F(\xi)d\xi}$$

Infatti, questa formula vale per sistemi regolari, a dimensioni finite, lineari, per i quali la matrice di funzioni F(t) sia simmetrica: nel nostro caso, essendo il sistema del 1° ordine, F(t) si riduce ad una funzione ed è quindi evidentemente verificata la simmetria.

Facendo i calcoli, abbiamo dunque che

$$\varphi(t,\tau)=e^{\int_\tau^t F(\xi)d\xi}=e^{\int_\tau^t -e^{-\xi}d\xi}=e^{\left[e^{-\xi}\right]_\tau^t}=e^{e^{-t}-e^{-\tau}}$$

E' chiaro, allora, che

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t,\tau)z(\tau)=z(\tau)\lim_{t\to\infty}e^{-e^{-\tau}}=z(\tau)e^{-e^{-\tau}}\neq 0$$

Abbiamo dunque verificato che la condizione di convergenza non è mai verificata, il che ci consente di affermare che lo stato di equilibrio $\bar{z}=0$ non è asintoticamente stabile, ma solo semplicemente stabile.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1