“Teoria dei sistemi” - Capitolo 10

Realizzazioni e rappresentazioni ingresso-uscita

Il problema della realizzazione

INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare e tempo-invariante, descritto (in forma di stato) dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Sappiamo che si definisce “*matrice di trasferimento*” del sistema la matrice

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + L$$

ottenuta come rapporto tra Y(s) (trasformata di Laplace del vettore di uscita) e U(s) (trasformata di Laplace del vettore di ingresso) nell’ipotesi di condizioni iniziali nulle. Da questa relazione si deduce che, fissata la quaterna di matrici (F, G, H, L) che caratterizzano il sistema, la matrice di trasferimento è univocamente determinata. Il problema che ci poniamo, allora, è il seguente: *nota la matrice di trasferimento di un sistema, è unica la quaterna di matrici* (F, G, H, L) *che descrive il sistema stesso?*

In altre parole, ci chiediamo se esiste una corrispondenza biunivoca tra la funzione di trasferimento di un sistema e la quaterna di matrici (F,G,H,L) che descrive il sistema stesso in forma di stato.

La prima osservazione che possiamo fare è quella per cui, *se la matrice di trasferimento W(s) soddisfa la condizione di **“fisica realizzabilità”**, allora è sempre possibile trovare una rappresentazione di stato del sistema, ossia, in definitiva, una quaterna* (F,G,H,L) *che descrive il sistema stesso.*

N.B. Ricordiamo che la condizione di “*fisica realizzabilità*” è che tutte le funzioni razionali che costituiscono la matrice W(s) abbiamo grado del numeratore minore o al più uguale al grado del denominatore, ossia che si tratti di funzioni proprie.

Quindi, la condizione di fisica realizzabilità implica l’esistenza di una quaterna (F,G,H,L) da associare alla matrice W(s). Il nostro problema, come detto, è verificare se c’è anche l’unicità, ossia se tale quaterna è unica in corrispondenza di ciascuna W(s) oppure se ci possono essere diverse quaterne (F,G,H,L) corrispondenti alla stessa W(s).

Possiamo giustificare, in modo essenzialmente qualitativo, il motivo per cui sussiste il seguente risultato

Teorema - *Fissata una matrice di trasferimento W(s) che goda della proprietà di fisica realizzabilità, non è unica la quaterna di matrici* (F,G,H,L) *associabile per la descrizione del sistema*

Questo teorema dice che, in effetti, data una W(s) fisicamente realizzabile, è possibile che ci siano più sistemi aventi tale matrice come matrice di trasferimento. Una prima motivazione di questo fatto è la seguente: abbiamo ampiamente visto, nei capitoli precedenti, che le matrici (F,G,H,L) che descrivono il sistema dipendono strettamente dal riferimento preso per la rappresentazione dello spazio di stato, mentre invece W(s) è sempre indipendente da tale riferimento. Di conseguenza, data W(s), esistono certamente infinite quaterne (F,G,H,L) ad essa corrispondenti.

Inoltre, un altro motivo viene da quello che abbiamo visto a proposito della scomposizione canonica completa di Kalman: in quella sede, infatti, abbiamo osservato come la matrice di trasferimento del sistema dipenda solo dalla parte completamente raggiungibile e completamente osservabile; ciò significa che se noi abbiamo un sistema, avente una certa W(s), e aggiungiamo delle parti che siano completamente non raggiungibili e/o completamente non osservabili, otteniamo un nuovo sistema, che però ha la stessa matrice di trasferimento W(s). Anche se l’aggiunta di nuove componenti aumenta presumibilmente l’ordine del sistema, la W(s) non subisce modifiche.

LE REALIZZAZIONI MINIME

Proprio sulla scorta di quanto appena detto, facciamo adesso il seguente discorso: supponiamo di avere un generico sistema, di ordine n, avente una matrice di trasferimento W(s); supponiamo inoltre di aggiungere al sistema delle parti completamente non raggiungibili e/o completamente non osservabili; come effetto, otteniamo un aumento dell’ordine del sistema, mentre la W(s) rimane invariata. In generale, quindi, possiamo dire che, ad una stessa W(s), possono corrispondere ∞ sistemi: ciò significa che, data appunto la stessa W(s), possiamo associare ad essa ∞ quaterne

(F, G, H, L) con la matrice di stato F che assume dimensioni diverse. Allora, il problema della determinazione della quaterna di matrici (F, G, H, L) corrispondente ad una data W(s) prende il nome di "**problema di realizzazione**".

In base a quanto detto prima, questo problema ammette ∞ soluzioni. Spesso, ci si pone allora il problema di determinare, tra queste infinite realizzazioni, quella che non prevede la presenza di parti completamente non raggiungibili e/o completamente non osservabili: a questa particolare realizzazione si dà il nome di "**realizzazione minima**" del sistema. L'aggettivo "minima" deriva dal fatto che, solo in assenza di parti completamente non raggiungibili e/o completamente non osservabili, non è possibile ridurre ulteriormente l'ordine del sistema: in altre parole, *una realizzazione minima corrisponde ad una quaterna* (F, G, H, L) *in cui la matrice di stato F ha l'ordine più basso possibile tra le infinite realizzazioni possibili.*

Determinazione della realizzazione minima per un sistema SISO

Vediamo allora come è possibile determinare la realizzazione minima di un sistema del quale sia nota solo la matrice di trasferimento. In particolare, facciamo l'ipotesi semplificativa che il sistema abbia m=1 ingresso e p=1 uscita (perciò si tratta di un sistema cosiddetto SISO, ossia *Single Input Single Output*), il che significa che W(s) è semplicemente una "**funzione di trasferimento**".

Intanto, abbiamo detto che, data W(s), è possibile associare ad essa una qualsiasi realizzazione solo a patto che W(s) soddisfi la condizione di fisica realizzabilità: essendo W(s) una funzione scalare, questa condizione consiste nel fatto che il numeratore di W(s) deve avere grado non superiore al denominatore. Tenendo conto di ciò, cominciamo dal caso particolare in cui sia

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Ricavando, da questa, l'ingresso in funzione dell'uscita, otteniamo

$$U(s) = \left(s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n\right) Y(s)$$

Se ora antitrasformiamo secondo Laplace ambo i membri di questa relazione (nell'ipotesi, ovviamente, di condizioni iniziali nulle, perché così è previsto dalla definizione di funzione di trasferimento), otteniamo

$$u(t) = \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y$$

Abbiamo dunque ottenuto la relazione ingresso-uscita nel dominio del tempo a partire da quella nel dominio di Laplace. A questo punto, consideriamo le seguenti n variabili di stato:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = y\\
&x_2 = \frac{dy}{dt}\\
&x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}\\
&\dots\\
&x_{n-1} = \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}\\
&x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}
\end{aligned}
$$

Sulla base di queste posizioni e del legame ingresso-uscita ottenuto prima, possiamo subito individuare le equazioni di stato del sistema:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = x_2\\
&\dot{x}_2 = \frac{d^2y}{dt^2} = x_3\\
&\dot{x}_3 = \frac{d^3y}{dt^3} = x_4\\
&\dots\\
&\dot{x}_{n-1} = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = x_n\\
&\dot{x}_n = \frac{d^ny}{dt^n} = u(t) - a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} - a_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} - \dots - a_{n-1}\frac{dy}{dt} - a_n y = u(t) - a_1x_n - a_2x_{n-1} - \dots - a_{n-1}x_2 - a_nx_1
\end{aligned}
$$

Questa è dunque l’equazione di stato del sistema. In forma matriciale, si tratta della seguente equazione:

$$
\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}}_{G} u
$$

Molto più semplice è l’equazione di uscita, che è semplicemente $y=x_1$ e quindi ha la seguente forma matriciale:

$$
y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{H} x
$$

Se osserviamo questa rappresentazione ottenuta per il sistema, ci accorgiamo subito che si tratta della già introdotta “**forma canonica di controllo**”, caratterizzata da una matrice di stato F in forma compagna e da una matrice di ingresso G avente tutti gli elementi nulli tranne l’ultimo che è unitario. D'altra parte, noi sappiamo che ogni sistema descrivibile nella forma canonica di controllo è un sistema completamente raggiungibile. Possiamo anche affermare che si tratta di un sistema completamente osservabile: infatti, se andiamo a trovare la matrice di osservabilità corrispondente a questa rappresentazione, è facile verificare che si tratta di una matrice di rango pari ad n (che è l'ordine del sistema).

Quindi, il sistema così ottenuto è completamente raggiungibile e completamente osservabile, il che ci dice, in base a quanto detto in precedenza, che la realizzazione trovata è una realizzazione minima.

Tutto ciò vale dunque nel caso in cui la matrice di trasferimento è nella forma

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n}$$

Vediamo se e come cambiano le cose nel caso generale in cui la matrice di trasferimento è nella forma

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+b_2s^{m-2}+\dots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n}$$

Il <u>1° caso</u> che consideriamo è quello in cui $\boxed{m=n}$: se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, possiamo fare la divisione, in modo da ottenere la funzione di trasferimento nella forma

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=L+\frac{r(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n}$$

dove L è una costante, mentre r(s) è il polinomio resto della divisione, ossia un polinomio avente grado sicuramente minore di quello del denominatore. Esplicitando l'uscita in funzione dell'ingresso, otteniamo allora che

$$Y(s)=LU(s)+\frac{r(s)U(s)}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n}$$

Antitrasformando secondo Laplace ambo i membri di questa relazione, otteniamo l'uscita y(t) nella forma

$$y(t)=Lu(t)+\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

Ancora una volta, abbiamo ottenuto il legame ingresso-uscita nel dominio del tempo: a secondo membro, il termine L corrisponde proprio alla "*<u>matrice di trasferimento diretto</u>*" che compare nell'equazione di uscita di un sistema improprio lineare tempo-invariante. L'altro termine, invece, corrisponde alla antitrasformata di Laplace di una frazione avente grado del denominatore strettamente maggiore del grado del numeratore. Siamo, quindi, nel secondo caso, che ci apprestiamo a descrivere.

Il <u>2° caso</u> è dunque quello in cui $\boxed{m<n}$: se il numeratore ha grado strettamente minore del grado del denominatore possiamo intanto porre la funzione di trasferimento nella forma

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Z(s)}{U(s)}\frac{Y(s)}{Z(s)}$$

Se, arbitrariamente, imponiamo che sia

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

dovrà essere necessariamente

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_{m-1} s + b_m$$

Possiamo allora ragionare nel modo seguente: facciamo finta che Z(s) sia l'uscita del sistema, mentre U(s) sia l'ingresso (come effettivamente è); troviamo una realizzazione minima corrispondente alla funzione di trasferimento $\frac{Z(s)}{U(s)}$ e poi "aggiustiamo" questa realizzazione tenendo conto del legame esistente tra Z(s) e l'uscita reale Y(s).

Dobbiamo dunque trovare una realizzazione minima per

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Questo caso è stato affrontato già in precedenza ed abbiamo trovato che si tratta della forma canonica di controllo: possiamo perciò prendere

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \frac{dz}{dt} \\ &\ldots \\ x_{m+1} &= \frac{d^m z}{dt^m} \\ &\ldots \\ x_{n-1} &= \frac{d^{n-2} z}{dt^{n-2}} \\ x_n &= \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

(dove abbiamo tenuto conto del fatto che m<n), in modo da ottenere l'equazione di stato nella forma

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} u$$

Dobbiamo ora tenere conto del legame tra z(t) e y(t) al fine di trovare l'equazione di uscita: nel dominio di Laplace, abbiamo detto che il legame tra y(t) e z(t) è

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_{m-1} s + b_m$$

Antitrasformando, abbiamo che

$$y(t) = b_0 \frac{d^m z}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} z}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-2} z}{dt^{m-2}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dz}{dt} + b_m z$$

In base alle posizioni fatte prima, questa corrisponde anche a

$$y(t) = b_0 x_{m+1} + b_1 x_m + b_2 x_{m-1} + \ldots + b_{m-1} x_2 + b_m x_1$$

Questa è dunque l'equazione di uscita, che in forma matriciale è

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \ldots & b_0 & \underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{\text{n-(m+1) termini nulli}} \end{bmatrix}}_{H} x$$

dove, evidentemente, i termini nulli sono stati aggiunti (in numero pari a n-m-1) in modo che H risulti un vettore colonna ad n componenti.

In definitiva, quindi, abbiamo ottenuto una realizzazione del sistema semplicemente utilizzando i coefficienti del numeratore e del denominatore della funzione di trasferimento assegnata; i particolare, la realizzazione ottenuta pone sistema nella forma canonica di controllo, il che significa che il sistema è completamente raggiungibile. Non è invece detto che il sistema sia completamente osservabile, il che significa che non è detto che la realizzazione così trovata sia minima. Cosa deve accadere affinché il sistema sia anche completamente osservabile? Deve accadere che la W(s) sia costituita da polinomi primi, il che significa che numeratore e denominatore non devono avere zeri in comune. Allora, <u>se ci sono degli zeri in comune tra numeratore e denominatore, bisogna prima eliminarli e poi si può applicare il procedimento appena esaminato: così facendo, si è certi di ottenere una realizzazione minima del sistema</u>.

Esempio

Sia assegnata la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 9s^2 + 22s + 14}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

Vogliamo trovare una realizzazione minima per questa funzione W(s).

La prima cosa che si osserva è che il numeratore ed il denominatore hanno lo stesso grado, per cui possiamo effettuare la divisione: facendo i conti, si ottiene

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=1+\frac{s^2+3s+2}{s^3+8s^2+19s+12}=1+\frac{(s+1)(s+2)}{s^3+8s^2+19s+12}$$

Dobbiamo verificare se gli zeri del numeratore di quella frazione (cioè -1 e -2) sono dei poli per quella stessa frazione (cioè degli zeri del denominatore). Facendo i conti, si trova che -1 è un polo, mentre -2 no. Allora, prima di costruire la realizzazione, dobbiamo semplificare il polo -1: scomponendo il denominatore, si trova che

$$W(s)=1+\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)\left(s^2+7s+12\right)}=1+\frac{s+2}{\left(s^2+7s+12\right)}$$

A questo punto, siamo in grado di costruire la quaterna di matrici di definisce il sistema in forma di stato:

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -12 & -7\end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} \qquad L=1$$

Possiamo anche verificare la bontà dei calcoli effettuati. Per farlo, dobbiamo appurare 3 cose:

- il sistema deve essere completamente raggiungibile (controllabile), cosa che accade se e solo se la matrice di raggiungibilità K risulta di rango 2;
- il sistema deve essere completamente osservabile, cosa che accade se e solo se la matrice di osservabilità K_O risulta di rango 2;
- la funzione di trasferimento del sistema deve essere $W(s)=1+\frac{s+2}{\left(s^2+7s+12\right)}$.

Cominciamo da raggiungibilità e osservabilità:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}G & FG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -7\end{bmatrix}\longrightarrow \rho(\mathbf{K})=2\longrightarrow \text{sistema completamente raggiungibile}$$

$$\mathbf{K_O}=\begin{bmatrix}H\\ HF\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -12 & -5\end{bmatrix}\longrightarrow \rho(\mathbf{K_O})=2\longrightarrow \text{sistema completamente osservabile}$$

Adesso troviamo la funzione di trasferimento del sistema: applicando la definizione, abbiamo che

$$W(s)=H(sI-F)^{-1}G+L=H\begin{bmatrix}s & -1\\ 12 & s+7\end{bmatrix}^{-1}G+1=\frac{1}{s^2+7s+12}H\begin{bmatrix}s+7 & 1\\ -12 & s\end{bmatrix}G+1=$$

$$=\frac{1}{s^2+7s+12}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+7 & 1\\ -12 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+1=\frac{s+2}{s^2+7s+12}+1$$

Abbiamo dunque conferma dei calcoli fatti prima.

Esercizio (Appello di Gennaio 1989 - Es. 2)

Determinare una realizzazione minima in forma canonica di controllo per il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Risoluzione

Si osserva subito che il numeratore ed il denominatore di W(s) hanno lo stesso grado, per cui possiamo effettuare la divisione: facendo i conti, si ottiene

$$W(s) = 1 + \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = 1 + \frac{s+1}{s\left(s^2 + 3s + 2\right)}$$

Dobbiamo verificare se gli zeri del numeratore di quella frazione (cioè -1) sono dei poli per quella stessa frazione (cioè degli zeri del denominatore): gli zeri della funzione $s\left(s^2 + 3s + 2\right)$ sono s=0, s=-1 ed s=-2, il che significa che -1 è un polo, mentre -2 e 0 no. Allora, prima di costruire la realizzazione, dobbiamo semplificare il polo -1: scomponendo il denominatore, abbiamo che

$$W(s) = 1 + \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{1}{s(s+2)} = 1 + \frac{1}{s^2 + 2s}$$

A questo punto, siamo in grado di costruire la quaterna di matrici di definisce il sistema in forma di stato:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = 1$$

Esercizio (Appello di Dicembre 1992 - Es. 5)

Determinare una realizzazione minima per il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{2s^3 + 8s^2 + 12s + 6}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Risoluzione

Si osserva ancora una volta che il numeratore ed il denominatore di W(s) hanno lo stesso grado, per cui possiamo effettuare la divisione: facendo i conti, si ottiene

$$W(s) = 2 + \frac{2s + 2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = 2 + \frac{2(s+1)}{(s+1)\left(s^2 + 3s + 2\right)} = 2 + \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

Avendo già provveduto ad eliminare gli zeri e i poli della frazione, possiamo costruire la quaterna di matrici di definisce il sistema in forma di stato:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = 2$$

Calcolo della relazioni ingresso-uscita

INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un sistema del tutto generico: fissato un istante iniziale τ, uno stato iniziale $x=x(\tau)$ e l'andamento dell'ingresso $u(\bullet) \in \Omega$, sappiamo che il sistema produce un movimento di stato ed un movimento di uscita univocamente determinati, rispettivamente, dalla funzione di transizione di stato $\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))$ e della funzione di uscita $\eta(x(t),u(t),t)$. Possiamo allora affermare che, *fissato un evento* $(x,\tau) \in X \times T$*, è possibile associare, ad ogni coppia* $(t,u(\bullet)) \in T \times \Omega$*, un elemento* $y \in Y$ *mediante una funzione*

$$\begin{aligned} f_{x,\tau} \quad : \quad & T \times \Omega \longrightarrow Y \\ & (t,u(\bullet)) \longrightarrow y(t) = f_{x,\tau}(t,u(\bullet)) \end{aligned}$$

Questa funzione $f_{x,\tau}(t,u(\bullet))$ prende allora il nome di "**relazione ingresso-uscita**" o anche "**rappresentazione ingresso-uscita**" in quanto lega l'uscita del sistema all'ingresso (oltre che alle condizioni iniziali).

SISTEMI TEMPO-CONTINUI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

Per avere una idea migliore di cosa sia una relazione ingresso-uscita, facciamo riferimento al "solito" sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t)x + G(t)u \\ y = H(t)x \end{cases}$$

Sapendo che lo stato del sistema in un istante $t \geq \tau$ è dato dalla formula di Lagrange

$$x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

possiamo scrivere che la corrispondente uscita, all'istante t, vale

$$y(t) = H(t)x(t) = H(t)\varphi(t,\tau)x(\tau) + H(t)\int_{\tau}^{t} \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Se prendiamo $\tau=0$ come istante iniziale e consideriamo lo stato nullo come stato iniziale (cioè consideriamo il sistema "*inizialmente scarico*" o anche "*inizialmente a riposo*"), questa relazione si semplifica e diventa

$$\boxed{y(t) = H(t)\int_{0}^{t} \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi}$$

Questa relazione rappresenta il legame ingresso-uscita, per il sistema in esame, in corrispondenza delle fissate condizioni iniziali. Essendo noto l'andamento dell'ingresso nell'intervallo [0,t] di osservazione, la determinazione univoca del legame ingresso-uscita è dunque possibile solo a patto di conoscere la matrice

$$\boxed{M(t,\xi) = H(t)\varphi(t,\xi)G(\xi)}$$

Questa matrice prende il nome di "**matrice di risposta all'impulso**" e c'è un semplice motivo fisico che giustifica questo nome: supponiamo che il nostro sistema sia sottoposto ad un numero m di ingressi e "risponda" con un numero p di uscite, per cui u è un vettore ad m componenti, mentre y è un vettore a p componenti; supponiamo, inoltre, che lo stato del sistema sia nullo all'istante t_1 e che tutte le componenti dell'ingresso vengano mantenute nulle tranne i-sima, rappresentata invece dall'impulso $d(x - t_1)$. Se vogliamo calcolare il valore del k-sima risposta y_k in un certo istante $t_2 \geq t_1$, sfruttando la relazione trovata prima e tenendo conto che tutti gli ingressi sono nulli tranne l'i-simo, possiamo scrivere che

$$y_k(t_2) = \int_{0}^{t} m_{ik}(t_2,\xi)u_i(\xi)d\xi = \int_{0}^{t} m_{ik}(t_2,\xi)\delta(\xi - t_1)d\xi$$

dove, ovviamente, $m_{ik}(t_2,\xi)$ è l'elemento di posto ik della matrice $M(t_2,\xi)$. Considerando inoltre la nota proprietà di setaccio della funzione δ, possiamo risolvere subito quell'integrale e scrivere che

$$y_k(t_2) = m_{ik}(t_2,t_1)$$

Abbiamo cioè trovato che *l'elemento* $m_{ik}(t_2,t_1)$ *della matrice* $M(t_2,t_1)$ *corrisponde al valore della k-sima uscita del sistema ottenuta in corrispondenza di tutti ingressi nulli tranne l' i-simo che vale* $d(x - t_1)$ *.*

Tornando adesso alla rappresentazione ingresso-uscita $y(t) = H(t)\int_{0}^{t} \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$, supponiamo che il sistema sia anche tempo-invariante: in questo caso, le matrici H e G non dipendono dal tempo e, inoltre, la matrice di transizione di stato è $j(t,x) = e^{F(t-x)}$, per cui quella relazione diventa

$$y(t) = H\int_{0}^{t} e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

Applicando allora un impulso in ξ=0, otteniamo che

$$\boxed{M(t) = He^{Ft}G}$$

e questa è la matrice di risposta all'impulso per un sistema lineare tempo-invariante.

MATRICE DI TRASFERIMENTO E MATRICE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO

E' immediato osservare una cosa molto importante a proposito di quest'ultima definizione: infatti, se calcoliamo la trasformata di Laplace di M(t), otteniamo che

$$\text{Laplace}[M(t)] = \text{Laplace}\left[He^{Ft}G\right] = H\left(\text{Laplace}\left[He^{Ft}\right]\right)G = H(sI - F)^{-1}G = W(s)$$

Abbiamo cioè trovato un'altra proprietà di cui gode la matrice di risposta all'impulso: *la matrice di risposta all'impulso di un sistema lineare tempo-invariante corrisponde all'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento del sistema stesso.*

Ovviamente, avendo in precedenza appurato che solo la parte completamente osservabile e raggiungibile del sistema influisce sulla W(s) e sapendo che esiste una corrispondenza biunivoca tra una funzione e la sua trasformata di Laplace, deduciamo che *solo la parte completamente osservabile e completamente raggiungibile del sistema influisce sulla matrice di risposta all'impulso del sistema stesso.*

Stabilità esterna

INTRODUZIONE

Quando ci siamo occupati della stabilità di un sistema, lo abbiamo fatto con riferimento allo stato del sistema: si parla, in questo caso, di "**stabilità interna**". Viceversa, la "**stabilità esterna**" di un sistema è legata alla stabilità dell'uscita del sistema stesso. In particolare, con riferimento ad un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare tempo-invariante descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

sussiste la seguente definizione:

Def. *Il sistema si dice "**stabile esternamente**" se l'uscita corrispondente a stato nullo risulta limitata per ogni ingresso limitato*

In formule, possiamo esprimerci nel modo seguente: indicata con $y(\bullet)$ l'uscita del sistema in corrispondenza dello stato iniziale nullo (cioè l'uscita libera, visto che stiamo considerando sistemi lineari) e di un ingresso $u(\bullet) \in \Omega$ generico ma limitato (tale cioè che $\|u(t)\| \le A$ per $\forall t > \tau$), il sistema si dice "stabile esternamente" se esiste una costante reale C tale che

$$\|y(t)\| \le C \qquad \forall t \ge \tau$$

Questa definizione necessita di alcuni chiarimenti.

In primo luogo, osserviamo che, *se il sistema ha più di un ingresso e più di una uscita, le condizioni di ingresso limitato e uscita limitata corrispondono a dire che siano limitate le rispettive norme.*

Quindi, ad esempio, la condizione perché l'ingresso sia limitato è che

$$\exists \mu \in \Re^{+} \text{ tale che } \|u(t)\| \le \mu \quad \forall t \ge \tau$$

Discorso analogo, ovviamente, per l'uscita.

E' bene anche sottolineare che la norma impiegata non è importante, nel senso che, in base ad una nota proprietà dei sistemi lineari, la proprietà di stabilità non dipende dalla norma utilizzata.

STABILITÀ ESTERNA E STABILITÀ INTERNA

La definizione di stabilità esterna è interessante anche perché sussiste il seguente fondamentale legame con la stabilità interna:

Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema lineare tempo-invariante (F,G,H) sia stabile esternamente è che risulti asintoticamente stabile la parte completamente raggiungibile e completamente osservabile del sistema stesso*

Si deduce, in base a questo teorema, che *nei sistemi lineari tempo-invarianti (F,G,H) completamente raggiungibili e osservabili, stabilità esterna e stabilità interna (asintotica) sono equivalenti.*

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1